Теория множеств
Лекция 5
Эффективная дескриптивная теория: первый проективный уровень

Владимир Григорьевич Кановей (ИППИ)

Осень 2023, МИАН Москва

http://iitp.ru/ru/userpages/156/300.htm

скачиваются файлы лекций и литература

kanovei@iitp.ru — email для контактов

https://www.mathnet.ru/conf2305

сайт курса на mathnet

Jech03 *Millenium*

K-AMS Kanovei, *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification*, AMS University Lecture Series.

Kechris *Descriptive set theory*

Mos Moschovakis, *Descriptive set theory*

Йех73 *Теория множеств и метод форсинга*

КЛ-1 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики*

КЛ-2 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*

КЛ-3 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы*

Кур-1 Куратовский, *Топология том 1*

СКМЛ *Справочная книга по математической логике том 2: теория множеств.*

Натуральный ряд $\mathbb{N} = \omega$.

Бэровское пространство $\mathcal{N} = \omega^\omega$.

Польские пространства $\mathbb{P}, \mathbb{X}$.

Множества $X \subseteq \mathbb{P}$ — точечные множества.

Борелевские множества $X \subseteq \mathbb{P}$.

$\mathbf{\Sigma}^0_1 =$ открытые, $\mathbf{\Pi}^0_1 =$ замкнутые, $\mathbf{\Sigma}^0_2 = \mathbf{F}_\sigma$, $\mathbf{\Pi}^0_2 = \mathbf{G}_\delta$.

Проективные множества $X \subseteq \mathbb{P}$.

Проективные классы $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$.

$\mathbf{Cort} = \mathbf{Cort}_1 := \omega^{<\omega} = \bigcup_n \omega^n$ — **кортежи** натуральных чисел.

$\mathbf{lh}(s)$ — **длина** кортежа s, т. е. $s \in \omega^n \Longrightarrow \mathbf{lh}(s) = n$.

$s \subset t$ — **строгое продолжение** кортежей.

$\Lambda = \varnothing$ — **пустой** кортеж, $\mathbf{lh}(\Lambda) = 0$.

Бэровское произведение = любое пространство вида $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$, где $\omega = \mathbb{N}$ дискретное, а $\mathcal{N} = \omega^\omega$ — само бэровское пространство.

Соглашение 1 (реляционная запись)

Рассматриваем множества в бэровских произведениях $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$. Такие множества удобно рассматривать в виде **отношений**, т. е. если к примеру $R \subseteq \omega \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ то записи $\langle k, x, y \rangle \in R$ и $R(k, x, y)$ означают одно и то же.

Это позволяет использовать логические операции вместо теоретико-множественных, что бывает более удобно.

Соглашение 2 (в контексте Соглашения 1)

Буквы $k, l, m, n, i, j, \ldots$: натуральные числа и переменные по ω.

Буквы $x, y, z, a, b, p, q, \ldots$: точки $\mathcal{N} = \omega^\omega$ и переменные по $\mathcal{N}$.

переменные $k, l, m, n, \ldots$ **типа 0: по ω**

переменные $x, y, z, a, b \ldots$ **типа 1: по $\mathcal{N}$**

фиксированные **вычислимые функции** $F, G, H, \ldots : \omega^m \to \omega$ могут входить как элементы формул

$+, \times$, **вся арифметика для типа 0**

термы типа 0: напр. $x\big(y(n+1) + z(2^k) \times H(m, x(n))\big)$, где $H : \omega^2 \to \omega$ — данная вычислимая функция

элементарные формулы: равенства термов $t_1 = t_2$, вообще вычислимые отношения $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ между термами

ограниченные ф-лы: элементарные, связки, $\forall\, k < t$, $\exists\, k < t$

арифметические ф-лы: ограниченные, и кванторы $\forall\, k$, $\exists\, k$

Σ^0_1-формулы: вида $\exists\, k$ (ограниченная формула)

Π^0_1-формулы: вида $\forall\, k$ (ограниченная формула)

Для примера берем $n = 3$ (3 квантора).
Напомним что k переменная по ω, x переменная по $\mathcal{N}$.

Σ^0_3: $\exists k_1 \forall k_2 \exists k_3$ (ограниченная) — (Σ^0_4: $\exists k_1 \forall k_2 \exists k_3 \forall k_4$);

Π^0_3: $\forall k_1 \exists k_2 \forall k_3$ (ограниченная);

Σ^1_3 (в узком смысле): $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \underbrace{\forall k \text{ (ограниченная)}}_{\Pi^0_1}$;

Π^1_3 (в узком смысле): $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \underbrace{\exists k \text{ (ограниченная)}}_{\Sigma^0_1}$;

Σ^1_3 **в широком смысле:** $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3$ (арифметическая);

Π^1_3 **в широком смысле:** $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3$ (арифметическая)

Параметры — точки пространства $\mathcal{N}$, которые можно вставлять в формулы замещая свободные переменные типа 1.

Если $P \subseteq \mathcal{N}$ то $\Sigma^i_n(P)$, $\Pi^i_n(P)$ обозначает формулы из Σ^i_n соответственно Π^i_n, с разрешенными параметрами из P.

Аналогично, $\Sigma^i_n(P)$, $\Pi^i_n(P)$ обозначаются классы точечных множеств в бэровских произведениях $\omega^k \times \mathcal{N}^m$, определимых формулами указанного типа.

Если $P = \varnothing$ (нет разрешенных параметров), то спецификация «(P)» опускается, т. е. $\Sigma^i_n(\varnothing) = \Sigma^i_n$, $\Pi^i_n(\varnothing) = \Pi^i_n$.

Один параметр: если $a \in \mathcal{N}$, то $\Sigma^1_n(a) = \Sigma^1_n(P)$, где $P = \{a\}$. Аналогично, $\Pi^1_n(a,b) = \Pi^1_n(\{a,b\})$, и т. п..

Пример: $\Phi(x) := \exists\, k\, (x(k) \neq 0)$. Это Σ^0_1-формула, а определяемое ею множество $X = \{x \in \mathcal{N} : \exists\, k\, (x(k) \neq 0)\}$ принадлежит Σ^0_1.

Каждая формула данного языка приводится к одному из видов

Σ^0_n, Π^0_n, Σ^1_n (в узком смысле), Π^1_n (в узком смысле),

без увеличения кванторной сложности, при помощи следующих пяти правил и им двойственных ($\exists - \forall$) правил.

1 $\exists^0\exists^0 \to \exists^0$ $\quad \exists k\, \exists \ell\, \varphi(k,\ell) \iff \exists n\, \varphi(n_{\text{лев}}, n_{\text{прав}})$,

где если $n = 2^k(2\ell+1)-1$ то $n_{\text{лев}} = k$, $n_{\text{прав}} = \ell$.

2 $\exists^1\exists^1 \to \exists^1$ $\quad \exists x\, \exists y\, \varphi(x,y) \iff \exists z\, \varphi(z_{\text{лев}}, z_{\text{прав}})$,

где если $z \in \mathcal{N}$, то $z_{\text{лев}}(k) = z(2k)$, $z_{\text{прав}}(k) = z(2k+1)$.

3 $\exists^0\exists^1 \to \exists^1$ $\quad \exists n\, \exists y\, \varphi(n,y) \iff \exists z\, \varphi(z(0), z^-)$

где $z^-(k) = z(k+1)$.

4 $\forall^0\exists^1 \to \exists^1\forall^0$ $\quad \forall n\, \exists y\, \varphi(n,y) \iff \exists y\, \forall n\, \varphi(n, y_{(n)})$ = Акс. Выб.

где $y_{(n)}(k) = y(2^n(2k+1)-1)$.

5 $\forall^0\exists^0 \to \exists^1\forall^0$ $\quad \forall k\, \exists \ell\, \varphi(k,\ell) \iff \exists y\, \forall k\, \varphi(k, y(k))$.

В свойствах **I** – **VII**, $P \subseteq \mathcal{N}$ – произвольное множество параметров.

I Σ^1_n Если Φ, Ψ суть $\Sigma^1_n(P)$-формулы то таковы же

$$\exists\, x\, \Phi,\quad \exists\, k\, \Phi,\quad \forall\, k\, \Phi,\quad \Phi \wedge \Psi,\quad \Phi \vee \Psi.$$

— т. е. каждая из этих пяти формул приводится к виду из $\Sigma^1_n(P)$.

II Π^1_n Если Φ, Ψ суть $\Pi^1_n(P)$-формулы то таковы же

$\forall\, x\, \Phi,\quad \exists\, k\, \Phi,\quad \forall\, k\, \Phi,\quad \Phi \wedge \Psi,\quad \Phi \vee \Psi$ — аналогично **I**.

III $\neg$ Если Φ есть $\Sigma^1_n(P)$-формула то $\neg\Phi$ $\Pi^1_n(P)$-формула, и обратно.

IV $\Pi^1_n \Longrightarrow \Sigma^1_n$ Если Φ есть $\Pi^1_n(P)$-формула а Ψ $\Sigma^1_n(P)$-формула, то $\Phi \Longrightarrow \Psi$ есть $\Sigma^1_n(P)$-формула.

V $\Sigma^1_n \Longrightarrow \Pi^1_n$ Если Φ есть $\Sigma^1_n(P)$-формула а Ψ $\Pi^1_n(P)$-формула, то $\Phi \Longrightarrow \Psi$ есть $\Pi^1_n(P)$-формула.

VI арифм $\to$ Σ^1_1 и Π^1_1 Любая арифметическая формула приводится к Σ^1_1-виду и к Π^1_1-виду с теми же параметрами.

VII Любая Σ^1_n-формула в широком смысле приводится к Σ^1_n-виду **в узком смысле** с теми же параметрами. То же для Π^1_n.

Для любого множества $P \subseteq \mathcal{N}$ (набор допустимых параметров) введены типы формул $\Sigma^0_1(P)$, $\Pi^0_1(P)$, $\Sigma^1_n(P)$, $\Pi^1_n(P)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ языка арифметики 2го порядка, с параметрами из P.

Соответствующие классы множеств $\Sigma^0_1(P)$, $\Pi^0_1(P)$, $\Sigma^1_n(P)$, $\Pi^1_n(P)$ введены в бэровских произведениях $\omega^k \times \mathcal{N}^m$. Так, класс скажем $\Pi^1_n(P)$ состоит из всех множеств, которые определимы $\Pi^1_n(P)$-формулами, т. е. Π^1_n-формулами с параметрами из P.

$\Sigma^0_1(P)$ = эффективно открытые множества с параметрами из $\Sigma^0_1(P)$

$\Pi^0_1(P)$ = дополнения множеств из $\Sigma^0_1(P)$

$\Pi^1_n(P)$ = дополнения множеств из $\Sigma^1_n(P)$

$\Sigma^1_{n+1}(P)$ = проекции множеств из $\Pi^1_n(P)$ (или из $\Pi^0_1(P)$ при $n = 0$)

Также: $\Delta^0_1(P) = \Sigma^0_1(P) \cap \Pi^0_1(P)$, $\Delta^1_n(P) = \Sigma^1_n(P) \cap \Pi^1_n(P)$.

Важные частные случаи:

$P = \varnothing$: нет параметров $\Sigma^1_n = \Sigma^1_n(\varnothing)$, и то же для Σ^0_1, Π, Δ.

$P = \{a\}$: параметр $a \in \mathcal{N}$ $\Sigma^1_n(a) = \Sigma^1_n(\{a\})$, то же для Σ^0_1, Π, Δ.

Все классы Σ^1_n и $\Sigma^1_n(a)$ счетны, и то же для Σ^0_1, Π, Δ.

Теорема (эффективизации)

$\boldsymbol{\Sigma}^0_1 = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Sigma^0_1(a)$, $\boldsymbol{\Sigma}^1_n = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Sigma^1_n(a)$, *и то же для* $\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Delta}$.

Замечание

В отличие от проективной иерархии ($\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Delta}$), эффективная иерархия не теряет смысла для множеств $X \subseteq \omega^n$, в частности, для точек $x \in \mathcal{N}$, понимаемых как множества пар $\langle k, x(k) \rangle \in \omega^2$.

В этом плане, мы докажем, что (счетное) множество D всех Δ^1_1-точек $x \in \mathcal{N}$ само принадлежит классу Π^1_1, но не Σ^1_1.

Важные частные случаи:

$P = \varnothing$: нет параметров $\Sigma^1_n = \Sigma^1_n(\varnothing)$, и то же для Σ^0_1, Π, Δ.

$P = \{a\}$: параметр $a \in \mathcal{N}$ $\Sigma^1_n(a) = \Sigma^1_n(\{a\})$, то же для Σ^0_1, Π, Δ.

Все классы Σ^1_n и $\Sigma^1_n(a)$ счетны, и то же для Σ^0_1, Π, Δ.

Теорема (эффективизации)

$\boldsymbol{\Sigma}^0_1 = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma^0_1(a)$, $\boldsymbol{\Sigma}^1_n = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma^1_n(a)$, *и то же для* $\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Delta}$.

Замечание

В отличие от проективной иерархии ($\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Delta}$), эффективная иерархия не теряет смысла для множеств $X \subseteq \omega^n$, в частности, для точек $x \in \mathcal{N}$, понимаемых как множества пар $\langle k, x(k)\rangle \in \omega^2$.

В этом плане, мы докажем, что (счетное) множество D всех Δ^1_1-точек $x \in \mathcal{N}$ само принадлежит классу Π^1_1, но не Σ^1_1.

Теорема ([КЛ-2] или [K-AMS])

Пусть $\mathbb{P}$ *— бэровское произведение, и* Γ *— один из классов*

$$\Sigma_1^0,\ \Sigma_1^0(a),\ \Sigma_n^1,\ \Sigma_n^1(a),\ \Pi_1^0,\ \Pi_1^0(a),\ \Pi_n^1,\ \Pi_n^1(a), \qquad (*)$$

где $a \in \mathcal{N}$ *(параметр) и* $n \geq 1$. *Тогда существует множество* $U = U_\Gamma \subseteq \omega \times \mathbb{P}$ *того же класса* Γ, *для которого: если* $X \subseteq \mathbb{P}$ *— множество класса* Γ, *то для какого-то* $j < \omega$ *выполнено*

$$X = U_j = (U)_j := \{x \in \mathbb{P} : U(j,x)\} \text{ — сечение } U.$$

Такое множество U *наз.* *ω-универсальным множеством* *для* Γ.

Таким образом, теорема утверждает, что для любого класса Γ вида (*) и любого бэровского произведения $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$, существует Γ-множество U, перечисляющее все Γ-множества $X \subseteq \mathbb{P}$ через свои сечения U_j, $j < \omega$.

Теорема ([КЛ-2] или [K-AMS])

Пусть $\mathbb{P}$ *— бэровское произведение, и* Γ *— один из классов*

$$\Sigma^0_1,\ \Sigma^0_1(a),\ \Sigma^1_n,\ \Sigma^1_n(a),\ \Pi^0_1,\ \Pi^0_1(a),\ \Pi^1_n,\ \Pi^1_n(a), \qquad (*)$$

где $a \in \mathcal{N}$ *(параметр) и* $n \geq 1$*. Тогда существует множество* $U = U_\Gamma \subseteq \omega \times \mathbb{P}$ *того же класса* Γ*, для которого: если* $X \subseteq \mathbb{P}$ *— множество класса* Γ*, то для какого-то* $j < \omega$ *выполнено*

$$X = U_j = (U)_j := \{x \in \mathbb{P} : U(j,x)\} \text{ — сечение } U.$$

Такое множество U *наз.* ω*-универсальным множеством для* Γ*.*

Таким образом, теорема утверждает, что для любого класса Γ вида (*) и любого бэровского произведения $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$, существует Γ-множество U, перечисляющее все Γ-множества $X \subseteq \mathbb{P}$ через свои сечения U_j, $j < \omega$.

Теорема ([КЛ-2] или [K-AMS])

Пусть $\mathbb{P}$ — бэровское произведение,

$$\mathit{\Gamma} = \Sigma^0_1,\ \Sigma^1_n,\ \Pi^0_1,\ \Pi^1_n, \quad \text{и} \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Sigma}^0_1,\ \mathbf{\Sigma}^1_n,\ \mathbf{\Pi}^0_1,\ \mathbf{\Pi}^1_n. \qquad (*)$$

Тогда существует множество $U = U_{\mathit{\Gamma}} \subseteq \mathcal{N} \times \mathbb{P}$ класса $\mathit{\Gamma}$, для которого: если $X \subseteq \mathbb{P}$ — множество класса $\mathbf{\Gamma}$, то для какого-то $b \in \mathcal{N}$ выполнено

$$X = U_b = (U)_b := \{x \in \mathbb{P} : U(b,x)\} \text{ — сечение } U.$$

Такое множество U наз. $\mathcal{N}$-универсальным множеством для $\mathbf{\Gamma}$.

Таким образом, теорема утверждает, что для любого класса $\mathbf{\Gamma}$ вида (*) и любого бэровского произведения $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$, существует $\mathit{\Gamma}$-множество $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathbb{P}$, перечисляющее все $\mathbf{\Gamma}$-множества $X \subseteq \mathbb{P}$ через свои сечения U_b, $b \in \mathcal{N}$.

Теорема ([КЛ-2] или [K-AMS])

Пусть $\mathbb{P}$ *— бэровское произведение,*

$$\mathit{\Gamma} = \ \mathit{\Sigma}^0_1,\ \mathit{\Sigma}^1_n,\ \mathit{\Pi}^0_1,\ \mathit{\Pi}^1_n, \quad \text{и} \quad \mathbf{\Gamma} = \ \mathbf{\Sigma}^0_1,\ \mathbf{\Sigma}^1_n,\ \mathbf{\Pi}^0_1,\ \mathbf{\Pi}^1_n. \qquad (*)$$

Тогда существует множество $U = U_{\mathit{\Gamma}} \subseteq \mathcal{N} \times \mathbb{P}$ *класса* $\mathit{\Gamma}$, *для которого: если* $X \subseteq \mathbb{P}$ *— множество класса* $\mathbf{\Gamma}$, *то для какого-то* $b \in \mathcal{N}$ *выполнено*

$$X = U_b = (U)_b := \{x \in \mathbb{P} : U(b, x)\} \text{ — сечение } U.$$

Такое множество U *наз.* $\mathcal{N}$*-универсальным множеством для* $\mathbf{\Gamma}$.

Таким образом, теорема утверждает, что для любого класса $\mathbf{\Gamma}$ вида (*) и любого бэровского произведения $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$, существует $\mathit{\Gamma}$-множество $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathbb{P}$, перечисляющее все $\mathbf{\Gamma}$-множества $X \subseteq \mathbb{P}$ через свои сечения U_b, $b \in \mathcal{N}$.

Теорема (униформизация для $\varPi^1_1$ [КЛ-2] или [K-AMS])

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *— бэровские произведения, и* $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ *— множество класса* $\varPi^1_1$. *Тогда существует* $\varPi^1_1$*-множество* $Q \subseteq P$, *удовлетворяющее:*

1) *проекции* Q *и* P *на* $\mathbb{X}$ *совпадают:* $\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) = \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(Q)$;

2) *если* $x \in \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P)$, *то* $\exists\,! y\, Q(x,y)$, *т. е.* $Q : \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) \to \mathbb{Y}$ *— функция; функции в этом контексте называются униформными множествами.*

О таком множестве Q говорят что оно *униформизует* данное P.

То же справедливо для классов $\varPi^1_1(a)$, $a \in \mathcal{N}$, *и* $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Т. обр. теорема утверждает, что имея $\varPi^1_1$-множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, мы можем выбрать по точке $f(x)$ в каждом непустом сечении $P_x = \{y \in \mathbb{Y} : P(x,y)\}$ (где $x \in \mathbb{X}$) множества P, так что все выбранные точки образуют множество того же класса $\varPi^1_1$.

Теорема (униформизация для $\mathit{\Pi}^1_1$ [КЛ-2] или [K-AMS])

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *— бэровские произведения, и* $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ *— множество класса* $\mathit{\Pi}^1_1$. *Тогда существует* $\mathit{\Pi}^1_1$*-множество* $Q \subseteq P$, *удовлетворяющее:*

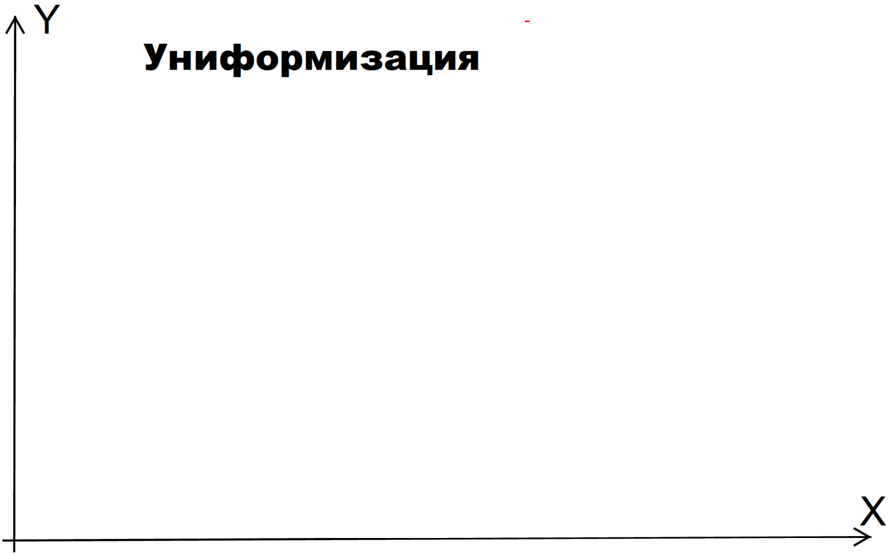
1) *проекции* Q *и* P *на* $\mathbb{X}$ *совпадают:* $\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) = \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(Q)$;

2) *если* $x \in \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P)$, *то* $\exists\,! y\, Q(x,y)$, *т. е.* $Q : \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) \to \mathbb{Y}$ *— функция; функции в этом контексте называются униформными множествами.*

О таком множестве Q говорят что оно *униформизует* данное P.

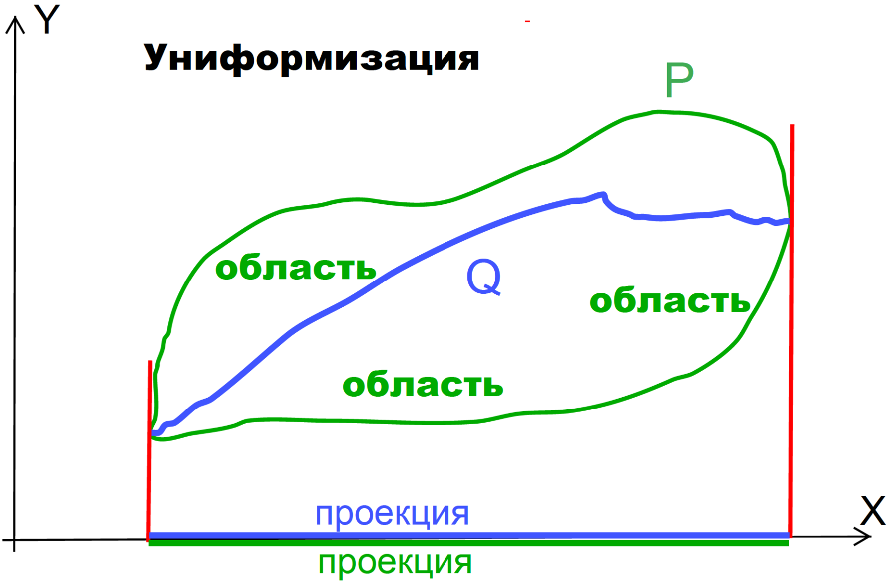
То же справедливо для классов $\mathit{\Pi}^1_1(a)$, $a \in \mathcal{N}$, *и* $\mathbf{\Pi}^1_1$.

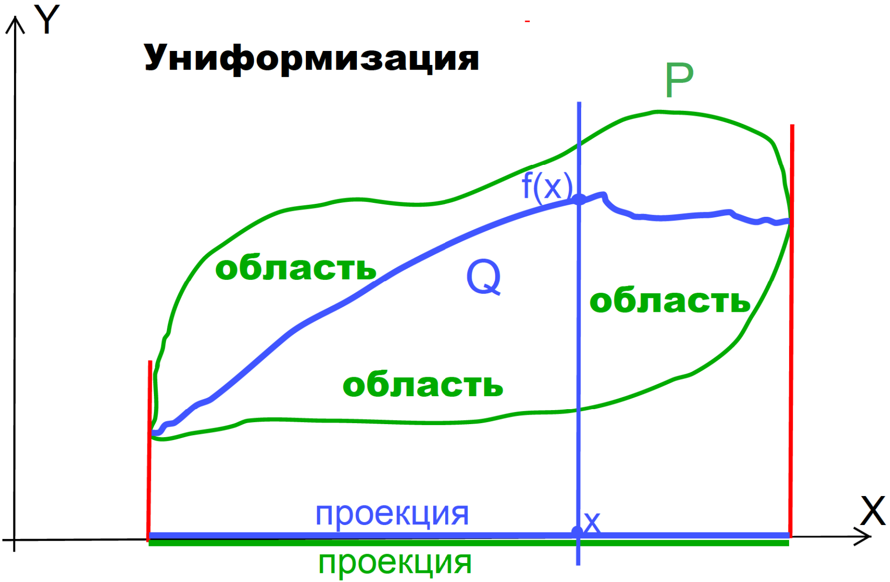
Т. обр. теорема утверждает, что имея $\mathit{\Pi}^1_1$-множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, мы можем выбрать по точке $f(x)$ в каждом непустом сечении $P_x = \{y \in \mathbb{Y} : P(x,y)\}$ (где $x \in \mathbb{X}$) множества P, так что все выбранные точки образуют множество того же класса $\mathit{\Pi}^1_1$.


Y
Униформизация
X


Y
Униформизация
P
область
область
область
X


Y
Униформизация
P
область
область
область
X
проекция


Y
Униформизация
P
область
Q
область
область
проекция
X
проекция


Y
Униформизация
P
f(x)
область
Q
область
область
проекция
x
X
проекция

Теорема (редукция для $\varPi^1_1$)

Пусть $\mathbb{X}$ — бэровское произведение, и $X, Y \subseteq \mathbb{X}$ — множества класса $\varPi^1_1$. Тогда существуют $\varPi^1_1$-множества $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, удовлетворяющее $X' \cap Y' = \varnothing$ и $X' \cup Y' = X \cup Y$.

О такой паре множеств X', Y' говорят что она *редуцирует* данную пару множеств X, Y.

То же справедливо для классов $\varPi^1_1(a)$, $a \in \mathcal{N}$, и $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Док-во

Берем множество $P = \{\langle x, 0\rangle : x \in X\} \cup \{\langle y, 1\rangle : y \in Y\}$ в пространстве $\mathbb{X} \times \omega$. Это P класса $\varPi^1_1$ так как

$$\langle x, k\rangle \in P \iff \big(x \in X \wedge k = 0\big) \vee \big(y \in Y \wedge k = 0\big).$$

Берем униформизующее $\varPi^1_1$-множество $Q \subseteq P$. **Упражнение:** док. что $X' = \{x : \langle x, 0\rangle \in Q\}$ и $Y' = \{y : \langle y, 1\rangle \in Q\}$ — искомые множества, редуцирующие X, Y. $\square$

Теорема (редукция для Π^1_1)

Пусть $\mathbb{X}$ *— бэровское произведение, и* $X, Y \subseteq \mathbb{X}$ *— множества класса* Π^1_1. *Тогда существуют* Π^1_1*-множества* $X' \subseteq X$ *и* $Y' \subseteq Y$, *удовлетворяющее* $X' \cap Y' = \varnothing$ *и* $X' \cup Y' = X \cup Y$.

О такой паре множеств X', Y' говорят что она *редуцирует* данную пару множеств X, Y.

То же справедливо для классов $\Pi^1_1(a)$, $a \in \mathcal{N}$, *и* $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Док-во

Берем множество $P = \{\langle x, 0\rangle : x \in X\} \cup \{\langle y, 1\rangle : y \in Y\}$ в пространстве $\mathbb{X} \times \omega$. Это P класса Π^1_1 так как

$$\langle x, k\rangle \in P \iff \big(x \in X \wedge k = 0\big) \vee \big(y \in Y \wedge k = 0\big).$$

Берем униформизующее Π^1_1-множество $Q \subseteq P$. **Упражнение:** док. что $X' = \{x : \langle x, 0\rangle \in Q\}$ и $Y' = \{y : \langle y, 1\rangle \in Q\}$ — искомые множества, редуцирующие X, Y. $\square$

Теорема (отделимость для Σ^1_1)

Любая пара дизъюнктных Σ^1_1-множеств A, B в бэровском произведении $\mathbb{X}$ отделима Δ^1_1-множеством.

То же справедливо для классов $\Sigma^1_1(a)$, $a \in \mathcal{N}$ (с отделяющим множеством из $\Delta^1_1(a)$), а также и для класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$ (с отделяющим множеством из $\mathbf{\Delta}^1_1$, т. е. борелевским).

Док-во

Применяем теорему Π^1_1-редукции к множествам $X = \mathbb{X} \setminus A$, $Y = \mathbb{X} \setminus B$. См. вывод $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отделимости из $\mathbf{\Pi}^1_1$-редукции, Лекция 3. □

Теорема (отделимость для Σ^1_1)

Любая пара дизъюнктных Σ^1_1-множеств A, B в бэровском произведении $\mathbb{X}$ отделима Δ^1_1-множеством.

То же справедливо для классов $\Sigma^1_1(a)$, $a \in \mathcal{N}$ (с отделяющим множеством из $\Delta^1_1(a)$), а также и для класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$ (с отделяющим множеством из $\mathbf{\Delta}^1_1$, т. е. борелевским).

Док-во

Применяем теорему Π^1_1-редукции к множествам $X = \mathbb{X} \smallsetminus A$, $Y = \mathbb{X} \smallsetminus B$. См. вывод $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отделимости из $\mathbf{\Pi}^1_1$-редукции, Лекция 3. □

Теорема (Упражнение — доказать полностью)

В любом бэровском произведении $\mathbb{X} = \omega^n \times \mathcal{N}^m$, $m \geq 1$:

1. $\exists$ *пара дизъюнктных* $\mathit{\Pi}^1_1$*-множеств* $A, B \subseteq \mathbb{X}$, *неотделимая никаким* $\boldsymbol{\Delta}^1_1$*-множеством;*
2. $\exists$ *пара* $\mathit{\Sigma}^1_1$*-множеств* $X, Y \subseteq \mathbb{X}$, *для которых невозможна редукция никакой парой (дизъюнктных)* $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$*-множеств;*
3. $\exists$ $\mathit{\Sigma}^1_1$*-множество* $P \subseteq \mathbb{X} \times \omega$, *не униформизуемое никаким* $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$*-множеством.*

1. Используем пару $\boldsymbol{\Delta}^1_1$-неотделимых $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-множеств как в Лекции 3, и доказываем что на самом деле они $\mathit{\Pi}^1_1$.
2. Определяем X, Y из A, B как в док-ве этой теоремы.
3. Определяем P из X, Y как в док-ве этой теоремы.

Теорема (Упражнение — доказать полностью)

В любом бэровском произведении $\mathbb{X} = \omega^n \times \mathcal{N}^m$, $m \ge 1$:

1. $\exists$ *пара дизъюнктных Π^1_1-множеств $A, B \subseteq \mathbb{X}$, неотделимая никаким $\boldsymbol{\Delta}^1_1$-множеством;*
2. $\exists$ *пара Σ^1_1-множеств $X, Y \subseteq \mathbb{X}$, для которых невозможна редукция никакой парой (дизъюнктных) $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-множеств;*
3. $\exists$ *Σ^1_1-множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \omega$, не униформизуемое никаким $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-множеством.*

1. Используем пару $\boldsymbol{\Delta}^1_1$-неотделимых $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-множеств как в Лекции 3, и доказываем что на самом деле они Π^1_1.
2. Определяем X, Y из A, B как в док-ве этой теоремы.
3. Определяем P из X, Y как в док-ве этой теоремы.

В пространствах ω^n (дискретные!) последняя теорема заведомо неверна (любое множество $X \subseteq \omega^n$ заведомо борелевское и даже $\mathbf{F}_\sigma$!), но верен её чисто эффективный вариант:

Теорема

В любом бэровском произведении $\mathbb{X} = \omega^n$:

1. $\exists$ *пара дизъюнктных* Π^1_1*-множеств* $A, B \subseteq \mathbb{X}$, *неотделимая никаким* Δ^1_1*-множеством;*
2. $\exists$ *пара* Σ^1_1*-множеств* $X, Y \subseteq \mathbb{X}$, *для которых невозможна редукция никакой парой (дизъюнктных)* Σ^1_1*-множеств;*
3. $\exists$ Σ^1_1*-множество* $P \subseteq \mathbb{X} \times \omega$, *не униформизуемое никаким* Σ^1_1*-множеством.*

В пространствах ω^n (дискретные!) последняя теорема заведомо неверна (любое множество $X \subseteq \omega^n$ заведомо борелевское и даже $\mathbf{F}_\sigma$!), но верен её чисто эффективный вариант:

Теорема

В любом бэровском произведении $\mathbb{X} = \omega^n$:

1. $\exists$ *пара дизъюнктных* Π^1_1*-множеств* $A, B \subseteq \mathbb{X}$, *неотделимая никаким* Δ^1_1*-множеством;*
2. $\exists$ *пара* Σ^1_1*-множеств* $X, Y \subseteq \mathbb{X}$, *для которых невозможна редукция никакой парой (дизъюнктных)* Σ^1_1*-множеств;*
3. $\exists$ Σ^1_1*-множество* $P \subseteq \mathbb{X} \times \omega$, *не униформизуемое никаким* Σ^1_1*-множеством.*

Эффективная иерархия позволяет оценивать определимость не только точечных множеств, но и **самих точек $x \in \mathcal{N}$.**

Точка $x \in \mathcal{N} = \omega^\omega$ принадлежит классу, к примеру, Σ^1_n, если этому классу принадлежит ее график $g_x = \{\langle k, x(k)\rangle : k < \omega\}$ — строго говоря, $g_x \subseteq \omega \times \omega$ тождественно x.

Вообще, если $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — бэровские произведения (т. е. пространства вида $\omega^n \times \mathcal{N}^m$), то любая частичная функция $F : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ отождествляется со скоим графиком $\{\langle x, F(x)\rangle : x \in \mathtt{dom}\, F\}$ в $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, и потому является точечным множеством в $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Следует различать: 1) определимость точки $x \in \mathcal{N}$ как множества в $\omega \times \omega$, и 2) определимость синглета $\{x\} \subseteq \mathcal{N}$.

Эффективная иерархия позволяет оценивать определимость не только точечных множеств, но и **самих точек $x \in \mathcal{N}$.**

Точка $x \in \mathcal{N} = \omega^\omega$ принадлежит классу, к примеру, Σ^1_n, если этому классу принадлежит ее график $g_x = \{\langle k, x(k)\rangle : k < \omega\}$ — строго говоря, $g_x \subseteq \omega \times \omega$ тождественно x.

Вообще, если $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — бэровские произведения (т. е. пространства вида $\omega^n \times \mathcal{N}^m$), то любая частичная функция $F : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ отождествляется со скоим графиком $\{\langle x, F(x)\rangle : x \in \operatorname{dom} F\}$ в $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, и потому является точечным множеством в $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Следует различать: 1) определимость точки $x \in \mathcal{N}$ как множества в $\omega \times \omega$, и 2) определимость синглета $\{x\} \subseteq \mathcal{N}$.

Лемма ($n \geq 1$, лемма о тройной эквивалентности)

Пусть $x \in \mathcal{N}$, $A = \{x\}$. *Тогда*

$$x \in \Sigma^1_n \iff x \in \Delta^1_n \iff A \in \Delta^1_n \iff A \in \Sigma^1_n .$$

Док-во

Обозначим через $P(k,j)$ отношение $x(k) = j$.

$x \in \Sigma^1_n \Longrightarrow x \in \Delta^1_n$: $\quad x(k) = j \iff \forall j' \, (j' \neq j \Longrightarrow \neg P(k,j'))$, где справа стоит Π^1_n-отношение (при условии что P есть Σ^1_n-отношение) ибо квантор $\forall j'$ не меняет класса, см. III, I.

x (и P) $\in \Delta^1_n \Longrightarrow A \in \Delta^1_n$: $\quad y \in A \iff \forall k \, P(k, y(k))$.

$A \in \Sigma^1_n \Longrightarrow x \in \Sigma^1_n$: $\quad x(k) = j \iff \exists y \, (y \in A \wedge y(k) = j)$. □

Лемма ($n \geq 1$, лемма о тройной эквивалентности)

Пусть $x \in \mathcal{N}$, $A = \{x\}$. *Тогда*

$$x \in \Sigma^1_n \iff x \in \Delta^1_n \iff A \in \Delta^1_n \iff A \in \Sigma^1_n.$$

Док-во

Обозначим через $P(k,j)$ отношение $x(k) = j$.

$x \in \Sigma^1_n \Longrightarrow x \in \Delta^1_n$: $\quad x(k) = j \iff \forall j' \, (j' \neq j \Longrightarrow \neg P(k,j'))$,
где справа стоит Π^1_n-отношение (при условии что P есть Σ^1_n-отношение) ибо квантор $\forall j'$ не меняет класса, см. III, I.

x (и P) $\in \Delta^1_n \Longrightarrow A \in \Delta^1_n$: $\quad y \in A \iff \forall k \, P(k, y(k))$.

$A \in \Sigma^1_n \Longrightarrow x \in \Sigma^1_n$: $\quad x(k) = j \iff \exists y \, (y \in A \wedge y(k) = j)$. $\square$

Теорема (о множестве $\varDelta^1_1$ точек, [КЛ 2], Следствие 9.2.3)

Множество D всех $\varDelta^1_1$-точек $x \in \mathcal{N}$ является $\varPi^1_1$-множеством.
Множ-во $D' = \{\langle a, x\rangle : a, x \in \mathcal{N} \land x$ есть $\varDelta^1_1(a)$-точка$\}$ также $\varPi^1_1$.

Док-во (для D)

1 Берем универсальное $\varPi^1_1$-множество $U \subseteq \omega \times \omega^2$, т. е. $U \in \varPi^1_1$, и если $X \subseteq \omega^2$, $X \in \varPi^1_1$, то $X = (U)_n$ для некоторого n, где

$$(U)_n = \{\langle i, j\rangle : U(n, i, j)\} \text{ — сечение.}$$

Пусть $A = \{\langle n, i, j\rangle : U(n_{\text{лев}}, i, j)\}$, $B = \{\langle n, i, j\rangle : U(n_{\text{прав}}, i, j)\}$, см. определение $n_{\text{лев}}$, $n_{\text{прав}}$.

2 Множества A, B образуют дважды универсальную пару, т. е. оба из $\varPi^1_1$, и для любой пары $\varPi^1_1$-множеств $u, v \subseteq \omega^2$ найдется $n < \omega$ для которого $u = (A)_n$, $v = (B)_n$, см. Лекцию 3.

Теорема (о множестве $\varDelta^1_1$ точек, [КЛ 2], Следствие 9.2.3)

Множество D всех $\varDelta^1_1$-точек $x \in \mathcal{N}$ является $\varPi^1_1$-множеством.
Множ-во $D' = \{\langle a, x\rangle : a, x \in \mathcal{N} \wedge x$ есть $\varDelta^1_1(a)$-точка$\}$ также $\varPi^1_1$.

Док-во (для D)

1 Берем универсальное $\varPi^1_1$-множество $U \subseteq \omega \times \omega^2$, т. е. $U \in \varPi^1_1$, и если $X \subseteq \omega^2$, $X \in \varPi^1_1$, то $X = (U)_n$ для некоторого n, где

$$(U)_n = \{\langle i, j\rangle : U(n, i, j)\} \text{ — сечение.}$$

Пусть $A = \{\langle n, i, j\rangle : U(n_{\text{лев}}, i, j)\}$, $B = \{\langle n, i, j\rangle : U(n_{\text{прав}}, i, j)\}$, см. определение $n_{\text{лев}}$, $n_{\text{прав}}$.

2 Множества A, B образуют дважды универсальную пару, т. е. оба из $\varPi^1_1$, и для любой пары $\varPi^1_1$-множеств $u, v \subseteq \omega^2$ найдется $n < \omega$ для которого $u = (A)_n$, $v = (B)_n$, см. Лекцию 3.

3 Согласно теореме Π^1_1-редукции, $\exists$ такие Π^1_1-множества $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, что $A' \cap B' = \varnothing$ и $A' \cup B' = A \cup B$. Множество

$$N = \{n : (A')_n \cup (B')_n = \omega^2\} = \{n : \forall i, j\, (A'(k,i,j) \vee B'(k,i,j))\}$$

тоже Π^1_1. Если $n \in N$ то $(A')_n = \omega^2 \setminus (B')_n$ и $(A')_n, (B')_n \in \Delta^1_1$.

4 Множество $C = \{a \in \mathcal{N} : \exists\, n \in N \big(a = (A')_n\big)\}$ тоже Π^1_1. Именно,

$$a \in C \iff \exists\, n \forall\, i \big(n \in N \wedge A'(n,i,a(i)) \wedge \forall\, j\, (j \neq a(i) \implies \underbrace{B'(n,i,j)}_{\neg A'(n,i,j)})\big).$$

5 Док. $\boxed{C = D}$. Если $a \in C$ то a будет Δ^1_1 сразу из 3.
Обратно, пусть $a \in D$, т. е. $a \in \mathcal{N}$ принадлежит Δ^1_1.
Множества $a \subseteq \omega^2$ и $b = \omega^2 \setminus a$ оба из Π^1_1.
Согласно дважды-универсальности 2, найдется такое n, что $a = (A)_n$ и $b = (B)_n$. Тогда будет $a = (A')_n$ и $b = (B')_n$, поскольку a, b взаимно дополнительны.
Следовательно, $n \in N$ и $a = (A')_n = \omega^2 \setminus (B')_n \in C$.

4 и 5 доказывают теорему.

3 Согласно теореме Π^1_1-редукции, $\exists$ такие Π^1_1-множества $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, что $A' \cap B' = \varnothing$ и $A' \cup B' = A \cup B$. Множество

$$N = \{n : (A')_n \cup (B')_n = \omega^2\} = \{n : \forall\, i, j\, (A'(k,i,j) \vee B'(k,i,j))\}$$

тоже Π^1_1. Если $n \in N$ то $(A')_n = \omega^2 \smallsetminus (B')_n$ и $(A')_n, (B')_n \in \Delta^1_1$.

4 Множество $C = \{a \in \mathcal{N} : \exists\, n \in N \big(a = (A')_n\big)\}$ тоже Π^1_1. Именно,

$$a \in C \iff \exists\, n \forall\, i \big(n \in N \wedge A'(n,i,a(i)) \wedge \forall\, j\, (j \neq a(i) \Longrightarrow \underbrace{B'(n,i,j)}_{\neg A'(n,i,j)})\big).$$

5 Док. $\boxed{C = D}$. Если $a \in C$ то a будет Δ^1_1 сразу из 3.
Обратно, пусть $a \in D$, т. е. $a \in \mathcal{N}$ принадлежит Δ^1_1.
Множества $a \subseteq \omega^2$ и $b = \omega^2 \smallsetminus a$ оба из Π^1_1.
Согласно дважды-универсальности 2, найдется такое n, что $a = (A)_n$ и $b = (B)_n$. Тогда будет $a = (A')_n$ и $b = (B')_n$, поскольку a, b взаимно дополнительны.
Следовательно, $n \in N$ и $a = (A')_n = \omega^2 \smallsetminus (B')_n \in C$.

4 и 5 доказывают теорему.

Теорема (перечисление Δ^1_1 точек)

Существуют такие Π^1_1-множества $E \subseteq \omega$ и $W \subseteq \omega \times \mathcal{N}$ и Σ^1_1-множество $W' \subseteq \omega \times \mathcal{N}$, что:

- **i** *если $n \in E$ то $\exists!\, \delta_n \in \mathcal{N}$, для которой $(W)_n = (W')_n = \{\delta_n\}$;*
- **ii** $\{\delta_n : n \in E\} = D = \{$*все Δ^1_1-точки в $\mathcal{N}$*$\}$.

В контексте доказательства теоремы о Δ^1_1-точках, берем

$$\begin{aligned} E &= \{n \in N : \forall\, i\, \exists!\, j\, A'(n,i,j)\}, \\ W &= \{\langle n, \delta\rangle : n \in N \wedge \delta \in \mathcal{N} \wedge \forall\, i\, A'(n,i,\delta(i))\}, \\ W' &= \{\langle n, \delta\rangle : n \in N \wedge \delta \in \mathcal{N} \wedge \forall\, i\, \neg B'(n,i,\delta(i))\} \text{ — это } \Sigma^1_1 . \end{aligned}$$

$$n \in E \iff n \in N \ \wedge \forall\, i\, \exists\, j\, A'(n,i,j) \wedge \forall\, i\, \forall\, j \neq k \Big(\underbrace{B'(n,i,j)}_{\neg A'(n,i,j)} \vee \underbrace{B'(n,i,k)}_{\neg A'(n,i,k)}\Big),$$

откуда $E \in \Pi^1_1$. **Упражнение:** закончить доказательство теоремы.

Теорема (перечисление Δ^1_1 точек)

Существуют такие Π^1_1-множества $E \subseteq \omega$ и $W \subseteq \omega \times \mathcal{N}$ и Σ^1_1-множество $W' \subseteq \omega \times \mathcal{N}$, что:

- **i** *если $n \in E$ то $\exists !\, \delta_n \in \mathcal{N}$, для которой $(W)_n = (W')_n = \{\delta_n\}$;*
- **ii** $\{\delta_n : n \in E\} = D = \{$*все Δ^1_1-точки в $\mathcal{N}$*$\}$.

В контексте доказательства теоремы о Δ^1_1-точках, берем

$$\begin{aligned} E &= \{n \in N : \forall\, i\, \exists !\, j\, A'(n,i,j)\}, \\ W &= \{\langle n,\delta\rangle : n \in N \wedge \delta \in \mathcal{N} \wedge \forall\, i\, A'(n,i,\delta(i))\}, \\ W' &= \{\langle n,\delta\rangle : n \in N \wedge \delta \in \mathcal{N} \wedge \forall\, i\, \neg B'(n,i,\delta(i))\} \text{ — это } \Sigma^1_1. \end{aligned}$$

$$n \in E \iff n \in N \ \wedge \forall\, i\, \exists\, j\, A'(n,i,j) \wedge \forall\, i\, \forall\, j \neq k \big(\underbrace{B'(n,i,j)}_{\neg A'(n,i,j)} \vee \underbrace{B'(n,i,k)}_{\neg A'(n,i,k)} \big),$$

откуда $E \in \Pi^1_1$. **Упражнение:** закончить доказательство теоремы.

Теорема

Пусть $A \subseteq \mathcal{N}$ является Σ^1_1-множеством и $x_0 \in A$, $x_0 \notin \Delta^1_1$. Тогда A содержит совершенное подмножество.

Док-во

Берем $A' = \{a \in A : a \notin \Delta^1_1\}$ вместо A; $x_0 \in A' \in \Sigma^1_1$ по теореме об определимости множества Δ^1_1-точек.

Найдется Π^0_1-множество $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, для которого $A' = \mathbf{pr}(P)$.

Лемма: *Если $\varnothing \neq Q \subseteq P$ и Q есть Π^0_1-множество, то $\mathbf{pr}(Q)$ содержит* **более чем одну** *точку.*

В самом деле если $\mathbf{pr}(Q) = \{y\}$ — синглет, то $y \in \Delta^1_1$ по лемме о тройной эквивалентности, противоречие.

Лемма доказана.

Теорема

Пусть $A \subseteq \mathcal{N}$ является Σ^1_1-множеством и $x_0 \in A$, $x_0 \notin \Delta^1_1$. Тогда A содержит совершенное подмножество.

Док-во

Берем $A' = \{a \in A : a \notin \Delta^1_1\}$ вместо A; $x_0 \in A' \in \Sigma^1_1$ по теореме об определимости множества Δ^1_1-точек.

Найдется Π^0_1-множество $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, для которого $A' = \mathbf{pr}(P)$.

Лемма: *Если $\varnothing \neq Q \subseteq P$ и Q есть Π^0_1-множество, то $\mathbf{pr}(Q)$ содержит* ***более чем одну*** *точку.*

В самом деле если $\mathbf{pr}(Q) = \{y\}$ — синглет, то $y \in \Delta^1_1$ по лемме о тройной эквивалентности, противоречие.

Лемма доказана.

Сопоставим каждому диадическому кортежу $u \in 2^{<\omega}$ непустое Π^0_1-множество $\varnothing \neq P_u \subseteq P$, так что

1. если $u \in 2^n$ то диаметр P_u меньше $1/n$;
2. если $u \subset v$ то $P_v \subseteq P_u$;
3. проекции $\mathbf{pr}(P_{u^\frown 0})$ и $\mathbf{pr}(P_{u^\frown 1})$ дизъюнктны.

Для начала берем и $P_\Lambda = P$.

Пусть P_u построены; $u \in 2^n$. Строим $P_{u^\frown 0}, P_{u^\frown 1}$.

Согласно лемме, $\mathbf{pr}(P_u)$ содержит две точки $a \neq b$, т. е. имеются пары вида $\langle a, x\rangle, \langle b, y\rangle \in P_u$.

Берем $m \geq n+1$, для которого $a \restriction m \neq b \restriction m$, и пусть

$$\begin{aligned} P_{u^\frown 0} &= \{\langle a', x'\rangle \in P_u : a' \restriction m = a \restriction m \wedge x' \restriction m = x \restriction m\}, \\ P_{u^\frown 1} &= \{\langle b', y'\rangle \in P_u : b' \restriction m = b \restriction m \wedge y' \restriction m = y \restriction m\}. \end{aligned}$$

Это завершает индуктивный шаг построения множеств P_u.

Сопоставим каждому диадическому кортежу $u \in 2^{<\omega}$ непустое Π^0_1-множество $\varnothing \neq P_u \subseteq P$, так что

1. если $u \in 2^n$ то диаметр P_u меньше $1/n$;
2. если $u \subset v$ то $P_v \subseteq P_u$;
3. проекции $\mathbf{pr}(P_{u^\frown 0})$ и $\mathbf{pr}(P_{u^\frown 1})$ дизъюнктны.

Для начала берем и $P_\Lambda = P$.

Пусть P_u построены; $u \in 2^n$. Строим $P_{u^\frown 0}, P_{u^\frown 1}$.

Согласно лемме, $\mathbf{pr}(P_u)$ содержит две точки $a \neq b$, т. е. имеются пары вида $\langle a, x\rangle, \langle b, y\rangle \in P_u$.

Берем $m \geq n+1$, для которого $a \restriction m \neq b \restriction m$, и пусть

$$\begin{aligned} P_{u^\frown 0} &= \{\langle a', x'\rangle \in P_u : a' \restriction m = a \restriction m \wedge x' \restriction m = x \restriction m\}, \\ P_{u^\frown 1} &= \{\langle b', y'\rangle \in P_u : b' \restriction m = b \restriction m \wedge y' \restriction m = y \restriction m\}. \end{aligned}$$

Это завершает индуктивный шаг построения множеств P_u.

Если $z \in 2^\omega$ то $\bigcap_n P_{z\restriction n}$ есть точка $\langle f(z), g(z)\rangle \in P$ по 1, 2.

Отображение f при этом непрерывно и 1–1 по 3, так что образ $F = \{f(x) : x \in 2^\omega\} \subseteq A'$ — совершенное множество, что и требовалось. □

Если $z \in 2^\omega$ то $\bigcap_n P_{z\restriction n}$ есть точка $\langle f(z), g(z)\rangle \in P$ по 1, 2.

Отображение f при этом непрерывно и 1–1 по 3, так что образ $F = \{f(x) : x \in 2^\omega\} \subseteq A'$ — совершенное множество, что и требовалось. □

Содержание I

- Адреса
- Литература
- Напоминание по Лекциям 1–4
- Множества и отношения
- Язык арифметики 2го порядка
- Классы формул
- Параметры, формулы и множества
- Правила упрощения кванторов
- Свойства замкнутости эффективных классов
- Свойства замкнутости эффективных классов, II
- Резюме по эффективной иерархии
- Резюме по эффективной иерархии, II
- ω-универсальные множества
- $\mathcal{N}$-универсальные множества
- Теорема униформизации
- Униформизация влечет Редукцию

Содержание II

- Редукция влечет отделимость
- Неотделимость, нередукция, неуниформизация
- Неотделимость и т.д. для счетных пространств
- Определимость точек
- Лемма о тройной эквивалентности
- Теорема о $\varDelta^1_1$ точках
- Теорема о $\varDelta^1_1$ точках, II
- Перечисление $\varDelta^1_1$ точек
- Эффективная теорема о совершенном ядре
- Эффективная теорема о совершенном ядре, II
- Эффективная теорема о совершенном ядре, III