Теория множеств
Лекция 4
Эффективная дескриптивная теория множеств: основы

Владимир Григорьевич Кановей (ИППИ)

Осень 2023, МИАН Москва

http://iitp.ru/ru/userpages/156/300.htm

kanovei@iitp.ru — email для контактов

https://www.mathnet.ru/conf2305 — сайт курса

Jech03 *Millenium* — **Базовая**

K-AMS Kanovei, *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification*, AMS University Lecture Series.

Kechris *Descriptive set theory*

Mos Moschovakis, *Descriptive set theory*

Йех73 *Теория множеств и метод форсинга*

КЛ-1 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики*

КЛ-2 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*

КЛ-3 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы*

Кур-1 Куратовский, *Топология том 1*

СКМЛ *Справочная книга по математической логике том 2: теория множеств.*

Натуральный ряд $\mathbb{N} = \omega$.

Бэровское пространство $\mathcal{N} = \omega^\omega$.

Польские пространства P.

Множества $X \subseteq P$ — точечные множества.

Борелевские множества $X \subseteq P$.

$\mathbf{\Sigma}^0_1 =$ открытые, $\mathbf{\Pi}^0_1 =$ замкнутые, $\mathbf{\Sigma}^0_2 = \mathbf{F}_\sigma$, $\mathbf{\Pi}^0_2 = \mathbf{G}_\delta$.

Проективные множества $X \subseteq P$.

Проективные классы $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$.

$\mathbf{Cort} = \mathbf{Cort}_1 := \omega^{<\omega} = \bigcup_n \omega^n$ — **кортежи** натуральных чисел;

$\mathbf{lh}(s)$ — **длина** кортежа s, т. е. $s \in \omega^n \Longrightarrow \mathbf{lh}(s) = n$;

$s \subset t$ — **строгое продолжение** кортежей;

Бэровским произведением назовем любое пространство вида $\omega^m \times \mathcal{N}^k$, где $\omega = \mathbb{N}$ дискретное, а $\mathcal{N} = \omega^\omega$ — само бэровское.

Вводятся эффективные (lightface) подклассы

$$\Sigma^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_1, \quad \Pi^0_1 \subseteq \mathbf{\Pi}^0_1, \quad \Sigma^1_n \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_n, \quad \Pi^1_n \subseteq \mathbf{\Pi}^1_n, \quad \Delta^1_n \subseteq \mathbf{\Delta}^1_n,$$

$n = 1, 2, 3, \dots$, проективных классов в бэровских произведениях. Наклонный нежирный шрифт против прямого жирного!

Первая задача здесь — правильно определить начальный класс $\Sigma^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_1$ эффективно открытых точечных множеств. Мы дадим три определения, к счастью, эквивалентных, но отражающих разные подходы к этому делу.

Бэровским произведением назовем любое пространство вида $\omega^m \times \mathcal{N}^k$, где $\omega = \mathbb{N}$ дискретное, а $\mathcal{N} = \omega^\omega$ — само бэровское.

Вводятся эффективные (lightface) подклассы

$$\Sigma^0_1 \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_1, \quad \Pi^0_1 \subseteq \boldsymbol{\Pi}^0_1, \quad \Sigma^1_n \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^1_n, \quad \Pi^1_n \subseteq \boldsymbol{\Pi}^1_n, \quad \Delta^1_n \subseteq \boldsymbol{\Delta}^1_n,$$

$n = 1, 2, 3, \dots$, проективных классов в бэровских произведениях. Наклонный нежирный шрифт против прямого жирного!

Первая задача здесь — правильно определить начальный класс $\Sigma^0_1 \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_1$ эффективно открытых точечных множеств. Мы дадим три определения, к счастью, эквивалентных, но отражающих разные подходы к этому делу.

Соглашение 1

Рассматриваем множества в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$. Такие множества удобно рассматривать в виде **отношений**, т. е. если к примеру $R \subseteq \omega \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ то записи $\langle k, x, y \rangle \in R$ и $R(k, x, y)$ означают одно и то же.

Это позволяет использовать логические операции вместо теоретико-множественных, что бывает более удобно.

Соглашение 2

В контексте Соглашения 1:

Буквы $k, l, m, n, i, j, \ldots$ используются для натуральных чисел и переменных по натуральным числам.

Буквы $x, y, z, a, b, p, q, \ldots$ используются для точек бэровского пространства $\mathcal{N} = \omega^\omega$ и переменных по $\mathcal{N}$.

Соглашение 1

Рассматриваем множества в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$. Такие множества удобно рассматривать в виде **отношений**, т. е. если к примеру $R \subseteq \omega \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ то записи $\langle k, x, y \rangle \in R$ и $R(k, x, y)$ означают одно и то же.

Это позволяет использовать логические операции вместо теоретико-множественных, что бывает более удобно.

Соглашение 2

В контексте Соглашения 1:

Буквы $k, l, m, n, i, j, \ldots$ используются для натуральных чисел и переменных по натуральным числам.

Буквы $x, y, z, a, b, p, q, \ldots$ используются для точек бэровского пространства $\mathcal{N} = \omega^\omega$ и переменных по $\mathcal{N}$.

Множество $X \subseteq \omega^m \times \mathcal{N}^n$ разрешимое (рекурсивное, алгоритмически разрешимое), если существует такой алгоритм (вычислительная процедура), который на всех $x \in X$ дает 1 (после конечного числа шагов) а на всех $x \notin X$ дает 0.

Множество X полу-разрешимое (рекурсивно перечислимое, алгоритмически вычислимое), если существует такой алгоритм $\mathfrak{A}$, который на всех $x \in X$ дает 1 (после конечного числа шагов) а на всех $x \notin X$ вообще не останавливается.

Определение 1 (в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$)

Σ^0_1 = все полу-разрешимые а Δ^0_1 = все разрешимые множества.

Ниже будут даны еще два эквивалентных определения.

Упражнение. Если $X \subseteq \mathcal{N}$ и $Y = \mathcal{N} \setminus X$ оба Σ^0_1 то оба Δ^0_1.

Множество $X \subseteq \omega^m \times \mathcal{N}^n$ разрешимое (рекурсивное, алгоритмически разрешимое), если существует такой алгоритм (вычислительная процедура), который на всех $x \in X$ дает 1 (после конечного числа шагов) а на всех $x \notin X$ дает 0.

Множество X полу-разрешимое (рекурсивно перечислимое, алгоритмически вычислимое), если существует такой алгоритм $\mathfrak{A}$, который на всех $x \in X$ дает 1 (после конечного числа шагов) а на всех $x \notin X$ вообще не останавливается.

Определение 1 (в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$)

Σ^0_1 = все полу-разрешимые а Δ^0_1 = все разрешимые множества.

Ниже будут даны еще два эквивалентных определения.

Упражнение. Если $X \subseteq \mathcal{N}$ и $Y = \mathcal{N} \setminus X$ оба Σ^0_1 то оба Δ^0_1.

Лемма (в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$)

Каждое Σ^0_1-множество X открыто, т. е. $\Sigma^0_1 \subsetneqq \boldsymbol{\Sigma}^0_1$.

Пусть алгоритм $\mathfrak{A}$ дает $X \in \Sigma^0_1$. Если $y \in X$, то $\mathfrak{A}(y) = 1$, и в этом вычислении используется лишь конечное число значений $y(n)$, так как число шагов конечно. Пусть эти значения $y(n_1), \dots, y(n_k)$. Тогда

$$U = \{z \in \mathcal{N} : z(n_1) = y(n_1) \wedge \dots \wedge z(n_k) = y(n_k)\}$$

открытое множество, а с другой стороны $y \in U \subseteq X$. $\square$

Почему в лемме строгое $\subsetneqq$? Ответ: Σ^0_1 счетно, а $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$ несчетно.

Пример 1. Множество $X = \{x \in \mathcal{N} : \exists\, k\, (x(k) \geq 1)\} \in \Sigma^0_1$.
$\mathfrak{A}$: просматриваем $n = 0, 1, 2, \dots$, на каждом шагу n если $x(n) \geq 1$ то $\mathfrak{A}(x) = 1$ и стоп, если $x(n) = 0$ то переходим к $n + 1$.

Пример 2. Множество $Y = \{x \in \mathcal{N} : \forall\, k\, (x(k) = 0)\} \notin \Sigma^0_1$.
Действительно, $Y = \{0^\omega\}$ неоткрыто.

Лемма (в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$)

Каждое Σ^0_1-множество X открыто, т. е. $\Sigma^0_1 \subsetneqq \boldsymbol{\Sigma}^0_1$.

Пусть алгоритм $\mathfrak{A}$ дает $X \in \Sigma^0_1$. Если $y \in X$, то $\mathfrak{A}(y) = 1$, и в этом вычислении используется лишь конечное число значений $y(n)$, так как число шагов конечно. Пусть эти значения $y(n_1), \dots, y(n_k)$. Тогда

$$U = \{z \in \mathcal{N} : z(n_1) = y(n_1) \wedge \dots \wedge z(n_k) = y(n_k)\}$$

открытое множество, а с другой стороны $y \in U \subseteq X$. $\square$

Почему в лемме строгое $\subsetneqq$? Ответ: Σ^0_1 счетно, а $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$ несчетно.

Пример 1. Множество $X = \{x \in \mathcal{N} : \exists\, k\, (x(k) \geq 1)\} \in \Sigma^0_1$.
$\mathfrak{A}$: просматриваем $n = 0, 1, 2, \dots$, на каждом шагу n если $x(n) \geq 1$ то $\mathfrak{A}(x) = 1$ и стоп, если $x(n) = 0$ то переходим к $n + 1$.

Пример 2. Множество $Y = \{x \in \mathcal{N} : \forall\, k\, (x(k) = 0)\} \notin \Sigma^0_1$.
Действительно, $Y = \{0^\omega\}$ неоткрыто.

Cort $=\bigcup_m \omega^m=$ кортежи натуральных чисел, $\omega^m=$ кортежи длины m.

Определение 2 (в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$)

Множество $X \subseteq \omega^m \times \mathcal{N}^n$ принадлежит Σ^0_1, если существует разрешимое (Δ^0_1) множество $R \subseteq \omega^m \times \bigcup_k (\omega^k)^n$, для которого

$$\langle i_1,\dots,i_m,x_1,\dots,x_n\rangle \in X \Longleftrightarrow \exists\, k\, R(i_1,\dots,i_m,x_1 \restriction k,\dots,x_n \restriction k)\,.$$

В частности, множество $X \subseteq \mathcal{N}$ принадлежит Σ^0_1, если имеется разрешимое (Δ^0_1) множество $R \subseteq$ **Cort**, для которого

$$x \in X \Longleftrightarrow \exists\, k\, R(x \restriction k) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{s\in R} \mathcal{N}_s\,.$$

Утверждаем: Опр 1 $\Longleftrightarrow$ Опр 2. Проверка для случая $X \subseteq \mathcal{N}$.

Опр 1 $\Longrightarrow$ Опр 2. $R :=$ все такие кортежи $s \in$ **Cort**, что за ($\le k =$ длина s) шагов данный алгоритм $\mathfrak{A}$ выдает $\mathfrak{A}(x = s^\frown 0^\omega) = 1$, причем обращаясь лишь к значениям $x(\ell)$, $\ell < k$ (т.е. членам s).

Опр 2 $\Longrightarrow$ Опр 1. $\mathfrak{A}(x)$: перебираем все кортежи $s \in$ **Cort**, если $s \subset x$ и $R(s)$, то $\mathfrak{A}(x) = 1$ и стоп, иначе к следующему s.

Cort $= \bigcup_m \omega^m =$ кортежи натуральных чисел, $\omega^m =$ кортежи длины m.

Определение 2 (в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$)

Множество $X \subseteq \omega^m \times \mathcal{N}^n$ принадлежит Σ^0_1, если существует разрешимое (Δ^0_1) множество $R \subseteq \omega^m \times \bigcup_k (\omega^k)^n$, для которого

$$\langle i_1, \ldots, i_m, x_1, \ldots, x_n \rangle \in X \iff \exists\, k\, R(i_1, \ldots, i_m, x_1 \restriction k, \ldots, x_n \restriction k)\,.$$

В частности, множество $X \subseteq \mathcal{N}$ принадлежит Σ^0_1, если имеется разрешимое (Δ^0_1) множество $R \subseteq$ **Cort**, для которого

$$x \in X \iff \exists\, k\, R(x \restriction k) \iff x \in \bigcup_{s \in R} \mathcal{N}_s\,.$$

Утверждаем: Опр 1 $\iff$ Опр 2. Проверка для случая $X \subseteq \mathcal{N}$.

Опр 1 $\Longrightarrow$ Опр 2. $R :=$ все такие кортежи $s \in$ **Cort**, что за ($\le k =$ длина s) шагов данный алгоритм $\mathfrak{A}$ выдает $\mathfrak{A}(x = s^\frown 0^\omega) = 1$, причем обращаясь лишь к значениям $x(\ell)$, $\ell < k$ (т.е. членам s).

Опр 2 $\Longrightarrow$ Опр 1. $\mathfrak{A}(x)$: перебираем все кортежи $s \in$ **Cort**, если $s \subset x$ и $R(s)$, то $\mathfrak{A}(x) = 1$ и стоп, иначе к следующему s.

переменные $k, l, m, n, \ldots$ **типа 0: по ω**

переменные $x, y, z, a, b \ldots$ **типа 1: по $\mathcal{N}$**

фиксированные **вычислимые функции** $F, G, H, \ldots : \omega^m \to \omega$ могут входить как элементы формул

$+, \times$, **вся арифметика для типа 0**

термы типа 0: напр. $x\big(y(n+1) + z(2^k) \times H(m, x(n))\big)$, где $H : \omega^2 \to \omega$ — данная вычислимая функция

элементарные формулы: равенства термов $t_1 = t_2$, вообще вычислимые отношения $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ между термами

ограниченные ф-лы: элементарные, связки, $\forall\, k < t$, $\exists\, k < t$

арифметические ф-лы: ограниченные, и кванторы $\forall\, k$, $\exists\, k$

Σ^0_1-формулы: вида $\exists\, k$ (ограниченная формула)

Π^0_1-формулы: вида $\forall\, k$ (ограниченная формула) переменные $k, l, m, n, \dots$ **типа 0: по ω**

переменные $x, y, z, a, b \dots$ **типа 1: по $\mathcal{N}$**

фиксированные **вычислимые функции** $F, G, H, \dots : \omega^m \to \omega$ могут входить как элементы формул

$+, \times$, **вся арифметика для типа 0**

термы типа 0: напр. $x\big(y(n+1) + z(2^k) \times H(m, x(n))\big)$, где $H : \omega^2 \to \omega$ — данная вычислимая функция

элементарные формулы: равенства термов $t_1 = t_2$, вообще вычислимые отношения $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ между термами

ограниченные ф-лы: элементарные, связки, $\forall\, k < t$, $\exists\, k < t$

арифметические ф-лы: ограниченные, и кванторы $\forall\, k$, $\exists\, k$

Σ^0_1-формулы: вида $\exists\, k$ (ограниченная формула)

Π^0_1-формулы: вида $\forall\, k$ (ограниченная формула)

Определение 3 (Σ^0_1 и Π^0_1 множества)

Множества $X \subseteq \omega^m \times \mathcal{N}^n$, определимые Σ^0_1-формулами, называются: Σ^0_1-множества (эффективно открытые).
То же для Π^0_1 (эффективно замкнутые).

Утверждаем: для Σ^0_1-множеств Опр 1 $\Longleftrightarrow$ Опр 2 $\Longleftrightarrow$ Опр 3.

Проверка Опр 3$\Longrightarrow$Опр 1 для случая $X \subseteq \mathcal{N}$.

Пусть $X = \{x \in \mathcal{N} : \exists\, k\, \varphi(k, x)\}$, φ — ограниченная ф-ла Опр 3. Работа $\mathfrak{A}$ для Опр 1: берем по очереди $k = 0, 1, 2, \dots$. Проверяем $\varphi(k, x)$. Раз φ ограниченная — требуется конечное число шагов. Если $\varphi(k, x)$ истинна то $\mathfrak{A}(x) = 1$ и стоп.

Проверка Опр 1$\Longrightarrow$Опр 3 сложное дело, основано на том, что алгоритмы описываются ограниченными формулами. Опускаем.

Определение 3 (Σ^0_1 и Π^0_1 множества)

Множества $X \subseteq \omega^m \times \mathcal{N}^n$, определимые Σ^0_1-формулами, называются: Σ^0_1-множества (эффективно открытые).
То же для Π^0_1 (эффективно замкнутые).

Утверждаем: для Σ^0_1-множеств Опр 1 $\Longleftrightarrow$ Опр 2 $\Longleftrightarrow$ Опр 3.

Проверка Опр 3$\Longrightarrow$Опр 1 для случая $X \subseteq \mathcal{N}$.

Пусть $X = \{x \in \mathcal{N} : \exists\, k\, \varphi(k, x)\}$, φ — ограниченная ф-ла Опр 3. Работа $\mathfrak{A}$ для Опр 1: берем по очереди $k = 0, 1, 2, \dots$. Проверяем $\varphi(k, x)$. Раз φ ограниченная — требуется конечное число шагов. Если $\varphi(k, x)$ истинна то $\mathfrak{A}(x) = 1$ и стоп.

Проверка Опр 1$\Longrightarrow$Опр 3 сложное дело, основано на том, что алгоритмы описываются ограниченными формулами. Опускаем.

Итак, тремя разными, но эквивалентными определениями введен **счетный** класс $\Sigma^0_1 \subsetneqq \mathbf{\Sigma}^0_1$ множеств в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$, которые называются:

- эффективно-открытые — в контексте дескриптивной теории множеств,
- полу-разрешимые — в контексте теории вычислимости.

Этот класс Σ^0_1 служит основой для построения эффективных иерархий: борелевской и проективной.

Итак, тремя разными, но эквивалентными определениями введен **счетный** класс $\Sigma^0_1 \subsetneqq \mathbf{\Sigma}^0_1$ множеств в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$, которые называются:

- эффективно-открытые — в контексте дескриптивной теории множеств,
- полу-разрешимые — в контексте теории вычислимости.

Этот класс Σ^0_1 служит основой для построения эффективных иерархий: борелевской и проективной.

Язык!! Для примера берем $n = 3$ (3 квантора).
Напомним что k переменная по ω, x переменная по $\mathcal{N}$.

Σ^0_3: $\exists\, k_1\, \forall\, k_2\, \exists\, k_3$ (ограниченная);

Π^0_3: $\forall\, k_1\, \exists\, k_2\, \forall\, k_3$ (ограниченная);

Σ^1_3 (в узком смысле): $\exists\, x_1\, \forall\, x_2\, \exists\, x_3\, \underbrace{\forall\, k\, (\text{ограниченная})}_{\Pi^0_1}$;

Π^1_3 (в узком смысле): $\forall\, x_1\, \exists\, x_2\, \forall\, x_3\, \underbrace{\exists\, k\, (\text{ограниченная})}_{\Sigma^0_1}$;

Σ^1_3 **в широком смысле:** $\exists\, x_1\, \forall\, x_2\, \exists\, x_3$ (арифметическая);

Π^1_3 **в широком смысле:** $\forall\, x_1\, \exists\, x_2\, \forall\, x_3$ (арифметическая)

Язык!! Для примера берем $n = 3$ (3 квантора).
Напомним что k переменная по ω, x переменная по $\mathcal{N}$.

Σ^0_3: $\exists\, k_1 \,\forall\, k_2 \,\exists\, k_3$ (ограниченная);

Π^0_3: $\forall\, k_1 \,\exists\, k_2 \,\forall\, k_3$ (ограниченная);

Σ^1_3 (в узком смысле): $\exists\, x_1 \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3 \,\underbrace{\forall\, k\ (\text{ограниченная})}_{\Pi^0_1}$;

Π^1_3 (в узком смысле): $\forall\, x_1 \,\exists\, x_2 \,\forall\, x_3 \,\underbrace{\exists\, k\ (\text{ограниченная})}_{\Sigma^0_1}$;

Σ^1_3 **в широком смысле:** $\exists\, x_1 \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3$ (арифметическая);

Π^1_3 **в широком смысле:** $\forall\, x_1 \,\exists\, x_2 \,\forall\, x_3$ (арифметическая)

Параметры — точки пространства $\mathcal{N}$, которые можно вставлять в формулы замещая свободные переменные типа 1.

Если $P \subseteq \mathcal{N}$ то $\Sigma^i_n(P)$, $\Pi^i_n(P)$ обозначает формулы из Σ^i_n соответственно Π^i_n, с разрешенными параметрами из P.

Аналогично, $\Sigma^i_n(P)$, $\Pi^i_n(P)$ обозначаются классы точечных множеств в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$, определимых формулами указанного типа.

Если $P = \varnothing$ (нет разрешенных параметров), то спецификация «(P)» опускается, т. е. $\Sigma^i_n(\varnothing) = \Sigma^i_n$, $\Pi^i_n(\varnothing) = \Pi^i_n$.

Единственный параметр: если $a \in \mathcal{N}$, то $\Sigma^1_n(a) = \Sigma^1_n(P)$, где $P = \{a\}$. Аналогично, $\Pi^1_n(a, b) = \Pi^1_n(\{a, b\})$, и т. п..

Пример. $\Phi(x) := \exists\, k\, (x(k) \neq 0)$. Это Σ^0_1-формула, а определяемое ею множество $X = \{x \in \mathcal{N} : \exists\, k\, (x(k) \neq 0)\}$ принадлежит Σ^0_1.

Параметры — точки пространства $\mathcal{N}$, которые можно вставлять в формулы замещая свободные переменные типа 1.

Если $P \subseteq \mathcal{N}$ то $\Sigma^i_n(P)$, $\Pi^i_n(P)$ обозначает формулы из Σ^i_n соответственно Π^i_n, с разрешенными параметрами из P.

Аналогично, $\Sigma^i_n(P)$, $\Pi^i_n(P)$ обозначаются классы точечных множеств в бэровских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$, определимых формулами указанного типа.

Если $P = \varnothing$ (нет разрешенных параметров), то спецификация «(P)» опускается, т. е. $\Sigma^i_n(\varnothing) = \Sigma^i_n$, $\Pi^i_n(\varnothing) = \Pi^i_n$.

Единственный параметр: если $a \in \mathcal{N}$, то $\Sigma^1_n(a) = \Sigma^1_n(P)$, где $P = \{a\}$. Аналогично, $\Pi^1_n(a, b) = \Pi^1_n(\{a, b\})$, и т. п..

Пример. $\Phi(x) := \exists\, k\, (x(k) \neq 0)$. Это Σ^0_1-формула, а определяемое ею множество $X = \{x \in \mathcal{N} : \exists\, k\, (x(k) \neq 0)\}$ принадлежит Σ^0_1.

Теорема (теорема эффективизации)

$\mathbf{\Sigma}^0_1 = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma^0_1(a)$ *и* $\mathbf{\Pi}^0_1 = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Pi^0_1(a)$.

Пусть $n \ge 1$. *Тогда* $\mathbf{\Sigma}^1_n = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma^1_n(a)$ *и* $\mathbf{\Pi}^1_n = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Pi^1_n(a)$.

Доказательство для $\mathbf{\Sigma}^0_1$.

Направление $\supseteq$. Соотношение $\Sigma^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_1$ см. Лемма.
Доказательство $\Sigma^0_1(a) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_1$ аналогично.

Направление $\subseteq$. Пусть множество $X \subseteq \mathcal{N}$ открыто, т. е. $\mathbf{\Sigma}^0_1$.
Тогда $X = \bigcup_{s\in S} \mathcal{N}_s$, где $S \subseteq \mathbf{Cort}$ и $\mathcal{N}_s = \{x \in \mathcal{N} : s \subset x\}$.

Пусть $\mathbf{Cort} = \{s_n : n < \omega\}$ — вычислимое перечисление кортежей.

Фиксируем точку $p \in \mathcal{N}$, для которой $S = \{s_n : p(n) = 0\}$.

Пусть $q(n) = \mathbf{lh}(s_n)$ (длина s_n); $q \in \mathcal{N}$ вычислимая. Тогда

$$x \in X \iff \exists\, n\, \big(p(n) = 0 \ \wedge\ \forall\, k < q(n)\, \big(x(k) = s_n(k)\big)\big),$$

где в правой части — формула из $\Sigma^0_1(p)$. Значит, $X \in \Sigma^0_1(p)$.

Теорема (теорема эффективизации)

$\mathbf{\Sigma}^0_1 = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma^0_1(a)$ *и* $\mathbf{\Pi}^0_1 = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Pi^0_1(a)$.

Пусть $n \geq 1$. *Тогда* $\mathbf{\Sigma}^1_n = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma^1_n(a)$ *и* $\mathbf{\Pi}^1_n = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Pi^1_n(a)$.

Доказательство для $\mathbf{\Sigma}^0_1$.

Направление $\supseteq$. Соотношение $\Sigma^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_1$ см. Лемма.
Доказательство $\Sigma^0_1(a) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_1$ аналогично.

Направление $\subseteq$. Пусть множество $X \subseteq \mathcal{N}$ открыто, т. е. $\mathbf{\Sigma}^0_1$.
Тогда $X = \bigcup_{s\in S} \mathcal{N}_s$, где $S \subseteq \mathbf{Cort}$ и $\mathcal{N}_s = \{x \in \mathcal{N} : s \subset x\}$.

Пусть $\mathbf{Cort} = \{s_n : n < \omega\}$ — вычислимое перечисление кортежей.

Фиксируем точку $p \in \mathcal{N}$, для которой $S = \{s_n : p(n) = 0\}$.

Пусть $q(n) = \mathbf{lh}(s_n)$ (длина s_n); $q \in \mathcal{N}$ вычислимая. Тогда

$$x \in X \iff \exists\, n \,\big(p(n) = 0 \;\wedge\; \forall\, k < q(n)\, \big(x(k) = s_n(k)\big)\big),$$

где в правой части — формула из $\Sigma^0_1(p)$. Значит, $X \in \Sigma^0_1(p)$.

Шаг $\mathbf{\Sigma}^1_n \to \mathbf{\Pi}^1_n$. Основан на том, что 1) множества $\mathbf{\Pi}^1_n$ = дополнения множеств $\mathbf{\Sigma}^1_n$, 2) отрицание формулы определяет дополнительное множество, и 3) отрицание Σ^1_n-формулы приводится к Π^1_n-виду «проносом» $\neg$ слева направо через все кванторы с их обращением, т. е. например $\neg\,\exists\forall\exists \to \forall\exists\forall\,\neg$.

Шаг $\mathbf{\Pi}^1_n \to \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. Направление $\subseteq$. Пусть $X \subseteq \mathcal{N}$, $X \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. По определению $X=$ проекция $\mathbf{\Pi}^1_n$-множества U, т. е.

$$x \in X \iff \exists\, y\, U(x,y), \text{ где } U \in \mathbf{\Pi}^1_n.$$

По индуктивному предположению, $U = \{\langle x,y\rangle : \Psi(x,y)\}$, где Ψ есть формула $\Pi^1_n(a)$, для какого-то $a \in \mathcal{N}$. Тогда $\Phi(x) := \exists\, y\, \Psi(x,y)$ есть $\Sigma^1_{n+1}(a)$-формула, так что $X = \{x : \Phi(x)\} \in \Sigma^1_{n+1}(a)$.

Направление $\supseteq$. Пусть $X = \{x \in \mathcal{N} : \Phi(x)\}$, $\Phi(x) := \exists\, y\, \Psi(x,y)$ есть $\Sigma^1_{n+1}(a)$-формула, Ψ есть формула $\Pi^1_n(a)$, $a \in \mathcal{N}$.
По индуктивному предположению, $U = \{\langle x,y\rangle : \Psi(x,y)\}$ есть $\mathbf{\Pi}^1_n$, а по построению X тождественно проекции U, т. е. $X \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$.

Шаг $\mathbf{\Sigma}^1_n \to \mathbf{\Pi}^1_n$. Основан на том, что 1) множества $\mathbf{\Pi}^1_n$ = дополнения множеств $\mathbf{\Sigma}^1_n$, 2) отрицание формулы определяет дополнительное множество, и 3) отрицание Σ^1_n-формулы приводится к Π^1_n-виду «проносом» $\neg$ слева направо через все кванторы с их обращением, т. е. например $\neg\,\exists\forall\exists \to \forall\exists\forall\,\neg$.

Шаг $\mathbf{\Pi}^1_n \to \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. Направление $\subseteq$. Пусть $X \subseteq \mathcal{N}$, $X \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. По определению $X =$ проекция $\mathbf{\Pi}^1_n$-множества U, т. е.

$$x \in X \iff \exists\, y\, U(x, y), \text{ где } U \in \mathbf{\Pi}^1_n.$$

По индуктивному предположению, $U = \{\langle x, y\rangle : \Psi(x, y)\}$, где Ψ есть формула $\Pi^1_n(a)$, для какого-то $a \in \mathcal{N}$. Тогда $\Phi(x) := \exists\, y\, \Psi(x, y)$ есть $\Sigma^1_{n+1}(a)$-формула, так что $X = \{x : \Phi(x)\} \in \Sigma^1_{n+1}(a)$.

Направление $\supseteq$. Пусть $X = \{x \in \mathcal{N} : \Phi(x)\}$, $\Phi(x) := \exists\, y\, \Psi(x, y)$ есть $\Sigma^1_{n+1}(a)$-формула, Ψ есть формула $\Pi^1_n(a)$, $a \in \mathcal{N}$.
По индуктивному предположению, $U = \{\langle x, y\rangle : \Psi(x, y)\}$ есть $\mathbf{\Pi}^1_n$, а по построению X тождественно проекции U, т. е. $X \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$.

Каждая формула данного языка приводится к одному из видов

Σ^0_n, Π^0_n, Σ^1_n (в узком смысле), Π^1_n (в узком смысле),

без увеличения кванторной сложности, при помощи следующих пяти правил и им двойственных ($\exists - \forall$) правил.

1 $\exists^0\exists^0 \to \exists^0$

$$\exists\, k\, \exists\, \ell\, \varphi(k,\ell) \Longleftrightarrow \exists\, n\, \varphi(n_{\text{лев}}, n_{\text{прав}}),$$

где если $n = 2^k(2\ell+1)-1$ то $n_{\text{лев}} = k$, $n_{\text{прав}} = \ell$.

2 $\exists^1\exists^1 \to \exists^1$

$$\exists\, x\, \exists\, y\, \varphi(x,y) \Longleftrightarrow \exists\, z\, \varphi(z_{\text{лев}}, z_{\text{прав}}),$$

где если $z \in \mathcal{N}$, то $z_{\text{лев}}(k) = z(2k)$, $z_{\text{прав}}(k) = z(2k+1)$.

3 $\exists^0\exists^1 \to \exists^1$

$$\exists\, n\, \exists\, y\, \varphi(n,y) \Longleftrightarrow \exists\, z\, \varphi(z(0), z^-)$$

где $z^-(k) = z(k+1)$.

4 $\forall^0\exists^1 \to \exists^1\forall^0$

$$\forall\, n\, \exists\, y\, \varphi(n,y) \Longleftrightarrow \exists\, y\, \forall\, n\, \varphi(n, y_{(n)}) \ = \text{Акс. Выб.}$$

где $y_{(n)}(k) = y(2^n(2k+1)-1)$.

5 $\forall^0\exists^0 \to \exists^1\forall^0$

$$\forall\, k\, \exists\, \ell\, \varphi(k,\ell) \Longleftrightarrow \exists\, y\, \forall\, k\, \varphi(k, y(k)).$$

Каждая формула данного языка приводится к одному из видов

Σ^0_n, Π^0_n, Σ^1_n (в узком смысле), Π^1_n (в узком смысле),

без увеличения кванторной сложности, при помощи следующих пяти правил и им двойственных ($\exists - \forall$) правил.

1 $\exists^0\exists^0 \to \exists^0$ $\quad \exists\, k\, \exists\, \ell\, \varphi(k,\ell) \iff \exists\, n\, \varphi(n_{\text{лев}}, n_{\text{прав}})$,

где если $n = 2^k(2\ell+1)-1$ то $n_{\text{лев}} = k$, $n_{\text{прав}} = \ell$.

2 $\exists^1\exists^1 \to \exists^1$ $\quad \exists\, x\, \exists\, y\, \varphi(x,y) \iff \exists\, z\, \varphi(z_{\text{лев}}, z_{\text{прав}})$,

где если $z \in \mathcal{N}$, то $z_{\text{лев}}(k) = z(2k)$, $z_{\text{прав}}(k) = z(2k+1)$.

3 $\exists^0\exists^1 \to \exists^1$ $\quad \exists\, n\, \exists\, y\, \varphi(n,y) \iff \exists\, z\, \varphi(z(0), z^-)$

где $z^-(k) = z(k+1)$.

4 $\forall^0\exists^1 \to \exists^1\forall^0$ $\quad \forall\, n\, \exists\, y\, \varphi(n,y) \iff \exists\, y\, \forall\, n\, \varphi(n, y_{(n)})$ = Акс. Выб.

где $y_{(n)}(k) = y(2^n(2k+1)-1)$.

5 $\forall^0\exists^0 \to \exists^1\forall^0$ $\quad \forall\, k\, \exists\, \ell\, \varphi(k,\ell) \iff \exists\, y\, \forall\, k\, \varphi(k, y(k))$.

Что означают вхождения $n_{\text{лев}}$, $n_{\text{прав}}$, $z_{\text{лев}}$, $z_{\text{прав}}$, z^{-}, $y_{(n)}$ в правилах 1 – 5?

$n_{\text{лев}}$, $n_{\text{прав}}$ Функции $n \longmapsto n_{\text{лев}}$, $n \longmapsto n_{\text{прав}}$ вычислимые, и потому принадлежат языку арифметики 2го порядка.

$z_{\text{лев}}$, $z_{\text{прав}}$ Всякое вхождение $\Phi(\dots z_{\text{лев}}(t)\dots)$ понимается как сокращение для легитимного вхождения $\Phi(\dots z(2t)\dots)$.

Всякое вхождение $\Phi(\dots z_{\text{прав}}(t)\dots)$ понимается как сокращение для легитимного вхождения $\Phi(\dots z(2t+1)\dots)$.

z^{-} Всякое вхождение $\Phi(\dots z^{-}(t)\dots)$ понимается как сокращение для легитимного вхождения $\Phi(\dots z(t+1)\dots)$.

$y_{(n)}$ Всякое вхождение $\Phi(\dots y_{(t)}(t')\dots)$ понимается как сокращение для легитимного вхождения $\Phi(\dots y(2^t(2t'+1)-1)\dots)$.

Что означают вхождения $n_{\text{лев}}$, $n_{\text{прав}}$, $z_{\text{лев}}$, $z_{\text{прав}}$, z^{-}, $y_{(n)}$ в правилах 1 – 5?

$n_{\text{лев}}$, $n_{\text{прав}}$ Функции $n \longmapsto n_{\text{лев}}$, $n \longmapsto n_{\text{прав}}$ вычислимые, и потому принадлежат языку арифметики 2го порядка.

$z_{\text{лев}}$, $z_{\text{прав}}$ Всякое вхождение $\Phi(\dots z_{\text{лев}}(t)\dots)$ понимается как сокращение для легитимного вхождения $\Phi(\dots z(2t)\dots)$.
Всякое вхождение $\Phi(\dots z_{\text{прав}}(t)\dots)$ понимается как сокращение для легитимного вхождения $\Phi(\dots z(2t+1)\dots)$.

z^{-} Всякое вхождение $\Phi(\dots z^{-}(t)\dots)$ понимается как сокращение для легитимного вхождения $\Phi(\dots z(t+1)\dots)$.

$y_{(n)}$ Всякое вхождение $\Phi(\dots y_{(t)}(t')\dots)$ понимается как сокращение для легитимного вхождения $\Phi(\dots y(2^t(2t'+1)-1)\dots)$.

В свойствах I – VII, $P \subseteq \mathcal{N}$ – произвольное множество параметров.

I Σ^1_n Если Φ, Ψ суть $\Sigma^1_n(P)$-формулы то таковы же

$$\exists\, x\, \Phi, \quad \exists\, k\, \Phi, \quad \forall\, k\, \Phi, \quad \Phi \wedge \Psi, \quad \Phi \vee \Psi.$$

— т. е. каждая из этих пяти формул приводится к виду из $\Sigma^1_n(P)$ простыми логическими преобразованиями.

Пусть $n = 3$, $\Phi(x) := \exists\, x_1 \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(x_1, x_2, x_3, x)$, где φ есть Π^0_1.

$$\begin{aligned}
\exists\, x\, \Phi(x) &\iff \exists\, x\, \exists\, x_1 \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(x_1, x_2, x_3, x) \\
&\iff \underbrace{\exists\, z \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(z_{\text{прав}}, x_2, x_3, z_{\text{лев}})}_{\Sigma^1_3} \quad (\text{правило } 2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exists\, k\, \Phi(k) &\iff \exists\, k\, \exists\, x_1 \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(x_1, x_2, x_3, k) \\
&\iff \exists\, z \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(z^-, x_2, x_3, z(0)) \quad (\text{правило } 3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall\, k\, \Phi(k) &\iff \forall\, k\, \exists\, x_1 \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(x_1, x_2, x_3, k) \\
&\iff \exists\, y \,\forall\, k \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(y_{(k)}, x_2, x_3, k) \quad (\text{правило } 4). \\
&\iff \exists\, y \,\forall\, z \,\exists\, x_3\, \varphi(y_{(k)}, z^-, x_3, z(0)) \quad (\text{правило } 3).
\end{aligned}$$

В свойствах I – VII, $P \subseteq \mathcal{N}$ – произвольное множество параметров.

I Σ^1_n Если Φ, Ψ суть $\Sigma^1_n(P)$-формулы то таковы же

$$\exists\, x\, \Phi,\quad \exists\, k\, \Phi,\quad \forall\, k\, \Phi,\quad \Phi \wedge \Psi,\quad \Phi \vee \Psi.$$

— т. е. каждая из этих пяти формул приводится к виду из $\Sigma^1_n(P)$ простыми логическими преобразованиями.

Пусть $n = 3$, $\Phi(x) := \exists\, x_1 \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(x_1, x_2, x_3, x)$, где φ есть Π^0_1.

$$\begin{aligned}
\exists\, x\, \Phi(x) &\iff \exists\, x\, \exists\, x_1 \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(x_1, x_2, x_3, x) \\
&\iff \underbrace{\exists\, z \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(z_{\text{прав}}, x_2, x_3, z_{\text{лев}})}_{\Sigma^1_3} \quad \text{(правило 2)}. \\
\exists\, k\, \Phi(k) &\iff \exists\, k\, \exists\, x_1 \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(x_1, x_2, x_3, k) \\
&\iff \exists\, z \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(z^-, x_2, x_3, z(0)) \quad \text{(правило 3)}. \\
\forall\, k\, \Phi(k) &\iff \forall\, k\, \exists\, x_1 \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(x_1, x_2, x_3, k) \\
&\iff \exists\, y \,\forall\, k \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3\, \varphi(y_{(k)}, x_2, x_3, k) \quad \text{(правило 4)}. \\
&\iff \exists\, y \,\forall\, z \,\exists\, x_3\, \varphi(y_{(k)}, z^-, x_3, z(0)) \quad \text{(правило 3)}.
\end{aligned}$$

Доказываем **I** для конъюнкции Σ^1_3-формул.

$$\exists\, x_1\, \forall\, x_2\, \exists\, x_3\, \forall\, m\, \varphi(x_1, x_2, x_3, m) \;\wedge\; \exists\, y_1\, \forall\, y_2\, \exists\, y_3\, \forall\, k\, \psi(y_1, y_2, y_3, k)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\exists\, x_1\, \exists\, y_1\, \forall\, x_2\, \forall\, y_2\, \exists\, x_3\, \exists\, y_3\, \forall\, m\, \forall\, k\, (\varphi(x_1, x_2, x_3, m) \wedge \psi(y_1, y_2, y_3, k))$$

$\Longleftrightarrow$ (через правило **2**)

$$\exists\, a\, \forall\, b\, \exists\, c\, \forall\, j\, (\varphi(a_{\text{лев}}, b_{\text{лев}}, c_{\text{лев}}, j_{\text{лев}}) \wedge \psi(a_{\text{прав}}, b_{\text{прав}}, c_{\text{прав}}, j_{\text{прав}})).$$

«Красная» формула — ограниченная вместе с φ, ψ.

II Π^1_n Если Φ, Ψ суть $\Pi^1_n(P)$-формулы то таковы же $\forall\, x\, \Phi$, $\exists\, k\, \Phi$, $\forall\, k\, \Phi$, $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$ — аналогично **I**.

Доказываем **I** для конъюнкции Σ^1_3-формул.

$$\exists\, x_1 \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3 \,\forall\, m\, \varphi(x_1, x_2, x_3, m) \;\wedge\; \exists\, y_1 \,\forall\, y_2 \,\exists\, y_3 \,\forall\, k\, \psi(y_1, y_2, y_3, k)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\exists\, x_1 \,\exists\, y_1 \,\forall\, x_2 \,\forall\, y_2 \,\exists\, x_3 \,\exists\, y_3 \,\forall\, m \,\forall\, k\, (\varphi(x_1, x_2, x_3, m) \wedge \psi(y_1, y_2, y_3, k))$$

$\Longleftrightarrow$ (через правило **2**)

$$\exists\, a \,\forall\, b \,\exists\, c \,\forall\, j\, (\varphi(a_{\text{лев}}, b_{\text{лев}}, c_{\text{лев}}, j_{\text{лев}}) \wedge \psi(a_{\text{прав}}, b_{\text{прав}}, c_{\text{прав}}, j_{\text{прав}})).$$

«Красная» формула — ограниченная вместе с φ, ψ.

II Π^1_n Если Φ, Ψ суть $\Pi^1_n(P)$-формулы то таковы же
$\forall\, x\, \Phi$, $\exists\, k\, \Phi$, $\forall\, k\, \Phi$, $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$ — аналогично **I**.

III $\neg$ Если Φ есть $\Sigma^1_n(P)$-формула то $\neg\,\Phi$ есть $\Pi^1_n(P)$-формула, и наоборот: $\neg\,\underbrace{\exists x\,\forall y\,\exists z\,\forall k\,\varphi}_{\Sigma^1_3} \Longleftrightarrow \underbrace{\forall x\,\exists y\,\forall z\,\exists k\,\neg\,\varphi}_{\Pi^1_3}$.

IV $\Pi^1_n \Longrightarrow \Sigma^1_n$ Если Φ есть $\Pi^1_n(P)$-формула а Ψ $\Sigma^1_n(P)$-формула то $\Phi \Longrightarrow \Psi$ есть $\Sigma^1_n(P)$-формула. **Упражнение**.

V $\Sigma^1_n \Longrightarrow \Pi^1_n$ Если Φ есть $\Sigma^1_n(P)$-формула а Ψ $\Pi^1_n(P)$-формула то $\Phi \Longrightarrow \Psi$ есть $\Pi^1_n(P)$-формула. **Упражнение**.

VI арифм $\to$ Σ^1_1 и Π^1_1 Любая арифметическая формула приводится к Σ^1_1-виду и к Π^1_1-виду с теми же параметрами.

$\forall^0\exists^0\forall^0\exists^0 \to \underline{\forall^0\exists^0}\ \underline{\forall^0\exists^0} \to \boxed{5}\ \exists^1\underline{\forall^0\exists^1}\forall^0 \to \boxed{4}\ \underline{\exists^1\exists^1}\ \underline{\forall^0\forall^0} \to \boxed{2}\ \exists^1\forall^0$.

Упражнение: привести $\forall^0\exists^0\forall^0\exists^0$ к Π^1_1-виду.

VII Любая Σ^1_n-формула в широком смысле приводится к Σ^1_n-виду в узком смысле с теми же параметрами. То же для Π^1_n. **Упраж.**

III $\neg$ Если Φ есть $\Sigma^1_n(P)$-формула то $\neg\,\Phi$ есть $\Pi^1_n(P)$-формула, и наоборот: $\neg\,\underbrace{\exists x\,\forall y\,\exists z\,\forall k\,\varphi}_{\Sigma^1_3} \iff \underbrace{\forall x\,\exists y\,\forall z\,\exists k\,\neg\,\varphi}_{\Pi^1_3}$.

IV $\Pi^1_n \Longrightarrow \Sigma^1_n$ Если Φ есть $\Pi^1_n(P)$-формула а Ψ $\Sigma^1_n(P)$-формула то $\Phi \Longrightarrow \Psi$ есть $\Sigma^1_n(P)$-формула. **Упражнение**.

V $\Sigma^1_n \Longrightarrow \Pi^1_n$ Если Φ есть $\Sigma^1_n(P)$-формула а Ψ $\Pi^1_n(P)$-формула то $\Phi \Longrightarrow \Psi$ есть $\Pi^1_n(P)$-формула. **Упражнение**.

VI арифм $\to$ Σ^1_1 и Π^1_1 Любая арифметическая формула приводится к Σ^1_1-виду и к Π^1_1-виду с теми же параметрами.

$$\forall^0\exists^0\forall^0\exists^0 \to \underline{\forall^0\exists^0}\ \underline{\forall^0\exists^0} \to \boxed{5}\ \exists^1\underline{\forall^0\exists^1}\forall^0 \to \boxed{4}\ \underline{\exists^1\exists^1}\ \underline{\forall^0\forall^0} \to \boxed{2}\ \exists^1\forall^0.$$

Упражнение: привести $\forall^0\exists^0\forall^0\exists^0$ к Π^1_1-виду.

VII Любая Σ^1_n-формула в широком смысле приводится к Σ^1_n-виду в узком смысле с теми же параметрами. То же для Π^1_n. **Упраж.**

Для любого множества $P \subseteq \mathcal{N}$ (набор допустимых параметров) введены типы формул $\Sigma^0_1(P)$, $\Pi^0_1(P)$, $\Sigma^1_n(P)$, $\Pi^1_n(P)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ языка арифметики 2го порядка.

Соответствующие классы множеств $\Sigma^0_1(P)$, $\Pi^0_1(P)$, $\Sigma^1_n(P)$, $\Pi^1_n(P)$ введены в польских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$. Так, класс скажем $\Pi^1_n(P)$ состоит из всех множеств, которые определимы $\Pi^1_n(P)$-формулами, т. е. Π^1_n-формулами с параметрами из P.

$\Pi^0_1(P)$ = дополнения множеств из $\Sigma^0_1(P)$

$\Pi^1_n(P)$ = дополнения множеств из $\Sigma^1_n(P)$

$\Sigma^1_{n+1}(P)$ = проекции множеств из $\Pi^1_n(P)$ (или из $\Pi^0_1(P)$ при $n = 0$)

Также: $\Delta^0_1(P) = \Sigma^0_1(P) \cap \Pi^0_1(P)$, $\Delta^1_n(P) = \Sigma^1_n(P) \cap \Pi^1_n(P)$.

Для любого множества $P \subseteq \mathcal{N}$ (набор допустимых параметров) введены типы формул $\Sigma^0_1(P)$, $\Pi^0_1(P)$, $\Sigma^1_n(P)$, $\Pi^1_n(P)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ языка арифметики 2го порядка.

Соответствующие классы множеств $\Sigma^0_1(P)$, $\Pi^0_1(P)$, $\Sigma^1_n(P)$, $\Pi^1_n(P)$ введены в польских произведениях $\omega^m \times \mathcal{N}^n$. Так, класс скажем $\Pi^1_n(P)$ состоит из всех множеств, которые определимы $\Pi^1_n(P)$-формулами, т. е. Π^1_n-формулами с параметрами из P.

$\Pi^0_1(P)$ = дополнения множеств из $\Sigma^0_1(P)$

$\Pi^1_n(P)$ = дополнения множеств из $\Sigma^1_n(P)$

$\Sigma^1_{n+1}(P)$ = проекции множеств из $\Pi^1_n(P)$ (или из $\Pi^0_1(P)$ при $n = 0$)

Также: $\Delta^0_1(P) = \Sigma^0_1(P) \cap \Pi^0_1(P)$, $\Delta^1_n(P) = \Sigma^1_n(P) \cap \Pi^1_n(P)$.

Важные частные случаи:

$P = \varnothing$: нет параметров $\Sigma^1_n = \Sigma^1_n(\varnothing)$, и то же для Σ^0_1, Π, Δ.

$P = \{a\}$: параметр $a \in \mathcal{N}$ $\Sigma^1_n(a) = \Sigma^1_n(\{a\})$, то же для Σ^0_1, Π, Δ.

Все классы Σ^1_n и $\Sigma^1_n(a)$ счетны, и то же для Σ^0_1, Π, Δ.

Теорема (эффективизации)

$\boldsymbol{\Sigma}^0_1 = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma^0_1(a)$, $\boldsymbol{\Sigma}^1_n = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma^1_n(a)$, *и то же для* $\boldsymbol{\Pi}$, $\boldsymbol{\Delta}$.

Замечание

В отличие от проективной иерархии ($\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Delta}$), эффективная иерархия не теряет смысла для множеств $X \subseteq \omega^n$, в частности, для точек $x \in \mathcal{N}$, понимаемых как множества пар $\langle k, x(k)\rangle \in \omega^2$.

В этом плане, мы докажем, что (счетное) множество D всех Δ^1_1-точек $x \in \mathcal{N}$ само принадлежит классу Π^1_1, но не Σ^1_1.

Важные частные случаи:

$P = \varnothing$: нет параметров $\Sigma^1_n = \Sigma^1_n(\varnothing)$, и то же для Σ^0_1, Π, Δ.

$P = \{a\}$: параметр $a \in \mathcal{N}$ $\Sigma^1_n(a) = \Sigma^1_n(\{a\})$, то же для Σ^0_1, Π, Δ.

Все классы Σ^1_n и $\Sigma^1_n(a)$ счетны, и то же для Σ^0_1, Π, Δ.

Теорема (эффективизации)

$\mathbf{\Sigma}^0_1 = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma^0_1(a)$, $\mathbf{\Sigma}^1_n = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma^1_n(a)$, *и то же для* $\mathbf{\Pi}, \mathbf{\Delta}$.

Замечание

В отличие от проективной иерархии ($\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}, \mathbf{\Delta}$), эффективная иерархия не теряет смысла для множеств $X \subseteq \omega^n$, в частности, для точек $x \in \mathcal{N}$, понимаемых как множества пар $\langle k, x(k)\rangle \in \omega^2$.

В этом плане, мы докажем, что (счетное) множество D всех Δ^1_1-точек $x \in \mathcal{N}$ само принадлежит классу Π^1_1, но не Σ^1_1.

Содержание I

Содержание II