Теория множеств
Лекция 10
Турбулентные отношения эквивалентности

Владимир Григорьевич Кановей (ИППИ)

Осень 2023, МИАН Москва

http://iitp.ru/ru/userpages/156/300.htm
скачиваются файлы лекций и литература

kanovei@iitp.ru — email для контактов

https://www.mathnet.ru/conf2305
сайт курса на mathnet

Литература

КЛ-1 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики*

K-AMS Kanovei, *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification*, AMS University Lecture Series.

Kechris *Descriptive set theory*

Jech03 *Millenium*

Mos Moschovakis, *Descriptive set theory*

Йех73 *Теория множеств и метод форсинга*

КЛ-2 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*

КЛ-3 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы*

Кур-1 Куратовский, *Топология том 1*

СКМЛ *Справочная книга по математической логике том 2*: *теория множеств.*

Натуральный ряд $\mathbb{N} = \omega$.

Бэровское пространство $\mathcal{N} = \omega^\omega$.

Бэровское произведение = любое $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$.

Множества $X \subseteq \mathbb{P}$ — точечные множества.

Борелевские мн-ва $X \subseteq \mathbb{P}$, $\mathbf{\Sigma}^0_1$ = открытые, $\mathbf{\Pi}^0_1$ = замкнутые.

Проективные множества $X \subseteq \mathbb{P}$, классы $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$.

Эффективная иерархия, классы Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n.

$\omega^{<\omega} = \bigcup_n \omega^n$ — **кортежи** натуральных чисел.

$\mathbf{lh}(s)$ — **длина** кортежа s, т. е. $s \in \omega^n \Longrightarrow \mathbf{lh}(s) = n$.

$s \subset t$ — **строгое продолжение** кортежей.

$\Lambda = \varnothing$ — **пустой** кортеж, $\mathbf{lh}(\Lambda) = 0$.

Соглашение 1 (реляционная запись)

Множества в бэровских произведениях $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$ часто рассматриваются в виде **отношений**, т. е. если к примеру $R \subseteq \omega \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ то $\langle k, x, y \rangle \in R$ и $R(k, x, y)$ означают одно и то же.

Это позволяет использовать логические операции вместо теоретико-множественных, что бывает более удобно.

Соглашение 2 (в контексте Соглашения 1)

Буквы $k, l, m, n, i, j, \ldots$: натуральные числа и переменные по ω.

Буквы $x, y, z, a, b, p, q, \ldots$: точки $\mathcal{N} = \omega^\omega$ и переменные по $\mathcal{N}$.

$$[x]_{\mathbf{E}} = \{y \in X : y \mathbin{\mathbf{E}} x\} \quad \text{для } x \in X \quad (\mathbf{E}\text{-класс } x)$$

$$X/\mathbf{E} = \{[x]_{\mathbf{E}} : x \in X\} \quad \text{фактор-множество}$$

$$x \longmapsto [x]_{\mathbf{E}} \ - \ \text{каноническая проекция } X \text{ на } X/\mathbf{E}$$

$$[Y]_{\mathbf{E}} = \textstyle\bigcup_{x \in Y} [x]_{\mathbf{E}} \quad \text{для } Y \subseteq X \quad (\mathbf{E}\text{-насыщение } Y)$$

$$Y \mathbin{\mathbf{E}} Y' \ - \ \text{означает, что } [Y]_{\mathbf{E}} = [Y']_{\mathbf{E}}\,.$$

Множество $Y \subseteq X$:

- **E**-инвариантно если $[Y]_{\mathbf{E}} = Y$ (сумма полных **E**-классов);
- попарно **E**-неэквивалентно если $y \not\mathrel{\mathbf{E}} y'$ для всех $y \ne y'$ в Y;
- **E**-трансверсаль если $[Y]_{\mathbf{E}} = X$ и Y попарно **E**-неэквивалентно.
- **E**-селектор — любая $f : X \to X$ удовлетворяющая $f(x) \in [x]_{\mathbf{E}}$ и $x \mathbin{\mathbf{E}} y \Longrightarrow f(x) = f(y)$ для всех $x, y \in X$.

Определение

Пусть E, F — отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотв., X, Y в польских пространствах.
Тогда $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ означает, что $\exists$ борелевская редукция E к F,
т. е. борелевское отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее
$x \mathrel{\mathsf{E}} x' \iff f(x) \mathrel{\mathsf{F}} f(x')$ — для всех $x, x' \in X$.

Отношение $\leqslant_{\mathrm{B}}$ (борелевская сводимость) рассматривается как достаточно разумный способ сравнения сложности отношений эквивалентности и числа классов эквивалентности.

Производные отношения:

$\mathsf{E} \sim_B \mathsf{F}$, если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ и $\mathsf{F} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ борелевская би-сводимость

$\mathsf{E} <_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ но $\mathsf{F} \not\leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ строгая борел. сводимость

Определение

Пусть E, F — отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотв., X, Y в польских пространствах.
Тогда $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ означает, что $\exists$ борелевская редукция E к F,
т. е. борелевское отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее
$x \mathrel{\mathsf{E}} x' \iff f(x) \mathrel{\mathsf{F}} f(x')$ — для всех $x, x' \in X$.

Отношение $\leqslant_{\mathrm{B}}$ (борелевская сводимость) рассматривается как достаточно разумный способ сравнения сложности отношений эквивалентности и числа классов эквивалентности.

Производные отношения:

$\mathsf{E} \sim_B \mathsf{F}$, если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ и $\mathsf{F} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ борелевская би-сводимость

$\mathsf{E} <_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ но $\mathsf{F} \not\leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ строгая борел. сводимость

E_0 отношение эквивалентности на $2^\omega \subseteq \mathcal{N}$: $x \,\mathsf{E}_0\, y$, когда $x(n) = y(n)$ для почти всех (= кроме конечного числа) n.

E_1 отношение эквивалентности на $(2^\omega)^\omega$: $x \,\mathsf{E}_1\, y$, когда $x(n) = y(n)$ для почти всех n.

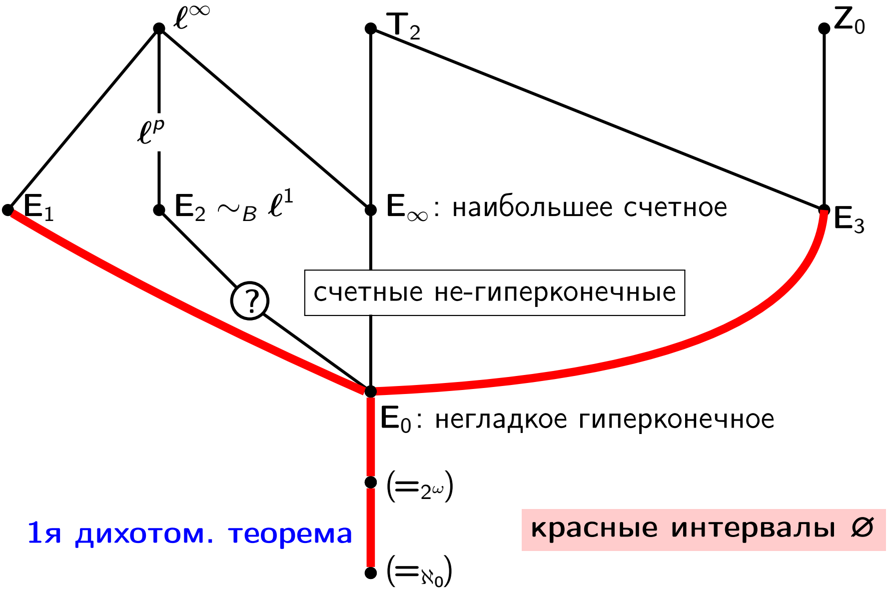
E_3 отношение эквивалентности на $(2^\omega)^\omega$: $x \,\mathsf{E}_3\, y$, когда $x(n) \,\mathsf{E}_0\, y(n)$ для всех n.

T_2 отношение экв-ти на $(2^\omega)^\omega$: $x \,\mathsf{T}_2\, y$, когда $\mathtt{ran}\, x = \mathtt{ran}\, y$:

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, \dots \rangle \ \mathsf{T}_2\ \langle x_2, x_1, x_4, x_3, \dots \rangle \ \mathsf{T}_2\ \langle x_1, x_1, x_2, x_3, x_3, x_3, x_4, x_4, x_4, \dots \rangle$$

Z_0 отношение эквивалентности на 2^ω по плотности 0: $x \,\mathsf{Z}_0\, y$, когда $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathtt{card}\{k < n : x(k) \neq y(k)\}}{n} = 0$

E_2 отношение эквивалентности на 2^ω по суммируемости: $x \,\mathsf{E}_2\, y$, когда $\sum_{k \ge 1,\, x(k) \neq y(k)} \frac{1}{k} < +\infty$.



ℓ^∞
T_2
Z_0
ℓ^p
E_1
$\mathsf{E}_2 \sim_B \ell^1$
E_∞: наибольшее счетное
E_3
?
счетные не-гиперконечные
E_0: негладкое гиперконечное
$(=_{2^\omega})$
$(=_{\aleph_0})$
1я дихотом. теорема
красные интервалы $\varnothing$

Для дальнейшего основные источники:

КЛ-1 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики*, глава 8.

K-AMS Kanovei, *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification*, AMS University Lecture Series.

Можно скачать с сайта
http://iitp.ru/ru/userpages/156/300.htm

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — счетный реляционный язык, где каждое R_n — реляционный символ арности $r(n)$. Тогда

$$\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}(\omega^{r(n)})$$

— пространство всех $\mathscr{L}$-структур с областью ω.

Пример

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2)$, где R_1 — бинарный, а R_2 — тернарный реляционный символ. Тогда $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \mathscr{P}(\omega^2) \times \mathscr{P}(\omega^3)$, так что $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ состоит из пар $\langle x_1, x_2 \rangle$, где $x_1 \subseteq \omega^2$ and $x_2 \subseteq \omega^3$, отождествляемых с реляционными структурами $\langle \omega\,; x_1, x_2 \rangle$.

Топологически $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ — компактное польское пространство, гомеоморфное канторову пространству 2^ω.

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — реляционный язык.

Если структуры $x, y \in \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ изоморфны через биекцию ω то пишем $x \cong_{\mathscr{L}} y$.

$$x \cong_{\mathscr{L}} y \iff \exists \boldsymbol{f} : \omega \xrightarrow{\text{на}} \omega \underbrace{(f \ \text{1-1} \wedge f \ \text{переводит } x \text{ в } y)}_{\text{арифметическое}}.$$

$\cong_{\mathscr{L}}$ является $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ отношением эквивалентности на $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$, которое называется *изоморфизм $\mathscr{L}$-структур*.

Через $\boldsymbol{S}_\infty$ обозначается *группа пермутаций*, т. е. всех биекций $g:\omega \xrightarrow{\text{на}} \omega$, с *суперпозицией* в роли операции.

Группа $\boldsymbol{S}_\infty$ есть $\mathbf{G}_\delta$ множество в $\mathcal{N}$, т. е. польское пространство.

Более того, $\boldsymbol{S}_\infty$ имеет совместимую польскую метрику,

$d(x,y)=r(x,y)+r(x^{-1},y^{-1})$, где r – польская метрика на $\mathcal{N}$,

т. е. является польской группой. Но инвариантной метрики нет.

Определение

Отношение эквивалентности $\mathbf{E}$ *классифицируемо счетными структурами*, если $\exists$ реляционный язык $\mathscr{L}$ такой, что $\mathbf{E}$ борелевски сводимо к $\cong_{\mathscr{L}}$, т. е. $\exists$ такая борелевская $f : X \to \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$, где $X =$ область $\mathbf{E}$, что $\forall x, y \in X\,(x \mathbf{E} y \iff f(x) \cong_{\mathscr{L}} f(y))$.

Теорема 1 (теорема 8.3 в [КЛ-1])

Всякое отношение эквивалентности, индуцированное польским действием замкнутой подгруппы $G \subseteq \boldsymbol{S}_\infty$ классифицируемо счетными структурами.

На схеме, $\mathbf{T}_2$ и всё что ниже классифицируемо счетными структурами. В частности, все счетные отношения, включая $\mathbf{E}_0$.

Определение (язык ориентированных графов)

Через $\mathscr{G} = \mathscr{L}(R)$ обозначается язык с единственным бинарным реляционным символом.

Т. обр., $\cong_{\mathscr{G}}$ — отношение изоморфизма множеств $x \in \mathscr{P}(\omega \times \omega)$, т. е. ориентированных графов на ω, через биекции ω.

Теорема 2 (теорема 8.7 в [КЛ-1])

Если $\mathscr{L}$ — реляционный язык, то $\cong_{\mathscr{L}}$ борелевски сводится к $\cong_{\mathscr{G}}$

Другими словами, одно бинарное отношение может кодировать структуры любого (счетного) языка.

Теорема

$(=_{2^\omega}) \leqslant_B \cong_{\mathscr{G}}$, *т. е. равенство на* 2^ω *классифицируемо счетными структурами* (в данном случае графами).

Упражнение: построить борелевскую редукцию отношения $\mathbf{E}_0$ к изоморфизму графов $\cong_{\mathscr{G}}$.

Сложное!

Счетная степень отношения эквивалентности E на множестве X определяется как отношение эквивалентности E^+ на X^ω:

$$x \ \mathsf{E}^+ \ y\,, \quad \text{когда} \quad [\{x(n) : n < \omega\}]_{\mathsf{E}} = [\{y(k) : k < \omega\}]_{\mathsf{E}}\,.$$

Борелевские отношения эквивалентности T_ξ определяются индукцией по $\xi < \omega_1$:

1. T_1 есть $(=_{2^\omega})$, равенство на пространстве 2^ω;
2. счетная степень: $\mathsf{T}_{\xi+1} = {\mathsf{T}_\xi}^+$;
3. дизъюнкт. объединение: если λ пределен, то $\mathsf{T}_\lambda = \bigvee_{\xi<\lambda} \mathsf{T}_\xi$,

т. е. $\operatorname{dom} \mathsf{T}_\lambda = \{\langle \xi, x\rangle : \xi < \lambda \wedge x \in \operatorname{dom} \mathsf{T}_\xi\}$,

и $\langle \xi, x\rangle \ \mathsf{T}_\lambda \ \langle \eta, y\rangle \iff \xi = \eta$ и $x \ \mathsf{T}_\xi \ y$.

Если $\xi < \eta < \omega_1$ то $\mathsf{T}_\xi <_{\mathsf{B}} \mathsf{T}_\eta$ строго!

Предложение (предложение 8.9 в [КЛ-1])

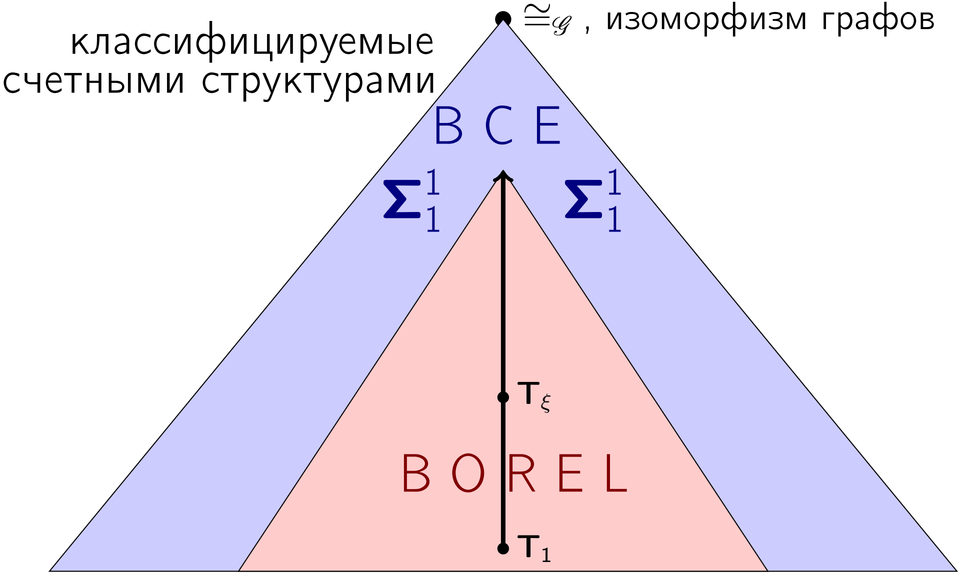
Все отношения $\mathbf{T}_\xi$ *классифицируемы счетными структурами.*

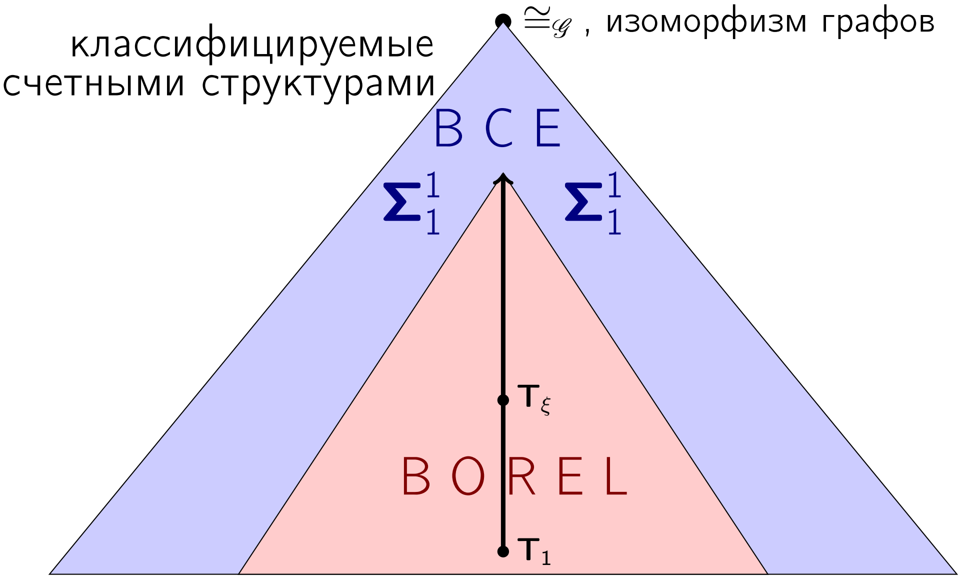
Теорема 3 (теорема 8.10 в [КЛ-1])

Если $\mathbf{E}$ *— борелевское отношение эквивалентности, классифицируемое счетными структурами, то* $\mathbf{E} \leqslant_B \mathbf{T}_\xi$ *для какого-то* $\xi < \omega_1$.

Напоминание: классифицируемость счетными структурами $=$ борелевская сводимость к $\cong_{\mathscr{L}}$, изоморфизму $\mathscr{L}$-структур, для какого-то счетного языка $\mathscr{L}$.

1. $\cong_{\mathscr{L}}$ это отношение эквивалентности, индуцированное логическим действием группы перестановок $\boldsymbol{S}_\infty$ on $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$.
2. Каждое отношение эквивалентности, индуцированное польским действием $\boldsymbol{S}_\infty$ или замкнутой подгруппы $\boldsymbol{S}_\infty$, классифицируемо счетными структурами по теореме 1.
3. Каждое отношение эквивалентности, классифицируемое счетными структурами, борелевски сводимо к отношению изоморфизма ориентированных графов $\cong_{\mathscr{G}}$ по теореме 2.
4. Каждое отношение эквивалентности T_ξ классифицируемо счетными структурами по предложению.
5. Каждое борелевское отношение эквивалентности E, классифицируемое счетными структурами, борелевски сводимо к одному из отношений T_ξ по теореме 3.


$\cong_{\mathscr{G}}$, изоморфизм графов
классифицируемые
счетными структурами
B C E
$\mathbf{\Sigma}^1_1$
$\mathbf{\Sigma}^1_1$
T_ξ
B O R E L
T_1


$\cong_{\mathscr{G}}$, изоморфизм графов
классифицируемые
счетными структурами
B C E
$\mathbf{\Sigma}^1_1$
$\mathbf{\Sigma}^1_1$
$\mathbf{T}_\xi$
B O R E L
$\mathbf{T}_1$

Теперь мы нассмотрим один тип неклассифицируемых отношений эквивалентности, которые называются турбулентными.

Главный результат состоит в том, что такие отношения не только не классифицируемы счетными структурами, но и борелевски не сводятся к последним.

Теперь мы нассмотрим один тип неклассифицируемых отношений эквивалентности, которые называются турбулентными.

Главный результат состоит в том, что такие отношения не только не классифицируемы счетными структурами, но и борелевски не сводятся к последним.

Пусть группа G действует на пространстве $\mathbb{X}$, т. е. $g \cdot x \in \mathbb{X}$ определено для всех $g \in G$ и $x \in \mathbb{X}$, причем

— $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$;

— $\mathbb{1}_{\mathrm{G}} \cdot x = x$, где $\mathbb{1}_{\mathrm{G}}$ — нейтральный элемент G.

$[x]_G = \{y \in \mathbb{X} : \exists g \in G\,(y = g \cdot x)\}$ — орбита точки $x \in \mathbb{X}$,

$x \ \mathsf{E}_{\mathrm{G}}^{\mathbb{X}} \ y \iff \exists g \in G\,(y = g \cdot x)$ — орбитальное отн. эквивал.

Если $H \subseteq \mathrm{G}$ (не обязательно подгруппа) и $U \subseteq \mathbb{X}$, то положим

$\mathsf{R}_H^U = \{\langle x, y\rangle \in U^2 : \exists g \in H\,(y = g \cdot x)\} \ \subseteq \mathsf{E}_{\mathrm{G}}^{\mathbb{X}}$;

$\sim_H^U =$ оболочка R_H^U, т. е. наименьшее отношение эквивалентности E на U, для которого $\mathsf{R}_H^U \subseteq \mathsf{E}$.

Для $x \in U$: $\mathscr{O}(x, U, H) = \{y \in U : x \sim_H^U y\}$ – локальная орбита.

Пусть группа G действует на пространстве $\mathbb{X}$, т. е. $g \cdot x \in \mathbb{X}$ определено для всех $g \in G$ и $x \in \mathbb{X}$, причем

— $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$;

— $\mathbb{1}_{\mathrm{G}} \cdot x = x$, где $\mathbb{1}_{\mathrm{G}}$ — нейтральный элемент G.

$$[x]_G = \{y \in \mathbb{X} : \exists g \in G\,(y = g \cdot x)\}$$ — орбита точки $x \in \mathbb{X}$,

$$x \ \mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathrm{G}} \ y \iff \exists g \in G\,(y = g \cdot x)$$ — орбитальное отн. эквивал.

Если $H \subseteq \mathrm{G}$ (не обязательно подгруппа) и $U \subseteq \mathbb{X}$, то положим

$$\mathrm{R}^U_H = \{\langle x, y\rangle \in U^2 : \exists g \in H\,(y = g \cdot x)\} \subseteq \mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathrm{G}};$$

$\sim^U_H =$ оболочка R^U_H, т. е. наименьшее отношение эквивалентности E на U, для которого $\mathrm{R}^U_H \subseteq \mathsf{E}$.

Для $x \in U$: $\mathscr{O}(x, U, H) = \{y \in U : x \sim^U_H y\}$ – локальная орбита.

Пусть польская группа G непрерывно действует на польском пр-ве $\mathbb{X}$.

1 Точка $x \in \mathbb{X}$ называется *турбулентной*, если

— для $\forall$ непустого открытого $U \subseteq \mathbb{X}$ содержащего x

— и $\forall$ открытой окрестности $H \subseteq \mathsf{G}$ (не обязат. подгруппы) нейтрального элемента $\mathbb{1}_{\mathsf{G}}$:

локальная орбита $\mathscr{O}(x, U, H)$ где-то плотна (т. е. не является нигде не плотным множеством) в $\mathbb{X}$.

2 Орбита $[x]_{\mathsf{G}}$ *турбулентна* если такова точка x — это не зависит от выбора точки x в орбите.

3 Действие (G на $\mathbb{X}$) генерически, или ген. турбулентно, а $\mathbb{X}$ — ген. турбулентное польское G-пространство, если объединение всех плотных (топологически), турбулентных, тощих орбит $[x]_{\mathsf{G}}$ ко-тощее. (Тощее = сумма счетного числа нигде не плотных.)

Пусть польская группа G непрерывно действует на польском пр-ве $\mathbb{X}$.

1 Точка $x \in \mathbb{X}$ называется *турбулентной*, если

— для $\forall$ непустого открытого $U \subseteq \mathbb{X}$ содержащего x

— и $\forall$ открытой окрестности $H \subseteq \mathsf{G}$ (не обязат. подгруппы) нейтрального элемента $\mathbb{1}_{\mathsf{G}}$:

локальная орбита $\mathscr{O}(x, U, H)$ где-то плотна (т. е. не является нигде не плотным множеством) в $\mathbb{X}$.

2 Орбита $[x]_{\mathsf{G}}$ *турбулентна* если такова точка x — это не зависит от выбора точки x в орбите.

3 Действие (G на $\mathbb{X}$) генерически, или ген. турбулентно, а $\mathbb{X}$ — ген. турбулентное польское G-пространство, если объединение всех плотных (топологически), турбулентных, тощих орбит $[x]_{\mathsf{G}}$ ко-тощее. (Тощее = сумма счетного числа нигде не плотных.)

Рассмотрим аддитивное действие группы $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}; + \rangle$ на $\mathbb{R}$.

Упражнение 1. Докажите, что это действие турбулентно, если $\mathbb{Q}$ берется с (не-польской) топологией, унаследованной из $\mathbb{R}$.

Упражнение 2. Докажите, что это действие не турбулентно, если $\mathbb{Q}$ берется с (польской) дискретной топологией. Использовать то, что $H = \{0\}$ — открытая окрестность нейтрального элемента 0.

Рассмотрим аддитивное действие группы $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}; + \rangle$ на $\mathbb{R}$.

Упражнение 1. Докажите, что это действие турбулентно, если $\mathbb{Q}$ берется с (не-польской) топологией, унаследованной из $\mathbb{R}$.

Упражнение 2. Докажите, что это действие не турбулентно, если $\mathbb{Q}$ берется с (польской) дискретной топологией. Использовать то, что $H = \{0\}$ — открытая окрестность нейтрального элемента 0.

Пусть $\langle r_n \rangle_{n\in\omega}$ — последовательность веществ. чисел, для которой

1. $r_n \geq 0$ для всех n, and $r_n \to 0$;
2. $\sum_{n\in\omega} r_n = +\infty$. **Пример:** гармонический ряд $r_n = (n+1)^{-1}$.

$\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ = идеал всех таких множеств $x \subseteq \omega$, что $\sum_{n\in x} r_n < +\infty$.

Симметрическая разность $\triangle$ в роли операции превращает $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ в **группу**, с пустым множеством $\varnothing$ как нейтральным элементом.

Лемма (факт из док-ва теоремы 9.5 в [КЛ-1])

В указанных условиях, $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ — полизируемый идеал, т. е. $\langle \mathscr{S}_{\{r_n\}} ; \triangle \rangle$ — польская группа с метрикой $\rho(x,y) = \sum_{n\in x\triangle y} r_n$.

Теорема (теорема 9.5 в [КЛ-1])

$\triangle$-действие $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ на $\mathscr{P}(\omega)$ — польское и ген. турбулентное.

$\mathscr{P}(\omega)$ снабжено обычной польской (компактной) топологией.

Пусть $\langle r_n \rangle_{n\in\omega}$ — последовательность веществ. чисел, для которой

1. $r_n \geq 0$ для всех n, and $r_n \to 0$;
2. $\sum_{n\in\omega} r_n = +\infty$. **Пример:** гармонический ряд $r_n = (n+1)^{-1}$.

$\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ = идеал всех таких множеств $x \subseteq \omega$, что $\sum_{n\in x} r_n < +\infty$.

Симметрическая разность $\triangle$ в роли операции превращает $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ в **группу**, с пустым множеством $\varnothing$ как нейтральным элементом.

Лемма (факт из док-ва теоремы 9.5 в [КЛ-1])

В указанных условиях, $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ — полизируемый идеал, т. е. $\langle \mathscr{S}_{\{r_n\}} ; \triangle \rangle$ — польская группа с метрикой $\rho(x,y) = \sum_{n\in x\triangle y} r_n$.

Теорема (теорема 9.5 в [КЛ-1])

$\triangle$-действие $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ на $\mathscr{P}(\omega)$ — польское и ген. турбулентное.

$\mathscr{P}(\omega)$ снабжено обычной польской (компактной) топологией.

Достаточно доказать, что все орбиты $[x]_{\mathscr{S}_{\{r_n\}}} = \{g \vartriangle x : g \in \mathscr{S}_{\{r_n\}}\}$ плотные, тощие, и турбулентные. Мы проверим только турбулентность.

Пусть $x \in \mathscr{P}(\omega)$.

Берем открытую окрестность $U = \{y \in \mathscr{P}(\omega) : y \cap [0, k) = u)\}$ точки x в $\mathscr{P}(\omega)$, where $k \in \omega$ and $u = x \cap [0, k)$,

и $d_{\{r_n\}}$-окрестность $H = \{g \in \mathscr{S}_{\{r_n\}} : d_{\{r_n\}}(g, \varnothing) < \varepsilon\}$ точки $\varnothing$ (нейтральный элемент) в $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$, где $\varepsilon > 0$.

Докажем, что локальная орбита $\mathscr{O}(x, U, H)$ где-то плотна в U.

Достаточно доказать, что все орбиты $[x]_{\mathscr{S}_{\{r_n\}}} = \{g \vartriangle x : g \in \mathscr{S}_{\{r_n\}}\}$ плотные, тощие, и турбулентные. Мы проверим только турбулентность.

Пусть $x \in \mathscr{P}(\omega)$.

Берем открытую окрестность $U = \{y \in \mathscr{P}(\omega) : y \cap [0, k) = u)\}$ точки x в $\mathscr{P}(\omega)$, where $k \in \omega$ and $u = x \cap [0, k)$,

и $d_{\{r_n\}}$-окрестность $H = \{g \in \mathscr{S}_{\{r_n\}} : d_{\{r_n\}}(g, \varnothing) < \varepsilon\}$ точки $\varnothing$ (нейтральный элемент) в $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$, где $\varepsilon > 0$.

Докажем, что локальная орбита $\mathscr{O}(x, U, H)$ где-то плотна в U.

Возьмем $\ell \ge k$ достаточно большое для $r_n < \varepsilon$, $\forall\, n \ge \ell$.

Докажем, что $*$ лок. орбита $\mathscr{O}(x, U, H)$ плотна в открытом множестве $Y = \{y \in \mathscr{P}(\omega) : y \cap [0, \ell) = v)\} \subseteq U$, где $v = x \cap [0, \ell)$.

Берем $y \in Y$, для которого множество $w = x \vartriangle y$ конечно. Такие y образуют плотное множество в Y.

Утверждается, что $y \in \mathscr{O}(x, U, H)$, т. е. $x \sim_H^U y$, откуда имеем $*$.

Пусть $w = \{k_1, \dots, k_n\}$; тогда все k_i будут $\ge \ell$ т. к. $y \in Y$. Значит, каждый синглет $g_i = \{k_i\}$ принадлежит H по выбору ℓ.

Но $g_1 \vartriangle \cdots \vartriangle g_n = w$, так что $y = w \vartriangle x = g_1 \vartriangle \cdots \vartriangle g_n \vartriangle x$.

При этом все промежуточные точки $y_m = g_1 \vartriangle \cdots \vartriangle g_m \vartriangle x$, $m \le n$, принадлежат U. Отсюда и следует $x \sim_H^U y$.

Этим теорема турбулентности суммируемых идеалов доказана.

Возьмем $\ell \geq k$ достаточно большое для $r_n < \varepsilon$, $\forall\, n \geq \ell$.

Докажем, что $\boxed{*}$ лок. орбита $\mathscr{O}(x, U, H)$ плотна в открытом множестве $Y = \{y \in \mathscr{P}(\omega) : y \cap [0, \ell) = v)\} \subseteq U$, где $v = x \cap [0, \ell)$.

Берем $y \in Y$, для которого множество $w = x \bigtriangleup y$ конечно. Такие y образуют плотное множество в Y.

Утверждается, что $y \in \mathscr{O}(x, U, H)$, т. е. $x \sim_H^U y$, откуда имеем $\boxed{*}$.

Пусть $w = \{k_1, \ldots, k_n\}$; тогда все k_i будут $\geq \ell$ т. к. $y \in Y$. Значит, каждый синглет $g_i = \{k_i\}$ принадлежит H по выбору ℓ.

Но $g_1 \bigtriangleup \cdots \bigtriangleup g_n = w$, так что $y = w \bigtriangleup x = g_1 \bigtriangleup \cdots \bigtriangleup g_n \bigtriangleup x$.

При этом все промежуточные точки $y_m = g_1 \bigtriangleup \cdots \bigtriangleup g_m \bigtriangleup x$, $m \leq n$, принадлежат U. Отсюда и следует $x \sim_H^U y$.

Этим теорема турбулентности суммируемых идеалов доказана.

Теорема (9.7 в [КЛ-1])

*Никакое отношение эквивалентности, индуцированное ген. турбулентным польским действием, **не** является борелевски сводимым к польскому действию группы S_∞, и **не** классифицируемо счетными структурами.*

На самом деле, теорема справедлива для более широкого класса отображений измеримых по Бэру — таких, что прообразы открытых множеств имеют **свойство Бэра**, т. е. совпадают с открытыми множествами с точностью до тощего множества.

Доказательство выходит за рамки курса, но мы представим некоторые идеи и детали.

Теорема (9.7 в [КЛ-1])

Никакое *отношение эквивалентности, индуцированное ген. турбулентным польским действием,* **не** *является борелевски сводимым к польскому действию группы* $\boldsymbol{S}_\infty$*, и* **не** *классифицируемо счетными структурами.*

На самом деле, теорема справедлива для более широкого класса отображений измеримых по Бэру — таких, что прообразы открытых множеств имеют **свойство Бэра**, т. е. совпадают с открытыми множествами с точностью до тощего множества.

Доказательство выходит за рамки курса, но мы представим некоторые идеи и детали.

Главная теорема несводимости получается на основании понятия эргодичности. Пусть $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ — отношения эквивалентности на польских пространствах $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$. Отображение $\vartheta : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$:

- $(\mathbf{E} \to \mathbf{F})$-инвариантно, если $x \mathbin{\mathbf{E}} y \Longrightarrow \vartheta(x) \mathbin{\mathbf{F}} \vartheta(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{X}$;
- ген. $(\mathbf{E} \to \mathbf{F})$-инвариантно, если имплик. $x \mathbin{\mathbf{E}} y \Longrightarrow \vartheta(x) \mathbin{\mathbf{F}} \vartheta(y)$ выполнена для всех x, y из ко-тощего подмножества $X \subseteq \mathbb{X}$;
- ген. редукция $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$, если эквивалентн. $x \mathbin{\mathbf{E}} y \Longleftrightarrow \vartheta(x) \mathbin{\mathbf{F}} \vartheta(y)$ выполнена для всех x, y из ко-тощего подмножества $X \subseteq \mathbb{X}$;
- ген. $\mathbf{F}$-константа, если эквивалентность $\vartheta(x) \mathbin{\mathbf{F}} \vartheta(y)$ выполнена для всех x, y из ко-тощего подмножества $X \subseteq \mathbb{X}$.

Наконец, $\mathbf{E}$ ген. $\mathbf{F}$-эргодично, если любая борелевская ген. $(\mathbf{E}{\to}\mathbf{F})$-инвариантная функция является ген. $\mathbf{F}$-константой.

Главная теорема несводимости получается на основании понятия эргодичности. Пусть E, F — отношения эквивалентности на польских пространствах $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$. Отображение $\vartheta : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$:

- $(\mathsf{E} \to \mathsf{F})$-инвариантно, если $x \mathrel{\mathsf{E}} y \Longrightarrow \vartheta(x) \mathrel{\mathsf{F}} \vartheta(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{X}$;
- ген. $(\mathsf{E} \to \mathsf{F})$-инвариантно, если имплик. $x \mathrel{\mathsf{E}} y \Longrightarrow \vartheta(x) \mathrel{\mathsf{F}} \vartheta(y)$ выполнена для всех x, y из ко-тощего подмножества $X \subseteq \mathbb{X}$;
- ген. редукция $\mathsf{E} \to \mathsf{F}$, если эквивалентн. $x \mathrel{\mathsf{E}} y \Longleftrightarrow \vartheta(x) \mathrel{\mathsf{F}} \vartheta(y)$ выполнена для всех x, y из ко-тощего подмножества $X \subseteq \mathbb{X}$;
- ген. F-константа, если эквивалентность $\vartheta(x) \mathrel{\mathsf{F}} \vartheta(y)$ выполнена для всех x, y из ко-тощего подмножества $X \subseteq \mathbb{X}$.

Наконец, E ген. F-эргодично, если любая борелевская ген. $(\mathsf{E} \to \mathsf{F})$-инвариантная функция является ген. F-константой.

Упражнение. Доказите, что отношение эквивалентности E_0 является $(=_\omega)$-эргодическим и $(=_\mathcal{N})$-эргодическим.

Использовать идею доказательства борелевской несводимости E_0 к равенству.

Упражнение. Докажите, что отношение эквивалентности $\mathbf{E}_0$ является $(=_\omega)$-эргодическим и $(=_\mathcal{N})$-эргодическим.

Использовать идею доказательства борелевской несводимости $\mathbf{E}_0$ к равенству.

Лемма (лемма 9.12 в [КЛ-1])

Пусть E, F *— отношения эквивалентности на польских пространствах* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$*. Если* E *ген.* F*-эргодично и* E *не имеет ко-тощих классов эквивалентности, то нет борелевской ген. редукции* $\mathsf{E} \to \mathsf{F}$*.*

Док-во

Пусть напротив, $\vartheta : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является борелевской ген. редукцией $\mathsf{E} \to \mathsf{F}$. Тогда ϑ должна быть ген. F-константой по эргодичности. Но тогда существует ко-тощий E-класс в $\mathbb{X}$, противоречие. $\square$

Лемма (лемма 9.12 в [КЛ-1])

Пусть $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ *— отношения эквивалентности на польских пространствах* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$. *Если* $\mathbf{E}$ *ген.* $\mathbf{F}$*-эргодично и* $\mathbf{E}$ *не имеет ко-тощих классов эквивалентности, то нет борелевской ген. редукции* $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$.

Док-во

Пусть напротив, $\vartheta : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является борелевской ген. редукцией $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$. Тогда ϑ должна быть ген. $\mathbf{F}$-константой по эргодичности. Но тогда существует ко-тощий $\mathbf{E}$-класс в $\mathbb{X}$, противоречие. $\square$

Теорема 1 (лемма 9.13 в [КЛ-1])

Всякое отношение эквивалентности, индуцированное ген. турбулентным польским действием, и борелевски сводимое к польскому действию группы $\boldsymbol{S}_\infty$*, допускает борелевскую ген. редукцию к одному из отношений* T_ξ.

Теорема 2 (лемма 9.14 в [КЛ-1])

Всякое отношение эквивалентности, индуцированное ген. турбулентным польским действием, ген. T_ξ*-эргодично для всех* ξ.

Теорема 1 (лемма 9.13 в [КЛ-1])

Всякое отношение эквивалентности, индуцированное ген. турбулентным польским действием, и борелевски сводимое к польскому действию группы $\boldsymbol{S}_\infty$*, допускает борелевскую ген. редукцию к одному из отношений* T_ξ.

Теорема 2 (лемма 9.14 в [КЛ-1])

Всякое отношение эквивалентности, индуцированное ген. турбулентным польским действием, ген. T_ξ*-эргодично для всех* ξ.

Для вывода теоремы несводимости из результатов выше, рассуждаем так.

1. Пусть напротив, $\mathsf{E}_{\mathrm{G}}^{\mathbb{X}}$ борелевски сводимо к польскому действию $\boldsymbol{S}_\infty$.
2. Тогда $\mathsf{E}_{\mathrm{G}}^{\mathbb{X}}$ допускает борелевскую ген. редукцию к одному из отношений T_ξ по теореме 1.
3. С другой стороны, $\mathsf{E}_{\mathrm{G}}^{\mathbb{X}}$ ген. T_ξ-эргодическое по теореме 2.
4. Следовательно $\mathsf{E}_{\mathrm{G}}^{\mathbb{X}}$ имеет ко-тощий класс эквивалентности по лемме.
5. Но это противоречит гипотезе ген. турбулентности в теореме.

Для вывода теоремы несводимости из результатов выше, рассуждаем так.

1. Пусть напротив, $\mathsf{E}_{\mathrm{G}}^{\mathbb{X}}$ борелевски сводимо к польскому действию S_∞.

2. Тогда $\mathsf{E}_{\mathrm{G}}^{\mathbb{X}}$ допускает борелевскую ген. редукцию к одному из отношений T_ξ по теореме 1.

3. С другой стороны, $\mathsf{E}_{\mathrm{G}}^{\mathbb{X}}$ ген. T_ξ-эргодическое по теореме 2.

4. Следовательно $\mathsf{E}_{\mathrm{G}}^{\mathbb{X}}$ имеет ко-тощий класс эквивалентности по лемме.

5. Но это противоречит гипотезе ген. турбулентности в теореме.

Содержание I

Содержание II