Теория множеств
Лекция 3
Первый проективный уровень. Эффективная дескриптивная теория

Владимир Григорьевич Кановей (ИППИ)

Осень 2023, МИАН Москва

http://iitp.ru/ru/userpages/156/300.htm

kanovei@iitp.ru — email для контактов

https://www.mathnet.ru/conf2305 — сайт курса

Литература

- **Jech03** *Millenium* — **Базовая**
- **K-AMS** Kanovei, *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification*, AMS University Lecture Series.
- **Kechris** *Descriptive set theory*
- **Mos** Moschovakis, *Descriptive set theory*
- **Йех73** *Теория множеств и метод форсинга*
- **КЛ-1** Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики*
- **КЛ-2** Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*
- **КЛ-3** Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы*
- **Кур-1** Куратовский, *Топология том 1*
- **СКМЛ** *Справочная книга по математической логике том 2: теория множеств.*

Натуральный ряд $\mathbb{N} = \omega$.

Бэровское пространство $\mathcal{N} = \mathbb{N}^\omega$.

Польские пространства P.

Множества $X \subseteq P$ — точечные множества.

Борелевские множества $X \subseteq P$.

Борелевские классы $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \mathbf{\Pi}^0_\alpha, \mathbf{\Delta}^0_\alpha$.

$\mathbf{\Sigma}^0_1 =$ открытые, $\mathbf{\Pi}^0_1 =$ замкнутые, $\mathbf{\Sigma}^0_2 = \mathbf{F}_\sigma$, $\mathbf{\Pi}^0_2 = \mathbf{G}_\delta$.

Проективные множества $X \subseteq P$.

Проективные классы $\mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n, \mathbf{\Delta}^1_n$.

Кортежи натуральных чисел $\mathbf{Cort} = \mathbb{N}^{<\omega} = \omega^{<\omega}$.

Лемма (о пяти определениях, [Jech03] с. 142–144)

Следующие классы множеств совпадают в любом польском P :

1. *непрерывные образы пространства* $\mathcal{N}$ *в* P ;
2. *непрерывные образы борелевских множеств, расположенных в польских пространствах* ;
3. *проекции на* P *борелевских множеств в* $P \times Y$ *, где* Y *— любое польское пространство* ;
4. *проекции на* P *замкнутых множеств в* $P \times \mathcal{N}$;
5. *действие A-операции на замкнутые множества в* P .

Этот класс сейчас называется: $\mathbf{\Sigma}^1_1$*-множества* .

$\mathbf{\Pi}^1_1$ = класс дополнительных множеств: если множество $A \subseteq P$ принадлежит $\mathbf{\Sigma}^1_1$, то дополнение $P \smallsetminus A$ принадл. $\mathbf{\Pi}^1_1$, и обратно.

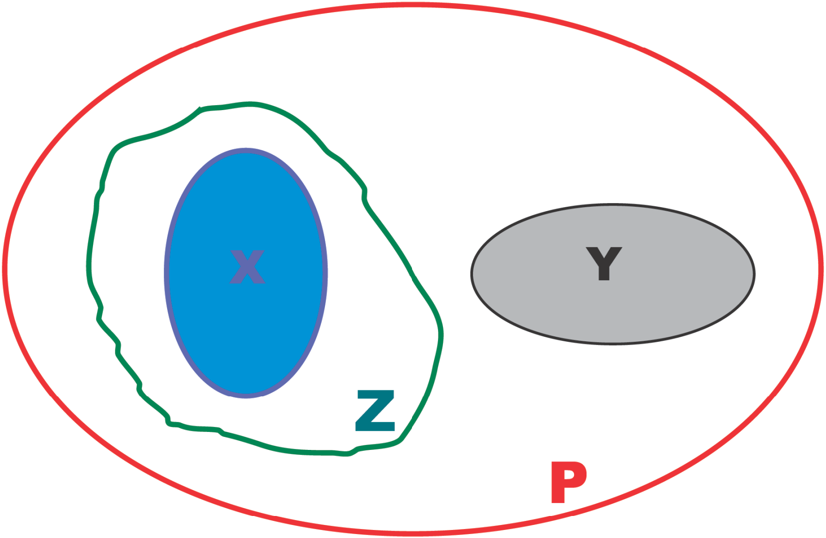
$\mathbf{\Delta}^1_1 = \mathbf{\Sigma}^1_1 \cap \mathbf{\Pi}^1_1$ — множ-ва, принадлежащие одновременно $\mathbf{\Sigma}^1_1$ и $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Множества X, Y в польском пространстве P **B-отделимы**, если найдется такое ***борелевское*** множество $Z \subseteq P$, что $X \subseteq Z$ но $Z \cap Y = \varnothing$, рисунок.

Теорема 2 (теорема отделимости, [Jech] Lemma 11.11)

Любые два дизъюнктных $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-множества X, Y в польском пространстве P B-отделимы.

Для дизъюнктных $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-множеств неверно!


X
Y
Z
P

Следствие (теорема Суслина)

В любом польском пространстве P, *класс борелевских множеств совпадает с классом* $\boldsymbol{\Delta}^1_1$.

$\mathbf{Cort} = \mathbf{Cort}_1 := \omega^{<\omega} = \bigcup_n \omega^n$ — **кортежи** натуральных чисел;

$\mathbf{lh}(s)$ — **длина** кортежа s, т. е. $s \in \omega^n \Longrightarrow \mathbf{lh}(s) = n$;

$s \subset t$ — **строгое продолжение** кортежей;

$\Lambda = \varnothing$ — **пустой** кортеж, $\mathbf{lh}(\Lambda) = 0$;

$\mathbf{Cort}_2 = \{\langle s, t\rangle : s, t \in \mathbf{Cort} \wedge \mathbf{lh}(s) = \mathbf{lh}(t)\}$ — **мультикортежи**

Множество $T \subseteq \mathbf{Cort}$ — **дерево**, если для каждого кортежа $s \in T$: $m < \mathbf{lh}(s) \Longrightarrow s \restriction m \in T$.

Если $T \neq \varnothing$ то $\Lambda \in T$.

Аналогично, $T \subseteq \mathbf{Cort}_2$ — **дерево**, если для каждого $\langle s, t\rangle \in T$: $n < \mathbf{lh}(s) = \mathbf{lh}(t) \Longrightarrow \langle s \restriction n, t \restriction n\rangle \in T$.

Дерево $T \subseteq \mathbf{Cort}$ называется **нефундированным**, если есть такая точка $x \in \mathcal{N}$ что $x \restriction m \in T$ для всех m. Такая точка x если она есть называется **бесконечной ветвью** дерева T.

Дерево $T \subseteq \mathbf{Cort}$, не имеющее бесконечных ветвей, называется **фундированным**. В этом случае T допускает единственную **функцию ранга** $\mathbb{r}_T : T \to \mathtt{Ord}$, удовлетворяющую условию

$$\mathbb{r}_T(s) = \sup_{s \subset u \in T} \big(\mathbb{r}_T(u) + 1\big) = \sup_{s^\frown k \in T} \big(\mathbb{r}_T(s^\frown k) + 1\big)$$

см. [Jech] Theorem 2.27.
В частности $\mathbb{r}_T(s) = 0$ для концевых вершин $s \in T$.

Если $T \subseteq \mathbf{Cort}$ фундировано то ординал $\|T\| = \mathbb{r}_T(\Lambda) + 1$ называется **высотой** дерева T.

Упражнение: $\|\varnothing\| = 0$, $\|\{\Lambda\}\| = 1$, $\|\{\Lambda, \langle 3\rangle, \langle 5\rangle, \langle 5, 0\rangle\}\| = 3$.

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} \quad = \quad \text{все деревья } T \subseteq \mathbf{Cort}$$

$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{if}}$ = нефундированные деревья в $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, ill-founded

$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}$ = фундированные деревья в $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, well-founded

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}_{\alpha} = \{T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}} : \|T\| = \alpha\}, \quad \alpha < \omega_1$$

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\alpha}(s) = \{T \in \boldsymbol{\mathcal{T}} : s \in T \wedge T\restriction_s \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}} \wedge \|T\restriction_s\| \leq \alpha\},$$ где

$T\restriction_s = \{t \in \mathbf{Cort} : s^\frown t \in T\}$ — ***s*-конус** в T.

Теорема (о характеризации)

Множество $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ замкнуто в польском пространстве $2^{\mathbf{Cort}}$. — **Упражн.**
Множества $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{if}}$, $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}$ имеет классы $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$, $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ соответственно.
Множества $\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\alpha}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}_{\alpha}$ борелевские.

Теорема ([Jech], Theorem 25.3)

Если $C \subseteq \mathcal{N}$ есть $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество то найдется непрерывная функция $x \longmapsto T(x)$ из $\mathcal{N}$ в $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, для которой

$$C = \{x \in \mathcal{N} : T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}\}$$ — **нормальная форма**.

Таким образом, каждое $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество есть непрерывный прообраз $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}$.

Верно и обратное, поскольку каждый борелевский или проективный класс замкнут относительно непрерывных прообразов.

Лемма

Множество $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{if}}$ является строго $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством, т. е. не $\mathbf{\Pi}^1_1$, и соответственно $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}$ является строго $\mathbf{\Pi}^1_1$ (не $\mathbf{\Sigma}^1_1$).

Следствие (о борелевости конституант)

*В условиях теоремы о нормальной форме если $\alpha < \omega_1$ то множество-***конституанта**

$$C_\alpha = \{x \in C : \|T(x)\| = \alpha\}$$

борелевское как непрерывный прообраз борелевского $\boldsymbol{\tau}_\alpha^{\mathrm{wf}}$. □

Следствие (о разложении на $\aleph_1$ борелевских множеств)

Каждое $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество есть объединение* $\aleph_1$ *борелевских множеств–конституант.* □

Пусть $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$. Отображение $f : T \to \textbf{Cort}$ сохраняет порядок, кратко ОСП, если $s \subset t \Longrightarrow f(s) \subset f(t)$ для всех $s, t \in T$.

f гомоморфизм, т. е. только $\Longrightarrow$, но не $\Longleftrightarrow$!!!

Вводятся бинарные **отношения сводимости** $\leqslant_{\text{сп}}$, $<_{\text{сп}}$ на $\boldsymbol{\mathcal{T}}$.

$S \leqslant_{\text{сп}} T$, если найдется ОСП $f : S \to T$;

$S <_{\text{сп}} T$, если $S \leqslant_{\text{сп}} (T \restriction_s)$ для какого-то $s \in T$, $s \neq \Lambda$,
где, напомним, $T \restriction_s = \{u \in \textbf{Cort} : s^\frown u \in T\}$ есть s-конус в T.

Теорема (о рангах и отображениях)

Пусть $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$ *— деревья. Тогда*

1. *если* $S \preccurlyeq_{\text{сп}} T$ *и* $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *то* $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| \le \|T\|$;
2. *если* $S <_{\text{сп}} T$ *и* $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *то* $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| < \|T\|$;
3. *если* $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{if}}$ *то* $S <_{\text{сп}} T$;
4. *если* $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| \le \|T\|$ *то* $S \preccurlyeq_{\text{сп}} T$;
5. *если* $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| < \|T\|$ *то* $S <_{\text{сп}} T$.

Дополнительно, отношения $\preccurlyeq_{\text{сп}}$ *и* $<_{\text{сп}}$ *имеют класс* $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ *как множества пар в польском* $\boldsymbol{\mathcal{T}} \times \boldsymbol{\mathcal{T}}$. — Доказано Лекция 2.

Док-во 1. Раз $S \leqslant_{\text{сп}} T$, найдется ОСП $f : S \to T$.

ОСП f переводит любую бесконечную ветвь в S в бесконечную ветвь в T, поэтому $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ влечет $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$.

Чтобы вывести $\|S\| \le \|T\|$, докажем $\mathbb{r}_S(u) \le \mathbb{r}_T(f(u))$ для всех $u \in S$ индукцией по $\mathbb{r}_S(u)$. Если $\mathbb{r}_S(u) = 0$ то нечего доказывать.

Пусть $\mathbb{r}_S(u) \ge 1$.
Если $u \subset v \in S$, то $f(u) \subset f(v) \in T$ и $\mathbb{r}_S(v) < \mathbb{r}_S(u)$, и тогда по индуктивному предположению $\mathbb{r}_S(v) \le \mathbb{r}_T(f(v))$. Отсюда

$$\mathbb{r}_S(u) = \sup_{u \subset v \in S} \left(\mathbb{r}_S(v) + 1\right) \le \sup_{u \subset v \in S} \left(\mathbb{r}_T(f(v)) + 1\right) \le$$

$$\le \sup_{f(u) \subset v' \in T} \left(\mathbb{r}_T(v') + 1\right) = \mathbb{r}_T(f(u)),$$

что и требовалось.

Док-во 1. Раз $S \leqslant_{\text{сп}} T$, найдется ОСП $f : S \to T$.

ОСП f переводит любую бесконечную ветвь в S в бесконечную ветвь в T, поэтому $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ влечет $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$.

Чтобы вывести $\|S\| \le \|T\|$, докажем $\mathbb{r}_S(u) \le \mathbb{r}_T(f(u))$ для всех $u \in S$ индукцией по $\mathbb{r}_S(u)$. Если $\mathbb{r}_S(u) = 0$ то нечего доказывать.

Пусть $\mathbb{r}_S(u) \ge 1$.
Если $u \subset v \in S$, то $f(u) \subset f(v) \in T$ и $\mathbb{r}_S(v) < \mathbb{r}_S(u)$, и тогда по индуктивному предположению $\mathbb{r}_S(v) \le \mathbb{r}_T(f(v))$. Отсюда

$$\mathbb{r}_S(u) = \sup_{u \subset v \in S} \left(\mathbb{r}_S(v) + 1\right) \le \sup_{u \subset v \in S} \left(\mathbb{r}_T(f(v)) + 1\right) \le$$

$$\le \sup_{f(u) \subset v' \in T} \left(\mathbb{r}_T(v') + 1\right) = \mathbb{r}_T(f(u)),$$

что и требовалось.

Док-во 2: аналогично док-ву 1.

Док-во 3. Раз $T \in \boldsymbol{\tau}^{\text{if}}$, найдется бесконечная ветвь $T' \subseteq T$.

Тогда $T' = \{a \upharpoonright n : n \in \mathbb{N}\}$, где $a \in \mathcal{N} = \mathbb{N}^{\omega}$.

Если $s \in S$ то положим $f(s) = a \upharpoonright n$, где $n = \mathbf{lh}(s)$.

Упражнение: $f : S \to T$ — СПО.

Док-во 2: аналогично док-ву 1.

Док-во 3. Раз $T \in \boldsymbol{\tau}^{\text{if}}$, найдется бесконечная ветвь $T' \subseteq T$.

Тогда $T' = \{a \restriction n : n \in \mathbb{N}\}$, где $a \in \mathcal{N} = \mathbb{N}^\omega$.

Если $s \in S$ то положим $f(s) = a \restriction n$, где $n = \mathbf{lh}(s)$.

Упражнение: $f : S \to T$ — СПО.

Док-во 4. Для $u \in S$, определяем $f(u) \in T$ индукцией по $\mathbf{lh}(u)$, так что $\mathbb{r}_S(u) \le \mathbb{r}_T(f(u))$. Положим $f(\Lambda) = \Lambda$.

Пусть $u \in S$, $u' = u^\frown k \in S$, $k \in \mathbb{N}$, и $v = f(u) \in T$ определено, так что $\mathbb{r}_S(u) \le \mathbb{r}_T(v)$. Нужно определить $f(u')$.

Раз $u \subset u'$, по определению ранга $\mathbb{r}_S(u') < \mathbb{r}_S(u) \le \mathbb{r}_T(v)$.

Опять по определению ранга, найдется кортеж $v' \in T$, для которого $v \subset v'$ и $\mathbb{r}_S(u') \le \mathbb{r}_T(v')$.

Положим $f(u') = v'$.

Док-во 5: аналогично — упражнение. □

Док-во 4. Для $u \in S$, определяем $f(u) \in T$ индукцией по $\mathbf{lh}(u)$, так что $\mathbb{r}_S(u) \le \mathbb{r}_T(f(u))$. Положим $f(\Lambda) = \Lambda$.

Пусть $u \in S$, $u' = u^\frown k \in S$, $k \in \mathbb{N}$, и $v = f(u) \in T$ определено, так что $\mathbb{r}_S(u) \le \mathbb{r}_T(v)$. Нужно определить $f(u')$.

Раз $u \subset u'$, по определению ранга $\mathbb{r}_S(u') < \mathbb{r}_S(u) \le \mathbb{r}_T(v)$.

Опять по определению ранга, найдется кортеж $v' \in T$, для которого $v \subset v'$ и $\mathbb{r}_S(u') \le \mathbb{r}_T(v')$.

Положим $f(u') = v'$.

Док-во 5: аналогично — **упражнение**. □

Таким образом, полностью доказана:

Теорема (о рангах и отображениях)

Пусть $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$ *— деревья. Тогда*

1. *если* $S \leqslant_{\text{сп}} T$ *и* $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *то* $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| \le \|T\|$;
2. *если* $S <_{\text{сп}} T$ *и* $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *то* $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| < \|T\|$;
3. *если* $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{if}}$ *то* $S <_{\text{сп}} T$;
4. *если* $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| \le \|T\|$ *то* $S \leqslant_{\text{сп}} T$;
5. *если* $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| < \|T\|$ *то* $S <_{\text{сп}} T$.

Дополнительно, отношения $\leqslant_{\text{сп}}$ *и* $<_{\text{сп}}$ *имеют класс* $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ *как множества пар в польском* $\boldsymbol{\mathcal{T}} \times \boldsymbol{\mathcal{T}}$. □

Напомним, что по теореме о нормальной форме, каждое $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $C \subseteq \mathcal{N}$ имеет вид

$$C = \{x : T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}\} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha, \text{ где } C_\alpha = \{x : \|T(x)\| = \alpha\}$$

— борелевское по теореме борелевости конституант.

Теорема (ограничения индексов)

Если $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $A \subseteq \mathcal{N}$ включено в $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество C, то $\exists$ такой индекс $\lambda < \omega_1$, что $A \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} C_\alpha$, т.е. A накрывается счетным числом конституант $C_\alpha = \{x : \|T(x)\| = \alpha\}$.

Док-во: Иначе $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}} = \{T \in \boldsymbol{\mathcal{T}} : \exists x \in A\,(\|T\| \le \|T(x)\|)\}$. Значит, $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}} = \{T \in \boldsymbol{\mathcal{T}} : \exists x \in A\,(T \preccurlyeq_{\text{сп}} T(x))\}$ по 1. Отсюда (**упражнение!**): $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество. Но это противоречит результату выше о том что $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ — строго $\mathbf{\Pi}^1_1$. □

Напомним, что по теореме о нормальной форме, каждое $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $C \subseteq \mathcal{N}$ имеет вид

$$C = \{x : T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}\} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha, \text{ где } C_\alpha = \{x : \|T(x)\| = \alpha\}$$

— борелевское по теореме борелевости конституант.

Теорема (ограничения индексов)

Если $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $A \subseteq \mathcal{N}$ включено в $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество C, то $\exists$ такой индекс $\lambda < \omega_1$, что $A \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} C_\alpha$, т.е. A накрывается счетным числом конституант $C_\alpha = \{x : \|T(x)\| = \alpha\}$.

Док-во: Иначе $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}} = \{T \in \boldsymbol{\mathcal{T}} : \exists x \in A(\|T\| \le \|T(x)\|)\}$. Значит, $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}} = \{T \in \boldsymbol{\mathcal{T}} : \exists x \in A(T \leqslant_{\text{сп}} T(x))\}$ по 1. Отсюда (**упражнение!**): $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество. Но это противоречит результату выше о том что $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ — строго $\mathbf{\Pi}^1_1$. □

Следствие (критерий борелевости)

$\mathbf{\Pi}^1_1$-*множество* $C = \{x : T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}\} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$ (нормальная форма!) **борелевское** **если и только если** *найдется такой индекс* $\lambda < \omega_1$, *что* $C_\alpha = \varnothing$ *для всех* $\alpha \geq \lambda$.

Док-во: Берем $A = C$! □

Следствие (критерий борелевости)

$\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество* $C = \{x : T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}\} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$
(нормальная форма!)
борелевское **если и только если** *найдется такой индекс* $\lambda < \omega_1$, *что* $C_\alpha = \varnothing$ *для всех* $\alpha \geq \lambda$.

Док-во: Берем $A = C$! □

Теорема (теорема редукции, Red($\mathbf{\Pi}^1_1$))

Пусть $A, B \subseteq \mathcal{N}$ — множества класса $\mathbf{\Pi}^1_1$. Найдется пара дизъюнктных $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, для которой $A' \cup B' = A \cup B$.

Простое решение $A' = A$, $B' = B \setminus A$ не годится: $B' \notin \mathbf{\Pi}^1_1$.

Док-во

По теореме о нормальной форме, найдутся непрерывные отображения $x \longmapsto S(x)$ и $x \longmapsto T(x)$ из $\mathcal{N}$ в $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, для которых

$$A = \{x : S(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}\} \quad \text{и} \quad B = \{x : T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}\}.$$

Рассмотрим множества

$$A' = \{x \in A : T(x) \not\preccurlyeq_{\text{сп}} S(x)\}, \quad B' = \{x \in B : S(x) \not\prec_{\text{сп}} T(x)\}.$$

Теорема (теорема редукции, $\mathrm{Red}(\mathbf{\Pi}^1_1)$)

Пусть $A, B \subseteq \mathcal{N}$ — множества класса $\mathbf{\Pi}^1_1$. Найдется пара дизъюнктных $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, для которой $A' \cup B' = A \cup B$.

Простое решение $A' = A$, $B' = B \setminus A$ не годится: $B' \notin \mathbf{\Pi}^1_1$.

Док-во

По теореме о нормальной форме, найдутся непрерывные отображения $x \longmapsto S(x)$ и $x \longmapsto T(x)$ из $\mathcal{N}$ в $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, для которых

$$A = \{x : S(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}\} \quad \text{и} \quad B = \{x : T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}\}.$$

Рассмотрим множества

$$A' = \{x \in A : T(x) \not\preccurlyeq_{\text{сп}} S(x)\}, \quad B' = \{x \in B : S(x) \not\prec_{\text{сп}} T(x)\}.$$

Отношения $<_{\text{сп}}$, $\leqslant_{\text{сп}}$ имеют класс $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ по теореме о рангах и отображениях, значит их отрицания — класс $\boldsymbol{\Pi}^1_1$.

Поэтому множества A', B' имеют класс $\boldsymbol{\Pi}^1_1$.

По определению $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$.

Если $x \in A \smallsetminus B$ то $x \in A'$. В самом деле, $S(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$, $T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{if}}$, откуда $T(x) \not\leqslant_{\text{сп}} S(x)$ согласно $\boxed{1}$, так что $x \in A'$.

Если $x \in B \smallsetminus A$ то $x \in B'$. Аналогично со ссылкой на $\boxed{2}$.

Каждое $x \in B \cap A$ принадлежит ровно одному из множеств A', B'. В самом деле, $S(x), T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$. Если $\|S(x)\| < \|T(x)\|$ то согласно $\boxed{1}$ $T(x) \leqslant_{\text{сп}} S(x)$ **не** имеет места, так что $x \in A'$.
Аналогично если $\|T(x)\| \leq \|S(x)\|$ то согласно $\boxed{2}$ $S(x) <_{\text{сп}} T(x)$ **не** имеет места, так что $x \in B'$. $\square$

Отношения $<_{\text{сп}}$, $\leqslant_{\text{сп}}$ имеют класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$ по теореме о рангах и отображениях, значит их отрицания — класс $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Поэтому множества A', B' имеют класс $\mathbf{\Pi}^1_1$.

По определению $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$.

Если $x \in A \smallsetminus B$ то $x \in A'$. В самом деле, $S(x) \in \boldsymbol{\tau}^{\text{wf}}$, $T(x) \in \boldsymbol{\tau}^{\text{if}}$, откуда $T(x) \not\leqslant_{\text{сп}} S(x)$ согласно 1, так что $x \in A'$.

Если $x \in B \smallsetminus A$ то $x \in B'$. Аналогично со ссылкой на 2.

Каждое $x \in B \cap A$ принадлежит ровно одному из множеств A', B'. В самом деле, $S(x), T(x) \in \boldsymbol{\tau}^{\text{wf}}$. Если $\|S(x)\| < \|T(x)\|$ то согласно 1 $T(x) \leqslant_{\text{сп}} S(x)$ **не** имеет места, так что $x \in A'$.

Аналогично если $\|T(x)\| \le \|S(x)\|$ то согласно 2 $S(x) <_{\text{сп}} T(x)$ **не** имеет места, так что $x \in B'$. □

Теорема (отделимость, $\mathsf{Sep}(\boldsymbol{\Sigma}^1_1)$)

Пусть $X, Y \subseteq \mathcal{N}$ — **дизъюнктные** *множества класса* $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$. *Найдется* $\boldsymbol{\Delta}^1_1$*-множество* (т. е. борелевское) $Z \subseteq \mathcal{N}$, *отделяющее* X *от* Y *в том смысле что* $X \subseteq Z$, $Y \cap Z = \varnothing$.

Первое доказательство см. Лекцию 2, дадим второе.

Док-во

Применить теорему редукции к дополнительным множествам $A = \mathcal{N} \smallsetminus X$, $B = \mathcal{N} \smallsetminus Y$ класса $\boldsymbol{\Pi}^1_1$.

Полученные дизъюнктные $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-множества $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ удовлетворяют $A' \cup B' = A \cup B = \mathcal{N}$, т. е. взаимно дополнительны. Значит $A', B' \in \boldsymbol{\Delta}^1_1$.

Множество $Z = \mathcal{N} \smallsetminus A'$ отделяет X от Y. (**Упражнение**). $\square$

Теорема (отделимость, Sep($\mathbf{\Sigma}^1_1$))

Пусть $X, Y \subseteq \mathcal{N}$ — **дизъюнктные** *множества класса* $\mathbf{\Sigma}^1_1$.
Найдется $\mathbf{\Delta}^1_1$*-множество* (т. е. борелевское) $Z \subseteq \mathcal{N}$, *отделяющее* X *от* Y *в том смысле что* $X \subseteq Z$, $Y \cap Z = \varnothing$.

Первое доказательство см. Лекцию 2, дадим второе.

Док-во

Применить теорему редукции к дополнительным множествам $A = \mathcal{N} \setminus X$, $B = \mathcal{N} \setminus Y$ класса $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Полученные дизъюнктные $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ удовлетворяют $A' \cup B' = A \cup B = \mathcal{N}$, т. е. взаимно дополнительны. Значит $A', B' \in \mathbf{\Delta}^1_1$.

Множество $Z = \mathcal{N} \setminus A'$ отделяет X от Y. (**Упражнение**). $\square$

Теорема (неотделимость, $\neg\mathsf{Sep}(\mathbf{\Pi}^1_1)$)

Существуют **дизъюнктные** $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множества* $X, Y \subseteq \mathcal{N}$*,* *неотделимые* $\mathbf{\Delta}^1_1$*-множеством* (т. е. борелевским) $Z \subseteq \mathcal{N}$*.*

Док-во

Начинаем с универсального $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$

1) U само $\mathbf{\Sigma}^1_1$, и

2) если $X \subseteq \mathcal{N}$ — любое $\mathbf{\Sigma}^1_1$, то найдется $x \in \mathcal{N}$, для которого $X = U_x$, где $U_x = \{y : U(x,y)\}$ — сечение.

См. об универсальных множествах Лекцию 1.

$U(x,y)$ вместо $\langle x, y\rangle \in U$ — реляционная запись.

Теорема (неотделимость, $\neg\mathsf{Sep}(\mathbf{\Pi}^1_1)$)

Существуют **дизъюнктные** $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множества* $X, Y \subseteq \mathcal{N}$, *неотделимые* $\mathbf{\Delta}^1_1$*-множеством* (т. е. борелевским) $Z \subseteq \mathcal{N}$.

Док-во

Начинаем с универсального $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$

1) U само $\mathbf{\Sigma}^1_1$, и

2) если $X \subseteq \mathcal{N}$ — любое $\mathbf{\Sigma}^1_1$, то найдется $x \in \mathcal{N}$, для которого $X = U_x$, где $U_x = \{y : U(x, y)\}$ — сечение.

См. об универсальных множествах Лекцию 1.

$U(x, y)$ вместо $\langle x, y\rangle \in U$ — реляционная запись.

Если $z \in \mathcal{N}$, то пусть $z_{\text{лев}}(k) = z(2k)$, $z_{\text{прав}}(k) = z(2k+1)$.

Положим $U' = \{\langle x, y\rangle : U(x_{\text{лев}}, y)\}$, $U'' = \{\langle x, y\rangle : U(x_{\text{прав}}, y)\}$.

1 Множества U', U'' принадлежат $\mathbf{\Sigma}^1_1$ (как непрерывные прообразы U при отображениях $x \longmapsto x_{\text{лев}}$, $x \longmapsto x_{\text{прав}}$).

2 Множества U', U'' образуют дважды универсальную пару, т. е. для любой пары $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств $X', X'' \subseteq \mathcal{N}$ найдется точка x для которой $X' = U'_x$, $X'' = U''_x$.

Для доказательства **2** берем x', x'', для которых $X' = U_{x'}$ и $X'' = U_{x''}$, а затем берем такое x, что $x' = x_{\text{лев}}$, $x'' = x_{\text{прав}}$.

3 Дополнительные множества $V' = \mathcal{N}^2 \smallsetminus U'$ и $V'' = \mathcal{N}^2 \smallsetminus U''$ образуют дважды $\mathbf{\Pi}^1_1$-универсальную пару, т. е. оба принадлежат $\mathbf{\Pi}^1_1$, и для $\forall$ пары $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств $X', X'' \subseteq \mathcal{N}$ найдется точка x для которой $X' = V'_x$, $X'' = V''_x$.

Если $z \in \mathcal{N}$, то пусть $z_{\text{лев}}(k) = z(2k)$, $z_{\text{прав}}(k) = z(2k+1)$.

Положим $U' = \{\langle x, y\rangle : U(x_{\text{лев}}, y)\}$, $U'' = \{\langle x, y\rangle : U(x_{\text{прав}}, y)\}$.

1 Множества U', U'' принадлежат $\mathbf{\Sigma}^1_1$ (как непрерывные прообразы U при отображениях $x \longmapsto x_{\text{лев}}$, $x \longmapsto x_{\text{прав}}$).

2 Множества U', U'' образуют дважды универсальную пару, т. е. для любой пары $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств $X', X'' \subseteq \mathcal{N}$ найдется точка x для которой $X' = U'_x$, $X'' = U''_x$.

Для доказательства 2 берем x', x'', для которых $X' = U_{x'}$ и $X'' = U_{x''}$, а затем берем такое x, что $x' = x_{\text{лев}}$, $x'' = x_{\text{прав}}$.

3 Дополнительные множества $V' = \mathcal{N}^2 \smallsetminus U'$ и $V'' = \mathcal{N}^2 \smallsetminus U''$ образуют дважды $\mathbf{\Pi}^1_1$-универсальную пару, т. е. оба принадлежат $\mathbf{\Pi}^1_1$, и для $\forall$ пары $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств $X', X'' \subseteq \mathcal{N}$ найдется точка x для которой $X' = V'_x$, $X'' = V''_x$.

По теореме редукции, найдутся дизъюнктные $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества $P' \subseteq V'$, $P'' \subseteq V''$, для которых $P' \cup P'' = V' \cup V''$.

Мы утверждаем, что P', P'' B-неотделимы.

Пусть напротив, борелевское $B \subseteq \mathcal{N}^2$ отделяет P' от P''.

Множество $X = \{x \in \mathcal{N} : \langle x, x \rangle \notin B\}$ также борелевское (непрерывный прообраз дополнения B при $x \longmapsto \langle x, x \rangle$).

Согласно 3, для борелевских X и $Y = \mathcal{N} \smallsetminus X$ (они оба $\mathbf{\Pi}^1_1$) найдется такая точка x, что $X = V'_x$ и $Y = V''_x$. Однако по построению $P'_x = V'_x$ и $P''_x = V''_x$, т. к. V'_x, V''_x уже дизъюнктны, причем X, Y взаимно дополнительны.

Значит, $X = P'_x = B_x$ и $Y = P''_x = \mathcal{N} \smallsetminus B_x$. Противоречие:

$$x \in X \Longleftrightarrow \langle x, x \rangle \notin B \Longleftrightarrow x \notin B_x \Longleftrightarrow x \in Y \Longleftrightarrow x \notin X . \quad \square$$

По теореме редукции, найдутся дизъюнктные $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества $P' \subseteq V'$, $P'' \subseteq V''$, для которых $P' \cup P'' = V' \cup V''$.

Мы утверждаем, что P', P'' B-неотделимы.

Пусть напротив, борелевское $B \subseteq \mathcal{N}^2$ отделяет P' от P''.

Множество $X = \{x \in \mathcal{N} : \langle x, x \rangle \notin B\}$ также борелевское (непрерывный прообраз дополнения B при $x \longmapsto \langle x, x \rangle$).

Согласно 3, для борелевских X и $Y = \mathcal{N} \setminus X$ (они оба $\mathbf{\Pi}^1_1$) найдется такая точка x, что $X = V'_x$ и $Y = V''_x$. Однако по построению $P'_x = V'_x$ и $P''_x = V''_x$, т. к. V'_x, V''_x уже дизъюнктны, причем X, Y взаимно дополнительны.

Значит, $X = P'_x = B_x$ и $Y = P''_x = \mathcal{N} \setminus B_x$. Противоречие:

$x \in X \iff \langle x, x \rangle \notin B \iff x \notin B_x \iff x \in Y \iff x \notin X$. $\square$

Теорема (теорема униформизации, $\mathrm{Unif}(\mathbf{\Pi}^1_1)$)

Пусть $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ *— множество класса* $\mathbf{\Pi}^1_1$*. Найдется* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество* $Q \subseteq P$, **униформизующее** P *в том смысле что*:

- *проекции* P, Q *равны, т.е. если* $x \in \mathcal{N}$ *то* $\exists y\, P(x,y) \Longrightarrow \exists y\, Q(x,y)$,
- *множество* Q **униформно** (= график функции), *т.е. если* $x \in \mathcal{N}$ *то* $\exists y\, Q(x,y) \Longrightarrow \exists!\, y\, Q(x,y)$,

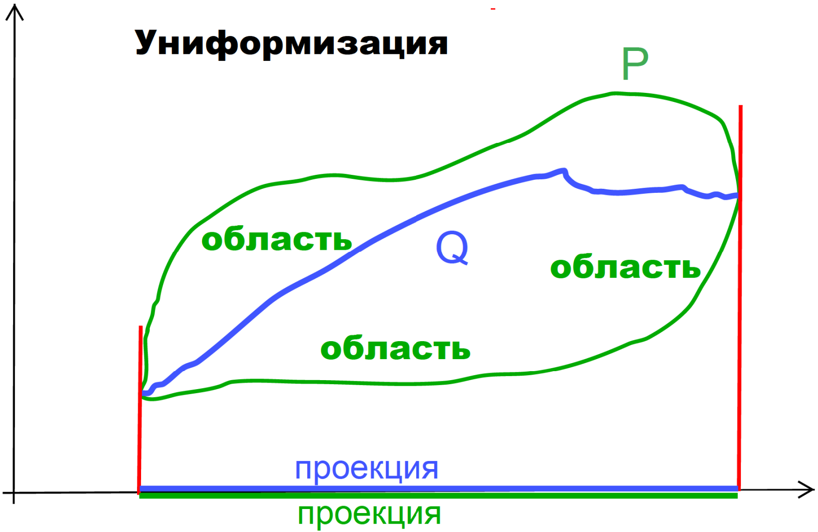
Логика: $\mathrm{Unif}(\mathbf{\Pi}^1_1) \Longrightarrow \mathrm{Red}(\mathbf{\Pi}^1_1) \Longrightarrow \mathrm{Sep}(\mathbf{\Sigma}^1_1)$.

$\mathrm{Unif}(\mathbf{\Sigma}^1_1)$, $\mathrm{Red}(\mathbf{\Sigma}^1_1)$, $\mathrm{Sep}(\mathbf{\Pi}^1_1)$ не верны, см. теор. 8.1.3 в [КЛ2].


Униформизация
P
область
область
область


Униформизация
P
Q
область
область
область


Униформизация
P
область
Q
область
область


Униформизация
P
область
Q
область
область
проекция
проекция

Теорема (теорема униформизации, Unif($\mathbf{\Pi}^1_1$))

Пусть $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ *— множество класса* $\mathbf{\Pi}^1_1$. *Найдется* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество* $Q \subseteq P$, **униформизующее** P *в том смысле что*:

- *проекции* P, Q *равны, т.е. если* $x \in \mathcal{N}$ *то* $\exists y\, P(x, y) \Longrightarrow \exists y\, Q(x, y)$,
- *множество* Q **униформно** (= график функции), *т.е. если* $x \in \mathcal{N}$ *то* $\exists y\, Q(x, y) \Longrightarrow \exists!\, y\, Q(x, y)$,

Логика: **Unif($\mathbf{\Pi}^1_1$) $\Longrightarrow$ Red($\mathbf{\Pi}^1_1$) $\Longrightarrow$ Sep($\mathbf{\Sigma}^1_1$)**.

Unif($\mathbf{\Sigma}^1_1$), Red($\mathbf{\Sigma}^1_1$), Sep($\mathbf{\Pi}^1_1$) не верны, см. теор. 8.1.3 в [КЛ2].

Эффективная дескриптивная теория множеств изучает точечные множества не только с точки зрения сложности их построения из открытых множеств, но и с т. зр. «эффективности» исходных открытых множеств в плане теории вычислимости.

Бэровским произведением назовем любое пространство вида $\omega^m \times \mathcal{N}^n$, где $\omega = \mathbb{N}$ дискретное, а $\mathcal{N} = \omega^\omega$ — само бэровское.

Вводятся эффективные (lightface) подклассы

$$\Sigma^i_k \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^i_k,\ \Pi^i_k \subseteq \boldsymbol{\Pi}^i_k,\ \Delta^i_k \subseteq \boldsymbol{\Delta}^i_k,\ i = 0, 1,\ k \in \omega = \mathbb{N},$$

борелевских и проективных классов в бэровских произведениях. Наклонный нежирный шрифт против прямого жирного!

Первая задача здесь — правильно определить начальный класс $\Sigma^0_1 \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_1$ эффективно открытых точечных множеств. Мы дадим три определения, к счастью, эквивалентных, но отражающих разные подходы к этому делу.

Эффективная дескриптивная теория множеств изучает точечные множества не только с точки зрения сложности их построения из открытых множеств, но и с т. зр. «эффективности» исходных открытых множеств в плане теории вычислимости.

Бэровским произведением назовем любое пространство вида $\omega^m \times \mathcal{N}^n$, где $\omega = \mathbb{N}$ дискретное, а $\mathcal{N} = \omega^\omega$ — само бэровское.

Вводятся эффективные (lightface) подклассы

$$\Sigma^i_k \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^i_k, \ \Pi^i_k \subseteq \boldsymbol{\Pi}^i_k, \ \Delta^i_k \subseteq \boldsymbol{\Delta}^i_k, \ i = 0, 1, \ k \in \omega = \mathbb{N},$$

борелевских и проективных классов в бэровских произведениях. Наклонный нежирный шрифт против прямого жирного!

Первая задача здесь — правильно определить начальный класс $\Sigma^0_1 \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_1$ эффективно открытых точечных множеств. Мы дадим три определения, к счастью, эквивалентных, но отражающих разные подходы к этому делу.

Множество $X \subseteq \omega^m \times \mathcal{N}^n$ разрешимое (рекурсивное, алгоритмически разрешимое), если существует такой алгоритм (вычислительная процедура), который на всех $x \in X$ дает 1 (после конечного числа шагов) а на всех $x \notin X$ дает 0.

Множество X полу-разрешимое (рекурсивно перечислимое, алгоритмически вычислимое), если существует такой алгоритм $\mathfrak{A}$, который на всех $x \in X$ дает 1 (после конечного числа шагов) а на всех $x \notin X$ вообще не останавливается.

Определение 1 (в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$)

Δ^0_1 = все разрешимые а Σ^0_1 = все полу-разрешимые множества.

Ниже будут даны еще два эквивалентных определения.

Упражнение. Если $X \subseteq \mathcal{N}$ и $Y = \mathcal{N} \smallsetminus X$ оба Σ^0_1 то оба Δ^0_1.

Множество $X \subseteq \omega^m \times \mathcal{N}^n$ разрешимое (рекурсивное, алгоритмически разрешимое), если существует такой алгоритм (вычислительная процедура), который на всех $x \in X$ дает 1 (после конечного числа шагов) а на всех $x \notin X$ дает 0.

Множество X полу-разрешимое (рекурсивно перечислимое, алгоритмически вычислимое), если существует такой алгоритм $\mathfrak{A}$, который на всех $x \in X$ дает 1 (после конечного числа шагов) а на всех $x \notin X$ вообще не останавливается.

Определение 1 (в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$)

Δ^0_1 = все разрешимые а Σ^0_1 = все полу-разрешимые множества.

Ниже будут даны еще два эквивалентных определения.

Упражнение. Если $X \subseteq \mathcal{N}$ и $Y = \mathcal{N} \setminus X$ оба Σ^0_1 то оба Δ^0_1.

Содержание I

Содержание II