Переходное и дифракционное излучение заряда на диэлектрическом шаре

И.И.Каликинский, $\boxed{\text{М.П.Каликинская}}$

Аннотация

Решена задача о переходном и дифракционном излучении заряда на диэлектрическом шаре, диэлектрическая проницаемость которого ε не зависит от частоты. Указанная задача сведена к решению двух линейных неоднородных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Показано, что при $\varepsilon \to \infty$ наш результат переходит в результат о переходном и дифракционном излучении заряда на идеально проводящем шаре. Библиография: 4 названия.

1 Введение

Переходное и дифракционное излучение заряда на идеально проводящем шаре рассмотрено в работе [4]. Рассмотрим теперь диэлектрический шар радиуса R_0, диэлектрическая проницаемость которого не зависит от частоты и равна ε. Параллельно оси z равномерно движется точечный заряд q, создавая ток с плотностью $\vec{j}(0,0,-j)$, где

$$j = qv\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z+vt). \tag{1.1}$$

Скорость заряда $\vec{v}(0,0,-v) = \text{const}$.

Поля находятся из уравнений Максвелла, которые для Фурье-компонент имеют вид

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E}_\omega &= \frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\rho_\omega, \ \text{rot } \vec{E}_\omega = \frac{i\omega}{c}\vec{H}_\omega \\ \text{div } \vec{H}_\omega &= 0, \ \text{rot } \vec{H}_\omega = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_\omega - \frac{i\omega}{c}\tilde{\varepsilon}\vec{E}_\omega, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$,

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon > 1 & \text{при } R \le R_0 \\ 1 & \text{при } R > R_0 \end{cases}. \tag{1.3}$$

Фурье-компоненты полей имеют вид (для дифракционного излучения и переходного излучения при $v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$)

$$\vec{E}_\omega = \vec{E}_\omega^{(0)} + \vec{E}_\omega^{(1)}, \tag{1.4}$$

где индекс 0 относится к полю заряда, а индекс 1 – к полю излучения.

Уравнения Максвелла (1.2) сводятся к неоднородному векторному волновому уравнению

$$\Delta\vec{E}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}\vec{E}_\omega = \frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\,\text{grad } \rho_\omega - \frac{4\pi i\omega}{c^2}\vec{j}_\omega. \tag{1.5}$$

При $\varepsilon \to \infty$ получаем из (1.5) уравнение для $\vec{E}_\omega$ идеально проводящего шара.

Уравнение (1.5) в цилиндрических координатах имеет вид [1]

$$\begin{aligned}
\left(\Delta\vec{E}_\omega\right)_r + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}E_{\omega r} &= \frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\,\frac{\partial\rho_\omega}{\partial r} && (1.6)\\
\left(\Delta\vec{E}_\omega\right)_\varphi + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}E_{\omega\varphi} &= \frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}r}\,\frac{\partial\rho_\omega}{\partial\varphi} && (1.7)\\
\left(\Delta\vec{E}_\omega\right)_z &= \Delta E_{\omega z}, && (1.8)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
(\Delta\vec{E}_\omega)_r &= \Delta E_{\omega r} - \frac{E_{\omega r}}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_{\omega\varphi}}{\partial\varphi} && (1.9)\\
(\Delta\vec{E}_\omega)_\varphi &= \Delta E_{\omega\varphi} - \frac{E_{\omega\varphi}}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_{\omega r}}{\partial\varphi} && (1.10)\\
\Delta E_{\omega z} + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}E_{\omega z} &= \frac{4\pi i\omega}{c^2}j_\omega + \frac{4\pi i\omega}{\tilde{\varepsilon}v}\frac{\partial j_\omega}{\partial z}. && (1.11)
\end{aligned}$$

Решение однородного уравнения ($\rho_\omega = 0$) (1.6), (1.7) ищем в виде

$$E^{(1)}_{\omega r} = F_r(r)e^{im\omega + i\tilde{\varkappa}z},\ E^{(1)}_{\omega\varphi} = F_\varphi(r)e^{im\varphi + i\tilde{\varkappa}z}, \tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned}
\varkappa &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^2},\ \mathrm{Im}\ \varkappa > 0,\ \varkappa_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \lambda^2},\ \mathrm{Im}\ \varkappa_1 > 0, && (1.13)\\
\tilde{\varkappa} &= \begin{cases}\varkappa_1, & \text{при } R < R_0,\\ \varkappa, & \text{при } R > R_0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d^2F_r(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_r(r)}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varkappa}^2 - \frac{m^2+1}{r^2}\right)F_r(r) - \frac{2im}{r^2}F_\varphi(r) &= 0, && (1.14)\\
\frac{d^2F_\varphi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_\varphi(r)}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varkappa}^2 - \frac{m^2+1}{r^2}\right)F_\varphi(r) - \frac{2im}{r^2}F_r(r) &= 0. && (1.15)
\end{aligned}$$

Уравнение для $F_z(r)$ имеет вид

$$\frac{d^2F_z(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_z(r)}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varkappa}^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)F_z(r) = 0. \tag{1.16}$$

Решение системы уравнений (1.14), (1.15) имеет вид [1]

$$\begin{aligned}
1)\ F_r(r) &= iZ_{m+1}(x),\ F_\varphi(r) = Z_{m+1}(x), && (1.17)\\
2)\ F_\varphi(r) &= Z_{m-1}(x),\ F_r(r) = -iZ_{m-1}(x), && (1.18)\\
3)\ F_z(r) &= Z_m(x), && (1.19)
\end{aligned}$$

где $Z_{m-1}(x),\ Z_m(x),\ Z_{m+1}(x)$ – цилиндрические функции,

$$x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varkappa}^2}r = \lambda r. \tag{1.20}$$

В случае среды с диэлектрической проницаемостью ε имеем при $z>0$

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega r} = \frac{q}{2\pi v\varepsilon}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int_0^\infty \left[\tilde{\mathcal{D}}_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda r) - \tilde{\mathcal{E}}_m(\lambda)J_{m-1}(\lambda r)\right] e^{i\varkappa_1 z}\lambda d\lambda \tag{1.21}$$

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega\varphi} = -\frac{iq}{2\pi v\varepsilon}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int_0^\infty \left[\tilde{\mathcal{D}}_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda r) + \tilde{\mathcal{E}}_m(\lambda)J_{m-1}(\lambda r)\right] e^{i\varkappa_1 z}\lambda d\lambda \tag{1.22}$$

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega z} = -\frac{i\omega q}{\pi v^2\varepsilon}(1-\beta^2\varepsilon)\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int_0^\infty \widetilde{\mathcal{A}}_m(\lambda)J_m(\lambda r)e^{i\varkappa_1 z}\lambda d\lambda. \tag{1.23}$$

$E^{(1)}_{\omega r},\ E^{(1)}_{\omega\varphi},\ E^{(1)}_{\omega z}$ при $z<0$ получаются из (1.21), (1.22), (1.23), если заменить $\varkappa_1$ на $-\varkappa_1$, а знак $\sim$ на знак $\approx$.

Согласно (1.21), (1.22), (1.23)

$$\begin{aligned}&(\Delta\vec{E}_\omega)_r + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}\vec{E}_{\omega r} = \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E^{(1)}_{\omega r}}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}E^{(1)}_{\omega r} - \frac{1}{r^2}E^{(1)}_{\omega r} - \frac{\varkappa_1^2}{r^2}E^{(1)}_{\omega r} + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}E^{(1)}_{\omega r} + \frac{2m}{r^2}E^{(1)}_{\omega\varphi}.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Подставляя сюда (1.21) и (1.22), получаем коэффициент при $\tilde{\mathcal{D}}_m(\lambda)$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_{m+1}(\lambda r)}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}J_{m+1}(\lambda r) - \frac{J_{m+1}(\lambda r)}{r^2} - \left(\frac{\varkappa_1^2}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)J_{m+1}(\lambda r) - \frac{2m}{r^2}J_{m+1}(\lambda r), \tag{1.25}$$

что равно нулю согласно уравнению Бесселя.

Коэффициент при $\tilde{\mathcal{E}}_m(\lambda)$ равен

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_{m-1}(\lambda r)}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}J_{m-1}(\lambda r) - \frac{J_{m-1}(\lambda r)}{r^2} + \lambda^2 J_{m-1}(\lambda r) + \frac{2m}{r^2}J_{m-1}(\lambda r), \tag{1.26}$$

что равно нулю согласно уравнению Бесселя. Теким образом, (1.21)б (1.22), (1.23) являются решениями однородных уравнений (1.6), (1.7), (1.8). при любых $\tilde{\mathcal{D}}_m(\lambda)$ и $\tilde{\mathcal{E}}_m(\lambda)$.

2 Решение неоднородного уравнения (1.5)

Правая часть уравнения (1.5) в проекциях на координаты r,φ,z имеет вид

$$\frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\frac{\partial\rho_\omega}{\partial r},\ \frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\frac{1}{r}\frac{\partial\rho_\omega}{\partial\varphi},\ \frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\frac{\partial\rho_\omega}{\partial z} + \frac{4\pi i\omega}{c^2}j_\omega, \tag{2.1}$$

где

$$\rho_\omega = q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = q\frac{\delta(r')}{r'}, \tag{2.2}$$

$$r' = \sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\varphi}. \tag{2.3}$$

Для Фурье-компонент:

$$j = \int_{-\infty}^{\infty} j_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \ j_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} j e^{i\omega t} dt, \tag{2.4}$$

$$j_\omega = \frac{q}{2\pi} e^{-\frac{i\omega}{v}z} \frac{\delta(r')}{2\pi r'}. \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{\tilde\varepsilon}\frac{\partial \rho_\omega}{\partial r} &= \frac{q}{\pi v} e^{-\frac{i\omega}{v}z} \frac{\partial}{\partial r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty J_m(\lambda r) J_m(\lambda r_0) d\lambda = \\
&= \frac{q}{2\pi v\tilde\varepsilon} e^{-\frac{i\omega}{v}z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty J_m(\lambda r_0) \left[J_{m-1}(\lambda r) - J_{m+1}(\lambda r)\right] \lambda d\lambda \qquad (2.6) \\
\frac{4\pi}{\tilde\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial \rho_\omega}{\partial \varphi} &= \frac{q}{2\pi \tilde\varepsilon r} e^{-\frac{i\omega}{v}z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} im \int_0^\infty J_m(\lambda r) J_m(\lambda r_0) \lambda d\lambda = \\
&= \frac{iq}{2\pi v\tilde\varepsilon} e^{-\frac{i\omega}{v}z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty J_m(\lambda r_0) \left[J_{m-1}(\lambda r) + J_{m+1}(\lambda r)\right] \lambda d\lambda \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Решение неоднородных уравнений ищем в виде

$$E^{(0)}_{\omega r} = \frac{q}{2\pi v\tilde\varepsilon} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \left[B_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda r) - C_m(\lambda) J_{m-1}(\lambda r)\right] \lambda^2 d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z}, \tag{2.8}$$

$$E^{(0)}_{\omega \varphi} = -\frac{iq}{2\pi v\tilde\varepsilon} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \left[B_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda r) + C_m(\lambda) J_{m-1}(\lambda r)\right] \lambda^2 d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z}, \tag{2.9}$$

$$E^{(0)}_{\omega z} = -\frac{i\omega q}{\pi v^2\tilde\varepsilon}(1-\beta^2\tilde\varepsilon) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty A^{(0)}_m(\lambda) J_m(\lambda r) \lambda d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z}. \tag{2.10}$$

Имеем

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_m(\lambda r)}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2} J_m(\lambda r) - \frac{\omega^2}{v^2} J_m(\lambda r) + (\lambda^2 - \lambda^2) J_m(\lambda r) + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde\varepsilon J_m(\lambda r)\right] A^{(0)}_m(\lambda) =$$
$$= -J_m(\lambda r) J_m(\lambda r_0),$$

так что

$$A^{(0)}_m(\lambda) = -\frac{J_m(\lambda r_0)}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2\tilde\varepsilon)}. \tag{2.11}$$

Два других уравнений имеют вид (1.6) и (1.7). Для $E^{(0)}_{\omega r}$ и $E^{(0)}_{\omega\varphi}$ получаем

$$E^{(0)}_{\omega r} = \frac{q}{2\pi v\tilde\varepsilon} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \left[B_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda r) - C_m(\lambda) J_{m-1}(\lambda r)\right] \lambda^2 d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z},$$

$$E^{(0)}_{\omega \varphi} = -\frac{iq}{2\pi v\tilde\varepsilon} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \left[B_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda r) + C_m(\lambda) J_{m-1}(\lambda r)\right] \lambda^2 d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z}.$$

$$\left(\Delta\vec{E}^{(0)}_\omega\right)_r + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}E^{(0)}_{\omega r} =$$
$$= \frac{q}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int_0^\infty B_m(\lambda)\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial J_{m+1}(\lambda r)}{\partial r}\right] - \frac{m^2}{r^2}J_{m+1}(\lambda r) - \frac{1}{r^2}J_{m+1}(\lambda r) -\right.$$
$$\left. -\frac{\omega^2}{v^2}J_{m+1}(\lambda r) + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}J_{m+1}(\lambda r) - \frac{2m}{r^2}J_{m+1}(\lambda r)\right\}\lambda d\lambda$$

$$\left(\Delta\vec{E}^{(0)}_\omega\right)_\varphi + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}E^{(0)}_{\omega\varphi} = \Delta E^{(0)}_{\omega\varphi} - \frac{E^{(0)}_{\omega\varphi}}{r^2} - \frac{1}{r^2}E^{(0)}_{\omega\varphi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial E^{(0)}_{\omega\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}E^{(0)}_{\omega\varphi} =$$
$$= -\frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int_0^\infty C_m(\lambda)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_{m-1}(\lambda r)}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}J_{m-1}(\lambda r) - \frac{1}{r^2}J_{m-1}(\lambda r) +\right.\right.$$
$$\left.\left. +\frac{2m}{r^2}J_{m-1}(\lambda r) - \frac{\omega^2}{v^2}J_{m-1}(\lambda r) + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}J_{m-1}(\lambda r) + \lambda^2 - \lambda^2\right)\right]\lambda d\lambda =$$
$$= -\frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int_0^\infty C_m(\lambda)\left(-\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}\right)\lambda d\lambda.$$

Откуда

$$C_m(\lambda) = \mathcal{B}_m(\lambda) = \frac{J_m(\lambda r_0)}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2\tilde{\varepsilon})}. \tag{2.12}$$

3 Граничные условия

Обозначим

$$\begin{aligned} \overset{-}{E}{}^{(1)}_{\omega\varphi} &= E^{(1)}_{\omega\varphi} \text{ при } R > R_0, \\ \overset{=}{E}{}^{(1)}_{\omega\varphi} &= E^{(1)}_{\omega\varphi} \text{ при } R < R_0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \overset{-}{E}{}^{(1)}_{\omega\theta} &= E^{(1)}_{\omega\theta} \text{ при } R > R_0, \\ \overset{=}{E}{}^{(1)}_{\omega\theta} &= E^{(1)}_{\omega\theta} \text{ при } R < R_0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Граничные условия

$$\left[E^{(0)}_{\omega\varphi} + \overset{-}{E}{}^{(1)}_{\omega\varphi}\right]\Bigg|_{R=R_0+0} = \overset{=}{E}{}^{(1)}_{\omega\varphi}\Bigg|_{R=R_0-0} \tag{3.3}$$

$$\left[E^{(0)}_{\omega\theta} + \overset{-}{E}{}^{(1)}_{\omega\theta}\right]\Bigg|_{R=R_0+0} = \overset{=}{E}{}^{(1)}{}_{\omega\theta}\Bigg|_{R=R_0-0} \tag{3.4}$$

(для дифракционного излучения) и

$$\left[E^{(0)}_{\omega\varphi} + \overset{=}{E}{}^{(1)}_{\omega\varphi}\right]\Bigg|_{R=R_0-0} = \overset{-}{E}{}^{(1)}_{\omega\varphi}\Bigg|_{R=R_0+0} \tag{3.5}$$

$$\left[E^{(0)}_{\omega\theta} + \overset{=}{E}{}^{(1)}_{\omega\theta}\right]\Bigg|_{R=R_0-0} = \overset{-}{E}{}^{(1)}_{\omega\theta}\Bigg|_{R=R_0+0} \tag{3.6}$$

(для переходного излучения при $v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$).

Кроме граничных условий должны выполняться условия:

$$\mathrm{div}\ \vec{E}^{(1)}_{\omega} = 0 \text{ при } z > 0 \text{ и } z < 0, \tag{3.7}$$

и условия излучения на бесконечности.

Дивергенция в цилиндрических координатах [1]

$$\mathrm{div}\ \vec{E}^{(1)}_{\omega} = \frac{\partial E^{(1)}_{\omega r}}{\partial r} + \frac{E^{(1)}_{\omega r}}{r} + \frac{1}{r}\frac{E^{(1)}_{\omega\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial E^{(1)}_{\omega z}}{\partial z}. \tag{3.8}$$

Используя рекуррентные формулы для функций Бесселя [2]

$$z\frac{d}{dz}Z_\nu(z) + \nu Z_\nu(z) = zZ_{\nu-1}(z), \tag{3.9}$$

$$z\frac{d}{dz}Z_\nu(z) - \nu Z_\nu(z) = -zZ_{\nu+1}(z), \tag{3.10}$$

получаем

$$\tilde{A}_m(\lambda) = \frac{\lambda v}{2q\omega(1-\beta^2\tilde{\varepsilon})}\left[\mathcal{D}_m(\lambda) + \mathcal{E}_m(\lambda)\right].$$

4 Решение задачи о дифракционном излучении заряда на диэлектрическом шаре

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{F}^{(1)}_{\omega m}(R,\theta) = E^{(0)}_{m\varphi} + \overset{-}{E}{}^{(1)}_{\omega\varphi} - \overset{=}{E}{}^{(1)}_{\omega\varphi}, \tag{4.1}$$

которую как функцию θ разложим в ряд присоединенных функций Лежандра на отрезке $0 \le \theta \le \pi$:

$$\mathcal{F}^{(1)}_{\omega m}(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(1)}_{\omega mn\varphi}(R)\mathcal{P}^{(m)}_n(\cos\theta), \tag{4.2}$$

где

$$e^{(1)}_{\omega mn\varphi}(R) = \frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^\pi \mathcal{F}^{(1)}_{\omega m}(R,\theta')\mathcal{P}^{(m)}_n(\cos\theta')\sin\theta' d\theta'. \tag{4.3}$$

Тогда граничное условие (3.3) примет вид:

$$C_{11}(\lambda)\mathcal{D}_{mn}(\lambda) + C_{12}(\lambda)\mathcal{E}_{mn}(\lambda) = b_1(\lambda), \tag{4.4}$$

где

$$
\begin{aligned}
C_{11}(\lambda) &= -\frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\int_0^\pi J_{m+1}(\lambda R_0\sin\theta)e^{i\tilde{\varkappa}R_0\cos\theta}\lambda\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\sin\theta d\theta & (4.5)\\
C_{12}(\lambda) &= \frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\int_0^\pi J_{m-1}(\lambda R_0\sin\theta)e^{i\tilde{\varkappa}R_0\cos\theta}\lambda\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\sin\theta d\theta, & (4.6)\\
b_1(\lambda) &= \frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\int_0^\pi [B_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda R_0\sin\theta)+C_m(\lambda)J_{m-1}(\lambda R_0\sin\theta)]\times\\
&\times\lambda^2 e^{-i\frac{\omega}{v}R_0\cos\theta}\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\sin\theta d\theta. & (4.7)
\end{aligned}
$$

Уравнение (3.4) принимает вид:

$$
C_{21}(\lambda)\mathcal{D}_{mn}(\lambda)+C_{22}(\lambda)\mathcal{E}_{mn}(\lambda)=b_2(\lambda), \tag{4.8}
$$

где

$$
C_{21}(\lambda)=\frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\int_0^\pi e^{i\tilde{\varkappa}R_0\cos\theta}\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\sin\theta\left[J_{m+1}(\lambda R_0\sin\theta)-\sin\theta J_m(\lambda R_0\sin\theta)\frac{\lambda v}{2q\omega}\right]d\theta, \tag{4.9}
$$

$$
C_{22}(\lambda)=\frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\int_0^\pi \lambda e^{i\tilde{\varkappa}R_0\cos\theta}\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\sin\theta\left[J_{m-1}(\lambda R_0\sin\theta)-\frac{\lambda v}{2q\omega}\cos\theta J_m(\lambda R_0\sin\theta)\sin\theta\right]d\theta, \tag{4.10}
$$

$$
\begin{aligned}
b_2(\lambda) &= \frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\int_0^\pi [B_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda R_0\sin\theta)-C_m(\lambda)J_{m-1}(\lambda R_0\sin\theta)]\times\\
&\times e^{-i\frac{\omega}{v}R_0\cos\theta}\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\sin\theta\left[\cos\theta-\frac{\lambda v}{2q\omega}\right]d\theta. & (4.11)
\end{aligned}
$$

5 Переходное излучение заряда на диэлектрическом шаре

Рассмотрим функцию

$$
\mathcal{F}_{\omega m}^{(3)}=E_{\omega\varphi}^{(0)}+\overset{=}{E}{}_{\omega\varphi}^{(1)}-\bar{E}_{\omega\varphi}^{(1)}, \tag{5.1}
$$

которую, как функцию θ, разложим в ряд по присоединенным функциям Лежандра

$$
\mathcal{F}_{\omega m}^{(3)}=\sum_{n=0}^{\infty}e_{\omega\varphi mn}^{(3)}(R)\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta), \tag{5.2}
$$

где

$$
e_{\omega\varphi mn}^{(3)}(R)=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^\pi\mathcal{F}_{\omega m}^{(3)}(R,\theta)\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\sin\theta d\theta. \tag{5.3}
$$

Из граничных условий получаем

$$
e_{\omega\varphi mn}^{(3)}(R_0)=0, \tag{5.4}
$$

то есть

$$G_{11}(\lambda)\mathcal{D}_{mn}(\lambda)+G_{12}(\lambda)\mathcal{E}_{mn}(\lambda)=H_1(\lambda), \tag{5.5}$$

где

$$G_{11}(\lambda) = -\frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int_0^{\pi}J_{m+1}(\lambda r)e^{i\tilde{\varkappa}R_0\cos\theta}\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\sin\theta d\theta \tag{5.6}$$

$$C_{12}(\lambda) = -\frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\int_0^{\pi}J_{m-1}(\lambda R_0\sin\theta)e^{i\tilde{\varkappa}R_0\cos\theta}\lambda\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\sin\theta d\theta \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} H_1(\lambda) &= -\frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\int_0^{\pi}\left[B_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda R_0\sin\theta)+C_m(\lambda)J_{m-1}(\lambda R_0\sin\theta)\right]\times \\ &\times\lambda^2e^{-i\frac{\omega}{v}R_0\cos\theta}\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\sin\theta d\theta. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Граничное условие

$$e^{(2)}_{\omega mn\theta}(R_0)=0.$$

приводится к уравнению

$$G_{21}(\lambda)\mathcal{D}_{mn}(\lambda)+G_{22}(\lambda)\mathcal{E}_{mn}(\lambda)=H_2(\lambda) \tag{5.9}$$

где

$$G_{21}(\lambda)=-\frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\int_0^{\pi}e^{i\tilde{\varkappa}R_0\cos\theta}\lambda\sin\theta\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\left[J_{m+1}(\lambda R_0\sin\theta)\cos\theta+\sin\theta J_m(\lambda R_0\sin\theta)\frac{\lambda v}{2q\omega}\right]d\theta, \tag{5.10}$$

$$G_{22}(\lambda)=-\frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\int_0^{\pi}e^{i\tilde{\varkappa}R_0\cos\theta}\lambda\sin\theta\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\left[\cos\theta J_{m-1}(\lambda R_0\sin\theta)+\sin\theta J_m(\lambda R_0\sin\theta)\frac{\lambda v}{2q\omega}\right]d\theta, \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} H_2(\lambda)=&\frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\int_0^{\pi}\left[B_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda R_0\sin\theta)-C_m(\lambda)J_{m-1}(\lambda R_0\sin\theta)\right]\times \\ &\times\lambda\cos\theta e^{-i\frac{\omega}{v}R_0\cos\theta}\mathcal{P}_n^{(m)}(\cos\theta)\sin\theta\left[\cos\theta e^{-i\frac{\omega}{v}R_0\cos\theta}+\frac{\lambda v}{2q\omega}J_m(\lambda R_0\sin\theta)\right]d\theta. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Если $v>\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$, то при движении заряда внутри шара возникает излучение Вавилова-Черенкова под углом θ_1 к траектории движения заряда, причем

$$\cos\theta_1=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}v}. \tag{5.13}$$

В заключение авторы выражают благодарность своей дочери Каликинской Екатерине Игоревне за помощь в оформлении рукописи.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. Т. 8. 620 с.

[2] *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1953. 1097 с.

[3] *Иваненко Д., Соколов А. И.С.* Классическая теория поля. М. Л.: Гостехиздат, 1949. 432 с.

[4] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. В. 4. С. 6–12.