38. Несобственные интегралы, признаки сходимости несобственных интегралов. Сходимость интегралов $\int_0^1 x^\alpha dx$ и $\int_1^{\infty} x^\alpha dx$

1) Несобственный интеграл от неограниченной ф-ии.
Пусть ф-я $f(x)$ определена на $[a,b)$ и интегрируема на $\forall$ отрезке $[a,\xi]$, $\xi<b$. Если существует предел

$$\lim_{\xi\to b-}\int_a^{\xi} f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx, \quad (1)$$

то он называется несобственным интегралом f на $[a,b)$, а говорят, что несобственный интеграл сходится, а функция $f(x)$ интегрируема в несобственном смысле.
Иначе: не сходится и не интегрируема.
Если $f(x)$ ограничена, то предел (1) существует и ф-я интегрируема по Риману в обычном смысле. (Критерий интегрируемости)
Аналогично определяется несобств. интеграл по $(a,b]$.
Легко так же определить несобственные интегралы $\int_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ как пределы соответствующих конечных интегралов.

2) Основные свойства несобственных интегралов
а) Линейность: Если $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, то $\forall \alpha,\beta$ сходится интеграл и имеет место

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\cdot\int_a^b g(x)dx$$

б) Ф-ла Ньютона Лейбница. Если $f(x)\in C[a,b)$ и $F(x)$ — её первообразная на $[a,b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = F(b-0) - F(a)$$

где $F(b-0) = \lim\limits_{x\to b-0} F(x)$ (существует).

в) Формула замены переменной. Пусть $f \in C[a,b)$ и $\varphi(t)$, $t\in[\alpha,\beta)$ – непрерывно дифференцируема, причем $a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) < \lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t) = b$

$\varphi(t)\in[a,b]\ \forall t$

тогда $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$ (верна при сходимости хотя бы одного из интегралов)

г) Ф-ла интегрирования по частям $u(x), v(x) \in C[a,b)$ и существует $\lim\limits_{x\to b-0} u(x)v(x)$, тогда

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$ где

$$uv\Big|_a^b = \lim_{x\to b-0} u(x)\cdot v(x) - u(a)\cdot v(a)$$

д) Интегрирование неравенств: Пусть $f(x), g(x)$, $x\in[a,b)$ удовлетворяют неравенствам: $f(x) \le g(x)$ тогда при условии сходимости интегралов справедливо:

$$\int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x)dx$$

Эти свойства дословно переносятся на случай несобственных интегралов $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$

---

3. Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов

Если на $[a,b)$ функции $f(x)\ge 0$ и $g(x)\ge 0$ неотрицательны, интегрируемы на $[a,\xi]$ $\forall \xi < b$. Тогда

I. а) Если $f \le g$, то из сходимости $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$

б) Из расходимости $\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow$ расходимость $\int_a^b g(x)\,dx$

II а) Если $g > 0$ и $\exists \lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, где $k \neq 0$, то интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся и расходятся одновременно. б) В частности, если $f \sim g$ при $x \to b-0$ (т.е. $k = 1$), то одновременно.

4. Критерий Коши. Пусть $f(x)$, $x \in (a, b)$, интегрируема на $(a, \xi]$ $\forall \xi < b$. Тогда для сходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta \in (a, b): \forall \eta_1, \eta_2 \in (\eta, b)$

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Часто используется для док-ва расходимости: $\left| \int_{\eta_1^{(n)}}^{\eta_2^{(n)}} f(x)\,dx \right| > \varepsilon$

Надо найти $\varepsilon > 0$ и $\eta_1^{(n)}$ и $\eta_2^{(n)} \to b-0$.

5. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Опр. $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно, если $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится;

—"— условно, если $\int_a^b$ —"— расходится (и сам сходится).

Аналогично формулируются признаки сходимости для нес. интегралов $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ и $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Пример: $\alpha \neq 1$

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha\,dx = \lim_{\varepsilon\to} \left.\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right|_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\varepsilon^{1+\alpha}}{1+\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1+\alpha} & \text{при } 1+\alpha > 0, \text{ т.е. } \alpha > -1 \\ \infty & \text{при } 1+\alpha < 0, \text{ т.е. } \alpha < -1 \end{cases}$$

Пусть $\alpha = -1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln|x| \Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= -\lim \ln \varepsilon = +\infty.$$ Расходится

Пример 2. $$\int_1^{+\infty} x^\alpha dx = \begin{cases} -\frac{1}{1+\alpha} & \text{при } \alpha < -1 \\ \infty & \text{при } \alpha \geq -1 \end{cases}$$

Дополнение:

6. Признак Дирихле

Интеграл $\int_a^b f(x) g(x) dx$ сходится, если:

а) $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$ и имеет ограниченную первообразную на $[a, b)$

б) $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a, b)$, причем $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$.

7. Признак Абеля Интеграл $\int_a^b f(x) g(x) dx$ сходится

если а) $f(x) \in C[a, b)$ и $\int_a^b f(x) dx$ – сходится;

б) $g(x)$ ограничена, непрерывно-дифференцируема и монотонна на $[a, b)$.

201

21

39. Эйлеровы интегралы. Гамма- и бета-функции. Связь между функциями Γ и B. Функциональное уравнение и ф-ла дополнения для Γ-функции.

① Эйлеровы интегралы

$$B(\alpha,\beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \quad (\text{B-функция})$$

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \quad (\Gamma\text{-функция}).$$

② B-функция. Необходимые и достаточные условия сходимости: $\alpha > 0$ (нижний предел), $\beta > 0$ (верхний предел). Это ОДЗ B-функции.

Симметричность: $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$ ∎

Док-во: замена $x = 1-t$

Формула понижения: $B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\beta)$ при $\alpha > 1$.

Док-во: при $\alpha > 1$, $\beta > 0$ интегрируем по частям:

$$B(\alpha,\beta) = \underbrace{-\frac{1}{\beta}x^{\alpha-1}(1-x)^\beta\Big|_0^1}_{=0} + \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^\beta\,dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}\left[(1-x)^{\beta-1} - (1-x)^{\beta-1}\cdot x\right]dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\cdot B(\alpha-1,\beta) - \frac{\alpha-1}{\beta}\cdot B(\alpha,\beta).$$ Отсюда ф-ла ∎

Используя симметричность B-функции, получаем формулу понижения по β:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\beta - 1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta - 1) \quad \text{при } \beta > 1$$

Из определения следует: $B(\alpha, 1) = \frac{1}{\alpha}$. Поэтому при $n \in \mathbb{N}$: $B(\alpha, n) = \frac{n-1}{\alpha+n-1} \cdot \frac{n-2}{\alpha+n-2} \cdots \frac{n-(n-1)}{\alpha+n-(n-1)} B(\alpha, 1) =$

$$= \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$$

В частности, при $m, n \in \mathbb{N}$

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

---

3. **Г-функция** ОДЗ: $\alpha > 0$ (сходимость в нуле)

Гладкость: $\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot (\ln x)^n \cdot e^{-x}\, dx$

Можно проверить, что этот интеграл сходится при $\alpha > 0$ равномерно по α $\forall\, [a, b] \subset \,]1, \infty[$.

Формула понижения $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$.

Док-во: Интегрируем по частям:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int\limits_0^\infty x^\alpha \cdot e^{-x}\, dx = -x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty + \alpha \cdot \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx =$$

$$= \alpha \cdot \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \quad \blacksquare$$

Поскольку $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$, то заключаем

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Формула дополнения: $\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ $(0<\alpha<1)$

(См. 3 [illegible])

В частности при $\alpha=1/2$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

4. Связь между функциями B и Γ.

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$ (См. 3 [illegible])

40. <u>Гильбертовы пространства</u>. Замкнутые подпространства и ортогональные дополнения. Ортогональные системы векторов и базисы. Примеры гильбертовых пространств и ортогональных базисов в них. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Теорема Рисса–Фишера. Изоморфизм гильбертовых пространств.

---

① <u>Евклидово пространство</u>, <u>гильбертово пр-во</u>.

Линейное пространство E над полем $\mathbb{R}$, снабженное скалярным произведением: $(x,y) \in \mathbb{R}$

1) $(x,y) = (y,x)$ — симметричность

2) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x_1,y) + \alpha_2(x_2,y)$ линейность.

3) $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$. положительность.

<u>Норма</u> в пр-ве E: $\|x\| = (x,x)^{1/2}$.

Неравенство Коши–Буняковского: $|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Вводится топология, сходимость в E

$x_n \to x$ в $E \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$ $(n \to +\infty)$.

E — метрическое пр-во $\rho(x,y) = \|x-y\|$.

<u>Определение 1</u> <u>Гильбертовым пространством</u> называется <u>полное евклидово пространство бесконечной размерности</u>.

(Иногда добавляется условие сепарабельности, т.е. существование <u>счетного</u> всюду плотного мн-ва.

Определение 2. Понятие ортогональности в евклидовом или гильбертовом пр-ве E.
x — ортогонален y, $x \perp y \iff (x,y)=0$.
Пусть H — гильбертово пространство, в котором задано линейное подпространство L. Оно может быть замкнутым или не замкнутым относительно метрики ρ.

Определение 3. Ортогональное дополнение к подпространству L: $L^{\perp} = \{y \in H : (y,x)=0 \ \forall x \in L\}$

Свойства: $L^{\perp}$ — замкнутое подпространство H,
$L^{\perp} \cap L = \{0\}$

Определение 4. Система векторов $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ называется ортогональной, если $(\varphi_n, \varphi_m)=0 \ \forall n \neq m$

Утверждение 1: Если система $\{\varphi_n\}$ ортогональная, то она линейно независима

Определение 5. Система векторов $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ называется полной, если $\forall x \in H \ \exists x_n \in H$ вида
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^n \varphi_k,$$
т.е. x_n принадлежит лин. об. $\{\varphi_k\}$
$$\|x_n - x\| \to 0.$$

Определение 6. Система $\{\varphi_n\}$ называется ортонормированным базисом в H, если она ортогональная, полная и $\|\varphi_n\| = 1$.

② Примеры евклидовых и гильбертовых пр-в:

а) $\mathbb{R}^n$ – конечномерное евклидово пр-во.

б) $\ell_2 = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), x_n \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\}$

Ск. произведение: $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot y_k$. Ряд сходится абсолютно. Это гильбертово пр-во

Ортонормированный базис в ℓ_2:

$\{e_n\}$, $e_n = (0, 0 \ldots \underset{n}{1}, 0 \ldots, 0)$.

в) $C^2[a, b] = \{f \in C[a, b]\}$, $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$.

Это пространство евклидово, но не полное. Оно не гильбертово. Пополнением этого пр-ва является пространство $L_2(a, b)$:

г) $L_2(a, b) = \{f(x)$ – интегрируемые по Лебегу ф-ии,

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx < \infty\}.$$

Скалярное произведение: $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$.

Ортонормированный базис в $L_2(a, b)$:

$$1,\ \cos \frac{2\pi}{b-a} n x,\ \sin \frac{2\pi}{b-a} n x,\ n = 1, 2, \ldots$$

В частности, $L_2(-\pi, \pi)$:

$$1,\ \cos n x,\ \sin n x,\ n = 1, 2, \ldots$$

③ Ряды Фурье в гильбертовых пр-вах.

Пусть $\{\varphi_n\}$ – ортонормированная система в гильбертовом пр-ве H.

$\forall f \in H$ коэффициенты Фурье: $c_n = (f, \varphi_n)$

Определение 6. Ряд Фурье: $f \to \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n$.

Частичные суммы ряда Фурье: $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \varphi_k$

Утверждение 2 (Теорема Пифагора)

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \|f - S_n\|^2 \qquad (*)$$

Для доказательства расписать $\|f - S_n\|^2$.

Следствие 1. (Неравенство Бесселя):

$\forall f \in H \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \le \|f\|^2$.

Утверждение 3: (Равенство Парсеваля) Базис в H, то если $\{\varphi_n\}$ – ортонормированный базис в H, то

$\forall f \in H \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$.

Доказательство: следует из $(*)$, т.к. для полных систем $\|f - S_n\| \to 0$.

Теорема (Рисс–Фишер). Пусть $\{\varphi_n\}$ – ортонормированная система в гильбертовом пространстве H (не обязательно базис!). Пусть $\{c_n\}$ – система чисел такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$. Тогда $\exists!\, f \in H$:

а) $(f, \varphi_n) = c_n$, т.е. коэфф. Фурье f,

б) $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$;

в) $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$.

<u>Доказательство:</u> Рассмотрим $f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$.

Тогда $\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2$

Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ следует, что $\{f_n\}$ – фундаментальная в H, т.е., имеет предел f: $\|f_n - f\| \to 0$. Покажем, что f – искомый эл.

$(f, \varphi_k) = (f_n, \varphi_k) + (f - f_n, \varphi_k)$ (*)

$|(f_n - f, \varphi_k)| \le \|f_n - f\| \cdot \|\varphi_k\| \le \|f_n - f\| \to 0 \ (n \to \infty)$

Заметим, что $(f_n, \varphi_k) = c_k$ при $n \ge k$

Тогда из (*) $(f, \varphi_k) = c_k \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$ (теорема Пифагора). Единственность f вытекает из этого равенства. □

<u>Теорема об изоморфизме гильбертовых пр-в</u>

Любые два сепарабельных гильбертовы пространства изоморфны между собой, т.е. соответствие:

$\forall H, H^* \ \exists$ взаимн. однозн. соответствие: $x, y \in H$, $x^*, y^* \in H^*$:

$x \leftrightarrow x^*$, $y \leftrightarrow y^*$, $\lambda x \leftrightarrow \lambda x^*$,

$x + y \leftrightarrow x^* + y^*$,

$(x, y) = (x^*, y^*)$.

<u>Доказательство:</u> с помощью теоремы Рисса-Фишера доказывается, что $\forall H$ изоморфно l_2:

$f \in H$, $f \leftrightarrow \{c_n\}$, $c_n = (f, \varphi_n)$,

где $\{\varphi_n\}$ – ортонорм. система в H.

41. <u>Тригонометрические ряды Фурье.</u> Полнота тригонометрической системы. Сходимость тригонометрических рядов в среднеквадратичном. Достаточные условия поточечной и равномерной сходимости триг. рядов Фурье. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

---

① <u>Тригонометрическая система в $L_2(-\pi,\pi)$.</u>

В пространстве $L_2(-\pi,\pi)$ рассматривается система функций: $1, \cos nx, \sin nx$ $(n=1,2\ldots)$

которая называется <u>тригонометрической</u>.

Эта система ортогональна в $L_2(-\pi,\pi)$ относительно скалярного произведения

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx; \quad \|f\|^2_{L_2}=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx.$$

кроме того, $\|1\|^2_{L_2}=2\pi$; $\|\cos nx\|^2_{L_2}=\|\sin nx\|^2_{L_2}=\pi$

Соответствующая <u>ортонормированная</u> система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ n=1,\ldots,\infty.$$

Эта система образует <u>ортонормированный</u> базис в пр-ве $L_2(-\pi,\pi)$. (Вытекает из 1-ой теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций триг. многочленами).

Пусть $f(x)\in L_2(-\pi,\pi)$. Рассмотрим ряд Фурье функции $f(x)$:

$$(1)\quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$n=1,2,\ldots$$

Из полноты триг. системы в $L_2(-\pi,\pi)$ следует, что ряд Фурье (1) сходится в среднеквадратичном, т.е., если обозначить частичную сумму ряда Фурье

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\cdot\sin kx$$

то

$$\|f(x)-S_n(x)\|^2_{L_2}=\|f\|^2_{L_2}-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right),$$

причем $\|f-S_n\|_{L_2}\to 0$.

Выполнено равенство Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

---

2) Поточечная сходимость триг. рядов Фурье.

Рассмотрим ряд Фурье функции $f(x)\in L(-\pi,\pi)$.

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx.$$

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\cdot\sin kx$$

Можно представить $S_n(x)$ в виде интеграла Дирихле:

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz.$$

Лемма (Риман) Если $\varphi(z)\in L_1(a,b)$, то

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b\varphi(z)\sin pz\,dz=\lim_{p\to\infty}\int_a^b\varphi(z)\cos pz\,dz=0.$$

Теорема 1 (достаточные условия поточечной сход-ти)
Пусть $f(x)$ — суммируемая функция и выполнено условие Дини в точке x:

$\exists \delta > 0$: конечен интеграл:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+z)-f(x)}{z} \right| dz < \infty .$$

Тогда последовательность $S_n(x)$ сходится к $f(x)$.

Доказательство:

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}} dz - \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{f(x+z)-f(x)}{z} \right] \cdot \frac{z}{2\sin\frac{z}{2}} \sin(n+\tfrac{1}{2}) z \, dz . \quad (2)$$

Функция $\frac{f(x+z)-f(x)}{z} \cdot \frac{z}{2\sin\frac{z}{2}} = \varphi(z) \in L_1(-\pi,\pi)$

Поэтому, по лемме Римана, правая часть (2) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Следовательно, при выполнении условия Дини в точке $x \in (-\pi, \pi)$:

$$(3)\quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx .$$

Следствие: Условие Дини выполнено, например, если $\exists f_1'(x)$, $\exists f_n'(x)$. или, если $\exists f'(x)$. Тогда есть поточечная сходимость ряда (3).

③ Равномерная сходимость ряда Фурье

Теорема 2 Пусть $f \in C^1[-\pi, \pi]$, причем $f(-\pi) = f(\pi)$, т.е. $f(x)$ — 2π-периодическая ф-ция. Тогда её ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

Сходится к $f(x)$ равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Доказательство: $(n = 1, 2, \dots)$

$$a_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = -\frac{b_n'}{n}, \text{ где}$$

b_n' — коэфф. Фурье функции $f'(x)$ (доказывается интегрированием по частям и применением условия $f(-\pi) = f(\pi)$).

Аналогично, $b_n = -\frac{a_n'}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

Тогда $\frac{|a_0|}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \le \frac{|a_0|}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n'}{n}\right| + \left|\frac{b_n'}{n}\right| \le$

$$\le \frac{|a_0|}{2} + \frac{1}{2}\sum \left(a_n'^2 + \frac{1}{n^2}\right) + \left(b_n'^2 + \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{|a_0|}{2} + \frac{1}{2}\sum (a_n')^2 + (b_n')^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ — сходится, т.к.}$$

$f'(x)$ — удовлетворяет нер-ву Бесселя и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

Следовательно, по мажорантному признаку Вейерштрасса, ряд

$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx$ сходится равномерно. Однако, этот ряд сходится в $L_2(-\pi,\pi)$ к функции $f(x)$. Значит, ряд сходится к $f(x)$ равномерно на $[-\pi,\pi]$ ■

---

(4) Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами

Теорема 4. Пусть $f(x)\in C[a,b]$, тогда $\exists$ последовательность многочленов $p_n(x)$, что

$p_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$, т.е.

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-p_n(x)|\to 0 \quad (n\to\infty).$$

Следует из теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими многочленами.
