32. Экстремумы функций нескольких переменных, условные экстремумы, множители Лагранжа.

Задана функция $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$.

Опр 1. Локальный минимум. Если у точки x_0 есть окрестность, в которой выполнено условие $f(x_0) \le f(x)$, то это локальный минимум, если выполнено более сильное неравенство $f(x_0) < f(x)$ (при $x \ne x_0$) то это строгий лок. минимум.
Аналогично определяется локальный максимум и строгий локальный максимум.
Локальный экстремум — это или лок. мин или лок. макс. (одно слово)

Опр 2. Критическая точка.
Точка x наз. критической, если $\operatorname{grad} f(x) = 0$, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема (необходимое условие локального экстремума). Пусть функция $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$ имеет в т. x_0 все частные производные. Пусть x_0 является локальным экстремумом. Тогда x_0 — является критической точкой, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$, $i = 1..n$

Док-во. Выберем $i = 1, 2, \dots, n$ и рассмотрим функцию одного аргумента $\varphi(t) = f(x_1, \dots, x_i + t, \dots x_n)$. При $t = 0$ имеет эта функция по предположению, как функция одного арг., локальный экстремум, т.е. по теореме из 1-го семестра $\varphi'(0) = 0$, т.е.
Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0.$$

Условие не является достаточным: пример:
$f(x,y) = x^2 - y^2$, $(0,0)$ – критич. т. но не экстр.

Способ нахождения локальных экстремумов: пишем систему из n уравнений $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$, находим её решения и далее исследуем на экстремум.

Напомним определение положительно и отрицательно определенных симметричных матриц. $A = A^T$

Опр 3. A – $n \times n$ матрица с элементами из $\mathbb{R}$, симметричная. Если $(Ay, y) > 0$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$, то полож. опр. Если $(Ay, y) < 0$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$, то отрицат. опр.

Теорема 2. (достаточные условия локального экстремума) Пусть $f \in C^2(U(x_0))$ и x_0 – критическая точка, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$. Рассмотрим квадратн. матрицу: $A = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$

Она симметрична, т.к. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\forall i, j$

Если A – положительно определена, то x_0 – лок. минимум, если A – отрицательно определена, то лок. максимум.

Док-во: с помощью формулы Тейлора в окрестности т. x_0

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + (\operatorname{grad} f(x_0), h) + \frac{1}{2}(Ah, h) + o(\|h\|^2)$$
$$= f(x_0) + \frac{1}{2}(Ah, h) + o(\|h\|^2)$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$

Условный экстремум. Пусть задана функция $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$, и задано множество $S \subset U(x_0)$, $x_0 \in S$. (Обычно S это поверхность, заданная уравнениями:

$$\begin{cases} F_1(x_1,..,x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,..,x_n) = 0 \end{cases} \qquad m < n$$

Опр.: условный локальный минимум x_0 — если $f(x_0) \le f(x)$ $\forall x \in U(x_0) \cap S$.

Если $f(x_0) < f(x)$ $\forall x \in U(x_0) \cap S$, $x \ne x_0$, то стр. мин.

x_0 — строгий локальный минимум.

Аналогично определяется условный максимум.

Задачу нахождения условного лок. экстремума можно свести к безусловному экстремуму. Составим метод множителей Лагранжа.

функция Лагранжа:

$$L(x_1,..,x_n) = f(x_1,..,x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k F_k(x_1,..,x_n).$$

Теорема. Пусть $f, F_1,..,F_m$ — дифференцируемы в т. x_0, при матрица $\left\{\frac{\partial F_k}{\partial x_i}(x_0)\right\}_{k=1..m,\ i=1..n}$ не вырождена. Пусть x_0 — т. лок. усл. экстр. Тогда $\exists \lambda_1,..,\lambda_k$ не все равны одновременно нулю, что

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad i = 1,..,n,$$

т.е. x_0 — критическая для обычного локального безусловного функции $L(x)$.

Как использовать: составим функцию Лагранжа. Имеем $n+m$ переменных $x_1,..,x_n, \lambda_1,..,\lambda_m$ и n ур.: $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$, $i = 1,..,n$, тогда m уравнений ($F_1 = 0 .. F_m = 0$) и $n+m$ неизв. $n+m$ ур.

33. Интеграл Римана по n-мерному промежутку. Сведение кратного интеграла к повторному для непрерывных функций.

1. Определение интеграла.

Промежуток в $\mathbb{R}^n$ и его мера. $a_i \le b_i$

Опр 1. Множество $I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, \dots, n\}$ называется промежутком (прямоугольником). Обозначим его $I_{a,b}$.

Опр 2. Промежутку $I_{a,b}$ сопоставим в соответствие его меру (или объём):

$$|I_{a,b}| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) > 0.$$

Свойства: а) однородность $|\lambda I_{a,b}| = \lambda^n |I_{a,b}|$, $\lambda > 0$

б) аддитивность, если $I_1, I_2, \dots, I_k$ — промежутки, что $I = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$, причём все I_j не имеют попарно внутренних общих точек, то $|I| = \sum_{j=1}^{k} |I_j|$

(субаддитивность) в) Если $I \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$, то $|I| \le \sum_{j=1}^{k} |I_j|$.

Пусть задан промежуток $I_{a,b} = \{ a_i \le x_i \le b_i \}$. Разобьём промежутки $[a_i, b_i]$ на части. Разбиение промежутков индуцирует разбиение всего $I_{a,b}$ на промежутки $P = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$. Такое разбиение будем обозначать

$$I = \bigsqcup_{j=1}^{k} I_j$$

$\sqcup$ — обозначение, что нет попарных вн. точек

Опр 3. Мелкость разбиения $\lambda(P) = \max_{i=1..k} d(I_j)$

$$d(I_{a,b}) = \max_{j=1..n} |b_j - a_j|$$

Опр 4. Разбиение с отмеченными точками:
Если $\forall I_j$ из разбиения P выбрать $\xi_j \in I_j$
$\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$, $P = \{I_1, \dots, I_k\}$
$$I = \bigsqcup_{j=1}^{K} I_j, \quad \xi_j \in I_j$$

Опр 5. Интегральная сумма (Римана).
$$\sigma(f, P, \xi) := \sum_{j=1}^{K} f(\xi_j)\,|I_j|$$

Опр 6. Величина
$$J = \int\limits_I f(x)\,dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi),$$
если этот предел существует называется интегралом Римана т.е.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall P: \lambda(P) < \delta, \forall \xi$ - отм. точ
$$|J - \sigma(f, P, \xi)| < \varepsilon$$

Еще обозначение (кратный интеграл):
$$\int\limits_I f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n = \underbrace{\int \dots \int}_{n}_{I} f(x_1, x_2 \dots x_n)\,dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Критерий интегрируемости.

Опр: $A \subset \mathbb{R}^n$ множество A имеет меру нуль, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ покрытие $\{I_j\}$ не более чем счетное (параллелепипедами) такое, что $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon$.

Теорема: Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на параллелепипеде $I \iff$ 1. f - ограничена,
2. мера множества точек разрыва f равна нулю

Без док-ва

Свойства интеграла Римана:

1. Линейность, 2. аддитивность по функ.
3. аддитивность по множеству-промежутку
4. Если $f \geq 0$, то $\int_I f\,dx \geq 0$.
5. оценка $\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx$ (монотонность)

Сведение кратного интеграла к повторному

Это инструмент для вычисления повторных интегралов.

Теорема (Фубини). Пусть $X \times Y$ - промежуток в $\mathbb{R}^{n+m}$, который является произведением промежутков X и Y в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Если функ $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ интегрируема, то интегралы равны:

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_X dx \int_Y f(x,y)\,dy = \int_Y dy \int_X f(x,y)\,dx$$

Пояснение про второй и третий интеграл:

Рассмотр. ф-ю $F(x) = \int_Y f(x,y)\,dy$. Когда она интегрируема по Риману, тогда $\int_X F(x)\,dx = \int_{X \times Y} F(x,y)\,dx\,dy$.

Аналогично для второго: $G(y) = \int_X f(x,y)\,dx$

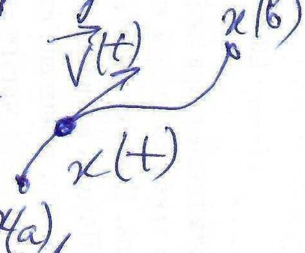
$$\int_Y G(y)\,dy = \int_{X \times Y} f(x,y)\,dx\,dy.$$

34. Криволинейные интегралы. Вычисление длин кривых и работа силы по криволинейному пути. Формула Грина

В пространстве $\mathbb{R}^n$ (обычно, $n = 2, 3$) рассматривается кривая Γ, т.е. отображение $x(t): [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Предполагается что $x \in C^1[a,b]$. $x=(x_1,\dots,x_n)$

Длина кривой Γ определяется по формуле:

$$l = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n |\dot{x}_i(t)|^2\right)^{1/2} dt = \int_a^b |v(t)|\,dt$$



где $v(t) = (\dot{x}_1(t),\dots,\dot{x}_n(t))$ — вектор скорости или касательный вектор к кривой.

Утв. Длина кривой не зависит от выбора параметризации, т.е. если $t=t(\tau)$, $\tau\in(\alpha,\beta)$, причём $t\in C^1([\alpha,\beta])$, $\frac{dt}{d\tau}\neq 0$, $t(\alpha)=a$, $t(\beta)=b$, то $l_t = l_\tau$. Док-во очевидно.

Замечание: Длина кривой не зависит от ориентации, т.к. можно параметризовать в обе стороны, т.к. $t = b+a-\tau$. В обр. стор. Физический смысл: длина пройденного пути зависит только от модуля скорости и не зависит от направления.

Длина кусочно гладкой кривой определяется как сумма длин её гладких кусков (их конечное число)

Криволинейный интеграл 1-го рода.

Задана кривая $\Gamma: x: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ без особых точек, т.е. $v(t) = \dot{x}(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$

Опр. Задана функция $f: \Gamma \to \mathbb{R}$, непрерывна.

$$\int\limits_\Gamma f(x)\,ds := \int_a^b f(x(t))\cdot|\dot{x}(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^b f(x(t))\cdot\left(\sum_{i=1}^n [\dot{x}_i(t)]^2\right)^{1/2} dt.$$ — крив. инт. 1-го рода по кривой

При $f \equiv 1$ получаем определение длины кривой.

Утв: Крив. инт. 1-го рода не зависит от параметризации и от направления движения по кривой.

Физические величины, вычисляемые с помощью крив. инт. 1-го рода: масса кривой переменной плотности, центр тяжести кривой, момент инерции, сопротивление и т.д.

Крив. инт. 2-го рода. Опять имеем гладкую ориентированную кривую в $\mathbb{R}^n$: $x: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ без особенностей, т.е. $\dot{x}(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$.

На кривой можно выбрать 2 ориентации (направления).

Пусть на Γ задано векторное поле $\underbrace{\vec{F} = (F^1, F^2, \ldots, F^n)}_{\text{непрерывн.}}$, $\vec{F} = \vec{F}(x)$

или 1-форма $F^1 dx_1 + F^2 dx_2 + \ldots + F^n dx_n$.

Опр: $$\int\limits_\Gamma \sum_{i=1}^n F_i\,dx_i = \int_a^b (F(x(t)), \dot{x}(t))\,dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n F^i(x(t))\cdot \dot{x}_i(t)\,dt$$

называется крив. инт. 2-го рода.

Физ. смысл — работа переменной силы при движении материальной точки по кривой.

Утв: Интегралы 2-го рода не зависят от параметризации, если $\frac{dt}{d\tau} > 0$. Иначе они меняют знак на противоположный.

Интеграл 2-го рода можно выразить через инт. первого рода:

$$\int_\Gamma \sum_{i=1}^n F^i dx_i = \int \sum_{i=1}^n F^i \cdot \frac{\dot{x}_i(t)}{|V(t)|} \cdot |V(t)| dt = \int \sum F^i \frac{\dot{x}^i}{|v|} ds$$

Интегралы от кусочно-гладких кривых

Потенциальные векторные поля

Опр: Поле $\vec{F} = (F^1, \dots, F^n)$ называется потенциальным в области $D \subset \mathbb{R}^n$, если существует функция

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad F^i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, т.е. $\vec{F} = \operatorname{grad} f$.

f называется потенциалом.

Утв: Пусть потенциал $f \in C^1(D)$. Тогда интеграл от $df = F^1 dx_1 + \dots + F^n dx_n$ по любой кусочно гладкой кривой $\Gamma \subset D$, из точки x^1 в т. x^2 не зависит от пути:

$$\int_\Gamma df = \int_\Gamma \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \cdot \dot{x}_i(t) dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(x(t)) dt = f(x(b)) - f(x(a)) \quad \blacksquare$$

Справедливо и обратное свойство. Пусть

Интеграл от $\int_\Gamma \sum_{i=1}^{n} F^i dx_i$ не зависит от выбора пути из т. x^1 в т. x^2. Тогда векторное поле F является потенциальным.

Доказательство вполне очевидно.

Теорема. (Простая замкнутая кривая называется замкнутым контуром) Интеграл по замкнутому контуру равен нулю $\Leftrightarrow$ поле потенциальное

Формула Грина

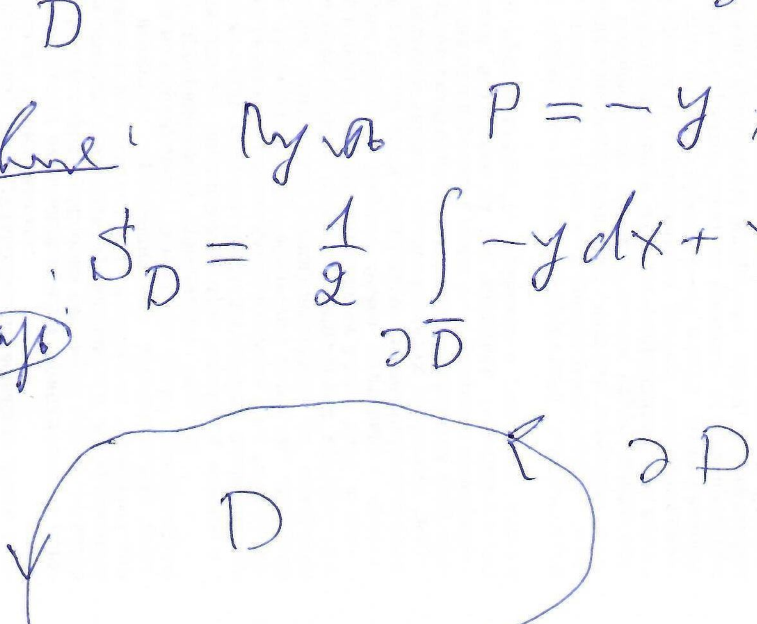
Теорема: Пусть в $\mathbb{R}^2$, $\overline{D}$ — компактная область, ограниченная кусочно-гладкими кривыми, $P, Q \in C^1(\overline{D})$. Тогда

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

(Против ч.с.

Следствие: Пусть $P = -y$, $Q = x$

Тогда площадь: $S_D = \frac{1}{2} \int_{\partial \overline{D}} -y\,dx + x\,dy$



37. Функциональные последовательности и ряды, равномерная сходимость, непрерывность предела равномерно сход. послед. непрер. ф-ий

1. Сходимость последовательностей функций

Пусть функции $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, определены на мн-ве E, $f_n(x) \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $x \in E$. Пусть $x_0 \in E$. Если последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится, то говорят что последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится в т. x_0.

Последовательность $\{f_n(x)\}$, сходящаяся в $\forall$ т. $x \in E$ называется сходящейся на мн-ве E. Предельная функция $f(x)$, $x \in E$ определяется:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \iff f_n \to f,\ x \in E$$

по определению: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon(x): \forall n \geq N_\varepsilon \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

2. Равномерная сходимость функц. последовательности

Опр: $\{f_n(x)\}$ называется равн. сх. к $f(x)$ на множестве E, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E$$

(т.е. N_ε — не зависит от x)

обозначение: $f_n \rightrightarrows f$, $x \in E$.

3. Критерий равномерной сходимости.

а) $f_n \rightrightarrows f$ на $E \iff \lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

б) $f_n \rightrightarrows f$ на $E \iff$ выполнение условия Коши:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon$ и $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

4) Неравномерная сходимость

$\exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq k\ \exists\, \tilde{x} \in E \quad |f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| \geq \varepsilon_0$

т.е. $\exists\, n_k \to \infty \quad \exists\, \tilde{x}_k \in E: \ |f_{n_k}(\tilde{x}_k) - f(\tilde{x}_k)| \geq \varepsilon_0$

Бывает, что $f_n(x) \to f(x)$ на E, но $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ на E.

5) Сходимость, абс. сходимость и область сходимости функционального ряда. Пусть функции $u_n(x) \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N}$, определены на мн-ве E, $x_0 \in E$. Ряд

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется сходящимся в т. x_0, если числ. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, и абсолютно сходящимся в т. x_0, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x_0)|$. (2)

Если ряд сходится $\forall x \in E$, то наз. сходящимся на мн-ве E, если (2) сходится $\forall x \in E$, то абсолютно сходящимся на E.

Сумма $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ называется n-й частичной суммой функц. ряда (1), а $S(x) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n(x)$ называется его суммой. Множество всех $x \in E$, где сходится ряд (1) или (2) соответственно, называется областью сходимости и областью абсолютной сходимости.

6) Равномерная сходимость функц. ряда. Ряд (1) называется равномерно сходящимся на E, если

$S_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} S(x)$, $x \in E$, т.е. если послед. частичных сумм $S_n(x)$ сходится равн. к сумме ряда $S(x)$.

Или $r_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \in E$, где $r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$.

Критерий равн. сх-ти: $\sup\limits_{x \in E} |r_n(x)| \to 0 \ (n \to \infty)$.

7. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функц. ряда: Если можно указать сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, $a_n \geq 0$: $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in E$ $|u_n(x)| \leq a_n$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно.

Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорирует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

8. Критерий Коши:

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — сходится равномерно на $x \in E \iff$ выполнено условие Коши: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$: $\forall n \geq N_\varepsilon$ $\forall p \in \mathbb{N}$ $\forall x \in E$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

8. Последовательности и ряды непрерывных функций: а) Если последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$ к функции $f(x)$ тоже на $[a,b]$, то предельная функция $f(x)$ тоже непрерывна: $f_n(x) \in C[a,b]$, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$, то $f(x) \in C[a,b]$.

б) Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывны на отр. $[a,b]$ и ряд равномерно сходится на $[a,b]$, то его сумма $S(x)$ тоже непрерывна на $[a,b]$.

Аналогичные теоремы [illegible] Если E — любое множество. Равномерный предел непрерывных функций — непрерывная функция и сумма ряда непрерывных функций [illegible] не сходится [illegible] воспользуемся

Док-во: $\forall \varepsilon \exists n$: [illegible]

Определение н. 9

$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)|$