# Теория множеств
# Лекция 6
# Первый проективный уровень: множества со специальными сечениями

Владимир Григорьевич Кановей (ИППИ)

Осень 2023, МИАН Москва

**http://iitp.ru/ru/userpages/156/300.htm**
скачиваются файлы лекций и литература

**kanovei@iitp.ru** — email для контактов

**https://www.mathnet.ru/conf2305**
сайт курса на mathnet

# Литература



**Jech03** *Millenium*

**K-AMS** Kanovei, *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification*, AMS University Lecture Series.

**Kechris** *Descriptive set theory*

**Mos** Moschovakis, *Descriptive set theory*

**Йех73** *Теория множеств и метод форсинга*

**КЛ-1** Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики*

**КЛ-2** Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*

**КЛ-3** Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы*

**Кур-1** Куратовский, *Топология том 1*

**СКМЛ** *Справочная книга по математической логике том 2*: *теория множеств.*

Натуральный ряд $\mathbb{N} = \omega$.

Бэровское пространство $\mathcal{N} = \omega^\omega$.

**Бэровское произведение** = любое $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$.

Множества $X \subseteq \mathbb{P}$ — точечные множества.

Борелевские мн-ва $X \subseteq \mathbb{P}$, $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$ = открытые, $\boldsymbol{\Pi}^0_1$ = замкнутые.

Проективные множества $X \subseteq \mathbb{P}$, классы $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, $\boldsymbol{\Pi}^1_n$, $\boldsymbol{\Delta}^1_n$.

$\mathbf{Cort} = \mathbf{Cort}_1 := \omega^{<\omega} = \bigcup_n \omega^n$ — **кортежи** натуральных чисел.

$\mathbf{lh}(s)$ — **длина** кортежа $s$, т. е. $s \in \omega^n \Longrightarrow \mathbf{lh}(s) = n$.

$s \subset t$ — **строгое продолжение** кортежей.

$\Lambda = \varnothing$ — **пустой** кортеж, $\mathbf{lh}(\Lambda) = 0$.

**Соглашение 1** (реляционная запись)

Множества в бэровских произведениях $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$ часто рассматриваются в виде **отношений**, т. е. если к примеру $R \subseteq \omega \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ то $\langle k, x, y \rangle \in R$ и $R(k, x, y)$ означают одно и то же.

Это позволяет использовать логические операции вместо теоретико-множественных, что бывает более удобно.

**Соглашение 2** (в контексте Соглашения 1)

Буквы $k, l, m, n, i, j, \ldots$ : натуральные числа и переменные по $\omega$.

Буквы $x, y, z, a, b, p, q, \ldots$ : точки $\mathcal{N} = \omega^\omega$ и переменные по $\mathcal{N}$.

переменные $k, l, m, n, \dots$ **типа 0: по $\omega$**

переменные $x, y, z, a, b \dots$ **типа 1: по $\mathcal{N}$**

фиксированные **вычислимые функции** $F, G, H, \dots : \omega^m \to \omega$ могут входить как элементы формул

$+, \times$, **вся арифметика для типа 0**

**термы типа 0:** например $x\big(y(n+1) + z(2^k) \times H(m, x(n))\big)$, где $H : \omega^2 \to \omega$ — данная вычислимая функция

**элементарные формулы:** равенства термов $t_1 = t_2$, вообще вычислимые отношения $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ между термами

**ограниченные ф-лы:** элементарные + связки + $\forall\, k < t$, $\exists\, k < t$

**арифметические ф-лы**: ограниченные + кванторы $\forall\, k$, $\exists\, k$

$\Sigma^0_1$**-формулы**: вида $\exists\, k$ (ограниченная формула)

$\Pi^0_1$**-формулы**: вида $\forall\, k$ (ограниченная формула)

Для примера берем $n = 3$ (3 квантора).
Напомним что $k$ переменная по $\omega$, $x$ переменная по $\mathcal{N}$.

$\Sigma^0_3$: $\exists\, k_1\, \forall\, k_2\, \exists\, k_3$ (ограниченная) — ( $\Sigma^0_4$: $\exists\, k_1\, \forall\, k_2\, \exists\, k_3\, \forall\, k_4$ );

$\Pi^0_3$: $\forall\, k_1\, \exists\, k_2\, \forall\, k_3$ (ограниченная);

$\Sigma^1_3$ (в узком смысле): $\exists\, x_1\, \forall\, x_2\, \exists\, x_3\, \underbrace{\forall\, k\ (\text{ограниченная})}_{\Pi^0_1}$;

$\Pi^1_3$ (в узком смысле): $\forall\, x_1\, \exists\, x_2\, \forall\, x_3\, \underbrace{\exists\, k\ (\text{ограниченная})}_{\Sigma^0_1}$;

$\Sigma^1_3$ **в широком смысле:** $\exists\, x_1\, \forall\, x_2\, \exists\, x_3$ (арифметическая);

$\Pi^1_3$ **в широком смысле:** $\forall\, x_1\, \exists\, x_2\, \forall\, x_3$ (арифметическая)

Каждая формула данного языка приводится к одному из видов

$\Sigma^0_n$, $\Pi^0_n$, $\Sigma^1_n$ (в узком смысле), $\Pi^1_n$ (в узком смысле),

без увеличения кванторной сложности, при помощи следующих пяти правил и им двойственных ($\exists - \forall$) правил.

**1** $\exists^0\exists^0 \to \exists^0$ $\quad \exists\, k\, \exists\, \ell\, \varphi(k,\ell) \Longleftrightarrow \exists\, n\, \varphi(n_{\text{лев}}, n_{\text{прав}})$,

где если $n = 2^k(2\ell+1)-1$ то $n_{\text{лев}} = k$, $n_{\text{прав}} = \ell$.

**2** $\exists^1\exists^1 \to \exists^1$ $\quad \exists\, x\, \exists\, y\, \varphi(x,y) \Longleftrightarrow \exists\, z\, \varphi(z_{\text{лев}}, z_{\text{прав}})$,

где если $z \in \mathcal{N}$, то $z_{\text{лев}}(k) = z(2k)$, $z_{\text{прав}}(k) = z(2k+1)$.

**3** $\exists^0\exists^1 \to \exists^1$ $\quad \exists\, n\, \exists\, y\, \varphi(n,y) \Longleftrightarrow \exists\, z\, \varphi(z(0), z^-)$

где $z^-(k) = z(k+1)$.

**4** $\forall^0\exists^1 \to \exists^1\forall^0$ $\quad \forall\, n\, \exists\, y\, \varphi(n,y) \Longleftrightarrow \exists\, y\, \forall\, n\, \varphi(n, y_{(n)})$ = **Акс. Выб.**

где $y_{(n)}(k) = y(2^n(2k+1)-1)$.

**5** $\forall^0\exists^0 \to \exists^1\forall^0$ $\quad \forall\, k\, \exists\, \ell\, \varphi(k,\ell) \Longleftrightarrow \exists\, y\, \forall\, k\, \varphi(k, y(k))$.

Для любого множества $P \subseteq \mathcal{N}$ (набор допустимых параметров) введены типы формул $\Sigma^0_1(P)$, $\Pi^0_1(P)$, $\Sigma^1_n(P)$, $\Pi^1_n(P)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ языка арифметики 2го порядка, с параметрами из $P$.

Классы множеств (или отношений) $\Sigma^0_1(P)$, $\Pi^0_1(P)$, $\Sigma^1_n(P)$, $\Pi^1_n(P)$ введены в бэровских произведениях $\omega^k \times \mathcal{N}^m$.
Класс скажем $\Pi^1_n(P)$ состоит из всех множеств, которые определимы $\Pi^1_n(P)$-формулами, т. е. $\Pi^1_n$-формулами с параметрами из $P$.

$\Sigma^0_1(P)$ = эффективно открытые множества с параметрами из $\Sigma^0_1(P)$

$\Pi^0_1(P)$ = дополнения множеств из $\Sigma^0_1(P)$

$\Pi^1_n(P)$ = дополнения множеств из $\Sigma^1_n(P)$

$\Sigma^1_{n+1}(P)$ = проекции множеств из $\Pi^1_n(P)$ (или из $\Pi^0_1(P)$ при $n = 0$)

Также: $\Delta^0_1(P) = \Sigma^0_1(P) \cap \Pi^0_1(P)$, $\Delta^1_n(P) = \Sigma^1_n(P) \cap \Pi^1_n(P)$.

Важные частные случаи:

$P = \varnothing$: нет параметров $\Sigma^1_n = \Sigma^1_n(\varnothing)$, и то же для $\Sigma^0_1$, $\Pi$, $\Delta$.

$P = \{a\}$: параметр $a \in \mathcal{N}$ $\Sigma^1_n(a) = \Sigma^1_n(\{a\})$, то же для $\Sigma^0_1, \Pi, \Delta$.

Все классы $\Sigma^1_n$ и $\Sigma^1_n(a)$ счетны, и то же для $\Sigma^0_1$, $\Pi$, $\Delta$.

**Теорема (эффективизации)**

$\boldsymbol{\Sigma}^0_1 = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma^0_1(a)$, $\boldsymbol{\Sigma}^1_n = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma^1_n(a)$, *и то же для* $\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Delta}$.

**I** $\Sigma^1_n$ Если $\Phi, \Psi$ суть $\Sigma^1_n(P)$-отношения, то таковы же

$$\exists x\, \Phi,\quad \exists k\, \Phi,\quad \forall k\, \Phi,\quad \Phi \wedge \Psi,\quad \Phi \vee \Psi.$$

**II** $\Pi^1_n$ Если $\Phi, \Psi$ суть $\Pi^1_n(P)$-отношения то таковы же

$$\forall x\, \Phi,\quad \exists k\, \Phi,\quad \forall k\, \Phi,\quad \Phi \wedge \Psi,\quad \Phi \vee \Psi.$$

**III** $\neg$ Если $\Phi$ есть $\Sigma^1_n(P)$-отношение то $\neg\Phi$ есть $\Pi^1_n(P)$, и наоборот.

**IV** $\Pi^1_n \Longrightarrow \Sigma^1_n$ Если $\Phi$ есть $\Pi^1_n(P)$-отношение а $\Psi$ $\Sigma^1_n(P)$-отношение, то $\Phi \Longrightarrow \Psi$ есть $\Sigma^1_n(P)$-отношение.

**V** $\Sigma^1_n \Longrightarrow \Pi^1_n$ Если $\Phi$ есть $\Sigma^1_n(P)$-отношение а $\Psi$ $\Pi^1_n(P)$-отношение, то $\Phi \Longrightarrow \Psi$ есть $\Pi^1_n(P)$-отношение.

**VI** арифм $\to \Delta^1_1$ Любое арифметическое отношение есть $\Delta^1_1$ с теми же параметрами.

**VII** Любое $\Sigma^1_n$-отношение в широком смысле приводится к $\Sigma^1_n$-виду **в узком смысле** с теми же параметрами. То же для $\Pi^1_n$.

**Теорема ([КЛ-2] или [K-AMS])**

*Пусть* $\mathbb{P}$ *— бэровское произведение, и* $\varGamma$ *— один из классов*

$$\varSigma^0_1,\ \varSigma^0_1(a),\ \varSigma^1_n,\ \varSigma^1_n(a),\ \varPi^0_1,\ \varPi^0_1(a),\ \varPi^1_n,\ \varPi^1_n(a), \qquad (*)$$

*где* $a \in \mathcal{N}$ *(параметр) и* $n \geq 1$. *Тогда существует множество* $U = U_\varGamma \subseteq \omega \times \mathbb{P}$ *того же класса* $\varGamma$, *для которого:* **если** $X \subseteq \mathbb{P}$ *— множество класса* $\varGamma$, **то** *для какого-то* $j < \omega$ *выполнено*

$$X = U_j = (U)_j := \{x \in \mathbb{P} : U(j,x)\} \text{ — } \textit{сечение } U.$$

Такое множество $U$ наз. $\omega$-универсальным множеством для $\varGamma$.

Теорема говорит, что для $\forall$ класса $\varGamma$ вида (*) и $\forall$ бэровского произведения $\mathbb{P}$, $\exists$ $\varGamma$-множество $U \subseteq \omega \times \mathbb{P}$, перечисляющее все $\varGamma$-множества $X \subseteq \mathbb{P}$ через свои сечения $U_j$, $j < \omega$.

**Теорема** ([КЛ-2] или [K-AMS])

*Пусть* $\mathbb{P}$ *— бэровское произведение,*

$$\varGamma = \varSigma^0_1,\ \varSigma^1_n,\ \varPi^0_1,\ \varPi^1_n, \quad \text{и} \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Sigma}^0_1,\ \mathbf{\Sigma}^1_n,\ \mathbf{\Pi}^0_1,\ \mathbf{\Pi}^1_n. \qquad (*)$$

*Тогда существует множество* $U = U_\varGamma \subseteq \mathcal{N} \times \mathbb{P}$ *класса* $\varGamma$, *для которого*: **если** $X \subseteq \mathbb{P}$ *— множество класса* $\mathbf{\Gamma}$, **то** *для какого-то* $b \in \mathcal{N}$ *выполнено*

$$X = U_b = (U)_b := \{x \in \mathbb{P} : U(b, x)\} \text{ — } \textit{сечение } U.$$

Такое множество $U$ наз. $\mathcal{N}$-универсальным множеством для $\mathbf{\Gamma}$.

Теорема говорит, что для $\forall$ класса $\mathbf{\Gamma}$ вида (*) и $\forall$ бэровского произведения $\mathbb{P}$, $\exists$ $\varGamma$-множество $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathbb{P}$, перечисляющее все $\mathbf{\Gamma}$-множества $X \subseteq \mathbb{P}$ через свои сечения $U_b$, $b \in \mathcal{N}$.

**Теорема** (униформизация для $\mathit{\Pi}^1_1$ [КЛ-2] или [K-AMS])

*Пусть* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *— бэровские произведения, и* $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ *— множество класса* $\mathit{\Pi}^1_1$. *Тогда существует* $\mathit{\Pi}^1_1$*-множество* $Q \subseteq P$, *для которого:*

A *проекции* $Q$ *и* $P$ *на* $\mathbb{X}$ *совпадают:* $\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) = \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(Q)$ ;

B *если* $x \in \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(Q)$, *то* $\exists ! y\, Q(x, y)$.

*То же справедливо для классов* $\mathit{\Pi}^1_1(a)$, $a \in \mathcal{N}$, *и для класса* $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Множества $Q$, удовлетворяющие B, называются униформными.
В этом случае $Q : \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) \to \mathbb{Y}$ — функция.

Если выполнены A, B, то говорят, что $Q$ униформизует данное $P$.

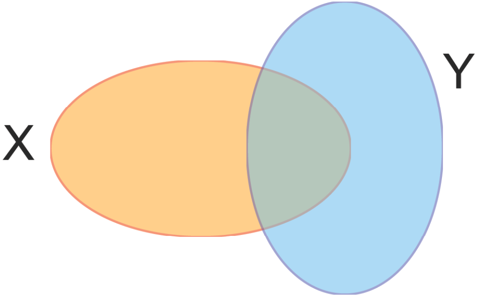
**Теорема** (редукция для $\Pi^1_1$)

*Пусть* $\mathbb{X}$ *— бэровское произведение, и* $X, Y \subseteq \mathbb{X}$ *— множества из* $\Pi^1_1$. *Тогда существуют* $\Pi^1_1$*-множества* $X' \subseteq X$ *и* $Y' \subseteq Y$, *удовлетворяющие* $X' \cap Y' = \varnothing$ *и* $X' \cup Y' = X \cup Y$.

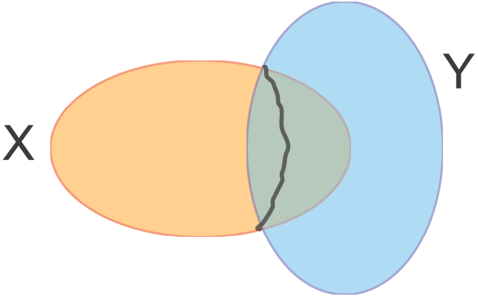
О такой паре множеств $X', Y'$ говорят что она редуцирует данную пару множеств $X, Y$.

*То же справедливо для классов* $\Pi^1_1(a)$, $a \in \mathcal{N}$, *и для класса* $\mathbf{\Pi}^1_1$.

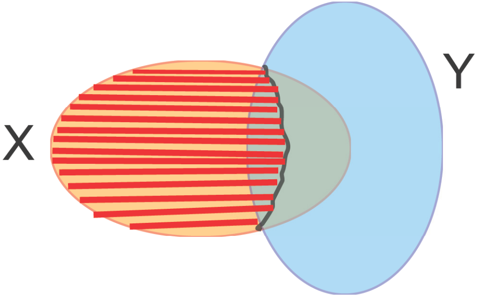
# Редукция



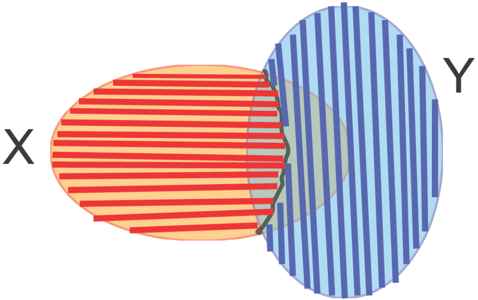
# Редукция



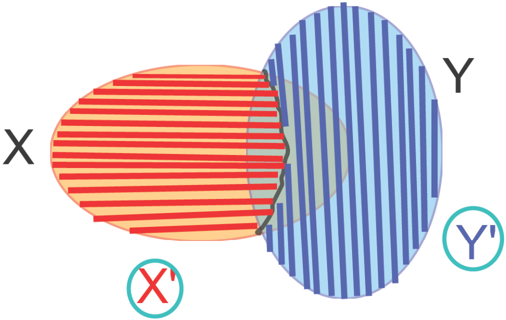
# Редукция



# Редукция



# Редукция



**Теорема** (редукция для $\Pi^1_1$)

*Пусть* $\mathbb{X}$ *— бэровское произведение, и* $X, Y \subseteq \mathbb{X}$ *— множества из* $\Pi^1_1$*. Тогда существуют* $\Pi^1_1$*-множества* $X' \subseteq X$ *и* $Y' \subseteq Y$*, удовлетворяющие* $X' \cap Y' = \varnothing$ *и* $X' \cup Y' = X \cup Y$.

О такой паре множеств $X', Y'$ говорят что она редуцирует данную пару множеств $X, Y$.

*То же справедливо для классов* $\Pi^1_1(a)$, $a \in \mathcal{N}$, *и для класса* $\mathbf{\Pi}^1_1$.

**Теорема** (отделимость для $\Sigma^1_1$)

*Любая пара* **дизъюнктных** $\Sigma^1_1$*-множеств* $A, B$ *в бэровском произведении* $\mathbb{X}$ **отделима** $\Delta^1_1$*-множеством.*

*То же справедливо для классов:*

$\Sigma^1_1(a)$, $a \in \mathcal{N}$ *— с отделяющим множеством из* $\Delta^1_1(a)$*),*

$\mathbf{\Sigma}^1_1$ *— с отделяющим множеством из* $\mathbf{\Delta}^1_1$*, т. е. борелевским.*

**Теорема**

*В любом бэровском произведении* $\mathbb{X} = \omega^n \times \mathcal{N}^m$, $m \geq 1$ :

1. $\exists$ $\mathbf{\Delta}^1_1$-*неотделимая пара дизъюнктных* $\Pi^1_1$-*множеств* $A, B \subseteq \mathbb{X}$;
2. $\exists$ $\mathbf{\Sigma}^1_1$-*нередуцируемая пара* $\Sigma^1_1$-*множеств* $X, Y \subseteq \mathbb{X}$;
3. $\exists$ $\mathbf{\Sigma}^1_1$-*неуниформизуемое* $\Sigma^1_1$-*множество* $P \subseteq \mathbb{X} \times \omega$.

**Теорема**

*В любом бэровском произведении* $\mathbb{X} = \omega^n$ :

1. $\exists$ $\Delta^1_1$-*неотделимая пара дизъюнктных* $\Pi^1_1$-*множеств* $A, B \subseteq \mathbb{X}$;
2. $\exists$ $\Sigma^1_1$-*нередуцируемая пара* $\Sigma^1_1$-*множеств* $X, Y \subseteq \mathbb{X}$;
3. $\exists$ $\Sigma^1_1$-*неуниформизуемое* $\Sigma^1_1$-*множество* $P \subseteq \mathbb{X} \times \omega$.

**Лемма** ($n \ge 1$, лемма о тройной эквивалентности)

*Пусть* $x \in \mathcal{N}$, $A = \{x\}$. *Тогда*

$$x \in \Sigma^1_n \iff x \in \Delta^1_n \iff A \in \Delta^1_n \iff A \in \Sigma^1_n .$$

**Теорема** (о множестве $\Delta^1_1$ точек, [КЛ 2], Следствие 9.2.3)

*Множество* $D$ *всех* $\Delta^1_1$*-точек* $x \in \mathcal{N}$ *является* $\Pi^1_1$*-множеством.*

*Множ-во* $D' = \{\langle a, x \rangle : a, x \in \mathcal{N} \wedge x \text{ есть } \Delta^1_1(a)\text{-точка}\}$ *также* $\Pi^1_1$ .

**Теорема** (перечисление $\Delta^1_1$ точек)

*Существуют такие* $\Pi^1_1$*-множества* $E \subseteq \omega$ *и* $W \subseteq \omega \times \mathcal{N}$ *и* $\Sigma^1_1$*-множество* $W' \subseteq \omega \times \mathcal{N}$, *что:*

- i *если* $n \in E$ *то* $\exists!\, \delta_n \in \mathcal{N}$, *для котор.* $(W)_n = (W')_n = \{\delta_n\}$;
- ii $\{\delta_n : n \in E\} = D = \{$*все* $\Delta^1_1$*-точки в* $\mathcal{N}\}$.

**Теорема (усиленная Т о перечислении [КЛ2], Т 9.1.2)**

*Существуют такие $\Pi^1_1$-множества $E \subseteq \mathcal{N} \times \omega$ и $W \subseteq \mathcal{N} \times \omega \times \mathcal{N}$ и $\Sigma^1_1$-множество $W' \subseteq \mathcal{N} \times \omega \times \mathcal{N}$, что, для всякого $b \in \mathcal{N}$:*

a *если $n \in (E)_b$ то $\exists!$ точка $\delta_{bn} \in \mathcal{N}$, такая что $(W)_{bn} = (W')_{bn} = \{\delta_{bn}\}$;*

b $\{\delta_{bn} : n \in (E)_b\} = D(b) = \{$*все* $\Delta^1_1(b)$*-точки в* $\mathcal{N}\}$.

Здесь $(E)_b = \{n : \langle b, n\rangle \in E\}$, $(W)_{bn} = \{x : \langle b, n, x\rangle \in W\}$, и аналогично $(W')_{bn}$ — сечения.

**Теорема (усиленная Т о перечислении [КЛ2], Т 9.1.2)**

*Существуют такие $\Pi^1_1$-множества $E \subseteq \mathcal{N} \times \omega$ и $W \subseteq \mathcal{N} \times \omega \times \mathcal{N}$ и $\Sigma^1_1$-множество $W' \subseteq \mathcal{N} \times \omega \times \mathcal{N}$, что, для всякого $b \in \mathcal{N}$:*

- a *если $n \in (E)_b$ то $\exists!$ точка $\delta_{bn} \in \mathcal{N}$, такая что $(W)_{bn} = (W')_{bn} = \{\delta_{bn}\}$;*
- b $\{\delta_{bn} : n \in (E)_b\} = D(b) = \{$*все $\Delta^1_1(b)$-точки в $\mathcal{N}$*$\}$.

Здесь $(E)_b = \{n : \langle b, n\rangle \in E\}$, $(W)_{bn} = \{x : \langle b, n, x\rangle \in W\}$, и аналогично $(W')_{bn}$ — сечения.

**Теорема** (о совершенном ядре)

*Пусть $A \subseteq \mathcal{N}$ является $\Sigma^1_1$-множеством и $x_0 \in A$, $x_0 \notin \Delta^1_1$. Тогда $A$ содержит совершенное подмножество.*

*Аналогично, если $b \in \mathcal{N}$, $A \subseteq \mathcal{N}$ является $\Sigma^1_1(b)$-множеством, и $x_0 \in A$, $x_0 \notin \Delta^1_1(b)$, то $A$ содержит совершенное подмножество.*

**Следствие**

*Если $\Sigma^1_1$-множество $A \subseteq \mathcal{N}$ не более чем счетно, то все $x \in A$ принадлежат $\Delta^1_1$.*

*Аналогично, если $b \in \mathcal{N}$ и $\Sigma^1_1(b)$-множество $A \subseteq \mathcal{N}$ не более чем счетно, то все $x \in A$ принадлежат $\Delta^1_1(b)$.*

**Теорема** (о совершенном ядре)

*Пусть* $A \subseteq \mathcal{N}$ *является* $\Sigma^1_1$*-множеством и* $x_0 \in A$, $x_0 \notin \Delta^1_1$.
*Тогда* $A$ *содержит совершенное подмножество.*

*Аналогично, если* $b \in \mathcal{N}$, $A \subseteq \mathcal{N}$ *является* $\Sigma^1_1(b)$*-множеством, и* $x_0 \in A$, $x_0 \notin \Delta^1_1(b)$, *то* $A$ *содержит совершенное подмножество.*

**Следствие**

*Если* $\Sigma^1_1$*-множество* $A \subseteq \mathcal{N}$ *не более чем счетно, то все* $x \in A$ *принадлежат* $\Delta^1_1$.

*Аналогично, если* $b \in \mathcal{N}$ *и* $\Sigma^1_1(b)$*-множество* $A \subseteq \mathcal{N}$ *не более чем счетно, то все* $x \in A$ *принадлежат* $\Delta^1_1(b)$.

### Теорема

*Пусть* $\mathbb{X}$ *— бэровское произведение,* $z \in \mathcal{N}$ *(параметр), и* $P \subseteq \mathcal{N}^2 \times \mathbb{X}$ *является* $\varPi^1_1(z)$*-множеством. Тогда множество*

$$Q = \{\langle b, x\rangle \in \mathcal{N} \times \mathbb{X} : \exists\, a \in \mathcal{N} \cap \varDelta^1_1(b)\ P(a, b, x)\}$$

*также принадлежит* $\varPi^1_1(z)$.

### Док-во (Упражнение: дать подробное док-во)

Берем множества $E, W, W'$ как в усиленной теореме о перечислении $\varDelta^1_1$ точек. Тогда

$$\begin{aligned} Q(b,x) &\iff \exists\, n \in (E)_b\, P(\delta_{bn}, b, x) \\ &\iff \exists\, n\,\big(E(b,n) \wedge \forall\, y\,(y = \delta_{bn} \Longrightarrow P(y,b,x))\big) \\ &\iff \exists\, n\,\big(E(b,n) \wedge \forall\, y\,(W'(b,n,y) \Longrightarrow P(y,b,x))\big). \end{aligned}$$

□

**Теорема**

*Пусть* $\mathbb{X}$ *— бэровское произведение,* $z \in \mathcal{N}$ *(параметр), и* $P \subseteq \mathcal{N}^2 \times \mathbb{X}$ *является* $\Pi^1_1(z)$*-множеством. Тогда множество*

$$Q = \{\langle b, x\rangle \in \mathcal{N} \times \mathbb{X} : \exists\, a \in \mathcal{N} \cap \Delta^1_1(b)\; P(a, b, x)\}$$

*также принадлежит* $\Pi^1_1(z)$.

**Док-во (Упражнение: дать подробное док-во)**

Берем множества $E, W, W'$ как в усиленной теореме о перечислении $\Delta^1_1$ точек. Тогда

$$\begin{aligned} Q(b, x) &\iff \exists\, n \in (E)_b\, P(\delta_{bn}, b, x) \\ &\iff \exists\, n\, \big(E(b, n) \wedge \forall\, y\, (y = \delta_{bn} \Longrightarrow P(y, b, x))\big) \\ &\iff \exists\, n\, \big(E(b, n) \wedge \forall\, y\, (W'(b, n, y) \Longrightarrow P(y, b, x))\big). \qquad \square \end{aligned}$$

Напомним, что если $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, то

$$\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) = \{x \in \mathbb{X} : \exists y \in \mathbb{Y}\, P(x,y)\} \text{ — проекция } P \text{ на } \mathbb{X},$$

и если $x \in \mathbb{X}$ то $(P)_x = \{y \in \mathbb{Y} : P(x,y)\}$ — сечение.

**Теорема** (Крайзель)

*Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — бэровские произведения, $z \in \mathcal{N}$ (параметр), $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ — множество класса $\varPi^1_1(z)$, и если $x \in \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P)$, то сечение $(P)_x$ содержит точку из $\varDelta^1_1(z,x)$. Тогда*

1. $\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P)$ *есть $\varPi^1_1(z)$-множество* (а не $\varSigma^1_2(z)$, как проекция $\varPi^1_1(z)$-множества в общем случае);
2. *если $X = \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P)$ есть $\varDelta^1_1(z)$, то $\exists$ $\varDelta^1_1(z)$-множество $Q \subseteq P$, униформизующее $P$, т. е. $\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(Q) = X$ и $Q : X \to \mathbb{Y}$ — функция.*

Напомним, что если $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, то

$$\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) = \{x \in \mathbb{X} : \exists\, y \in \mathbb{Y}\, P(x, y)\} \text{ — проекция } P \text{ на } \mathbb{X},$$

и если $x \in \mathbb{X}$ то $(P)_x = \{y \in \mathbb{Y} : P(x, y)\}$ — сечение.

**Теорема** (Крайзель)

*Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — бэровские произведения, $z \in \mathcal{N}$ (параметр), $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ — множество класса $\Pi^1_1(z)$, и если $x \in \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P)$, то сечение $(P)_x$ содержит точку из $\Delta^1_1(z, x)$. Тогда*

1. $\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P)$ *есть $\Pi^1_1(z)$-множество* (а не $\Sigma^1_2(z)$, как проекция $\Pi^1_1(z)$-множества в общем случае);
2. *если $X = \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P)$ есть $\Delta^1_1(z)$, то $\exists$ $\Delta^1_1(z)$-множество $Q \subseteq P$, униформизующее $P$, т. е. $\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(Q) = X$ и $Q : X \to \mathbb{Y}$ — функция.*

Считаем для простоты, что $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathcal{N}$ и что параметра $z$ нет.

1 Множество $P' = \{\langle x, y\rangle \in P : y \in \Delta^1_1(x)\}$ принадлежит $\Pi^1_1$ по теореме о $\Delta^1_1$ точках. Имеем

$$x \in \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) \iff x \in \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P') \iff \exists\, y \in \Delta^1_1(x)\, P(x, y),$$

откуда $\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) \in \Pi^1_1$ по теореме о $\Delta^1_1$-кванторе.

2 По теореме $\Pi^1_1$-униформизации, найдется униформизующее $\Pi^1_1$-подмножество $Q \subseteq P'$, т. е. $\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(Q) = \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) = \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P')$.

Проверим, что в наших условиях тогда автоматически $Q \in \Delta^1_1$.

$$Q(x, y) \iff x \in \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) \wedge \underbrace{\forall\, y' \in \Delta^1_1(x)\big(y' \neq y \Longrightarrow \underbrace{\neg Q(x, y')}_{\Sigma^1_1}\big)}_{\Sigma^1_1 \text{ по теореме о } \Delta^1_1 \text{ кванторе}},$$

по правилам III, IV, I.

Считаем для простоты, что $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathcal{N}$ и что параметра $z$ нет.

1 Множество $P' = \{\langle x, y\rangle \in P : y \in \Delta^1_1(x)\}$ принадлежит $\Pi^1_1$ по теореме о $\Delta^1_1$ точках. Имеем

$$x \in \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) \iff x \in \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P') \iff \exists\, y \in \Delta^1_1(x)\, P(x, y),$$

откуда $\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) \in \Pi^1_1$ по теореме о $\Delta^1_1$-кванторе.

2 По теореме $\Pi^1_1$-униформизации, найдется униформизующее $\Pi^1_1$-подмножество $Q \subseteq P'$, т. е. $\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(Q) = \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) = \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P')$.

Проверим, что в наших условиях тогда автоматически $Q \in \Delta^1_1$.

$$Q(x, y) \iff x \in \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) \wedge \underbrace{\forall\, y' \in \Delta^1_1(x) \big(y' \neq y \implies \underbrace{\neg Q(x, y')}_{\Sigma^1_1}\big)}_{\Sigma^1_1 \text{ по теореме о } \Delta^1_1 \text{ кванторе}},$$

по правилам **III**, **IV**, **I**.

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — бэровские произведения. Множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$:

однозначное, или униформное, если $\forall x \in \mathbb{X}\,(\mathtt{card}\,(P)_x \le 1)$,
т. е. каждое сечение $(P)_x$ содержит не более одной точки;

счетно-значное, если $\forall x \in \mathbb{X}\,(\mathtt{card}\,(P)_x \le \aleph_0)$,
т. е. каждое сечение $(P)_x$ не более чем счетно.

**Теорема**

*Если борелевское множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ счетно-значно, то*

1. *его проекция* $\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P)$ *— также борелевское множество;*
2. $P$ *можно униформизовать борелевским множеством.*

Замечание. Проекции борелевских, и даже просто замкнутых множеств общего вида заполняют класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$ полностью. Таким образом, счетно-значность критически сужает класс проекций. Это имеет место и для некоторых других типов сечений.

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — бэровские произведения. Множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$:

однозначное, или униформное, если $\forall x \in \mathbb{X}\,(\mathtt{card}\,(P)_x \le 1)$,
т. е. каждое сечение $(P)_x$ содержит не более одной точки;

счетно-значное, если $\forall x \in \mathbb{X}\,(\mathtt{card}\,(P)_x \le \aleph_0)$,
т. е. каждое сечение $(P)_x$ не более чем счетно.

**Теорема**

*Если борелевское множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ счетно-значно, то*

1. *его проекция* $\mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P)$ *— также борелевское множество;*
2. *$P$ можно униформизовать борелевским множеством.*

Замечание. Проекции борелевских, и даже просто замкнутых множеств общего вида заполняют класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$ полностью. Таким образом, счетно-значность критически сужает класс проекций. Это имеет место и для некоторых других типов сечений.

## Док-во

1 Множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ борелевское, т. е. $\mathbf{\Delta}^1_1$. Значит, $\Delta^1_1(z)$ для какого-то параметра $z \in \mathcal{N}$ по теореме эффективизации.

Тогда, если $x \in \mathbb{X}$, то сечение $(P)_x = \{y : P(x,y)\}$ есть $\Delta^1_1(z,x)$. При этом $(P)_x$ не более чем счетно по выбору $P$.

Значит, $(P)_x \subseteq \Delta^1_1(z,x)$ по теореме совершенного ядра. Отсюда

$$x \in \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) \iff \underbrace{\exists y\, P(x,y)}_{\Sigma^1_1(z)} \iff \underbrace{\exists y \in \Delta^1_1(z,x)\, P(x,y)}_{\Pi^1_1(z) \text{ по теореме о } \Delta^1_1 \text{ кванторе}} \quad ,$$

откуда и следует результат.

2 следует из 1 и теоремы Крайзеля. □

## Док-во

1 Множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ борелевское, т. е. $\mathbf{\Delta}^1_1$. Значит, $\varDelta^1_1(z)$ для какого-то параметра $z \in \mathcal{N}$ по теореме эффективизации.

Тогда, если $x \in \mathbb{X}$, то сечение $(P)_x = \{y : P(x,y)\}$ есть $\varDelta^1_1(z,x)$. При этом $(P)_x$ не более чем счетно по выбору $P$.

Значит, $(P)_x \subseteq \varDelta^1_1(z,x)$ по теореме совершенного ядра. Отсюда

$$x \in \mathbf{pr}_{\mathbb{X}}(P) \iff \underbrace{\exists y\, P(x,y)}_{\varSigma^1_1(z)} \iff \underbrace{\exists y \in \varDelta^1_1(z,x)\, P(x,y)}_{\varPi^1_1(z) \text{ по теореме о } \varDelta^1_1 \text{ кванторе}} ,$$

откуда и следует результат.

2 следует из 1 и теоремы Крайзеля. □

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — бэровские произведения. Каждое счетно-значное множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ есть счетное объединение $P = \bigcup_n P(n)$ однозначных множеств $P(n)$ (следствие аксиомы выбора).

Более сложная задача: выяснить, возможно ли такое разложение на однозначные множества $P(n)$ того же класса что и данное $P$.

**Теорема** ([КЛ2], теорема 11.1.3)

*Каждое счетно-значное борелевское множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ есть счетное объединение однозначных борелевских же множеств.*

**Док-во**

Как и в предыдущей теореме, $P$ есть $\Delta^1_1(z)$ для какого-то $z \in \mathcal{N}$. Для простоты пусть $P \in \Delta^1_1$ и $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathcal{N}$.

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — бэровские произведения. Каждое счетно-значное множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ есть счетное объединение $P = \bigcup_n P(n)$ однозначных множеств $P(n)$ (следствие аксиомы выбора).

Более сложная задача: выяснить, возможно ли такое разложение на однозначные множества $P(n)$ того же класса что и данное $P$.

**Теорема** ([КЛ2], теорема 11.1.3)

*Каждое счетно-значное борелевское множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ есть счетное объединение однозначных борелевских же множеств.*

**Док-во**

Как и в предыдущей теореме, $P$ есть $\varDelta^1_1(z)$ для какого-то $z \in \mathcal{N}$. Для простоты пусть $P \in \varDelta^1_1$ и $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathcal{N}$.

Имеем $(P)_b \subseteq \Delta^1_1(b)$ для всех $b \in \mathcal{N}$, по счетно-значности и теореме совершенного ядра.

Берем множества $E, W, W'$ как в теореме о перечислении, т. е.

1 $\Pi^1_1$ $E \subseteq \mathcal{N} \times \omega$, $\Pi^1_1$ $W \subseteq \mathcal{N} \times \omega \times \mathcal{N}$, $\Sigma^1_1$ $W' \subseteq \mathcal{N} \times \omega \times \mathcal{N}$,

2 $\forall\, b \in \mathcal{N}$: если $n \in (E)_b$ то $\exists\,!\, \delta_{bn} \in \mathcal{N}$: $(W)_{bn} = (W')_{bn} = \{\delta_{bn}\}$;

3 $\{\delta_{bn} : n \in (E)_b\} = D(b) = \{$все $\Delta^1_1(b)$-точки в $\mathcal{N}\}$.

Берем $Q = \{\langle b, a, n\rangle : \langle b, a\rangle \in P \wedge n \in (E)_b \wedge a = \delta_{bn}\}$; $Q \in \Pi^1_1$ по 1 2.

Докажем $\forall\, \langle b, a\rangle \in P\, \exists\, n\, Q(b, a, n)$. $\langle b, a\rangle \in P \Longrightarrow a \in \Delta^1_1(b)$ т. к. $(P)_b \subseteq \Delta^1_1(b)$ $\Longrightarrow a = \delta_{bn}$ где $n \in (E)_b$ по 3 $\Longrightarrow$ $\langle b, a, n\rangle \in Q$.

Униформизуем $Q$ в смысле $(\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \times \omega$ $\Pi^1_1$-множеством $R \subseteq Q$, т. е. $\forall\, \langle b, a\rangle \in P\, \exists\,!\, n\, R(b, a, n)$.

**Упражнение:** доказать, что множ-ва $P(n) = \{\langle b, a\rangle : R(b, a, n)\}$: $\Delta^1_1$ (использовать $W'$), однозначные, и $P = \bigcup_n P(n)$. [КЛ2] с. 205. □

Имеем $(P)_b \subseteq \Delta^1_1(b)$ для всех $b \in \mathcal{N}$, по счетно-значности и теореме совершенного ядра.

Берем множества $E, W, W'$ как в теореме о перечислении, т. е.

1. $\Pi^1_1$ $E \subseteq \mathcal{N} \times \omega$, $\Pi^1_1$ $W \subseteq \mathcal{N} \times \omega \times \mathcal{N}$, $\Sigma^1_1$ $W' \subseteq \mathcal{N} \times \omega \times \mathcal{N}$,
2. $\forall\, b \in \mathcal{N}$: если $n \in (E)_b$ то $\exists\,!\, \delta_{bn} \in \mathcal{N}$: $(W)_{bn} = (W')_{bn} = \{\delta_{bn}\}$;
3. $\{\delta_{bn} : n \in (E)_b\} = D(b) = \{$все $\Delta^1_1(b)$-точки в $\mathcal{N}\}$.

Берем $Q = \{\langle b, a, n\rangle : \langle b, a\rangle \in P \wedge n \in (E)_b \wedge a = \delta_{bn}\}$; $Q \in \Pi^1_1$ по 1 2.

Докажем $\forall\, \langle b, a\rangle \in P\, \exists\, n\, Q(b, a, n)$. $\langle b, a\rangle \in P \Longrightarrow a \in \Delta^1_1(b)$ т. к. $(P)_b \subseteq \Delta^1_1(b)$ $\Longrightarrow a = \delta_{bn}$ где $n \in (E)_b$ по 3 $\Longrightarrow \langle b, a, n\rangle \in Q$.

Униформизуем $Q$ в смысле $(\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \times \omega$ $\Pi^1_1$-множеством $R \subseteq Q$, т. е. $\forall\, \langle b, a\rangle \in P\, \exists\,!\, n\, R(b, a, n)$.

**Упражнение:** доказать, что множ-ва $P(n) = \{\langle b, a\rangle : R(b, a, n)\}$: $\Delta^1_1$ (использовать $W'$), однозначные, и $P = \bigcup_n P(n)$. [КЛ2] с. 205. □

Ряд теорем дескриптивной теории множеств имеет такой вид: каждое «плоское» $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $P$ с определенным свойством сечений (например, счетно-значное) накрывается $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеством (т. е. борелевским) $P'$ с тем же свойством сечений.

**Теорема** ([КЛ2], теорема 11.1.5)

*Каждое счетно-значное $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ накрывается счетно-значным $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеством (т. е. борелевским) $P'$.*

$P$ есть $\Sigma^1_1(z)$, $z \in \mathcal{N}$. Для простоты пусть $P \in \Sigma^1_1$ и $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathcal{N}$.

Имеем $(P)_b \subseteq \Delta^1_1(b)$ для всех $b \in \mathcal{N}$, по счетно-значности и теореме совершенного ядра.

Другими словами, $P \subseteq Q = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : y \in \Delta^1_1(x)\}$.

При этом $Q \in \Pi^1_1$ по теореме о $\Delta^1_1$ точках.

По теореме отделимости (к множествам $P$ и дополнению $Q$), найдется множество $P'$ класса $\Delta^1_1$, для которого $P \subseteq P' \subseteq Q$.

Ряд теорем дескриптивной теории множеств имеет такой вид: каждое «плоское» $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $P$ с определенным свойством сечений (например, счетно-значное) накрывается $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеством (т. е. борелевским) $P'$ с тем же свойством сечений.

**Теорема** ([КЛ2], теорема 11.1.5)

*Каждое счетно-значное $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ накрывается счетно-значным $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеством (т. е. борелевским) $P'$.*

$P$ есть $\Sigma^1_1(z)$, $z \in \mathcal{N}$. Для простоты пусть $P \in \Sigma^1_1$ и $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathcal{N}$.

Имеем $(P)_b \subseteq \Delta^1_1(b)$ для всех $b \in \mathcal{N}$, по счетно-значности и теореме совершенного ядра.

Другими словами, $P \subseteq Q = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : y \in \Delta^1_1(x)\}$.

При этом $Q \in \Pi^1_1$ по теореме о $\Delta^1_1$ точках.

По теореме отделимости (к множествам $P$ и дополнению $Q$), найдется множество $P'$ класса $\Delta^1_1$, для которого $P \subseteq P' \subseteq Q$.

# Содержание I

# Содержание II