Математический анализ

Лектор д.ф.-м.н. В.В.Чепыжов *

Факультет математики ВШЭ, 2022 г. 2 семестр, 4 модуль

Лекция 12 (8 апреля 2022)

Применение рядов Фурье

§1. Изопериметрическое неравенство

Рассмотрим классическую геометрическую задачу: среди всех замкнутых кривых на плоскости, имеющих длину L, найти кривую, ограничивающую наибольшую площадь.

Теорема 1 *Пусть кривая на плоскости имеет длину длины L и ограничивает область площади S. Тогда выполнено соотношение*

$$4\pi S \leq L^2. \tag{1}$$

Доказательство. Будем предполагать, что рассматриваемая кривая является гладкой, и она задана в параметрическом виде $x = \varphi(s), y = \psi(s)$, где s – натуральный параметр, т. е. s – это длина дуги вдоль кривой на $[0, s]$, а функции $\varphi, \psi \in C^1[0, L]$.

Условие замкнутости кривой: $\varphi(0) = \varphi(L), \psi(0) = \psi(L)$.

Перейдем от параметра s к параметру $t = 2\pi \cdot \frac{s}{L} - \pi$, который меняется от $-\pi$ до π, и будем считать, что кривая задана в параметрическом виде

$$x = x(t), y = y(t), -\pi \leq t \leq \pi,$$

причем $x(-\pi) = x(\pi), y(-\pi) = y(\pi)$.

Уравнения кривой запишем в виде одной комплексной функции:

$$z = z(t), -\pi \leq t \leq \pi,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$, причем $z(-\pi) = z(\pi)$.

Заметим, что $|z'(t)|^2 = |x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, и при такой параметризации

$$|z'(t)|^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}. \tag{2}$$

*Компьютерный набор и верстка Антон Жевнерчук и Тимур Степанов.

Заметим, что

$$\overline{z}z' = (x-iy)(x'+iy') = (xx'+yy') + i(xy'-x'y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)' + i(xy'-x'y).$$

Это соотношение позволяет записать выражение для площади, ограниченной замкнутой кривой $\big(x(t), y(t)\big)$, в комплексном виде:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(xy'-yx')(t)dt = \frac{1}{2i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} z'(t)\overline{z}(t)dt. \qquad (3)$$

Разложим функцию $z(t)$ в ряд Фурье:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \text{ где } c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} z(t)e^{-ikt}dt.$$

Тогда ряд Фурье производной, которая принадлежит $L_2\big([-\pi,\pi],\mathbb{C}\big)$, имеет вид

$$z'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikt}.$$

Равенства (2) и (3) означают, в частности, что

$$\frac{1}{2\pi}\|z'\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|z'(t)|^2\,dt = \frac{L^2}{4\pi^2} \quad \text{(норма в } L_2\big([-\pi,\pi],\mathbb{C}\big)\text{)},$$

$$\frac{1}{2\pi}\langle z', z\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} z'(t)\overline{z}(t)dt = \frac{i}{\pi}S \quad \text{(скалярное произведение в } L_2\big([-\pi,\pi],\mathbb{C}\big)\text{)}.$$

В терминах коэффициентов Фурье эти соотношения принимают вид:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|kc_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|z'(t)|^2\,dt = \frac{L^2}{4\pi^2},$$

$$i\sum_{k=-\infty}^{\infty}k|c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}ikc_k\overline{c_k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} z'(t)\overline{z}(t)dt = \frac{i}{\pi}S \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty}k\,|c_k|^2 = \frac{S}{\pi}.$$

Здесь мы воспользовались равенством Парсеваля для квадрата вектора и для скалярного произведения двух векторов в комплексном евклидовом пространстве.

Следовательно,

$$L^2 - 4\pi S = 4\pi^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(k^2-k)\,|c_k|^2\,.$$

Правая часть этого равенства неотрицательна и обращается в ноль только когда выполнены условия $c_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, 1$.

Итак, доказано неравенство (1), а заодно установлено уравнение кривой, для которой достигается равенство:

$$z(t) = c_0 + c_1 e^{it},\ -\pi \leq t \leq \pi.$$

Это параметрическое уравнение окружности с центром c_0 и радиусом $|c_1|$ ■

Теперь мы займемся применением рядов Фурье для решений некоторых уравнений математической физики, которые являются дифференциальными уравнениями с частными производными.

§2. Решение первой краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности

Обозначим $Q = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l,\ 0 < t \leq T\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с открытой нижней границей.

Задача *Найти функцию* $u(x, t)$, $(x, t) \in Q$, $u \in C(\overline{Q})$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in C(Q)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(Q)$, *которая удовлетворяет уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \forall (x, t) \in Q; \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ x \in [0, l]\ (\varphi \in C[0, l]); \tag{2}$$

и граничному условию

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,\ t \in [0, T]. \tag{3}$$

Приведенная задача является математической моделью физического явления распространения тепла в тонком однородном стержне, концы которого $(x = 0,\ x = l)$ поддерживаются при нулевой температуре. Здесь $u(x, t)$ обозначает температуру в точке стержня $x \in [0, l]$ в момент времени $t \in\ [0, L]$. При этом известно начальное распределение температуры в стержне в момент времени $t = 0$ (функция $\varphi(x),\ x \in [0, l]$). Число a обозначает коэффициент температуропроводности материала стержня.

Рассмотрим метод разделения переменных или метод Фурье решения этой задачи.

Мы не будем сразу указывать условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x)$, а сделаем это позже.

Шаг 1. Разделяются переменные, т. е. мы ищем частные решения уравнения (1) (не равные тождественно нулю) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной независимой переменной:

$$u(x, t) = Y(x) \cdot Z(t). \tag{4}$$

Продифференцируем, подставим в уравнение (1) и получим равенство:

$$Y(x)Z'(t) = a^2 Z(t)Y''(x).$$

Делим на a^2YZ:
$$\frac{Z'(t)}{a^2Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)}.$$
Поскольку левая часть этого равенства не зависит от x, а правая – не зависит от t, то обе они равны какой-то постоянной λ:

$$\frac{Z'(t)}{a^2Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \lambda.$$

Таким образом, функции Z и Y должны удовлетворять уравнениям

$$Y''(x) = \lambda Y(x) \text{ и } Z'(t) = \lambda a^2 Z(t).$$

Решив эти два уравнения и перемножив их решения, получим решение вида (4) для (1).

Шаг 2. Частные решения должны удовлетворять граничному условию (3):

$$Y(0)Z(t) = Y(l)Z(t) = 0 \ \forall t \geq 0 \Rightarrow Y(0) = Y(l) = 0.$$

Следовательно, функция $Y(x)$ должна удовлетворять следующему уравнению и граничным условиям:
$$Y''(x) = \lambda Y(x), \ x \in [0, l], \tag{5}$$
$$Y(0) = Y(l) = 0. \tag{6}$$
Задача (5), (6) называется задачей Штурма-Лиувилля или спектральной задачей. Она состоит в нахождении тех значений λ, для которых существуют нетривиальные решения задачи (5), (6). Такие λ называются собственными значениями, а соответствующие им функции $Y(x)$ – собственными функциями задачи (5), (6).

Если $\lambda > 0$, то общее решение (5) имеет вид:

$$Y(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Условия (6) принимают вид

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}l} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Следовательно, положительные λ не могут быть собственными значениями нашей задачи Штурма-Лиувилля.

Если $\lambda = 0$, то $Y''(x) = 0$, т. е. $Y(x)$ – это линейная функция. Поскольку она равна нулю в двух точках ($Y(0) = Y(l) = 0$), то $Y \equiv 0$.

Итак, только отрицательные λ могут быть собственными значениями рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля.

Пусть $\lambda = -\mu^2$. Тогда общее решение уравнения (5):

$$Y(x) = c_1 \cdot \sin \mu x + c_2 \cdot \cos \mu x.$$

Из условия $Y(0) = 0$ следует, что $c_2 = 0$. Условия $Y(l) = 0$ записывается в виде

$$c_1 \cdot \sin \mu l = 0.$$

Так как $Y(x)$ – нетривиальное решение, $c_1 \neq 0$. Следовательно, $\mu l = k\pi \Rightarrow \mu = \frac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$, и существует счетное множество собственных значений

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2},\ k = 1, 2, \ldots$$

Соответствующие им собственные функции

$$Y_k(x) = \sin \mu_k x,\ \text{где } \mu_k = \frac{k\pi}{l},\ k = 1, 2, \ldots$$

Итак, второй шаг завершается нахождением всех собственных значений и собственных функций задачи (5), (6).

Шаг 3. Требуется решить полученное уравнение для $Z(t)$. Для каждого $\lambda_k = -\mu_k^2$ уравнение имеет вид

$$z'(t) = -a^2\mu_k^2 z(t).$$

Его решения:

$$z_k(t) = c_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}.$$

Мы нашли все решения уравнения (1) вида $Y(x)Z(t)$, которые удовлетворяют граничным условиям (3):

$$u_k(x,t) = c_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t} \sin \mu_k x.$$

Шаг 4. Ищем решение всей задачи (1), (2), (3) в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t} \sin \mu_k x. \tag{7}$$

Из начальных условий при $t = 0$ находим

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \sin \mu_k x,\ \mu_k = \frac{k\pi}{l},\ k = 1, 2, \ldots.$$

Это ряд Фурье функции $\varphi(x)$ по полной ортогональной системе $\{\sin \mu_k x\}$. Значит, коэффициент c_k находится по формуле

$$c_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(s) \sin(\mu_k s) ds. \tag{8}$$

Шаг 5. Теперь нужно обосновать, что ряд (7) сходится. Кроме того, нужно показать, что сходятся и ряды, полученные из него почленным дифференцированием: один раз по t и два раза по x. Наконец, останется показать, что это действительно решения исходной задачи для уравнения теплопроводности.

Лекция 13 (15 апреля 2022)

Однородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x,t), \quad (x,t) \in Q = (0,l) \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in [0,\, l]\,, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t \in [0,\, T]\,. \tag{3}$$

Её формальное решение даётся формулой:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \cdot \sin \mu_k x, \tag{4}$$

где

$$\mu_k = \frac{k\pi}{l}, \quad c_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s \; ds \; \text{ – коэффициент Фурье } \varphi, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Покажем, что при определенных условиях на функцию $\varphi(x)$ ряд (4) представляет собой <u>классическое</u> решение рассматриваемой задачи, т.е. $u(x,t) \in C(\overline{Q})$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(Q)$, и удовлетворяет (1), (2), (3).

Отметим, что необходимым условием существования классического решения является условие согласования: $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Теорема 1 *Пусть функция $\varphi(x)$ является абсолютно непрерывной на $[0,\, l]$, ее производная $\varphi'(x) \in L_2(0,l)$ и выполнено условие согласования $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи (1) (2) (3), представимое рядом (4) с коэффициентами (5). Это решение единственно.*

Доказательство. Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (3), т.к. им удовлетворяют все члены ряда (4). Начальное условие (2) так же выполнено, т.к. при $t = 0$ ряд (4) переходит в тригонометрический ряд Фурье функции $\varphi(x)$, удовлетворяющий условиям разложимости в тригонометрический ряд Фурье на $[0,\, l]$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin(\mu_k x).$$

Осталось доказать, что ряд (4) сходится и функция $u(x,t)$, представимая этим рядом:

1. непрерывна в $\overline{Q}$;

2. имеет в Q непрерывные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

3. удовлетворяет уравнению (1).

Докажем эти утверждения. Оценим общий член ряда (4):

$$\left| c_k e^{-a^2\mu_k t}\sin(\mu_k x)\right| \le |c_k| \quad \forall (x,t)\in \overline{Q}.$$

Если будет доказана сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$, то по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов, ряд (4) будет равномерно сходиться в $\overline{Q}$ и его сумма будет непрерывной функцией. Докажем это. Имеем

$$c_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(s)\sin\mu_k s\; ds = -\frac{2}{l}\cdot\frac{1}{\mu_k}\int\limits_0^l \varphi(s)\cdot d(\cos\mu_k s) =$$

$$= -\frac{2}{l}\cdot\frac{1}{\mu_k}\varphi(s)\cos\mu_k s\Big|_0^l + \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^l \varphi'(s)\cos\mu_k s\; ds = \frac{l}{k\pi}c'_k.$$

Здесь при интегрировании по частям мы учли граничное условие $\varphi(0)=\varphi(l)=0$. Через c'_k обозначили коэффициенты Фурье функции $\varphi'(x)$ по ортогональной системе $\{\cos\mu_k x\}$.

Согласно неравенству Бесселя ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c'_k|^2$ сходится. Воспользуемся неравенством

$$|c_k| = \frac{l}{k\pi}\,|c'_k| \le \frac{l}{2\pi}\left(|c'_k|^2 + \frac{1}{k^2}\right).$$

Из последнего неравенства вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$. Следовательно, функциональный ряд (4) равномерно сходится в $\overline{Q}$, его сумма $u(x,t)$ непрерывная функция, причем

$$u(x,t)\to\varphi(x) \text{ при } t\to 0, \quad u(x,t)\to 0 \text{ при } x\to 0+ \text{ или } x\to l-0.$$

Теперь формально продифференцируем ряд (4) один раз по t и 2 раза по x и получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k^2\cdot c_k\cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}\cdot\sin\mu_k x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k^2\cdot c_k\cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}\cdot\sin\mu_k x.$$

Покажем, что при $t\ge\tau>0$ эти ряды равномерно сходятся.

Поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,\,l]$, то она ограничена:

$$\exists M>0: \quad |\varphi(x)|\le M \quad \forall x\in[0,\,l].$$

Следовательно,

$$|c_k| = \left|\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(s)\sin\mu_k s\; ds\right| \le \frac{2}{l}\int\limits_0^l M\; ds \le 2M.$$

Поэтому при $t \geq \tau > 0$ получим оценку

$$\left|k^2 \cdot c_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t} \cdot \sin\mu_k x\right| \leq 2M \cdot k^2 \cdot e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 \tau}.$$

Исследуем на сходимость числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\alpha k^2}, \text{ где } \alpha = \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \tau.$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, т.к.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \cdot e^{-\alpha(2k+1)} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Тогда по признаку Вейерштрасса ряды, полученные формальным дифференцированием, сходятся равномерно. Следовательно, ряд (4) можно почленно дифференцировать один раз по t и 2 раза по x при $t \geq \tau > 0$, или, в силу произвольности τ, в области Q. При этом суммы полученных равномерно сходящихся рядов $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны в Q. Осталось заметить, что частичная сумма ряда (4) удовлетворяет уравнению (1), т.к. оно линейно, т.е. сумма решений – решение. Следовательно и сама функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1).

Докажем единственность классического решения. Если у задачи есть два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, то их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ также является решением уравнения (1) с нулевым начальным условием:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in Q, \tag{6}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,\, l]\,, \tag{7}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,\, T]\,. \tag{8}$$

Покажем, что $u(x,t) \equiv 0$ в $(x,t) \in Q$.
Рассмотрим коэффициенты Фурье функции $u(x,t)$ при $t > 0$

$$c_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,t) \cdot \sin\mu_k x \; dx.$$

Умножим теперь уравнение (6) на $\sin\mu_k x$ и проинтегрируем по $[0,\, l]$. Слева получим

$$\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \sin\mu_k x \; dx = \frac{d}{dt} \int_0^l u(x,t) \sin\mu_k x \; dx = \frac{l}{2} \cdot c_k'(t).$$

Справа проинтегрируем по частям 2 раза:

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\sin\mu_k x\ dx = \frac{\partial u}{\partial x}\sin\mu_k x\Big|_0^l - \mu_k\int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}(u,t)\cdot\cos\mu_k x\ dx =$$

$$= -\mu_k\cdot\int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\cos\mu_k x\ dx =$$

$$= -\mu_k\cdot u(x,t)\cdot\cos\mu_k x\Big|_0^l + \mu_k^2\cdot\int_0^l u(x,t)\sin\mu_k x\ dx = -\frac{l}{2}\cdot c_k(t)\cdot\mu_k^2.$$

Следовательно, функция $c_k(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dt}c_k(t) = -a^2\mu_k^2 c_k(t) \quad\Rightarrow\quad c_k(t) = c_k(0)e^{-a^2\mu_k^2 t}.$$

Напомним, что, функция $u(x,t)=0$ при $t=0$, следовательно, $c_k(0)=0$. Значит, $c_k(t)\equiv 0$ при всех $t\in[0,T]$. А если у непрерывной функции все коэффициенты Фурье равны нулю, то она тождественно равна нулю. Значит, $u(x,t)=0$ при $(x,t)\in\overline{Q}$. ■

Перепишем решение задачи (4) в следующем виде, заменив коэффициенты c_k их значениями (5):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin\mu_k s\cdot\sin\mu_k x\cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}\ ds.$$

Рассмотрим $t\ge\tau>0$. При этом можно поменять местами интегрирование и суммирование:

$$u(x,t) = \int_0^l\left(\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\mu_k x\cdot\sin\mu_k s\cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}\right)\varphi(s)\ ds,$$

так как в этой части прямоугольника Q

$$e^{-a^2\mu_k t} \le e^{-a^2\mu_k\tau} = e^{-a^2\frac{\pi^2}{l^2}k^2\tau} \le \frac{M_n}{k^n}\quad \forall n\in\mathbb{N}, \tag{9}$$

для некоторого M_n, и, следовательно, ряд

$$\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\mu_k x\cdot\sin\mu_k s\cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}$$

сходится равномерно при $\tau\le t\le T,\quad x,s\in[0,\,l]$.

Сумма этого ряда называется функцией Грина $G(x,s,t)$ уравнения теплопроводности (точнее, первой краевой задачи уравнения теплопроводности).

$$G(x,s,t) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\mu_k x\cdot\sin\mu_k s\cdot e^{-a^2\mu_k^2 t},\quad x\in[0,l],\ s\in[0,l],\ t>0.$$

Так как в любой фиксированной точке прямоугольника Q значение $t > 0$ и, следовательно, справедливы оценки (9), то всюду в этом прямоугольнике функция Грина – бесконечно дифференцируемая функция, которая, (при любом фиксированном s), очевидно, удовлетворяет уравнению (1) при $t > 0$ и граничному условию $G(0, s, t) = G(l, s, t)$.

Таким образом, при указанных в теореме условиях на начальную функцию $\varphi(x)$ решение $u(x, t)$ задачи в Q (т.е., при $t > 0$) является бесконечно дифференцируемой функцией, которая записывается в виде интеграла

$$u(x,t) = \int\limits_0^l G(x,s,t)\varphi(s)\, ds$$

при $t = 0$ имеем $u(x, 0) = \varphi(x)$.

Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in [0,l], \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{11}$$

Теорема 1 *Пусть $f,\ f_x,\ f_{xx} \in C(\bar{Q})$ и функция f удовлетворяет условиям согласования*

$$f(0,t) = f(l,t) = 0, \quad f_{xx}(0,t) = f_{xx}(l,t) = 0.$$

Тогда существует единственное решение $u(x,t) \in C^2(\bar{Q})$ задачи (10), (11).

Доказательство. Разложим функцию $f(x, t)$ в ряд Фурье по переменной x :

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \sin \mu_k x, \quad p_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(s,t)\sin\mu_k s\, ds, \quad \mu_k = \frac{k\pi}{l}.$$

Из условий гладкости и согласования, наложенных на функцию $f(x, t)$ находим, после двукратного интегрирования по частям, следующую оценку для $p_k(t)$:

$$|p_k(t)| \le \frac{M}{k^2},\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Решение уравнения (10) ищем в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \mu_k x. \tag{13}$$

Подставим выражения для $u(x, t)$ и $f(x, t)$ в уравнение (10) и получаем формальное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k'(t)\sin\mu_k x = -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\mu_k^2 \sin\mu_k x + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)\sin\mu_k x.$$

Приравняв коэффициенты при всех $\sin \mu_k x$ и воспользовавшись нулевым начальным условием из (11), получим, что функция $q_k(t)$ является решением следующей задачи Коши для ОДУ:

$$q_k'(t) = -a^2\mu_k^2 q_k(t) + p_k(t), \quad q_k(0) = 0.$$

Эта линейная неоднородная задача легко решается методом вариации постоянной (можно также просто умножить уравнение на $e^{-a^2\mu_k t}$ и проинтегрировать обе части, выделив полную производную). Решение находится по формуле

$$q_k(t) = \int_0^t e^{-a^2\mu_k^2(t-\tau)} p_k(\tau)\; d\tau. \tag{14}$$

Поскольку $p_k(t)$ удовлетворяет оценке (12), то легко видеть, что

$$|q_k(t)| \le \frac{M}{k^2}\int_0^t e^{-a^2\mu_k^2(t-\tau)}\; d\tau \le \frac{M}{k^2 a^2 \mu_k^2} \le \frac{M_1}{k^4}.$$

Из этой оценки следует равномерная сходимость ряда (13) и всех рядов, которые из него получаются почленным дифференцированием 1 раз по t и два раза по x.

Рассмотрим частичные суммы равномерно сходящихся рядов

$$u_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t)\sin \mu_k x,$$

$$f_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\sin \mu_k x,$$

которые, очевидно, удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + f_n(x,t),$$

а также $u_n(x,t)$ удовлетворяют нулевым начальным и граничным условиям. Переходя к пределу в этом уравнении при $n \to \infty$, получаем, что в силу равномерной сходимости рядов и их производных, ряд (13) удовлетворяет уравнению (10) в $\bar{Q}$, а также нулевым начальным и граничным условиям (11). ■

Покажем, что решение неоднородной задачи для уравнения теплопроводности можно выразить с помощью функции Грина $G(x,s,t)$ соответствующей однородной задачи.

Следствие 1 *Для решения $u(x,t)$ задачи (10), (11) справедлива формула*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,s,t-\tau) f(s,\tau)\; ds\; d\tau. \tag{15}$$

Подставим в ряд (13) формулу (14) для коэффициентов $q_k(t)$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-a^2\mu_k^2(t-\tau)}\frac{2}{l}\left[\int_0^l \sin\mu_k s\cdot f(s,\tau)\; ds\right]\; d\tau\right)\sin \mu_k x =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^t \int_0^l \sin\mu_k x \cdot \sin \mu_k s \cdot e^{-a^2\mu_k^2(t-\tau)} f(s,\tau)\; ds\; d\tau.$$

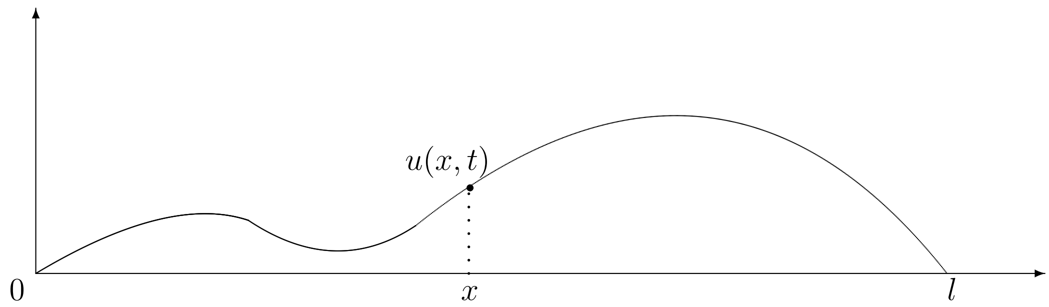
Из оценок для $p_k(t)$ и $q_k(t)$ вытекает, что в последней формуле можно поменять местами суммирование и интегрирование, используя теорему Фубини. Получаем

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \mu_k x \cdot \sin \mu_k s \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 (t-\tau)} \right) f(s,\tau)\ ds\ d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_0^l G(x,s,t-\tau) f(s,\tau)\ ds\ d\tau.$$

Лекция 14 (22 апреля 2022)

§1. Первая краевая задача для уравнения упругих колебаний струны



Предполагается, что струна – это гибкая нить, совершающая колебания в направлении, перпендикулярном оси x. Струна имеет длину l и её концы закреплены в точках 0 и l. Пусть, как и раньше $Q = \{(x,t),\ x \in [0,l],\ t \in (0,T]\}$.

Задача *Требуется найти функцию $u(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, у которой $\exists\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in C(Q)$ и которая удовлетворяет:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in Q, \qquad \underline{\textit{уравнение колебаний струны}} \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in (0,l), \qquad \underline{\textit{начальные условия}} \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \qquad \underline{\textit{граничные условия (закрепленные концы)}} \tag{3}$$

Задача (1), (2), (3) моделирует упругие колебания струны с закрепленными концами. Коэффициент a имеет размерность скорости. Его физический смысл – скорость распространения бегущих волн в струне.

Опишем этапы построения решения $u(x,t)$ задачи (1) – (3).

Шаг 1. Разделение переменных. Ищем частные решения вида: $u(x,t) = y(x) \cdot z(t)$. Подставляем в уравнение: $z''(t) \cdot y(x) = a^2 z(t) \cdot y''(x)$.

$$\frac{z''(t)}{a^2 z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \lambda = const.$$

Шаг 2. Совпадает с шагом 2 метода Фурье решения уравнения теплопроводности. Решается задача Штурма-Лиувилля

$$y''(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(l) = 0. \tag{4}$$

Её решение имеет вид

$$\lambda = -\mu_k^2,\ \mu_k = \frac{k\pi}{l},\ y_k(x) = \sin \mu_k x.$$

Нашли все собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (4).

Шаг 3. Решаем уравнение для второго сомножителя:

$$z''(t) + a^2\mu_k^2 z(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$z_k(t) = C_k \cdot \cos(a\mu_k t) + D_k \cdot \sin(a\mu_k t).$$

Тем самым найдены все решения уравнения (1) вида $y(x)z(t)$. Любая линейная комбинация таких функций $u_k(x,t)$, очевидно, также удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (3). Но такая (конечная) линейная комбинация, может не удовлетворять начальному условию (2) при произвольных гладких функциях φ и ψ.

Шаг 4. Решение задач (1), (2), (3) ищется в виде бесконечного ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t), \qquad \text{где} \tag{5}$$

$$u_k(x,t) = (C_k \cos a\mu_k t + D_k \sin a\mu_k t)\sin \mu_k x. \tag{6}$$

Здесь C_k и D_k – некоторые коэффициенты, которые необходимо определить по начальным данным задачи φ и ψ.

Сначала будем действовать формально, не заботясь о сходимости рядов. Подставим в этот ряд начальные условия при $t = 0$ (для второго условия необходимо взять производную по времени).

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin \mu_k x = \varphi(x), \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a\mu_k D_k \cdot \sin \mu_k x = \psi(x). \tag{8}$$

Эти равенства представляют собой разложение функций φ и ψ в ряд Фурье по ортогональной системе $\{\sin \mu_k x\}$. Поэтому, находим коэффициенты Фурье:

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi \sin \mu_k x \; dx, \tag{9}$$

$$a\mu_k D_k = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x) \sin \mu_k x \; dx, \qquad \text{т.е.}$$

$$D_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(x) \sin \mu_k x \; dx. \tag{10}$$

Итак, мы нашли формулу (5) и (6) для решения задачи (1), (2), (3), в которой коэффициенты C_k и D_k определяются по формулам (9) и (10).

Шаг 5. Обоснование полученных формул.

Теорема 1 *Пусть функция $\varphi(x) \in C^3\,[0,\,l]$, причем выполнены условия согласования*

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \tag{11}$$

а функция $\psi(x) \in C^2\,[0,\,l]$, причем

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{12}$$

Тогда функция $u(x,t)$, заданная рядом (5), в котором коэффициенты C_k и D_k определены в (9) и (10), принадлежит классу $C^2(\bar{Q})$, удовлетворяет уравнению (1), начальным условиям (2) и граничным условиям (3). Такая функция единственная.

Доказательство. (вкратце)

Интегрируем по частям три раза интеграл из формулы (9) с учётом условий (11) на функцию φ:

$$C_k = -\frac{2}{l} \cdot \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \cdot \int\limits_0^l \varphi'''(x) \cos \mu_k x \; dx = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{p_k}{k^3}, \tag{13}$$

где p_k – коэффициент Фурье функции $\varphi'''(x)$ по ортогональной системе $\{\cos \mu_k x\}$.

Аналогично, интегрируем два раза по частям в формуле (10) с учётом условий (12) на ψ:

$$D_k = -\frac{2}{la} \cdot \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \cdot \int\limits_0^l \psi''(x) \sin \mu_k x \; dx = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{q_k}{k^3}, \tag{14}$$

где q_k – коэффициенты Фурье функции $\psi''(x)$ по ортогональной системе $\{\sin \mu_k x\}$.

Поскольку функции φ''' и ψ'' непрерывны на отрезке $[0,\,l]$, то они принадлежат $L_2\,[0,\,l]$ и по неравенству Бесселя сходятся ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 \leq \frac{2}{l} \int\limits_0^l \left[\varphi'''(x)\right]^2 \; dx; \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k^2 \leq \frac{2}{l} \int\limits_0^l \left[\psi''(x)\right]^2 \; dx \tag{15}$$

Подставим (13) и (14) в ряд (5) и получим:

$$u(x,t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(p_k \cdot \sin a\mu_k t + q_k \cdot \cos a\mu_k t\right) \sin \mu_k x. \tag{16}$$

Этот ряд при любом $(x,t) \in \overline{Q}$ мажорируется сходящимся числовым рядом:

$$\frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(|p_k| + |q_k|\right),$$

Поэтому ряд (16) в силу признака Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно в $\overline{Q}$. Следовательно, его сумма непрерывна в $\overline{Q}$.

Теперь покажем возможность двукратного почленного дифференцирования ряда (5) (или, что тоже самое, ряда (16)) по переменным x и t. Для этого покажем, что ряды, полученные из (16) двухразовым дифференцированием сходятся равномерно в $\overline{Q}$. Формально дифференцируем и получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{l}{\pi}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(p_k \cdot \sin(a\mu_k t) + q_k \cdot \cos(a\mu_k t)\right) \sin \mu_k x, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{la^2}{\pi}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(p_k \cdot \sin(a\mu_k t) + q_k \cdot \cos(a\mu_k t)\right) \sin \mu_k x. \tag{18}$$

Оба этих ряда, при любом $(x,t) \in \overline{Q}$, мажорируется рядом:

$$c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(|p_k| + |q_k|).$$

Сходимость последнего ряда следует из очевидных оценок:

$$\frac{1}{k}\,|p_k| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + |p_k|^2\right), \quad \frac{1}{k}\,|q_k| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + |p_k|^2\right).$$

Теперь опять на основании признака Вейерштрасса ряды (17) и (18) абсолютно и равномерно сходятся. Следовательно, функции $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ непрерывны в $\overline{Q}$. Подставляя (17) и (18) в уравнение (1) убеждаемся, что это решение, которое удовлетворяет (2) и (3).

Единственность решения задачи доказывается аналогично единственности решения уравнения теплопроводности исходя из однозначного восстановления непрерывных функций по их коэффициентам Фурье. Основной момент этого доказательства также содержится в доказательстве теоремы 2 в следующем параграфе. ■

Замечание Аналогично методом Фурье можно решать уравнение колебаний струны с другими граничными условиями, например, с так называемыми свободными граничными условиями:

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$$

(вместо нулевых граничных условий (3)) при этом получаются другие решения соответствующей задачи Штурма-Лиувилля и ортогональные системы, по которым раскладываются в ряды Фурье начальные условия задачи.

§2. Решение уравнения вынужденных колебаний упругой струны

Рассматривается следующая

Задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in (0,l), \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{3}$$

Здесь $f(x,t)$ – плотность внешней силы, которая зависит x и t.

Решение задачи (1), (2), (3) будем искать в виде ряды Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \cdot \sin \mu_k x. \tag{4}$$

Здесь, как всегда, $\sin \mu_k x$ – решение задачи Штурма-Лиувилля. Функции

$$p_k(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx$$

являются коэффициентами Фурье искомого решения $u(x,t)$, которые следует определить.

Будем предполагать, что $f(x,t) \in C(\overline{Q})$, причем

$$\exists \, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,t) \in C(\overline{Q}) \quad \text{и} \quad f(0,t) = f(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(l,t) = 0 \tag{5}$$

(условия согласования).

Разложим (известную) функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье по переменной x:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \cdot \sin \mu_k x, \quad \text{где} \quad q_k(x) = \frac{1}{2l} \int\limits_0^l f(x,t) \cdot \sin \mu_k x \, dx. \tag{6}$$

Если правую часть этого равенства проинтегрировать по частям 3 раза и воспользоваться условиями (5), то можно получить, что

$$|q_k| \le \frac{M}{k^3}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

(внеинтегральные члены обратятся в нуль в силу граничных условий, наложенных на функцию $f(x,t)$).

Будем предполагать, что решение $u(x,t) \in C^2(\overline{Q})$. Обе части уравнения (4) умножим на $\sin \mu_k x$ и проинтегрируем по x от 0 до l:

$$\int\limits_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \sin \mu_k x \, dx = a^2 \cdot \int\limits_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \mu_k x \, dx + \frac{l}{2} \cdot q_k(t). \tag{8}$$

Интеграл в левой части допускает перестановку операций дифференцирования и интегрирования, поэтому он равен

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int\limits_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \, dx \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{l}{2} \cdot p_k(t) \right).$$

Интеграл в правой части (8) проинтегрируем по частям 2 раза:

$$\int\limits_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\cdot\sin\mu_k x\ dx = \sin\mu_k x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^l - \int\limits_0^l \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\mu_k\cdot\cos\mu_k x\ dx =$$

$$= -u(x,t)\cdot\cos\mu_k x\Big|_0^l - \int\limits_0^l \mu_k^2\cdot u(x,t)\sin\mu_k x\ dx = -\mu_k^2\cdot\frac{l}{2}p_k(t).$$

Внеинтегральные члены первый раз равны нулю, т.к. $\sin\mu_k x = 0$ при $x = 0, l$. А во второй раз они равны нулю в силу граничных условий (3).

Следовательно, функция $p_k(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2}{dt^2}p_k(t) = -a^2\mu_k^2\cdot p_k(t) + q_k(t). \tag{9}$$

Из условий (2) находим начальные условия:

$$p_k(0) = 0, \quad \frac{d}{dt}p_k(0) = 0. \tag{10}$$

(Отметим, что из уравнений (9) и (10) следует теорема единственности для однородного уравнения колебаний струны, для которого $q_k(t)\equiv 0$, и, если $p_k(0) = 0$, $p_k'(0) = 0$, то $p_k(t)\equiv 0$.)

Решение задачи Коши (8), (10) получается по формуле:

$$p_k(t) = \frac{1}{a\mu_k}\int\limits_0^t \sin\left(a\mu_k\cdot(t-s)\right)q_k(s)\ ds \tag{11}$$

Ее можно проверить прямой подстановкой в уравнение и в начальные условия.

В итоге построено формальное решение задачи (1), (2), (3) в виде ряда (4), в котором коэффициенты $p_k(t)$ вычисляются по формуле (11).

Теорема 2 *При выполнении условий (5) существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (1), (3), (3), $u\in C^2(\overline{Q})$. Это решение записывается в виде ряда (4), где коэффициенты $p_k(t)$ и $q_k(t)$ определяются по формулам (6) и (11).*

Доказательство. По построению функция $u(x,t)$ сумма ряда (4) формально удовлетворяет уравнению, начальным и граничным условиям. Действительно,

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(0)\cdot\sin\mu_k x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k'(0)\cdot\sin\mu_k x = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(p''(t)\sin\mu_k x + a^2\mu_k^2 p_k(t)\sin\mu_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin\mu_k x = f(x,t).$$

Поэтому, доказательство сводится к проверке того, что ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)\cdot\sin\mu_k x$$

и ряды, полученные его однократным и двукратным дифференцированием по t и x, равномерно сходятся в $\overline{Q}$.

Для равномерной сходимости упомянутых рядов достаточно получить оценку их коэффициентов. Напомним, что $\mu_k = \frac{k\pi}{l}$. Поэтому из оценки (7) и из формулы (11) получаем следующие неравенства:

$$|p_k(t)| \le \frac{M_1}{k^4}, \quad |p_k'(t)| \le \frac{M_2}{k^3}, \quad |p_k''(t)| \le \frac{M_2}{k^2},$$

из которых получается равномерная сходимость всех нужных рядов. ■

Лекция 15 (29 апреля 2022)

§1. Задача Штурма–Лиувилля

Рассмотрим более общее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u, \quad x \in [0,l],$$

или уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u, \quad x \in [0,l].$$

Дополним эти уравнения граничными условиями:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Решая это уравнение методом разделения переменных, т.е. ища частные решения вида

$$u(x,t) = Y(x)Z(t)$$

приходим к следующей задаче на <u>собственные значения</u>:

$$\begin{matrix} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda y(x), \\ y(0) = y(l) = 0. \end{matrix} \tag{1}$$

Можно в (1) рассмотреть более общие граничные условия:

$$\alpha y'(0) + \beta y(0) = 0, \quad \gamma y'(l) + \delta y(l) = 0,$$

где

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \quad \gamma^2 + \delta^2 \neq 0.$$

Задача (1) называется <u>задачей Штурма-Лиувилля</u>: Требуется найти все числа $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых существуют ненулевые решения уравнения (1), а также необходимо найти все такие решения.

Обычно предполагается, что

$$p \in C^1[0,l], q \in C[0,l], \quad p(x) \neq 0\ \forall x \in [0,l] \quad \text{(условие “эллиптичности”)}.$$

Для определенности будем считать, что $p(x) > 0$.

С помощью замены независимой переменной $\xi = \int\limits_0^x p(x)^{-1/2}dx$ и неизвестной функции $z = p^{1/2}(x)y$ задача (1) сводится к более простой задаче, в которой $p(x) \equiv 1$. (Проверьте это!) Поэтому, вместо (1) будем изучать задачу:

$$\begin{matrix} -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \\ y(0) = y(l) = 0. \end{matrix} \tag{2}$$

Мы будем считать, что $q(x) \geqslant 0$. Это не является ограничением, так как можно добиться выполнения этого неравенства, прибавив к λ некоторую фиксированную константу. При $q \equiv 0$ мы уже знаем решение задачи (2):

$$y(x) = \sin \mu_n x, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

§2. Свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля

Введем оператор Штурма-Лиувилля

$$L = -\frac{d}{dx^2} + q(x),$$

который является линейным (неограниченным) оператором в пространстве $L_2[0,l]$. Его область определения $\mathcal{D}_L$ состоит из функций $v(x) \in C^2[0,l]$, для которых $v(0) = v(l) = 0$.

Задача Штурма-Лиувилля состоит в нахождении всех собственных значений и собственных функций оператора L :

$$Ly = \lambda y, \quad y \in \mathcal{D}_L.$$

Сформулируем и докажем ряд свойств этого оператора.

Утверждение 1 *Оператор L симметричен, т. е.*

$$(Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{D}_L,$$

где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – обозначает скалярное произведение в $L_2[0,l]$.

Доказательство.

$$(Lv_1, v_2) - (v_1, Lv_2) = \int\limits_0^l (-v_1''v_2 + v_1v_2'')dx =$$

$$= \int\limits_0^l \frac{d}{dx}(-v_1'v_2 + v_1v_2')dx = (-v_1'v_2 + v_1v_2')|_0^l = 0$$

в силу граничных условий. ■

Утверждение 2 *Оператор L положителен и все его собственные значения положительны.*

Доказательство.

$$(Lv, v) = \int\limits_0^l (-v''v + q(x)v^2)dx =$$

$$= \int\limits_0^l ((v'(x))^2 + q(x)v^2(x))dx > 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}_L,\ v \neq 0.$$

Здесь мы применили интегрирование по частям.

Поэтому, если $Lv = \lambda v$, то $\lambda(v,v) = (Lv,v) > 0$ при $v \neq 0$, т.е. $\lambda > 0$. ■

Утверждение 3 *Все собственные функции с разными собственными значениями ортогональны в $L_2[0,l]$.*

Доказательство. Пусть
$$Lv_1 = \lambda_1 v_1, \quad Lv_2 = \lambda_2 v_2.$$
Тогда
$$\lambda_1(v_1, v_2) = (Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2) = \lambda_2(v_1, v_2).$$
Поэтому, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(v_1, v_2) = 0$.
■

Утверждение 4 *Все собственные значения являются однократными, т.е., все собственные подпространства одномерны.*

Доказательство. Действительно, по теореме единственности любое решение ОДУ вида

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0,$$

которое обращаются в нуль при $x = x_0$, должно быть пропорционально (единственному) решению этого уравнения с начальными условиями

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 1.$$

■

Сформулируем и докажем теорему Штурма.

Теорема 1 (Штурм) *Пусть даны два уравнения*

$$-y'' = q_1(x)y, \tag{1}$$
$$-z'' = q_2(x)z, \quad \text{причем } q_1(x) \geqslant q_2(x),\ q_1(x) \not\equiv q_2(x). \tag{2}$$

Пусть их решения $y(x)$ и $z(x)$ определены на отрезке $[a,b]$, причем $z(a) = z(b) = 0$ и $z(x)$ не тождественный ноль. Тогда на интервале (a,b) найдется точка x_0, где $y(x_0) = 0$. (Функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ предполагаются непрерывными на $[a,b]$.)

Доказательство. Можно считать, что a и b – это соседние нули функции z, т.е. $z(x) > 0$ при $x \in (a,b)$. (Нули этой функции не могут сгущаться, т.к. в точке сгущения x^* будем иметь $z(x^*) = 0$ и $z'(x^*) = 0$, но $z(x)$ – это решение обыкновенного дифференциального уравнения (2) второго порядка и по теореме единственности $z(x) \equiv 0$). Тогда $z'(a) > 0$ и $z'(b) < 0$ (опять по теореме единственности!).

Если функция $y(x)$ не обращается в ноль на (a,b), то можно считать, что $y(x) > 0$ на (a,b). Рассмотрим определитель Вронского

$$W(x) = y(x)z'(x) - y'(x)z(x).$$

Дифференцируем его:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}W(x) &= y(x)z''(x) - y''(x)z(x) = \\ &= (q_1(x) - q_2(x))\, y(x)z(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [a,b].\end{aligned}$$

Интегрируем по $[a,b]$ и, поскольку $q_1(x) \not\equiv q_2(x)$, получаем, что

$$W(b) - W(a) = \int_a^b (q_1(x) - q_2(x))\, y(x)z(x)dx > 0.$$

С другой стороны, из сделанных предположений вытекает, что $z(a) = z(b) = 0$ и $y(a) \geqslant 0$, $y(b) \geqslant 0$, а кроме того, $z'(a) > 0$ и $z'(b) < 0$. Следовательно,

$$W(b) - W(a) = y(b)z'(b) - y(a)z'(a) \leqslant 0.$$

Получили противоречие. Следовательно, найдется точка x_0, где $y(x_0) = 0$. ■

Утверждение 5 *Каждое собственное значение λ оператора Штурма-Лиувилля удовлетворяет неравенству ($q(x) \geqslant 0$):*

$$\lambda \geqslant \left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$$

Доказательство. Если $q(x) \equiv 0$, то это очевидно. Пусть $q(x) \not\equiv 0$. Как мы знаем, $\lambda > 0$. Рассмотрим соответствующую собственную функцию оператора Штурма-Лиувилля:

$$-z'' = (\lambda - q(x))z, \quad z(0) = z(l) = 0.$$

Сравним решение этого уравнения с решением $y(x) = \sin\sqrt{\lambda}x$ уравнения

$$-y'' = \lambda y.$$

Применим теорему Штурма, в которой $q_1(x) = \lambda \geqslant \lambda - q(x) = q_2(x)$. Тогда функция $y(x)$ где-то обращается в ноль на интервале $(0,l)$. Но это возможно, только если выполнено неравенство

$$\sqrt{\lambda}l \geqslant \pi \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\lambda} \geqslant \frac{\pi}{l}.$$

■

Займемся теперь исследованием асимптотических свойств собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Обозначим для удобства $\lambda = k^2$. Тогда основное уравнение примет вид

$$-y'' + q(x)y = k^2 y, \quad k > 0. \tag{3}$$

Обозначим $\psi = \psi(x,k)$ – решение уравнения (3) с начальными условиями

$$\psi(0,k) = 0, \quad \psi'(0,k) = k$$

(если $q(x) \equiv 0$, то $\psi(x,k) = \sin kx$).

Следовательно, собственные значения оператора Штурма-Лиувилля имеют вид $\lambda = k^2$, где k такое, что $\psi(l,k) = 0$.

Из теоремы Штурма следует, что количество нулей функции $\psi(x,k) = 0$, лежащих на любом фиксированном отрезке $[0,a]$, где $a \leqslant l$, является <u>неубывающей функцией</u> k. Поэтому с ростом k <u>все нули</u> функции $\psi(x,k)$ сдвигаются <u>влево</u>. Собственные значения соответсвуют тем k, при которых в точке l появляется <u>новый</u> нуль.

Поскольку количество этих нулей конечно при любом k, то собственные значения образуют дискретную последовательность

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,$$

которая, как легко видеть бесконечна. В самом деле, по теореме Штурма, число нулей функции $\psi(x,k)$ на $(0,l)$ не меньше, чем число нулей на $(0,l)$ у соответствующего решения уравнения

$$-y'' + My = k^2 y, \quad \text{где } M = \max_{x\in[0,l]} q(x).$$

Но этим решением является функция $\sin\left(\sqrt{k^2-M}x\right)$ при $k^2 > M$, и число ее нулей на $(0,l)$ неограниченно растет при $k \to +\infty$. Доказана

Теорема 2 *Задача Штурма-Лиувилля имеет бесконечное число решений, все ее собственные значения* λ_n *положительны и* $\lambda_n \to +\infty$ *при* $n \to \infty$. *Собственные функции* $y_n(x)$, *соответствующие* λ_n, *ортогональны. Собственная функция* $y_n(x)$ *имеет ровно* $(n-1)$ *нулей на интервале* $[0,l]$.

Опишем асимптотическое поведение больших собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Это легко сделать с помощью теоремы Штурма. Более точно, собственные значения оператора

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

заключены между собственными значениями операторов

$$L_1 = -\frac{d^2}{dx^2} \quad \text{и} \quad L_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + M,$$

где $M = \max_{x\in[0,l]} q(x)$. Поскольку собственные значения операторов L_1 и L_2 равны, соответственно,

$$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + M, \ n = 1, 2, \ldots,$$

получаем

$$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \leqslant \lambda_n \leqslant \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + M,$$

откуда следует, что

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Можно также показать, что

$$y_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x + O\left(\frac{1}{n}\right), \ n \to \infty.$$

В завершение сформулируем без доказательства теорему о полноте.

Теорема 3 *Собственные функции* $\{y_n(x)\}$ *задачи Штурма-Лиувилля образуют полную ортогональную систему в пространстве* $L_2[0,l]$.

Полностью доказательство этой теоремы, а также о других свойствах задачи Штурма–Лиувилля, можно прочитать в книге М.А.Шубин, “Лекции об уравнениях математической физики”.

Лекция 16 (13 мая 2022)

§1. Интеграл Фурье. Основная теорема

На прошлых лекциях были установлены условия, при выполнении которых периодическая функция может быть разложена в сходящийся ряд Фурье, т. е. представлена в виде суперпозиции гармонических колебаний. Попытаемся сделать что-то аналогичное для непериодических функций. Мы покажем, что похожее представление возможно при определенных условиях, но только не в виде ряда Фурье, а в виде интеграла Фурье.

Сначала приведем некоторые наводящие соображения. Пусть функция f на каждом интервале удовлетворяет условиям, обеспечивающим ее разложимость в ряд Фурье. Иначе говоря, пусть f суммируема на любом конечном интервале и в каждой точке выполнено условие Дини. Рассматривая f, скажем, на отрезке $[-\ell, \ell]$, мы можем написать ее разложение в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos \frac{k\pi}{\ell} x + b_k \sin \frac{k\pi}{\ell} x]. \tag{1}$$

Подставим сюда выражения для коэффициентов a_k и b_k:

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)dt, \;\; a_k = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi}{\ell} t dt, \;\; b_k = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} t dt.$$

Получим:

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi}{\ell} x \cos \frac{k\pi}{\ell} t dt + \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} x \sin \frac{k\pi}{\ell} t dt \right] =$$

$$= \frac{1}{2\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t) \left[\cos \frac{k\pi}{\ell} x \cos \frac{k\pi}{\ell} t + \sin \frac{k\pi}{\ell} x \sin \frac{k\pi}{\ell} t \right] dt.$$

Преобразовывая последнее выражение, получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} (t - x) dt. \tag{2}$$

Дополним предположения о функции f еще одним: пусть эта функция абсолютно интегрируема на всей оси, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < +\infty. \tag{3}$$

Перейдем в равенстве (2) к пределу при $\ell \to \infty$ (пока формально). Тогда в силу (3), первое слагаемое в правой части (2) стремится к нулю. Второе слагаемое можно рассматривать как интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(\lambda_k) \Delta\lambda$$

(распространенную на бесконечный промежуток) для интеграла

$$\int_0^{\infty} F(\lambda)d\lambda \quad \text{от функции} \quad F(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt,$$

если положить $\lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}$, $\Delta\lambda = \frac{\pi}{\ell}$.

Поэтому формально в пределе при $\ell \to \infty$ получим равенство:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \tag{4}$$

Это и есть искомое представление. Введем обозначения:

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t dt, \ b_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t dt.$$

Тогда равенство (4) можно переписать в следующем виде, аналогичном ряду Фурье:

$$f(x) = \int_0^{\infty}(a_\lambda\cos\lambda x + b_\lambda\sin\lambda x)d\lambda. \tag{5}$$

Это равенство называется интегралом Фурье или формулой Фурье. Теперь докажем эту формулу строго.

Теорема 1 *Если функция f абсолютно интегрируема на всей прямой и в точке x удовлетворяет условию Дини, то имеет место равенство:*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^{A} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \tag{6}$$

Хотим проверить, что $\lim_{A\to\infty} J(A)$ существует и равен $f(x)$. Поскольку f абсолютно интегрируема, то внутренний интеграл в (6) сходится, а двойной интеграл сходится абсолютно. Используя теорему Фубини, изменим порядок интегрирования в (6):

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{A} f(t)\cos\lambda(t-x)d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}dt.$$

Сделаем замену переменных $t - x = z$ и приведем этот интеграл к виду:

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+z) \frac{\sin Az}{z} dz. \tag{7}$$

Воспользуемся следующим тождеством:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Az}{z} dz = 1 \ (A > 0) \qquad \text{(интеграл Дирихле)}.$$

(сделав замену $Az = u$, легко проверить, что левая часть не зависит от A). Тогда разность $J(A) - f(x)$ запишем в виде:

$$J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin Az \, dz. \tag{8}$$

Представим это выражение в виде суммы трех слагаемых:

$$J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-N}^{N} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin Az dz + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|z| \geq N} \frac{f(x+z)}{z} \sin Az dz - \frac{f(x)}{\pi} \int\limits_{|z| \geq N} \frac{\sin Az}{z} dz.$$

Второй и третий члены справа представляют собой сходящиеся интегралы, и каждый из них можно сделать меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, если число N достаточно велико. Первое слагаемое справа (при фиксированном N) стремится к нулю, когда $A \to \infty$ (в силу леммы Римана из Лекции 6 и условия Дини). Таким образом, получаем, что

$$\lim_{A \to \infty} (J(A) - f(x)) = 0,$$

что и требовалось ■

§2. Интеграл Фурье в комплексной форме

В интегральной формуле Фурье (4) внутренний интеграл представляет собой четную функцию от λ, что позволяет переписать эту формулу в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (t - x) dt. \tag{9}$$

Далее, из абсолютной интегрируемости f следует, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda (t - x) dt$$

существует и является нечетной функцией λ. Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda(t-x) dt = 0. \tag{10}$$

Этот интеграл следует понимать в смысле главного значения, т. е. как $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N}$.

Прибавим к (9) равенство (10), умноженное на $-i$. Ввиду того, что $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt.$$

Это равенство называется комплексной формулой Фурье (в смысле главного значения).

§3. Преобразование Фурье и формула обращения

Интегральную формулу Фурье можно расчленить на два равенства. Положим

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \tag{1}$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{2}$$

Отметим, что формула (1) имеет смысл для любой абсолютно интегрируемой функции f. Таким образом, каждой функции $f \in L_1(-\infty, \infty)$ мы с помощью формулы (1) сопоставляем определенную функцию $g(\lambda)$, заданную при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Функция $g(\lambda)$ называется преобразованием Фурье исходной функции $f(x)$. Формула (2) выражает функцию f через ее преобразование Фурье. Она называется формулой обращения для преобразования Фурье. Обратим внимание на сходство между формулами (1) и (2). Они отличаются друг от друга только знаком в показателе экспоненты и множителем $\frac{1}{2\pi}$ перед интегралом.

Однако при всем сходстве формул (1) и (2), они, по существу, различны: в первой из них интеграл существует в обычном смысле Лебегу (поскольку $f \in L_1(-\infty, \infty)$), а во второй, вообще говоря, лишь в смысле главного значения. Кроме того, равенство (1) это определение функции g, а равенство (2), представляющее собой иную формулу записи формулы Фурье, содержит утверждение, что стоящий справа интеграл сходится к исходной функции f. Как мы видели выше, для обеспечения этого равенства на f надо наложить, помимо суммируемости, еще дополнительные условия, например, условие Дини.

Лекция 17 (20 мая 2022)

§1. Однозначность преобразования Фурье и примеры

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Мы определили преобразование Фурье функции f:

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt. \tag{1}$$

Помимо этого, мы установили, что при выполнении условия Дини в точке x имеет место формула обращения преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) аналогичны тому, что мы имеем для рядов Фурье. Действительно, коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

определены для всякой $f \in L_1[-\pi, \pi]$, однако сходимость ряда Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

к функции $f(x)$ (играющую здесь роль формулы обращения) можно гарантировать лишь при выполнении определенных условий (например, при условии Дини).

Вместе с тем, для преобразования Фурье имеет место следующее

Утверждение 1 *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и выполнено*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \textit{(преобразование Фурье от } f\textit{)}.$$

Будем дополнительно предполагать, что функция $f(x)$ является кусочно непрерывной на каждом конечном интервале. Тогда $f(x) = 0$ почти всюду.

Доказательство. Из предполагаемого равенства, очевидно, вытекает, что для любых $t, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-i\lambda x}dx = 0.$$

Положим теперь $\varphi(x) = \int\limits_0^{\xi} f(x+t)dt$, где ξ – произвольное фиксированное число. Применяя теорему Дини и используя условия, наложенные на функцию f, легко видеть, что функция φ принадлежит $L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет тому же интегральному условию, что и функция $f(x)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-i\lambda x}dx = 0 \quad \text{(преобразование Фурье от } \varphi)$$

при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. Но, как легко видеть, функция $\varphi(x)$ имеет кусочно непрерывную производную, которая равна $f(x)$ в точках непрерывности x функции f. В частности, эта функция почти всюду удовлетворяет условию Дини. Поэтому, в силу Теоремы 1 из прошлой лекции, имеет место формула обращения, и, следовательно, функция $\varphi(x)$ почти всюду обращается в ноль, т. к. ее преобразование Фурье равно нулю. Кроме того, $\varphi(x)$ непрерывна, так что $\varphi(x) \equiv 0$. Следовательно, при любом $\xi \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{0}^{\xi} f(t)dt = 0.$$

Значит, $f(x) = 0$ почти всюду. ■

Следствие 1 *Преобразование Фурье однозначно определяет функцию f.*

Рассмотрим некоторые примеры преобразования Фурье:

Пример 1 *Пусть $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.*

Найдем преобразование Фурье этой функции:

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-i\lambda x}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}(\cos\lambda x - i\sin\lambda x)dx = \; = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-a}\cos\lambda x dx.$$

После двукратного интегрирования по частям, находим

$$g(\lambda) = \frac{2a}{\lambda^2 + a^2}.$$

Пример 2 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le a, \\ 0 & |x| > a. \end{cases}$

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \int\limits_{-a}^{a} e^{-i\lambda x}dx = \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda} = \frac{2\sin\lambda a}{\lambda}.$$

Пример 3 $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$.

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\frac{dx}{x^2+a^2}.$$

Далее можно вычислять явно, а можно воспользоваться формулой обращения для Примера 1:

$$e^{-a|x|} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{\lambda^2+a^2}e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Поменяем в этой формуле x на $-\lambda$, а λ на x и получим

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}e^{-a|\lambda|}.$$

Пример 4 $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$.

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-i\lambda x}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos\lambda x dx \quad \text{(в силу четности } f(x)\text{)}.$$

Дифференцируем по λ:

$$\frac{d}{d\lambda}g(\lambda) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}x\sin\lambda x dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\lambda x d\left(\frac{e^{-ax^2}}{2a}\right) =$$

$$= \frac{\sin\lambda x\cdot e^{-ax^2}}{2a}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\lambda\cos\lambda x dx = -\frac{\lambda}{2a}g(\lambda) \Rightarrow \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} + \frac{\lambda}{2a}g(\lambda) = 0.$$

Разделим переменные:

$$\frac{d}{d\lambda}\ln g(\lambda) = -\frac{\lambda}{2a} = \frac{d}{d\lambda}\left(-\frac{\lambda^2}{4a}\right).$$

$$g(\lambda) = Ce^{-\lambda^2/4a}.$$

Найдем C подстановкой $\lambda = 0$:

$$C = g(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Последний интеграл называется интегралом Пуассона или интегралов Гаусса. Таким образом,

$$g(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\lambda^2/4a}.$$

Возьмем $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = e^{-x^2/2}$, $g(\lambda) = \sqrt{2\pi}e^{-\lambda^2/2}$. Это собственная функция преобразования Фурье: преобразование Фурье переводит ее в себя (с точностью до множителя).

§2. Основные свойства преобразования Фурье

Преобразование Фурье функции f будем обозначать через $F[f]$. Иначе говоря, F – это линейный оператор, определенный на пространстве $L_1(\mathbb{R})$ и ставящий в соответствие каждой функции этого пространства ее преобразование Фурье (при этом оно, вообще говоря, не принадлежит $L_1(\mathbb{R})$, см. Пример 2).

Утверждение 2 *Если последовательность $f_n \in L_1(\mathbb{R})$ сходится в метрике пространства $L_1(\mathbb{R})$, то последовательность их преобразований Фурье $F[f_n](\lambda)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}_\lambda$.*

Доказательство. Равномерная сходимость $F[f_n]$ вытекает из очевидной оценки

$$|F[f_n](\lambda) - F[f_m](\lambda)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx.$$

■

Утверждение 3 *Преобразование Фурье $g(\lambda) = F[f](\lambda)$ абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ представляет собой ограниченную непрерывную функцию, которая стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$.*

Доказательство. Ограниченность функции $g = F[f]$ сразу следует из оценки

$$|g(\lambda)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx.$$

Далее, если f – характеристическая функция интервала (a, b), то для нее

$$g(\lambda) = \int_a^b e^{-i\lambda x} dx = \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda}.$$

Эта функция, очевидно, непрерывна и стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$. Ввиду того, что оператор F линеен, отсюда вытекает, что преобразование Фурье любой элементарной функции (т. е. линейной комбинации характеристических функций интервалов) также является непрерывной функцией, которая стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$.

Наконец, элементарные функции всюду плотны в $L_1(\mathbb{R})$, поэтому для $f \in L_1(\mathbb{R})$ найдется последовательность $\{f_n\}$ элементарных функций, сходящаяся к f в $L_1(\mathbb{R})$. Тогда, в силу Утверждения 1, последовательность $g_n(\lambda) = F[f_n](\lambda)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}_\lambda$ к функции $g(\lambda) = F[f](\lambda)$. Значит, предельная функция g тоже непрерывна и стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$. ■

Утверждение 4 *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, функция f имеет кусочно непрерывную производную на каждом конечном интервале, и при этом $f' \in L_1(\mathbb{R})$, то имеет место равенство*

$$F[f'] = i\lambda F[f].$$

Иными словами, дифференцированию функции отвечает домножение ее преобразования Фурье на $i\lambda$.

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница, функцию $f(x)$ можно записать в виде:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$

Из абсолютной интегрируемости f' следует, что стоящее здесь справа выражение имеет пределы при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$. Эти пределы могут быть только нулевыми, т. к. иначе $f(x)$ не была бы интегрируемой на $\mathbb{R}$. Учитывая это, получаем с помощью интегрирования по частям:

$$F[f'] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\lambda x}dx = f(x)e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = i\lambda F[f].$$

■

Следствие 2 *Если f такова, что $f^{(k-1)}$ имеет кусочно непрерывную производную на каждом конечном интервале и, при этом $f, f', \ldots, f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$, то*

$$F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k F[f].$$

§3. Связь между степенью гладкости функции и скоростью убывания на бесконечности ее преобразования Фурье

Напомним,что преобразование Фурье $F[f](\lambda)$ стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$. Поэтому из приведенного выше тождества получаем, что

$$|F[f](\lambda)| = \frac{\left|F[f^{(k)}](\lambda)\right|}{|\lambda|^k} \to 0 \ (|\lambda| \to \infty),$$

т.е. $F[f](\lambda)$ убывает на бесконечности быстрее чем $|\lambda|^{-k}$, если известно, что функции $f(x)$ имеет суммируемые производные до порядка k. Значит, чем больше производных имеет функция f, тем быстрее убывает по λ ее преобразование Фурье.

Следствие 3 *Если существуют суммируемые производные f' и f'', то $F[f] \in L_1(\mathbb{R}_\lambda)$.*

Действительно, из указанных условий вытекает, что $F[f](\lambda)$ убывает на бесконечности быстрее, чем $|\lambda|^{-2}$, и, следовательно, является суммирумой функцией.

Выше было показано, что чем больше производных имеет функция f, тем быстрее убывает на бесконечности ее преобразование Фурье. Справедливо также и "двойственное" свойство.

Утверждение 5 *Пусть функции $f(x)$ и $xf(x)$ являются суммируемыми, тогда функция $g(\lambda) = F[f](\lambda)$ дифференцируема при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, причем*

$$g'(\lambda) = F\left[(-ix)f(x)\right](\lambda). \tag{3}$$

Доказательство. Действительно, продифференцируем по λ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx,$$

который определяет функцию $g(\lambda)$, и получим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-ix)f(x)e^{-i\lambda x}dx,$$

который, в силу условия $xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$ сходится равномерно по λ. Следовательно, производная от функции $g(\lambda)$ существует и имеет место равенство (3). ■

Следствие 4 *Пусть $f(x),\ xf(x), \ldots, x^p f(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда функция $g(\lambda) = F[f](\lambda)$ имеет производные до порядка p включительно, причем*

$$g^{(k)}(\lambda) = F\left[(-ix)^k f(x)\right](\lambda),\ k = 0, 1, \ldots, p.$$

Следствие 5 *Если $x^k f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ при всех $k \in \mathbb{N}$, тогда $F[f] \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.*

Справедливо также “двойственное” утверждение.

Следствие 6 *Если $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, и $f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то $|\lambda|^k F[f] \in L_1(\mathbb{R})$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется такое число $C_k > 0$, что*

$$|F[f](\lambda)| \leq \frac{C_k}{1 + |\lambda|^k},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Лекция 18 (27 мая 2022)

Продолжаем изучение преобразование Фурье комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$. Мы определим преобразование Фурье функций из $L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

$$F\left[u\right](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-i\lambda x}\, dx \tag{1}$$

Мы будем также использовать другое обозначение, которое широко применяется:

$$\widetilde{u}\,(\lambda) := F\left[u\right](\lambda)\,.$$

§1 Преобразование Фурье в пространстве Шварца

Рассмотрим более узкий класс функций – пространство Шварца S. Это пространство состоит из бесконечно дифференцируемых функций, которые вместе со своими производными быстро стремится к нулю при $|x| \to \infty$.

Определение 1 *Комплекснозначная функция* $u(x) \in S \Leftrightarrow u(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *и для любых* $k, n \in \mathbb{Z}_+$ $\exists M_{k,n}$*:*

$$\left|\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right| \leq \frac{M_{k,n}}{(1+|x|)^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^1. \tag{2}$$

Примеры функций из пространства Шварца: $\exp\left(-x^2\right)$, $P_m(x)\exp\left(Q_{2l}\right)(x)$, где $P_m(x)$ и $Q_{2l}(x)$ – это полиномы степени m и $2l$, причем старший коэффициент Q_{2l} отрицателен.

Утверждение 1 *Если* $u \in S$, *то* $\frac{d^k u}{dx^k} \in S, \forall k \in \mathbb{Z}_+$. *Если* $P_m(x)$ *– полином степени* m, *то* $P_m(x)u(x) \in S$.

Очевидно, следует из определения. Поскольку $\left|e^{-i\lambda x}\right| = 1$, то интеграл (1) сходится абсолютно и равномерно на $\lambda \in \mathbb{R}$, и его можно дифференцировать по λ любое число раз:

$$\frac{d\widetilde{u}}{d\lambda} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-ix)u(x)e^{-i\lambda x}\, dx, \quad \frac{d^k}{dx^k}\widetilde{u}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-ix)^k u(x)e^{-i\lambda x}\, dx.$$

Эти интегралы равномерно и абсолютно сходятся при $u \in S$.

Обозначим через D оператор однократного дифферецирования по x и по λ:

$$D_x u(x) = \frac{du}{dx}, \quad D_\lambda \widetilde{u}(\lambda) = \frac{d\widetilde{u}}{d\lambda}.$$

Пусть $P(z)$ - полином с комплексными коэффициентами, тогда $P(D)$ - это дифференциальный оператор, т.е.

$$P(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + ... + z_1 \cdot z + a_0, \text{ тогда}$$
$$P(D) = a_n \cdot D^n + a_{n-1} \cdot D^{n-1} + ... + z_1 \cdot D + a_0, \text{ т.е.}$$
$$P(D)u = a_n \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^n u + a_{n-1} \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u + ... + z_1 \cdot \frac{d}{dx}u + a_0 \cdot u$$

При каждом дифференцировании интеграла (1) по λ подынтегральная функция умножается на $(-ix)$. Поэтому для $P(D)$ получаем следующее равенство:

$$P\left(D_\lambda\right)\widetilde{u}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(-ix)u(x)e^{-i\lambda x}\,dx. \tag{3}$$

Используя также обозначение F, получаем

$$P\left(D\right)F\left[u\right] = F\left[P(-ix)u\right], \quad P\left(D_\lambda\right)\widetilde{u} = P_x\widetilde{(-ix)}u. \tag{4}$$

Рассмотрим преобразование Фурье от $\frac{du}{dx}$:

$$F\left[\frac{du}{dx}\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{dx}e^{-i\lambda x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(i\lambda)u(x)e^{-i\lambda x}\,dx = (i\lambda)F\left[u\right].$$

Здесь мы проинтегрировали по частям и воспользовались убыванием функции $u(x)$ к нулю при $|x| \to \infty$.
Следовательно:

$$F\left[P\left(D_x\right)u\right] = P(i\lambda)F\left[u\right], \widetilde{P\left(D\right)}u = P(i\lambda)\widetilde{u} \tag{5}$$

Теорема 1 *Преобразование Фурье переводит функции из класса S в себя.*

Доказательство. Заметим, что функции из класса S принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$, поэтому

$$|\widetilde{u}(\lambda)| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}|u(x)|\;dx \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Из (3) следует, что $\widetilde{u} \in C^\infty\left(\mathbb{R}^1_\lambda\right)$.

Как мы установили, производная функции из класса Шварца также принадлежит этому классу. Значит, в левой части (5) стоит преобразование Фурье функции из S.

Рассмотрим полином $P(z) = (1 + z^{4n})$. Из формулы (5) следует, что

$$\left(1 + \lambda^{4n}\right)\left|F\left[u\right](\lambda)\right| \le \left|F\left[\left(1 + D_x^{4n}\right)u\right](\lambda)\right| \le M.$$

Поэтому, преобразование Фурье от функции $u \in S$ стремится к нулю быстрее любой степени λ.

Из формулы (4) следует, что производная преобразования Фурье является преобразованием Фурье от функции из S, т.е. тоже стремится к нулю быстрее любой степени λ при $|\lambda| \to \infty$. ■

Найдем отображение, обратное к преобразованию Фурье в пространстве Шварца. Наряду с $F[f]$ рассмотрим следующее линейное отображение:

$$G[f](\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\lambda x}dx,$$

которое, как и преобразование Фурье, корректно определено на пространстве суммируемых функций (и, тем более, на пространстве Шварца). Легко видеть, что

$$G[f](\lambda) = \frac{1}{2\pi} F[f](-\lambda),$$

Преобразование $G[f]$ обладает всеми теми же свойствами, что и преобразование Фурье. Кроме того, из формулы обращения для преобразования Фурье следует следующая теорема, которую мы уже доказывали для более широкого чем S класса функций.

Теорема 2 *(Об обращении преобразования Фурье) Если $u \in S$, то $G \circ F[u] = u$, т.е. $G = F^{-1}$ на S. Подробнее, если $u(x) \in S$, $\widetilde{u}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\lambda x}\, dx$, тогда*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{6}$$

Доказательство. Действительно, если $u \in S$, то функция u удовлетворяет условию Дини, причем интеграл справа в (6) сходится абсолютно и равномерно по $x \in \mathbb{R}^1$. Поэтому применима формула обращения преобразования Фурье. ■

§2 Преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$

Преобразование Фурье легко обобщается на функции нескольких переменных. Пусть $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функция, интегрируемая по всему n-мерному пространству $\mathbb{R}^n$. Её преобразованием Фурье называется функция

$$\widetilde{u}(\lambda) = \widetilde{u}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot e^{-i(\lambda, x)}\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot e^{-i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n)}\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

(Здесь (λ, x) обозначает скалярное произведение векторов λ и x.) Этот n-кратный интеграл существует, поскольку функция $u(x_1, ..., x_n)$ интегрируема по Лебегу. Его можно записать в виде следующего повторного интеграла (здесь применяется теорема Фубини):

$$\widetilde{u}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, ..., x_n) e^{-ix_1\lambda_1}\, dx_1 \right\} e^{-ix_2\lambda_2}\, dx_2 \dots \right\} e^{-ix_n\lambda_n}\, dx_n. \tag{7}$$

Иначе говоря, можно перейти от функции n-переменных к её преобразованию Фурье, последовательно выполняя преобразования по каждой из переменных в отдельности (в любом порядке). Обращая последовательно каждую из n операций в правой части (7), получим формулу:

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{u}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)e^{ix_n\lambda_n}\ d\lambda_n\right\}e^{ix_{n-1}\lambda_{n-1}}\ d\lambda_{n-1}\ldots\right\}e^{ix_1\lambda_1}\ d\lambda_1.$$

Которую можно переписать в виде:

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{u}(\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n)e^{i(x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+...+x_n\lambda_n)}\ d\lambda_1 d\lambda_2\ldots d\lambda_n=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widetilde{u}(\lambda)e^{i\langle x,\lambda\rangle}\ d\lambda. \tag{8}$$

Однако, функция $\widetilde{u}(\lambda)$ не обязана быть интегрируемой по всему $\mathbb{R}^n$. Поэтому необходимо указать, в каком смысле понимается этот интеграл и условия на функцию $f(x_1,...,x_n)$.

Теорема 3 *Пусть функция $f(x),\ x\in\mathbb{R}^n$, интегрируема по $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет в точке x условию Дини: существует такое число $\delta>0$, что функция $\frac{f(x+z)-f(x)}{|z|}$ интегрируема по z в шаре $|z|\le\delta$, т.е.*

$$\int_{|z|}\frac{|f(x+z)-f(x)|}{|z|}dz<\infty,$$

Тогда формула обращения (8) справедлива и её надо понимать в смысле главного значения этого интеграла:

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{\substack{N_1\to\infty\\ N_2\to\infty\\ \cdots\\ N_n\to\infty}}\int\limits_{-N_1}^{N_1}\int\limits_{-N_2}^{N_2}\ldots\int\limits_{-N_n}^{N_n}\widetilde{u}(\lambda)e^{i(\lambda,x)}\ d\lambda_1 d\lambda_1\ldots d\lambda_n. \tag{9}$$

Для доказательства применяется теорема Фубини и теорема 1 из Лекции 15.

Аналогично пространству Шварца S в $\mathbb{R}^1$ вводится пространство Шварца в $\mathbb{R}^n$, которое обозначается $S\left(\mathbb{R}^n\right)$. Это пространство состоит из функций $u\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}\right)$, у которых все их частные производные $\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$ $(|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n,\ \alpha_i\in\mathbb{Z}_+)$ стремятся к нулю при $|x|\to\infty$ быстрее любой степени $|x|$:

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|\le\frac{C_{\alpha,k}}{1+|x|^k},\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Следствие 7 *Если $u\in S\left(\mathbb{R}^n\right)$, то $\widetilde{u}\in S\left(\mathbb{R}^n_\lambda\right)$, $\widetilde{u}(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}u(x)e^{-i(x,\lambda)}\ dx$, при этом*

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_\lambda}\widetilde{u}(\lambda)e^{i(x,\lambda)}\ d\lambda,$$

и этот интеграл сходится абсолютно и равномерно в $\mathbb{R}^n_\lambda$.

Лекция 19 (3 июня 2022)

Применение преобразования Фурье

Преобразование Фурье, как и ряд Фурье, помогает получать решения для многих уравнений с частными производными. Основой применения служит то обстоятельство, что оператор дифференцирования переходит после преобразования Фурье в более простой оператор умножения на независимую переменную.

§1 Решение уравнения теплопроводности на всей оси

Мы будем решать следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{2}$$

Ищем решение $u = u(x,t)$, гладкости C^2. Начнём с наводящих соображений. Найдем сперва частные решения методом разделения переменных. Ищем ограниченное решение в виде:

$$u(x,t) = T(t) \cdot X(x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Подставляем в уравнение (1) и, разделяя переменные, находим уравнения:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2,$$

где μ^2 – некоторая константа. Как мы видели раньше, случай $+\mu^2$ не годится, т.к. приводит к неограниченным решениям уравнения для x. Получаем уравнения:

$$T'(t) + a^2\mu^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \mu^2 X(x) = 0.$$

Решаем первое уравнение: $T(t) = C \cdot e^{-a^2\mu^2 t}$. А решение второго уравнения запишем в виде:

$$X(x) = A(\mu) \cdot e^{i\mu x} \ \text{(годится любое вещественное число } \mu).$$

Получаем ограниченное частное решение (1) в виде:

$$u_\mu(x,t) = A(\mu) \cdot e^{-a^2\mu^2 t + i\mu x}.$$

Здесь $\mu \in \mathbb{R}$. Мы можем складывать также решения с разными μ и $A(\mu)$. Более того, можно также интегрировать по параметру μ. При этом будут снова получаться решения уравнения (1):

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\mu) e^{-a^2\mu^2 t + i\mu x} \, d\mu.$$

Эти решения зависят только от функции $A(\mu)$. Какие $A(\mu)$ выбрать? Необходимо соблюдать начальное условие при $t = 0$, т.е.

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\mu) \cdot e^{i\mu x} \, d\mu.$$

Применяем преобразование Фурье:

$$A(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\mu x} \, dx \quad (\lambda = \mu)$$

Получим формально формулу для решения задачи (1), (2). Теперь сделаем это более строго и выпишем более простую формулу для решения.

Будем предполагать сначала, что $u(x, t) \in C^{\infty}$, и более того, при каждом t функция $u(x, t) \in S$ (пространство Шварца) равномерна по t на каждом отрезке $[0, T]$ (это означает, что константа $M_{k,n}$ в формуле оценки

$$\left| \frac{d^k u}{dx^k} \right| \leq M_{k,n} \cdot (1 + |x|)^{-n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$$

не зависит от $t \in [0, T]$ (но может зависеть от T)). Сделаем преобразование Фурье обеих частей уравнения (1). Получим следующие выражения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \, dx = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} u(x, t) \, dx = \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{u}(\lambda, t)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\lambda x} \, dx = (i\lambda)^2 \cdot \widetilde{u}(\lambda, t) = -\lambda^2 \widetilde{u}(\lambda, t).$$

Получаем следующие ОДУ, в котором число λ служит фиксированным параметром:

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(\lambda, t) = -\lambda^2 a^2 \widetilde{u}(\lambda, t).$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\widetilde{u}(\lambda, t) = \widetilde{u}(\lambda, 0) \cdot e^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

Теперь воспользуемся формулой обращения преобразования Фурье:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \, \widetilde{u}(\lambda, t) \, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - a^2 \lambda^2 t} \, \widetilde{u}(\lambda, 0) \, d\lambda.$$

Напомним, что

$$\widetilde{u}(\lambda, 0) = \widetilde{\varphi}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\ \varphi(x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x - a^2\lambda^2 t^2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-i\lambda y}\ dy\right]\ d\lambda =$$

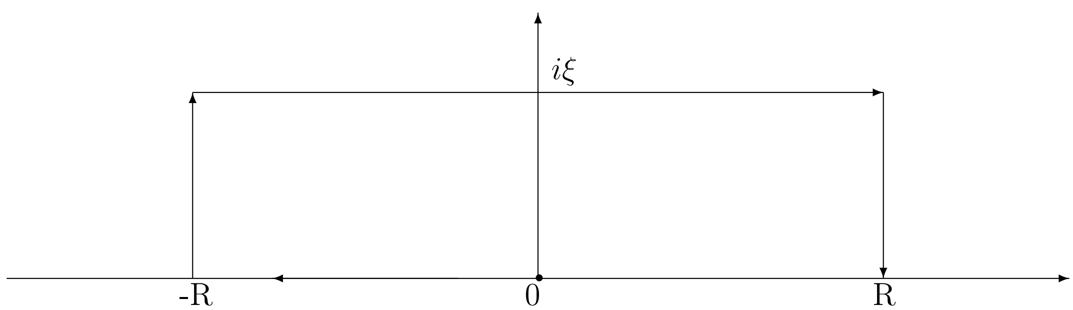
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-y)}\ d\lambda\ dy.$$

Замена порядка интегрирования законна, т.к. функция $\varphi \in S$, а пространство S состоит из быстро убывающих функций. Вычислим второй интеграл явно:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-y)}\ dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t\left(\lambda - i\frac{x-y}{2a^2 t}\right)^2 - \frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\ d\lambda = e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t z^2}\ dz =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}$$

Мы делали замену $\lambda - i\frac{x-y}{2a^2 t} = z$ и воспользовались теоремой из ТФКП, об интеграле по замкнутому контуру.



Здесь $\xi = \frac{x-y}{2a^2 t}$. Подынтегральная функция голоморфна на плоскости, интегралы по отрезкам $z = [R,\ R + i\xi]$ и $[-R,\ -R + i\xi]$ стремятся к нулю при $R \to \infty$. Потом сделали замену $a\sqrt{t}z = s$ и воспользовались интегралом Пуассона: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\ ds = \sqrt{\pi}$.

Мы получили формулу Пуассона для решения задачи (1)-(2):

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\varphi(y)\ dy, \quad \text{где } G(x,y,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}. \tag{3}$$

Формула (3) получена при очень жестких условиях на функцию $\varphi(x)$ и решение $u(x,t)$, а именно принадлежность этих функций пространству Шварца. Однако, как легко видеть, эта формула имеет смысл для значительно более широкого класса функций φ. Это позволяет решить задачу Коши (1), (2) лишь при условии, что начальная функция непрерывна и ограничена.

§2 Теорема существования решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

Напомним, что решением задачи Коши (1)-(2) называется функция $u(x,t)$, у которой $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t), \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \in C\,(x \in \mathbb{R}, t > 0)$ и $u \in C\,(x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$, причем $u(x,0) = \varphi(x), \;\; x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1 *Пусть $\varphi(x)$ – ограниченная непрерывная функция при $x \in \mathbb{R}$. Тогда функция, определенная формулой (3), бесконечно дифференцируема по x и по t при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$, удовлетворяет уравнению (1) при $t > 0$ и начальному условию (2) при $t = 0$.*

Доказательство. Для любой точки $(x_0, t_0), x_0 \in \mathbb{R}, t_0 > 0$, найдется её окрестность, где $t \geq \gamma > 0$ и $|x| < m$. Для точек (x,t) из этой окрестности интеграл (3) сходится абсолютно и равномерно. Более того, его можно дифференцировать под знаком интеграла любое число раз по x и t.

Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что функция $G(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению (1). Действительно:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{2t}G + \frac{(x-y)^2}{4a^2t^2}G, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{x-y}{2a^2t}G$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{1}{2a^2t}G + \frac{(x-y)^2}{4a^4t^2}G, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

Следовательно, функция (3) так же удовлетворяет этому уравнению. Отметим, что $G(x,y,t) > 0$ и выполнено тождество:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\; dy = 1 \quad \text{(Проверяется непосредственно заменой).} \tag{4}$$

Осталось проверить, что функция (3) удовлетворяет начальному условию (2). Покажем, что $u(x,t)$ непрерывна при $t = 0$ и $u(x,t) - \varphi(z) \to 0$ при $x \to z,\; t \to 0+$. Рассмотрим разность:

$$u(x,t) - \varphi(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\varphi(y)\; dy - \varphi(z)\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\; dy =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\,[\varphi(y) - \varphi(z)]\;\; dy.$$

Пусть $|\varphi(x)| \leq M$ (по условию). Оценим

$$|u(x,t) - \varphi(z)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\,[\varphi(y) - \varphi(z)]\;\; dy\right| \leq \left|\int\limits_{|y-z|<\delta} G(x,y,t)\,[\varphi(y) - \varphi(z)]\;\; dy\right| +$$
$$+ \left|\int\limits_{|y-z|\geq\delta} G(x,y,t)\,[\varphi(y) - \varphi(z)]\;\; dy\right|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что $|\varphi(y) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|y - z| < \delta$ (напомним, что функция φ непрерывна в точке z). Воспользуемся в первом слагаемом положительностью функции G и равенством (4). Тогда:

$$|u(x,t) - \varphi(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_{|y-z|\geq\delta} 2M \cdot G(x,y,t)\ dy.$$

Оценим последний интеграл. Если $|x - z| < \frac{\delta}{2}$ и $|y - z| \geq \delta$, то $|y - x| \geq \frac{\delta}{2}$. Следовательно,

$$\int\limits_{|y-z|\geq\delta} 2M \cdot G(x,y,t)\ dy \leq 2M \int\limits_{|y-x|\geq\delta/2} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)\ dy =$$
$$= \frac{2M}{a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{4a^2t}\right)\ ds = M_1 \int\limits_{\frac{\delta}{4a\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(-\sigma^2)\ d\sigma.$$

Мы сделали сначала замену переменной $x - y = s$, а в конце еще замену $\frac{s}{2a\sqrt{t}} = \sigma$. Последнее выражение с интегралом можно сделать меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$ при всех $t < \mu$, если выбрать число μ достаточно малым. Следовательно,

$$|u(x,t) - \varphi(z)| \leq \varepsilon \quad \text{если } |x - z| < \frac{\delta}{2} \text{ и } t < \mu.$$

Значит, функция $u(x,t)$ непрерывна в точке $(z, 0)$ и $u(z, 0) = \varphi(z)$.

■

§3. Решение уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$

Мы построили решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^1$ при помощи преобразования Фурье. Аналогично строится решение этой задачи в многомерном случае, когда $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R}^n, \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ – оператор Лапласа.

Применяя n-мерное преобразование Фурье к обеим частям уравнения (5) получаем:

$$\frac{\partial \tilde{u}(\lambda,t)}{\partial t} = -(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2) a^2 \tilde{u}(\lambda, t).$$

Откуда

$$\tilde{u}(\lambda,t) = \tilde{u}(\lambda, 0) \cdot e^{-|\lambda|^2 a^2 t},$$

где $\tilde{u}(\lambda,0)=\tilde{\varphi}(\lambda)$ – преобразование Фурье $\varphi(x)$. Применим n-мерную формулу обращения преобразования Фурье:

$$u(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\lambda,x\rangle}\tilde{u}(\lambda,t)d\lambda=\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\lambda,x\rangle-a^2|\lambda|^2t}\tilde{\varphi}(\lambda)d\lambda=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\lambda,x\rangle-a^2|\lambda|^2t}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\cdot e^{-i\langle\lambda,y\rangle}dy\right]d\lambda=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\lambda,x-y\rangle-a^2|\lambda|^2t}d\lambda\right]dy.$$

По теореме Фубини можно менять порядок интегрирования, так как $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$. Получаем формулу:

$$u(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\cdot G(x-y,t)dy, \tag{6}$$

где

$$G(x-y,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\lambda,x-y\rangle-a^2|\lambda|^2t}d\lambda= \quad [\text{переменные разделяются}]$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_k(x_k-y_k)-a^2\lambda_k^2t}d\lambda_k= \quad [\text{случай } n=1 \text{ из предыдущего параграфа}]$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{|x_k-y_k|^2}{4a^2t}}=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}.$$

Формула (6) называется формулой Пуассона в $\mathbb{R}^n$. Как и в одномерном случае, легко убедиться в том, что формула (6) задает решение задачи (5), если известно, что $\varphi(x)\in C(\mathbb{R}^n)$ и $|\varphi(x)|\leq M$: это проверяется непосредственно дифференцированием, а начальные условия – как в одномерном случае.

Лекция 20 (10 июня 2022)

§1. Решение уравнения колебаний бесконечной струны с помощью преобразования Фурье

Теперь построим решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Предположим, что $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^1)$ и $u(x,t) \in S(\mathbb{R}^1)$ равномерно по $t \in [0,T]$, причем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0$. Выполним преобразование Фурье обеих частей уравнения (1):

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(\lambda,t)}{\partial t^2} = -a^2\lambda^2 \tilde{u}(\lambda,t), \tag{3}$$

где

$$\tilde{u}(\lambda,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\langle x,\lambda\rangle} dx.$$

Общее решения (3) запишем в виде:

$$\tilde{u}(\lambda,t) = A(\lambda)\cos a\lambda t + B(\lambda)\sin a\lambda t. \tag{4}$$

Начальные условия:

$$\tilde{u}(\lambda,0) = \tilde{\varphi}(\lambda),\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\lambda,0) = \tilde{\psi}(\lambda).$$

Значит,

$$A(\lambda) = \tilde{\varphi}(\lambda),\ B(\lambda) = \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{a\lambda}.$$

Покажем, что $B(\lambda) \in S(\mathbb{R})$. Для этого установим следующее утверждение:

Утверждение 1 *Пусть $z(\lambda)$ – некая функция. Тогда*

$$\frac{z(\lambda)}{\lambda} \in S(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} z(\lambda) \in S(\mathbb{R}), \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Если функция $z(\lambda)$ является аналитической в точке $\lambda = 0$, то это очевидно. Слушателям предлагается убедиться в том, что это так и в случае, когда функция $z(\lambda)$ не является аналитической (такие функции имеются в пространстве S и их, в некотором смысле, подавляющее большинство). ■

Ввиду наложенных на ψ ограничений, функция $\tilde{\psi}$ удовлетворяет условиям этого утверждения. Действительно,

$$\tilde{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0,$$

поэтому $B(\lambda) \in S(\mathbb{R})$.

Подставим в (4) выражения для $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Получим:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda)\cos a\lambda t + \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{a\lambda}\sin a\lambda t.$$

Воспользуемся формулами Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Подставив в выражение для $\tilde{u}$, получаем:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = F(\lambda)e^{ia\lambda t} + G(\lambda)e^{-ia\lambda t}, \tag{5}$$

где

$$F(\lambda) = \frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{2} + \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{2a\lambda i},\ G(\lambda) = \frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{2} - \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{2a\lambda i}.$$

Заметим, что $F, G \in S(\mathbb{R})$ (как линейные комбинации функций A и B из $S(\mathbb{R})$). Тогда F и G – преобразования Фурье некоторых функций $f \in S(\mathbb{R})$ и $g \in S(\mathbb{R})$, причем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Следовательно,

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{f}(\lambda)e^{ia\lambda t} + \tilde{g}(\lambda)e^{-ia\lambda t}.$$

Покажем, что в правой части этого равенства стоит преобразование Фурье функции $f(x + at) + g(x - at)$. Действительно, для любого $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{f(x+\tau)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+\tau)e^{-i\lambda x}dx = e^{i\lambda\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+\tau)e^{-i\lambda(x+\tau)}dx =$$

$$= e^{i\lambda\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\lambda y}dy = e^{i\lambda\tau}\tilde{f}(\lambda).$$

Следовательно,

$$\widetilde{f(x+at)} = e^{i\lambda at}\tilde{f}(\lambda), \quad \widetilde{g(x-at)} = e^{-i\lambda at}\tilde{g}(\lambda).$$

Поэтому,

$$\tilde{u}(x, t) = \widetilde{f(x+at) + g(x-at)}.$$

Значит,

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at). \tag{6}$$

Найдем выражения функций f и g через начальные функции φ и ψ. Воспользуемся начальными условиями при $t = 0$:

$$f(x) + g(x) = \varphi(x),$$

$$f'(x) - g'(x) = \frac{\psi(x)}{a}.$$

Проинтегрируем последнее равенство:

$$f(x) - g(x) = C + \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(y)dy.$$

С учетом первого равенства получаем:

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x) + C + \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(y)dy\Big),$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x) - C - \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(y)dy\Big).$$

Мы нашли f и g. Они определены с точностью до прибавления константы. Найдем вид решения:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\cdot\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy. \tag{7}$$

Эта формула называется формулой Даламбера. Впервые ее вывел Эйлер, но без использования преобразования Фурье, которое появилось позже. А Даламбер, на самом деле, нашел формулу (6) для любого решения уравнения (1). Точнее, им была доказана следующая

Теорема 2 (Даламбер) *Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{R}^2$ и функция $u(x,t) \in C^2(D)$, $(x,t) \in D$, является решением уравнения (1) в области D. Тогда найдутся такие две функции $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, что $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$.*

Теорема Даламбера говорит о том, что решение уравнения струны есть сумма двух бегущих волн. Волна $f(x+at)$ бежит влево со скоростью a, а волна $g(x-at)$ бежит вправо со скоростью a.

Мы вывели формулу (7) для решения задачи Коши (1), (2) при довольно жестких ограничениях на φ и ψ. Однако, как несложно видеть, выполнена следующая теорема, которая легко доказывается подстановкой в уравнение.

Теорема 3 (формула Даламбера) *Пусть $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда формула (7) задает функцию $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, которая является решением задачи Коши (1), (2).*

§2. Понятие обобщенной функции

Обобщенные функции возникли при необходимости придать смысл понятию производной негладкой, например, разрывной функции.

Пространство основных (пробных) функций

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, например, $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Определение 1 *Пространство основных функций $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x), x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, которые имеют компактный носитель* $\operatorname{supp}\{\varphi\}$, *принадлежащий Ω, т.е.*

$$\operatorname{supp}\{\varphi\} = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}} \Subset \Omega$$

(черта сверху обозначает замыкание множества в $\mathbb{R}^n$).

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ – мультииндекс, т.е., $\alpha_k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Будем обозначать порядок мультиндекса

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Определение 2 *Частная производная по $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ порядка $|\alpha|$ по переменной x от функции $\varphi(x)$ обозначается*

$$\partial_x^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Если $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ функция $\partial_x^\alpha \varphi \in C(\Omega)$, причем носитель $\operatorname{supp}\{\varphi\}$ принадлежит Ω, т.е., $\partial_x^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ является линейным векторным пространством.

Пример 1 *Пусть $\Omega = \mathbb{R}$ $(n = 1)$. Рассмотрим функцию*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 - 1}} & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Можно проверить, что $\varphi \in {}_0^\infty(\mathbb{R})$, причем $\operatorname{supp}\{\varphi\} = [-1, 1]$.

Другие примеры функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\varphi(ax + b)$, $\varphi^{(k)}(x)$.

Пример 2 *Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим $\psi(x) = \varphi(|x|^2) = \varphi({x_1}^2 + x_2^2 + \ldots + x_n)$, где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тогда $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. В этом случае* $\operatorname{supp}\{\psi\}$ *– единичный шар в $\mathbb{R}^n$.*

Определение 3 *В пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ вводится топология с помощью понятия сходимости. Пусть $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ – некоторая последовательность и $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. По определению*

$$\varphi_n \to \varphi \text{ в пространстве } \mathcal{D}(\Omega),$$

если

1. *найдется компактное множество $K \subset \Omega$, такое, что* $\operatorname{supp}\{\varphi_n\} \subset K$ *для каждого $n \in \mathbb{N}$;*

2. *для любого мультииндекса* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\partial_x^\alpha \varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) \text{ равномерно по } x \in \Omega.$$

Пример 3 *а) Пусть* $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi_n(x)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. *Тогда* $\varphi_n \to 0$ *в пространстве* $\mathcal{D}(\Omega)$.

б) Пусть $a_n \to 1$ $(n \to \infty)$, $\varphi_n(x) = \varphi(a_n x)$. *Тогда* $\varphi_n \to \varphi$ *в пространстве* $\mathcal{D}(\Omega)$.

в) Пусть $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi_n(x-n)$. *Тогда* φ_n *не сходится в пространстве* $\mathcal{D}(\Omega)$, *хотя* $\partial_x^\alpha \varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ *равномерно по* $x \in \Omega$ *для любого* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Заметим, что введенная топология в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ не является метризуемой, т.е., эту сходимость нельзя получить с помощью какой-то метрики в $\mathcal{D}(\Omega)$, следовательно, $\mathcal{D}(\Omega)$ не является метрическим пространством.

Пространство обобщенных функций

Обобщенные функции были введены С.Л.Соболевым и независимо Л.Шварцем. Обобщенные функции также называют распределениями (по-английски, distributions).

Определение 4 *Пространство обобщенных функций* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *состоит из всех линейных непрерывных функционалов, заданных в пространстве основных функций* $\mathcal{D}(\Omega)$, *т.е.,* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *если* $f : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$ *если* $\mathcal{D}(\Omega)$ *– комплексное), причем*

$$f(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 f(\varphi_1) + \alpha_2 f(\varphi_2), \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega),$$

и если $\varphi_n \to \varphi$ *в пространстве* $\mathcal{D}(\Omega)$, *то*

$$f(\varphi_n) \to f(\varphi) \ (n \to \infty).$$

Будем обозначать

$$f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$$

значение функционала f *на функции* φ.

Легко видеть, что обобщенные функции образуют линейное векторное пространство.

Примеры обобщенных функций

Пример 4 *Пусть* $f \in L_1^{loc}(\Omega)$, *т.е., для любого компакта* $K \Subset \Omega$

$$\int_K |f(x)| dx < \infty.$$

(такие функции называются локально интегрируемыми на Ω*). Построим обобщенную функцию*

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x) dx.$$

Этот интеграл конечен, поскольку $K = \operatorname{supp}\{\varphi\} \Subset \Omega$.

Очевидно, что построенный функционал линеен. Проверим его непрерывность в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Действительно, если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}(\Omega)$, то $\operatorname{supp}\{\varphi\} \subseteq K \Subset \Omega$ и $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ равномерно по $x \in K$. В частности найдется $M > 0$, что

$$|\varphi_n(x)| \leq M,\ \forall x \in K,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

т.е.,

$$|f(x)\varphi_n(x)| \leq M|f(x)|,\ \forall x \in K,$$

и, кроме того,

$$f(x)\varphi_n(x) \to f(x)\varphi(x) \text{ для почти всех } x \in K.$$

Тогда по теореме Лебега

$$\int_\Omega f(x)\varphi_n(x)dx = \int_K f(x)\varphi_n(x)dx \to \int_K f(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Следовательно, пространство $L_1^{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Такие обобщенные функции принято называть регулярными.

Пример 5 *$\delta-$функция Дирака. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$ или $0 \in \Omega$. По определению,*

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Это линейный функционал в $\mathcal{D}(\Omega)$, который, очевидно непрерывен: если $\varphi_n \to \varphi$ в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$, то

$$\varphi_n(0) \to \varphi(0) \implies \langle \delta, \varphi_n \rangle \to \langle \delta, \varphi \rangle .$$

Пример 6 *Пусть μ – это произвольная мера на Ω. Положим*

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi(x)d\mu.$$

Это линейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}(\Omega)$ (проверьте!).

Пример 7 *Рассмотрим обобщенную функцию $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$, которая действует по формуле*

$$\left\langle \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = (v.p.)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

Проверьте, корректность этого определения.

Лекция 21 (17 июня 2022)

§1. Свойства обобщенных функций

Действия и операции с обобщенными функциями

Как было сказано, пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Omega)$ является линейным векторным пространством: если $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, то, для любых чисел α_1, α_2 линейная комбинация $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, т.к. по определению

$$\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi \rangle = \alpha_1 \langle f_1, \varphi \rangle + \alpha_2 \langle f_2, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

и этот функционал непрерывен.

Введем топологию в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$ с помощью понятия сходимости.

Определение 1 *По определению последовательность обобщенных функций $\{f_n\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ сходится к $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$, если для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*

$$\langle f_n, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle \ \ (n \to \infty).$$

Пример 1 *Пусть* $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$ *Рассмотрим* $f_n(x) = nh\left(\frac{x}{n}\right) = \begin{cases} n, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \notin [0, \frac{1}{n}]. \end{cases}$

Проверим, что

$$f_n(x) \to \delta(x) \text{ в пространстве } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\langle f_n, \varphi \rangle = n \int_0^{1/n} \varphi(x) dx = n \frac{\varphi(x_n)}{n} = \varphi(x_n).$$

Здесь мы воспользовались теоремой о среднем: найдется $x_n \in [0, 1/n]$, такое что $\int_0^{1/n} \varphi(x) dx = \frac{\varphi(x_n)}{n}$. При этом, очевидно, что $x_n \to 0$, и, следовтаельно $\varphi(x_n) \to \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \ \ (n \to \infty)$, т.е., $f_n(x) \to \delta(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Это пример так называемой δ-образной последовательность регулярных обобщенных функций, т.е., когда $f_n(x) \in L_1^{loc}(\Omega)$ и при этом

$$f_n(x) \to \delta(x) \text{ в пространстве } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Обобщенный функции можно умножать на функции из класса $C^\infty(\Omega)$.

Определение 2 *Пусть $a(x) \in C^\infty(\Omega)$ (не обязательно из $\mathcal{D}(\Omega)$). Для любой обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ определим обобщенную функцию $af \in \mathcal{D}'(\Omega)$ по следующей формуле*

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Проверим корректность этого определения. Заметим, что $a\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, поскольку $\operatorname{supp}\{a\varphi\} \subset \operatorname{supp}\{\varphi\} \Subset \Omega$. Проверим непрерывность введенного функционала. Если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}(\Omega)$, то, очевидно, $a\varphi_n \to a\varphi$ в $\mathcal{D}(\Omega)$, и, следовательно,

$$\langle af, \varphi_n \rangle = \langle f, a\varphi_n \rangle \to \langle f, a\varphi \rangle = \langle af, \varphi \rangle ,$$

т.е., функционал af непрерывен в $\mathcal{D}(\Omega)$.

В обобщенных функциях можно делать невырожденные линейные замены независимой переменной x.

Определение 3 *Пусть $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, A – невырожденная матрица $n \times n$ и $b \in \mathbb{R}^n$. Определим обобщенную функцию $g(x) = f(Ax+b)$. Для этого воспользуемся следующим простым утверждением: если $f(x) \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, то для любой основной функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)\varphi(x)dx = \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(A^{-1}(y-b))dy,$$

которое легко выводится с помощью замены переменной

$$Ax + b = y,\ x = A^{-1}(y-b),\ dx = |\det A^{-1}|dy = \frac{dy}{|\det A|}.$$

Для обобщенной функции $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ положим по определению, что

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle f(Ax+b), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|\det A|}\left\langle f(y), \varphi(A^{-1}(y-b)) \right\rangle .$$

Мы получили, очевидно, корректную обобщенную функцию. Аналогично можно делать нелинейные замены переменных в обобщенных функциях, которые являются бесконечно дифференцируемыми диффеоморфизмами в пространстве $\mathbb{R}^n$.

В частности, можно строить обобщенные функции со сдвинутым аргументом вида $f(x - x_0)$, например, сдвиг δ-функции $\delta(x - x_0)$:

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi \rangle = \varphi(x_0).$$

Это позволяет рассматривать ряды обобщенных функций, например, обобщенные функции вида

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n).$$

Убедитесь, что это формула корректна. Тогда обобщенная функция $a(x)f(x)$ имеет вид

$$a(x)f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\delta(x-n).$$

Дифференцирование обобщенных функций

Лемма 1 *Пусть $f \in C^1(\Omega)$. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ выполнено равенсто*

$$\int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\varphi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}dx,\ \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Достаточно проверить для $j = 1$. Обозначим

$$K = \operatorname{supp}\{\varphi\} \subseteq P = [-M, M]^n,$$

где M достаточно велико. Продолжим функцию φ нулем вне ее носителя $\operatorname{supp}\{\varphi\}$. Очевидно, получится бесконечно дифференцируемая функция с областью определения $\mathbb{R}^n$, носитель которой лежит в кубе P. Имеем

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f(x)\varphi(x)\right)dx &= \int_K \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f(x)\varphi(x)\right)dx = \int_P \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f(x)\varphi(x)\right)dx = \\ &= \int_{P'} dx' \int_{-M}^{M} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f(x)\varphi(x)\right)dx_1 = 0.\end{aligned}$$

Здесь $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, $dx = dx_1 dx'$, $P' = \{x' = (x_2, \ldots, x_n),\ |x_k| \le M\}$. При интегрировании по x_1 мы воспользовались формулой Ньютона-Лейбница и тем, что $\varphi(M, x') = \varphi(-M, x') = 0$ при всех $x' = (x_2, \ldots, x_n)$.

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(f(x)\varphi(x)\right) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\varphi(x) + f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}.$$

Проинтегрировав это равенство по Ω получим, что

$$\int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\varphi(x)dx + \int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}dx = 0,$$

откуда получаем требуемое тождество. ■

Следствие 1 *Если $f \in C^k(\Omega)$. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ порядока $|\alpha| \le k$ выполнено равенство*

$$\int_\Omega \partial_x^\alpha f(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)\partial_x^\alpha \varphi(x)dx.$$

Для доказательства достаточно применить лемму $|\alpha|$ раз и "перебросить" все частные производные с функции f на функцию φ.

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ – обобщенная функция в области Ω. Для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ определим обобщенную функцию

$$g = \partial_x^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

значение которой на основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ определяется формулой

$$\langle g, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial_x^\alpha \varphi\rangle.$$

Легко проверить, что эта формула задает непрерывный линейный функционал на $\mathcal{D}(\Omega)$.

Пример 2 *Пусть $f \in C^k(\Omega)$. Тогда все производные $\partial_x^\alpha f$ этой обобщенной функции до порядка k, т.е., при $|\alpha| \le k$, совпадают с обычными производными этой функции.*

Пример 3 *Рассмотрим функцию $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}^1$ $(n = 1)$. Найдем ее первую обобщенную производную $\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, причем $\operatorname{supp}\{\varphi\} \subseteq [-M, M]$ для достаточно большого M. Имеем по определению*

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi'(x)dx = -\int_{-M}^{M} |x|\varphi'(x)dx = \\
&= \int_{-M}^{0} x\varphi'(x)dx - \int_{0}^{M} x\varphi'(x)dx = x\varphi(x)|_{-M}^{0} - \int_{-M}^{0} \varphi(x)dx - \\
&- x\varphi(x)|_0^M + \int_0^M \varphi(x)dx = -\int_{-M}^{0} \varphi(x)dx + \int_0^M \varphi(x)dx = \int_{-M}^{M} \operatorname{sign}(x)\varphi(x)dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}(x)\varphi(x)dx = \langle \operatorname{sign}(x), \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

Следовательно, $\frac{d}{dx}|x| = |x|' = \operatorname{sign}(x)$ в смысле обобщенных функций.

Пример 4 *Пусть $f(x), x \in \mathbb{R}$, – кусочно непрерывно дифференцируемая функция, т.е., $f(x)$ всюду непрерывна и найдется конечном множество точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, такое что $f(x) \in C^1[_k, x_{k+1}]$ при $k = 1, 2, \ldots, m-1$ (на концах отрезков берутся левые и правые производные). Тогда производная функции $f(x)$ в пространстве обобщенных функций совпадает с ее обычной производной всюду, кроме точек этого конечного множества. Проверяется аналогично предыдущему примеру с поимощью интегрирования по частям на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$.*

Пример 5 *Рассмотрим $f(x) = \operatorname{sign}(x)$, т.е., найдем вторую производную функции $|x|$. Получаем для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем $\operatorname{supp}\{\varphi\} \subseteq [-M, M]$*

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{sign}(x)', \varphi \rangle &= -\langle \operatorname{sign}(x), \varphi' \rangle = \int_{-M}^{0} \varphi'(x)dx - \int_0^M \varphi'(x)dx = \\
&= (\varphi(0) - \varphi(-M)) - (\varphi(M) - \varphi(0)) = 2\varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{sign}(x)' = \delta(x)$$

в пространстве обобщенных функций.

Пример 6 *Пусть теперь функция $f(x), x \in \mathbb{R}$, является непрерывно дифференцируемой на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, где, как и раньше, $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, но в самих этих точках функция имеет разрыв первого рода, причем скачок в точке x_k равен*

$$a_k = \lim_{x \to x_k + 0} f(x) - \lim_{x \to x_k - 0} f(x),\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Обозначим $g(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ – обычную производную функции $f(x)$ всюду кроме точек x_k. Тогда в пространстве обобщенных функций

$$f'(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{m} a_k \delta(x - x_k).$$

Проверяется с помощью интегрирования по частям на каждом отрезке $[_k, x_{k+1}]$.

Пример 7 *Пусть* $f(x)=\delta(x),\ x\in\mathbb{R}$. *В этом случае*

$$\langle\delta'(x),\varphi(x)\rangle=(-1)\langle\delta(x),\varphi'(x)\rangle=-\varphi'(0).$$

Аналогично определяются старшие производные $\delta^{(k)}(x)$.

Свойства производных обобщенных функций

Первое очевидное свойство состоит в том, что обобщенные функции из пространства $\mathcal{D}'(\Omega)$ имеют частные производные любого порядка, причем порядок, в котором берутся производные $\partial_x^\alpha f(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ по разным переменным $x_1,x_2,\dots,x_n$ не имеет значения, т.е., например, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2\partial x_1}$ для любой обобщенной функции $f(x)$. Это следует из определения, поскольку это верно для любой основной функции $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, т.е., например, $\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_2\partial x_1}$.

Следующее свойство тоже легко устанавливается.

Утверждение 1 *Оператор дифференцирования* ∂_x^α *является непрерывным в топологии пространства обобщенных функций, т.е., если* $f_n(x)\to f(x)$ *в пространстве* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *то* $\partial_x^\alpha f_n(x)\to\partial_x^\alpha f(x)$ *в этом пространстве.*

Утверждение 2 *1) Пусть* $f(x)\in\mathcal{D}'(\Omega)$, $a(x)\in C^\infty(\Omega)$. *Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(a(x)f(x))=\frac{\partial a(x)}{\partial x_j}f(x)+a(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_j},$$

2) Справедлива формула Лейбница ($n=1$):

$$(a(x)f(x))^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}C_k^j a^{(j)}(x)f^{(k-j)}(x).$$

Доказывается непосредственно.

Утверждение 3 *Пусть* $f(x)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, *причем* $f'(x)=0$. *Тогда* $f(x)\equiv\mathrm{const}$, *т.е., для любой* $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle f(x),\varphi(x)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx,$$

для некоторого числа C.

Доказательство. Зафиксируем функцию $\varphi_0\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, для которой $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x)dx=1$. Любую функцию $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ можно представить в виде

$$\varphi(x)=\psi(x)+h\varphi_0(x),\ \text{где}\ \psi(x)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\ h=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx\ \text{и}\ \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx=0.$$

Для этого достаточно взять $\psi(x)=\varphi(x)-h\varphi_0(x)$, где $h=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$.

Заметим, что $\psi(x)=\chi'(x)$, где $\chi(x)=\int_{-\infty}^{x}\psi(y)dy$, причем $\chi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Поскольку нам дано, что $f'(x) = 0$ в смысле обобщенных функций, то

$$\langle f, \psi \rangle = \langle f, \chi' \rangle = (-1) \langle f', \chi \rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= \langle f, \psi + h\varphi_0 \rangle = \langle f, \psi \rangle + h \langle f, \varphi_0 \rangle = h \langle f, \varphi_0 \rangle = \\ &= \langle f, \varphi_0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = C \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx, \end{aligned}$$

т.е., $f = C$, где $C = \langle f, \varphi_0 \rangle$. Что и требовалось. ■

Решение дифференциальных уравнений в обобщенных функциях

Рассмотрим следующее уравнение

$$u^{(m)}(x) + a_1(x)u^{(m-1)}(x) + \ldots + a_m(x)u(x) = f(x), \tag{1}$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_k(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и правой частью $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Легко проверяется, что любое обычное решение этого уравнения является решением и в пространстве обобщенных функций.

Теорема 4 *Любое решение уравнения (1) в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ является обычным решением этого уравнения.*

Доказательство. Сведем уравнение (1) к однородному уравнению

$$u^{(m)}(x) + a_1(x)u^{(m-1)}(x) + \ldots + a_m(x)u(x) = 0, \tag{2}$$

в котором $f(x) \equiv 0$ (для этого достаточно вычесть из этого уравнения уравнение для любого (обычного) частного решения $v(x), x \in \mathbb{R}$, которое существует в силу по теореме о существования решения линейного обыкновенного уравнения).

Затем однородное уравнение можно свести к системе первого порядка вида

$$\frac{d}{dt}U(x) = A(x)U(x), \tag{3}$$

в которой $U(x) = (u^{(m-1)}(x), u^{(m-1)}(x), \ldots, u^{(1)}(x), , u^{(0)}(x)) \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}$, а $A(x)$ – это $m \times m$-матрица специального вида, составленная из коэффициентов $a_j(x)$. Достаточно проверить, что все обобщенные решения системы (3) являются обычными бесконечно дифференцируемыми функциями. Пусть $\Phi(x)$ – фундаментальная матрица этой системы размера $m \times m$, которая состоит из m ее линейно независимых гладких решений. Она является невырожденной и бесконечно гладкой на всей оси. Пусть $U(x)$ – произвольное обобщенное решение системы (3). Положим $V(x) = \Phi^{-1}(x)U(x)$. Тогда $U(x) = \Phi(x)V(x)$ и для обобщенной вектор-функции $V(x)$ получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}V(x) = 0.$$

Осталось воспользоваться утверждением 3, из которого следует, что $V(x) = C$ – это постоянный вектор. Следовательно, $U(x) = \Phi(x)C$ – обычное бесконечно гладкое решение. Теорема доказана. ■

В заключение рассмотрим следующее уравнение

$$u^{(m)}(x) + a_1(x)u^{(m-1)}(x) + \ldots + a_m(x)u(x) = \delta(x), \tag{4}$$

в правой части которого стоит δ-функция. Построим для него важное частное решение. Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\begin{aligned}
&u^{(m)}(x) + a_1(x)u^{(m-1)}(x) + \ldots + a_m(x)u(x) = 0,\\
&u(0) = 0,\ u^{(1)}(0) = 0, \ldots, u^{(m-2)}(0) = 0, u^{(m-1)}(0) = 1.
\end{aligned}$$

Эта задача имеет единственное бесконечно гладкое решение $u_0(x),\ x \in \mathbb{R}$, которое не есть тождественный нуль. Рассмотрим функцию

$$E(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \geq 0,\\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Эта функция и является искомым частным решением уравнения (4). Все ее обобщенные производные до порядка $m-1$ равны

$$E^{(j)}(x) = \chi_{[0,+\infty)}(x)u_0^{(j)}(x),\ x \in \mathbb{R},$$

и при $j = 0, 1, \ldots, m-2$ они являются непрерывными функциями, производная $E^{(m-1)}(x)$ в точке $x = 0$ имеет скачок равный 1, поэтому производная порядка m вычисляется по формуле $E^{(m)}(x) = \chi_{[0,+\infty)}(x)u_0^{(m)}(x) + \delta(x)$. Это проверяется интегрированием по частям соответствующих формул. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&E^{(m)}(x) + a_1(x)E^{(m-1)}(x) + \ldots + a_m(x)E(x) =\\
&= \chi_{[0,+\infty)}(x)\left(u_0^{(m)}(x) + a_1(x)u_0^{(m-1)}(x) + \ldots + a_m(x)u_0(x)\right) + \delta(x) = \delta(x),
\end{aligned}$$

т.е., в пространстве обобщенный функций

$$E^{(m)}(x) + a_1(x)E^{(m-1)}(x) + \ldots + a_m(x)E(x) = \delta(x).$$

Это решение $E(x)$ принято называть фундаментальным решением уравнения (1). Любое решение уравнения (1) получается по формуле

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)E(x-y)dx,$$

которая выражает свертку правой части уравнения $f(x)$ и фундаментального решения $E(x)$. Эта формула корректна, например, при $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, что проверяется подстановкой в уравнение (1).