Переходное и дифракционное (при $v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$) излучение заряда на диэлектрическом шаре

И.И.Каликинский

Аннотация

Решена задача о переходном и дифракционном излучении заряда на диэлектрическом шаре, диэлектрическая проницаемость которого ε не зависит от частоты. Указанная задача сведена к решению двух линейных неоднородных алгебраических уравнений с двумя неизвестными, которые следуют из граничных условий. Показано, что при $\varepsilon \to \infty$ наш результат переходит в результат о переходном и дифракционном излучении заряда на идеально проводящем шаре. Библиография: 5 названия.

1 Введение

Впервые задача о переходном излучении заряда на идеально проводящем шаре была решена в работе [4], в которой предполагалось, что траектория заряда проходит через центр шара и скорость заряда мала по сравнению со скоростью света в вакууме (дипольное излучение), так что можно использовать метод изображений, что и было сделано в работе [4].

Затем появилась работа автора [5], в которой решалась та же задача без предположений работы [4]. Было показано, что в случае, когда прицельное расстояние равно нулю и скорость заряда мала, энергия излучения совпадает с результатом Аскарьяна Г.А. [4].

Рассмотрим теперь диэлектрический шар радиуса R_0, диэлектрическая проницаемость которого не зависит от частоты и равна ε. Параллельно оси z равномерно движется точечный заряд q, создавая ток с плотностью $\vec{j}(0,0,-j)$, где

$$j = qv\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z+vt). \tag{1.1}$$

Скорость заряда $\vec{v}(0,0,-v) = \text{const}$.

Поля находятся из уравнений Максвелла, которые для Фурье-компонент имеют вид

$$\begin{aligned} \text{div}\ \vec{E}_\omega &= \frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\rho_\omega,\ \text{rot}\ \vec{E}_\omega = \frac{i\omega}{c}\vec{H}_\omega \\ \text{div}\ \vec{H}_\omega &= 0,\ \text{rot}\ \vec{H}_\omega = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_\omega - \frac{i\omega}{c}\tilde{\varepsilon}\vec{E}_\omega, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$,

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon > 1 & \text{при } R \le R_0 \\ 1 & \text{при } R > R_0 \end{cases}. \tag{1.3}$$

Фурье-компоненты полей имеют вид (для дифракционного излучения и переходного излучения при $v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$)

$$\vec{E}_\omega = \vec{E}_\omega^{(0)} + \vec{E}_\omega^{(1)}, \tag{1.4}$$

где индекс 0 относится к полю заряда, а индекс 1 – к полю излучения.

Уравнения Максвелла (1.2) сводятся к неоднородному векторному волновому уравнению

$$\Delta\vec{E}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}\vec{E}_\omega = \frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\,\mathrm{grad}\ \rho_\omega - \frac{4\pi i\omega}{c^2}\vec{j}_\omega. \tag{1.5}$$

При $\varepsilon \to \infty$ получаем из (1.5) уравнение для $\vec{E}_\omega$ идеально проводящего шара.

Уравнение (1.5) в цилиндрических координатах имеет вид [3], [1]

$$\begin{aligned} \left(\Delta\vec{E}_\omega\right)_r + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}E_{\omega r} &= \frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\frac{\partial\rho_\omega}{\partial r} && (1.6)\\ \left(\Delta\vec{E}_\omega\right)_\varphi + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}E_{\omega\varphi} &= \frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}r}\frac{\partial\rho_\omega}{\partial\varphi} && (1.7)\\ \left(\Delta\vec{E}_\omega\right)_z &= \Delta E_{\omega z}, && (1.8) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (\Delta\vec{E}_\omega)_r &= \Delta E_{\omega r} - \frac{E_{\omega r}}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_{\omega\varphi}}{\partial\varphi} && (1.9)\\ (\Delta\vec{E}_\omega)_\varphi &= \Delta E_{\omega\varphi} - \frac{E_{\omega\varphi}}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_{\omega r}}{\partial\varphi} && (1.10)\\ \Delta E_{\omega z} &+ \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}E_{\omega z} = \frac{4\pi i\omega}{c^2}j_\omega + \frac{4\pi i\omega}{\tilde{\varepsilon}v}\frac{\partial j_\omega}{\partial z}. && (1.11) \end{aligned}$$

Имеем [5]

$$j_\omega = \frac{q}{4\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int_0^\infty J_m(\lambda r_0)J_m(\lambda r)\lambda d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z}. \tag{1.12}$$

Решение однородного уравнения ($\rho_\omega = 0$) (1.6), (1.7) ищем в виде

$$E^{(1)}_{\omega r} = F_r(r)e^{im\varphi + i\tilde{\varkappa}z},\ E^{(1)}_{\omega\varphi} = F_\varphi(r)e^{im\varphi + i\tilde{\varkappa}z},$$

где

$$\begin{aligned} \varkappa &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^2},\ \mathrm{Im}\ \varkappa > 0,\ \varkappa_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \lambda^2},\ \mathrm{Im}\ \varkappa_1 > 0, && (1.13)\\ \tilde{\varkappa} &= \begin{cases}\varkappa_1,\ \text{при } R < R_0,\\ \varkappa,\ \text{при } R > R_0.\end{cases} \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2F_r(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_r(r)}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varkappa}^2 - \frac{m^2+1}{r^2}\right)F_r(r) + \frac{2im}{r^2}F_\varphi(r) &= 0, && (1.14)\\ \frac{d^2F_\varphi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_\varphi(r)}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varkappa}^2 - \frac{m^2+1}{r^2}\right)F_\varphi(r) - \frac{2im}{r^2}F_r(r) &= 0. && (1.15) \end{aligned}$$

Уравнение для $F_z(r)$ имеет вид

$$\frac{d^2F_z(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_z(r)}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varkappa}^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)F_z(r) = 0. \tag{1.16}$$

Решение системы уравнений (1.14), (1.15) имеет вид [1]

$$\begin{aligned} 1)\ F_r(r) &= Z_{m+1}(x),\ F_\varphi(r) = iZ_{m+1}(x), && (1.17)\\ 2)\ F_r(r) &= Z_{m-1}(x),\ F_\varphi(r) = -iZ_{m-1}(x), && (1.18)\\ 3)\ F_z(r) &= Z_m(x), && (1.19)\end{aligned}$$

где $Z_{m-1}(x),\ Z_m(x),\ Z_{m+1}(x)$ – цилиндрические функции,

$$x = r\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varkappa}^2} = \lambda r. \tag{1.20}$$

В случае среды с диэлектрической проницаемостью ε имеем при $z > 0$

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega r} = \frac{q}{2\pi v\varepsilon}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int_0^\infty \left[\tilde{\mathcal{D}}_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda r) - \tilde{\mathcal{E}}_m(\lambda)J_{m-1}(\lambda r)\right] e^{i\varkappa_1 z}\lambda d\lambda \tag{1.21}$$

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega\varphi} = -\frac{iq}{2\pi v\varepsilon}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int_0^\infty \left[\tilde{\mathcal{D}}_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda r) + \tilde{\mathcal{E}}_m(\lambda)J_{m-1}(\lambda r)\right] e^{i\varkappa_1 z}\lambda d\lambda \tag{1.22}$$

$$\tilde{E}^{(1)}_{\omega z} = -\frac{i\omega q}{\pi v^2\varepsilon}(1-\beta^2\varepsilon)\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int_0^\infty \widetilde{\mathcal{A}}_m(\lambda)J_m(\lambda r)e^{i\varkappa_1 z}\lambda d\lambda. \tag{1.23}$$

$E^{(1)}_{\omega r},\ E^{(1)}_{\omega\varphi},\ E^{(1)}_{\omega z}$ при $z < 0$ получаются из (1.21), (1.22), (1.23), если заменить $\varkappa_1$ на $-\varkappa_1$, а знак $\sim$ на знак $\approx$.

Согласно (1.6), (1.9)

$$\begin{aligned} &(\Delta\vec{E}_\omega)_r + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}\vec{E}_{\omega r} = \\ =\ &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E^{(1)}_{\omega r}}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}E^{(1)}_{\omega r} - \frac{1}{r^2}E^{(1)}_{\omega r} - \varkappa_1^2 E^{(1)}_{\omega r} + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}E^{(1)}_{\omega r} - \frac{2m}{r^2}E^{(1)}_{\omega\varphi}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Подставляя сюда (1.21) и (1.22), получаем коэффициент при $\tilde{\mathcal{D}}_m(\lambda)$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_{m+1}(\lambda r)}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}J_{m+1}(\lambda r) - \frac{J_{m+1}(\lambda r)}{r^2} - \left(\tilde{\varkappa}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}\right)J_{m+1}(\lambda r) - \frac{2m}{r^2}J_{m+1}(\lambda r), \tag{1.25}$$

что равно нулю согласно уравнению Бесселя.

Коэффициент при $\tilde{\mathcal{E}}_m(\lambda)$ равен

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_{m-1}(\lambda r)}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}J_{m-1}(\lambda r) - \frac{J_{m-1}(\lambda r)}{r^2} + \lambda^2 J_{m-1}(\lambda r) + \frac{2m}{r^2}J_{m-1}(\lambda r), \tag{1.26}$$

что равно нулю согласно уравнению Бесселя. Таким образом, (1.21), (1.22), (1.23) являются решениями однородных уравнений (1.6), (1.7), (1.8). при любых $\tilde{\mathcal{D}}_m(\lambda)$ и $\tilde{\mathcal{E}}_m(\lambda)$ (при $\rho_\omega = 0$).

2 Решение неоднородного уравнения (1.5)

Правая часть уравнения (1.5) в проекциях на цилиндрические орты (r, φ, z) имеет вид

$$\frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\frac{\partial\rho_\omega}{\partial r},\ \frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\frac{1}{r}\frac{\partial\rho_\omega}{\partial\varphi},\ \frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\frac{\partial\rho_\omega}{\partial z}+\frac{4\pi i\omega}{c^2}j_\omega, \tag{2.1}$$

где

$$\rho_\omega = q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = q\frac{\delta(r')}{r'}, \tag{2.2}$$

$$r' = \sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\varphi}. \tag{2.3}$$

Для Фурье-компонент:

$$j = \int_{-\infty}^{\infty} j_\omega e^{-i\omega t}d\omega,\ j_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} je^{i\omega t}dt, \tag{2.4}$$

$$j_\omega = \frac{q}{2\pi}e^{-\frac{i\omega}{v}z}\frac{\delta(r')}{2\pi r'}. \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\frac{\partial\rho_\omega}{\partial r} &= \frac{q}{\pi v\tilde{\varepsilon}}e^{-\frac{i\omega}{v}z}\frac{\partial}{\partial r}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int_0^\infty J_m(\lambda r)J_m(\lambda r_0)d\lambda = \\ &= \frac{q}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}e^{-\frac{i\omega}{v}z}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int_0^\infty J_m(\lambda r_0)\left[J_{m-1}(\lambda r)-J_{m+1}(\lambda r)\right]\lambda^2 d\lambda \qquad (2.6)\\ \frac{4\pi}{\tilde{\varepsilon}}\frac{1}{r}\frac{\partial\rho_\omega}{\partial\varphi} &= \frac{q}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}e^{-\frac{i\omega}{v}z}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}im\int_0^\infty J_m(\lambda r)J_m(\lambda r_0)\lambda^2 d\lambda = \\ &= \frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}e^{-\frac{i\omega}{v}z}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int_0^\infty J_m(\lambda r_0)\left[J_{m-1}(\lambda r)+J_{m+1}(\lambda r)\right]\lambda^2 d\lambda \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Решение неоднородных уравнений ищем в виде

$$E_{\omega r}^{(0)} = \frac{q}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int_0^\infty\left[B_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda r)-C_m(\lambda)J_{m-1}(\lambda r)\right]\lambda^2 d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z}, \tag{2.8}$$

$$E_{\omega\varphi}^{(0)} = -\frac{iq}{2\pi v\tilde{\varepsilon}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int_0^\infty\left[B_m(\lambda)J_{m+1}(\lambda r)+C_m(\lambda)J_{m-1}(\lambda r)\right]\lambda^2 d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z}, \tag{2.9}$$

$$E_{\omega z}^{(0)} = -\frac{i\omega q}{\pi v^2\tilde{\varepsilon}}(1-\beta^2\tilde{\varepsilon})\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int_0^\infty A_m^{(0)}(\lambda)J_m(\lambda r)\lambda d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z}. \tag{2.10}$$

Имеем из (1.11)

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_m(\lambda r)}{\partial r}\right)-\frac{m^2}{r^2}J_m(\lambda r)-\frac{\omega^2}{v^2}J_m(\lambda r)+\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}J_m(\lambda r)\right]A_m^{(0)}(\lambda) = \\ &= -J_m(\lambda r)J_m(\lambda r_0),\end{aligned}$$

так что

$$A_m^{(0)}(\lambda) = -\frac{J_m(\lambda r_0)}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2\tilde{\varepsilon})}. \tag{2.11}$$

Два других уравнения имеют вид (1.6) и (1.7). Далее получаем

$$\begin{aligned}
&\left(\Delta\vec{E}_\omega^{(0)}\right)_r + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}E_{\omega r}^{(0)} = \\
&= \frac{q}{2\pi v\tilde{\varepsilon}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \left\{ B_m(\lambda) \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial J_{m+1}(\lambda r)}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}J_{m+1}(\lambda r) - \frac{1}{r^2}J_{m+1}(\lambda r) - \right.\right. \\
&\left. - \frac{\omega^2}{v^2}J_{m+1}(\lambda r) + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}J_{m+1}(\lambda r) - \frac{2m}{r^2}J_{m+1}(\lambda r)\right] - C_m(\lambda)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_{m+1}(\lambda r)}{\partial r}\right) - \right. \\
&\left.\left. - \frac{m^2}{r^2}J_{m-1}(\lambda r) - \frac{1}{r^2}J_{m-1}(\lambda r) - \frac{\omega^2}{v^2}J_{m-1}(\lambda r) - \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}J_{m-1}(\lambda r) + \frac{2m}{r^2}J_{m-1}(\lambda r)\right]\right\} \lambda^2 d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z} = \\
&= \frac{q}{2\pi v\tilde{\varepsilon}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} \int_0^\infty \left[B_m(\lambda)\left(-\lambda^2 - \frac{\omega^2}{v^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}\right) J_{m+1}(\lambda r) - \right. \\
&\left. - C_m(\lambda)\left(-\lambda^2 - \frac{\omega^2}{v^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}\right) J_{m-1}(\lambda r)\right] \lambda^2 d\lambda e^{-i\frac{\omega}{v}z}.
\end{aligned}$$

Из (2.6) и (1.6) получаем

$$B_m(\lambda) = C_m(\lambda) = \frac{J_m(\lambda r_0)}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2\tilde{\varepsilon})}. \tag{2.12}$$

Тот же результат получается из (2.7) и (1.7).

3 Граничные условия

Обозначим

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{\omega\varphi} &= E_{\omega\varphi} \text{ при } R > R_0, \\
\bar{\bar{E}}_{\omega\varphi} &= E_{\omega\varphi} \text{ при } R < R_0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{\omega\theta} &= E_{\omega\theta} \text{ при } R > R_0, \\
\bar{\bar{E}}_{\omega\theta} &= E_{\omega\theta} \text{ при } R < R_0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Тогда граничные условия примут вид

$$\left[\bar{E}_{\omega\varphi}^{(0)} + \bar{E}_{\omega\varphi}^{(1)}\right]\Big|_{R=R_0} = \left[\bar{\bar{E}}_{\omega\varphi}^{(0)} + \bar{\bar{E}}_{\omega\varphi}^{(1)}\right]\Big|_{R=R_0} \tag{3.3}$$

$$\left[\bar{E}_{\omega\theta}^{(0)} + \bar{E}_{\omega\theta}^{(1)}\right]\Big|_{R=R_0} = \left[\bar{\bar{E}}^{(0)}{}_{\omega\theta} + \bar{\bar{E}}^{(1)}{}_{\omega\theta}\right]\Big|_{R=R_0} \tag{3.4}$$

для переходного и дифракционного излучения при $v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Переход к идеально проводящему шару получим при $\varepsilon \to \infty$. Тогда

$$E^{(0)}_{\omega\varphi} \to 0,\ E^{(1)}_{\omega\varphi} \to 0,\ E^{(0)}_{\omega\theta} \to 0,\ E^{(1)}_{\omega\theta} \to 0$$

и граничные условия примут вид

$$\left[E^{(0)}_{\omega\varphi} + E^{(1)}_{\omega\varphi}\right]\Big|_{R=R_0+0} = 0,\ \left[E^{(0)}_{\omega\theta} + E^{(1)}_{\omega\theta}\right]\Big|_{R=R_0+0} = 0 \tag{3.5}$$

а внутри шара поле отсутствует и получаем задачу об идеально проводящем шаре [5].

Кроме граничных условий должны выполняться условия:

$$\mathrm{div}\ \vec{E}^{(1)}_{\omega} = 0 \text{ при } z > 0 \text{ и } z < 0, \tag{3.6}$$

и условия излучения на бесконечности.

Дивергенция в цилиндрических координатах [1]

$$\mathrm{div}\ \vec{E}^{(1)}_{\omega} = \frac{\partial E^{(1)}_{\omega r}}{\partial r} + \frac{E^{(1)}_{\omega r}}{r} + \frac{1}{r}\frac{E^{(1)}_{\omega\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial E^{(1)}_{\omega z}}{\partial z}. \tag{3.7}$$

Используя рекуррентные формулы для функций Бесселя [2]

$$z\frac{d}{dz}Z_v(z) + vZ_v(z) = zZ_{v-1}(z), \tag{3.8}$$

$$z\frac{d}{dz}Z_v(z) - vZ_v(z) = -zZ_{v+1}(z), \tag{3.9}$$

получаем

$$\tilde{A}_m(\lambda) = \frac{\lambda v}{2\omega\varkappa}\left[\mathcal{D}_m(\lambda) + \mathcal{E}_m(\lambda)\right].$$

В заключение автор выражает благодарность Бескину В.С. за обсуждение и своей дочери Каликинской Екатерине Игоревне за помощь в оформлении рукописи.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. Т. 8. 620 с.

[2] *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1953. 1097 с.

[3] *Иваненко Д., Соколов А. И.С.* Классическая теория поля. М. Л.: Гостехиздат, 1949. 432 с.

[4] *Аскарьян Г.А.* // ЖЭТФ. 1955. Т. 29.. С. 388.

[5] *Каликинский И.И.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. В. 4. С. 6–12.

109387, г.Москва, ул. Люблинская, д. 111Б, корп.1, кв.110.
тел.: 915-490-91-82, 495-350-45-50

/Каликинский И.И./