# Теория множеств
# Лекция 7
# Отношения эквивалентности и фактор-множества

Владимир Григорьевич Кановей (ИППИ)

Осень 2023, МИАН Москва

**http://iitp.ru/ru/userpages/156/300.htm**
скачиваются файлы лекций и литература

**kanovei@iitp.ru** — email для контактов

**https://www.mathnet.ru/conf2305**
сайт курса на mathnet

# Литература

**Jech03** *Millenium*

**K-AMS** Kanovei, *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification*, AMS University Lecture Series.

**Kechris** *Descriptive set theory*

**Mos** Moschovakis, *Descriptive set theory*

**Йех73** *Теория множеств и метод форсинга*

**КЛ-1** Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики*

**КЛ-2** Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*

**КЛ-3** Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы*

**Кур-1** Куратовский, *Топология том 1*

**СКМЛ** *Справочная книга по математической логике том 2: теория множеств.*

Натуральный ряд $\mathbb{N} = \omega$.

Бэровское пространство $\mathcal{N} = \omega^\omega$.

**Бэровское произведение** = любое $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$.

Множества $X \subseteq \mathbb{P}$ — точечные множества.

Борелевские мн-ва $X \subseteq \mathbb{P}$, $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$ = открытые, $\boldsymbol{\Pi}^0_1$ = замкнутые.

Проективные множества $X \subseteq \mathbb{P}$, классы $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, $\boldsymbol{\Pi}^1_n$, $\boldsymbol{\Delta}^1_n$.

$\mathbf{Cort} = \mathbf{Cort}_1 := \omega^{<\omega} = \bigcup_n \omega^n$ — **кортежи** натуральных чисел.

$\mathbf{lh}(s)$ — **длина** кортежа $s$, т. е. $s \in \omega^n \Longrightarrow \mathbf{lh}(s) = n$.

$s \subset t$ — **строгое продолжение** кортежей.

$\Lambda = \varnothing$ — **пустой** кортеж, $\mathbf{lh}(\Lambda) = 0$.

**Соглашение 1** (реляционная запись)

Множества в бэровских произведениях $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$ часто рассматриваются в виде **отношений**, т. е. если к примеру $R \subseteq \omega \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ то $\langle k, x, y \rangle \in R$ и $R(k, x, y)$ означают одно и то же.

Это позволяет использовать логические операции вместо теоретико-множественных, что бывает более удобно.

**Соглашение 2** (в контексте Соглашения 1)

Буквы $k, l, m, n, i, j, \dots$: натуральные числа и переменные по $\omega$.

Буквы $x, y, z, a, b, p, q, \dots$: точки $\mathcal{N} = \omega^\omega$ и переменные по $\mathcal{N}$.

**Теорема 1 (Александров–Хаусдорф)**

*Любое несчетное борелевское множество в польском пространстве имеет мощность континуума* $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Т. обр., континуум-гипотеза верна на борелевских множествах.

**Теорема 2 ([KL2], теорема 2.6.2)**

*Если* $X, Y$ *— два несчетных борелевских множества в польских пространствах, то существует борелевская биекция* $f : X \xrightarrow{\text{на}} Y$.

В частности, любое несчетное борелевское множество $X$ в польском пространстве допускает борелевскую биекцию $f : X \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}$, или другими словами все несчетные борелевские множества имеют **борелевскую** мощность континуум.

Но это далеко не так для борелевских **фактор-множеств**.

**Теорема 1 (Александров–Хаусдорф)**

*Любое несчетное борелевское множество в польском пространстве имеет мощность континуума* $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ .

Т. обр., континуум-гипотеза верна на борелевских множествах.

**Теорема 2 ([KL2], теорема 2.6.2)**

*Если* $X, Y$ *— два несчетных борелевских множества в польских пространствах, то существует борелевская биекция* $f : X \xrightarrow{\text{на}} Y$ .

В частности, любое несчетное борелевское множество $X$ в польском пространстве допускает борелевскую биекцию $f : X \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}$, или другими словами все несчетные борелевские множества имеют **борелевскую** мощность континуум.

Но это далеко не так для борелевских **фактор-множеств**.

Рассматриваются отношения эквивалентности $\mathsf{E}$ на польских пространствах $X$. Таким образом, $\mathsf{E} \subseteq X \times X$ есть множество пар, удовлетворяющее, для всех $x, y, z \in X$:

$$x \;\mathsf{E}\; x, \qquad x \;\mathsf{E}\; y \Longrightarrow y \;\mathsf{E}\; x, \qquad x \;\mathsf{E}\; y \wedge y \;\mathsf{E}\; z \Longrightarrow x \;\mathsf{E}\; z.$$

Если $x \in X$ то $[x]_{\mathsf{E}} = \{y : y \;\mathsf{E}\; x\} \subseteq X$ — класс эквивалентности. $X/\mathsf{E} = \{[x]_{\mathsf{E}} : x \in X\}$ — фактор-множество по отношению $\mathsf{E}$.

Рассматриваем факторы $X/\mathsf{E}$ по борелевским (также иногда $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ или $\boldsymbol{\Pi}^1_1$) отношениям $\mathsf{E}$.

$=$ или $=_X$: равенство на данном пространстве $X$;

$\mathsf{vit}$: отношение эквивалентности Витали на $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}/=$ отождествляется с $\mathbb{R}$, а $\mathbb{R}/\mathsf{vit}$ есть множество всех сдвигов $[x]_{\mathsf{vit}} = x + \mathbb{Q}$ множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.

Рассматриваются отношения эквивалентности $\mathbf{E}$ на польских пространствах $X$. Таким образом, $\mathbf{E} \subseteq X \times X$ есть множество пар, удовлетворяющее, для всех $x, y, z \in X$:

$$x \mathbf{E} x, \qquad x \mathbf{E} y \Longrightarrow y \mathbf{E} x, \qquad x \mathbf{E} y \wedge y \mathbf{E} z \Longrightarrow x \mathbf{E} z.$$

Если $x \in X$ то $[x]_{\mathbf{E}} = \{y : y \mathbf{E} x\} \subseteq X$ — класс эквивалентности.
$X/\mathbf{E} = \{[x]_{\mathbf{E}} : x \in X\}$ — фактор-множество по отношению $\mathbf{E}$.

Рассматриваем факторы $X/\mathbf{E}$ по борелевским (также иногда $\mathbf{\Sigma}^1_1$ или $\mathbf{\Pi}^1_1$) отношениям $\mathbf{E}$.

$=$ или $=_X$: равенство на данном пространстве $X$;

**vit**: отношение эквивалентности Витали на $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}/=$ отождествляется с $\mathbb{R}$, а $\mathbb{R}/\mathbf{vit}$ есть множество всех сдвигов $[x]_{\mathbf{vit}} = x + \mathbb{Q}$ множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.

**Теорема**

*Если* $\mathbf{E}$ *— борелевское отношение эквивалентности на множестве* $X$*, то* $X$ *— само борелевское множество.*

**Док-во**

Согласно рефлексивности, $X = \{x : x \mathbf{E} x\}$, а $\mathbf{E}$ — борелевское. Значит, и $X$ борелевское как непрерывный прообраз. □

Это позволит нам не добавлять «на борелевском множестве», когда рассматривается какое-то борелевское отношение эквивалентности.

### Теорема

*Если* $\mathbf{E}$ *— борелевское отношение эквивалентности на множестве* $X$, *то* $X$ *— само борелевское множество.*

### Док-во

Согласно рефлексивности, $X = \{x : x \mathbf{E} x\}$, а $\mathbf{E}$ — борелевское. Значит, и $X$ борелевское как непрерывный прообраз. $\square$

Это позволит нам не добавлять «на борелевском множестве», когда рассматривается какое-то борелевское отношение эквивалентности.

**Теорема 1 (ZFC)**

*Множества* $\mathbb{R}$ *и* $\mathbb{R}/\mathbf{vit}$ *имеют оба мощность континуума* $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

**Док-во**

Для $\mathbb{R}$ это очевидно. Для $F = \mathbb{R}/\mathbf{vit}$, пусть $\operatorname{card} F = \kappa$ (бесконечный кардинал).

Тогда $\mathbb{R}$ есть сумма $\kappa$ дизъюнктных счетных множеств $[x]_{\mathbf{vit}}$, т. е. классов эквивалентности отношения Витали **vit**.

Это означает что $\operatorname{card} \mathbb{R} = \kappa \times \aleph_0$.

Однако $\kappa \times \aleph_0 = \kappa$ для любого бесконечного кардинала $\kappa$.
Значит $\operatorname{card} F = \kappa = \operatorname{card} \mathbb{R} = \mathfrak{c}$. □

Дает ли доказательство этой теоремы какое-то конкретное взаимно-однозначное соответствие между точками $\mathbb{R}$ и классами эквивалентности $[x]_{\mathbf{vit}} = x + \mathbb{Q} \in \mathbb{R}/\mathbf{vit}$? **Нет не дает**.

**Теорема 1 (ZFC)**

*Множества* $\mathbb{R}$ *и* $\mathbb{R}/\mathbf{vit}$ *имеют оба мощность континуума* $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

**Док-во**

Для $\mathbb{R}$ это очевидно. Для $F = \mathbb{R}/\mathbf{vit}$, пусть $\operatorname{card} F = \kappa$ (бесконечный кардинал).

Тогда $\mathbb{R}$ есть сумма $\kappa$ дизъюнктных счетных множеств $[x]_{\mathbf{vit}}$, т. е. классов эквивалентности отношения Витали **vit**.

Это означает что $\operatorname{card} \mathbb{R} = \kappa \times \aleph_0$.

Однако $\kappa \times \aleph_0 = \kappa$ для любого бесконечного кардинала $\kappa$.
Значит $\operatorname{card} F = \kappa = \operatorname{card} \mathbb{R} = \mathfrak{c}$. □

Дает ли доказательство этой теоремы какое-то конкретное взаимно-однозначное соответствие между точками $\mathbb{R}$ и классами эквивалентности $[x]_{\mathbf{vit}} = x + \mathbb{Q} \in \mathbb{R}/\mathbf{vit}$? **Нет не дает**.

Пусть $X \leqslant_{\mathrm{B}} Y$ означает, что сравнение мощностей $X, Y$ достигается посредством борелевской инъекции $X$ в $Y$. Через $X <_{\mathrm{B}} Y$ обозначим строгое отношение, т. е. $X \leqslant_{\mathrm{B}} Y$ но $Y \not\leqslant_{\mathrm{B}} X$.

## Теорема 2

$\mathbb{R} <_B \mathbb{R}/\mathbf{vit}$. *Точнее говоря,*

1. $\mathbb{R} \leqslant_B \mathbb{R}/\mathbf{vit}$, *т. е. найдется борелевская* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *для которой* $x = y \iff f(x)\ \mathbf{vit}\ f(y)$;
2. *не выполнено* $\mathbb{R}/\mathbf{vit} \leqslant_B \mathbb{R}$, *т. е. нет такой борелевской* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *для которой* $x\ \mathbf{vit}\ y \iff g(x) = g(y)$.

Т. обр., несчетные $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}/\mathbf{vit}$ имеют **разную** борелевскую мощность.

## Док-во

1 Сначала строим замкнутое несчетное $X \subseteq \mathbb{R}$ из попарно **vit**-неэквивалентных чисел, см. [КЛ1], лемма 1.2. Затем берем борелевскую биекцию $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} X$ по теореме 2.

Пусть $X \leqslant_{\mathrm{B}} Y$ означает, что сравнение мощностей $X, Y$ достигается посредством борелевской инъекции $X$ в $Y$. Через $X <_{\mathrm{B}} Y$ обозначим строгое отношение, т. е. $X \leqslant_{\mathrm{B}} Y$ но $Y \not\leqslant_{\mathrm{B}} X$.

**Теорема 2**

$\mathbb{R} <_B \mathbb{R}/\mathbf{vit}$. *Точнее говоря,*

1. $\mathbb{R} \leqslant_B \mathbb{R}/\mathbf{vit}$, *т. е. найдется борелевская* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *для которой* $x = y \iff f(x) \;\mathbf{vit}\; f(y)$;
2. *не выполнено* $\mathbb{R}/\mathbf{vit} \leqslant_B \mathbb{R}$, *т. е. нет такой борелевской* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *для которой* $x \;\mathbf{vit}\; y \iff g(x) = g(y)$.

Т. обр., несчетные $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}/\mathbf{vit}$ имеют **разную** борелевскую мощность.

**Док-во**

1 Сначала строим замкнутое несчетное $X \subseteq \mathbb{R}$ из попарно **vit**-неэквивалентных чисел, см. [КЛ1], лемма 1.2. Затем берем борелевскую биекцию $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} X$ по теореме 2.

2 Предположим противное, т. е. борелевская функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет $x \,\mathbf{vit}\, y \iff g(x) = g(y)$, так что $g$ постоянна на каждом классе Витали $[x]_{\mathbf{vit}} = x + \mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$. Множества

$$P = \{\langle x, y\rangle : g(x) \le g(y)\} \quad \text{и} \quad P' = \{\langle x, y\rangle : g(y) \le g(x)\}$$

борелевские вместе с $g$. Оба $P, P'$ инвариантны относительно аддитивного действия $\mathbb{Q}$. Отсюда: каждое из $P, P'$ — либо **тощее** (= счетная сумма нигде не плотных) либо ко-тощее множество в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

При этом $P$ переходит в $P'$ симметрией $x, y \longmapsto y, x$, так что если $P$ тощее то тощее и $P'$, и наоборот.
Значит (и поскольку $P \cup P' = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), $P, P'$ оба ко-тощие.
Следовательно, $E = P \cap P'$ также ко-тощее множество.

Однако $E = \{\langle x, y\rangle : g(x) = g(y)\} = \{\langle x, y\rangle : x \,\mathbf{vit}\, y\}$, так что каждое сечение $E_x = \{y : \langle x, y\rangle \in E\} = [x]_{\mathbf{vit}}$ — счетное, значит тощее.

Значит и само $E$ — тощее по т. Улама–Куратовского.
Противоречие. $\square$

2 Предположим противное, т. е. борелевская функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет $x \,\mathbf{vit}\, y \iff g(x) = g(y)$, так что $g$ постоянна на каждом классе Витали $[x]_{\mathbf{vit}} = x + \mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$. Множества

$$P = \{\langle x, y\rangle : g(x) \le g(y)\} \quad \text{и} \quad P' = \{\langle x, y\rangle : g(y) \le g(x)\}$$

борелевские вместе с $g$. Оба $P, P'$ инвариантны относительно аддитивного действия $\mathbb{Q}$. Отсюда: каждое из $P, P'$ — либо **тощее** (= счетная сумма нигде не плотных) либо ко-тощее множество в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

При этом $P$ переходит в $P'$ симметрией $x, y \longmapsto y, x$, так что если $P$ тощее то тощее и $P'$, и наоборот.
Значит (и поскольку $P \cup P' = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), $P, P'$ оба ко-тощие.
Следовательно, $E = P \cap P'$ также ко-тощее множество.

Однако $E = \{\langle x, y\rangle : g(x) = g(y)\} = \{\langle x, y\rangle : x \,\mathbf{vit}\, y\}$, так что каждое сечение $E_x = \{y : \langle x, y\rangle \in E\} = [x]_{\mathbf{vit}}$ — счетное, значит тощее.

Значит и само $E$ — тощее по т. Улама–Куратовского.
Противоречие. □

$$[x]_{\mathbf{E}} = \{y \in X : y \mathbin{\mathbf{E}} x\} \quad \text{для } x \in X \quad (\textbf{E}\text{-}\textit{класс } x)$$

$$X/\mathbf{E} = \{[x]_{\mathbf{E}} : x \in X\} \quad \text{фактор-множество}$$

$$x \longmapsto [x]_{\mathbf{E}} \quad - \quad \text{каноническая проекция } X \text{ на } X/\mathbf{E}$$

$$[Y]_{\mathbf{E}} = \bigcup_{x \in Y} [x]_{\mathbf{E}} \quad \text{для } Y \subseteq X \quad (\textbf{E}\text{-насыщение } Y)$$

$Y \mathbin{\mathbf{E}} Y'$ — означает, что $[Y]_{\mathbf{E}} = [Y']_{\mathbf{E}}$ .

Множество $Y \subseteq X$:

- **E**-инвариантно если $[Y]_{\mathbf{E}} = Y$ (сумма полных **E**-классов);
- попарно **E**-неэквивалентно если $y \not\mathbin{\mathbf{E}} y'$ для всех $y \neq y'$ в $Y$;
- **E**-трансверсаль если $[Y]_{\mathbf{E}} = X$ и $Y$ попарно **E**-неэквивалентно.
- **E**-селектор — любая $f : X \to X$ удовлетворяющая $f(x) \in [x]_{\mathbf{E}}$ и $x \mathbin{\mathbf{E}} y \Longrightarrow f(x) = f(y)$ для всех $x, y \in X$.

$$[x]_{\mathbf{E}} = \{y \in X : y \,\mathbf{E}\, x\} \quad \text{для} \quad x \in X \quad (\mathbf{E}\text{-класс } x)$$

$$X/\mathbf{E} = \{[x]_{\mathbf{E}} : x \in X\} \quad \text{фактор-множество}$$

$$x \longmapsto [x]_{\mathbf{E}} \; - \; \text{каноническая проекция } X \text{ на } X/\mathbf{E}$$

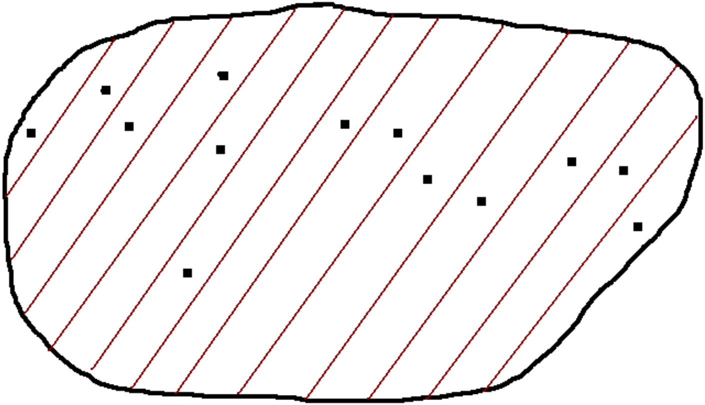
$$[Y]_{\mathbf{E}} = \textstyle\bigcup_{x \in Y} [x]_{\mathbf{E}} \quad \text{для} \quad Y \subseteq X \quad (\mathbf{E}\text{-насыщение } Y)$$

$$Y \,\mathbf{E}\, Y' \; - \; \text{означает, что } [Y]_{\mathbf{E}} = [Y']_{\mathbf{E}} \,.$$

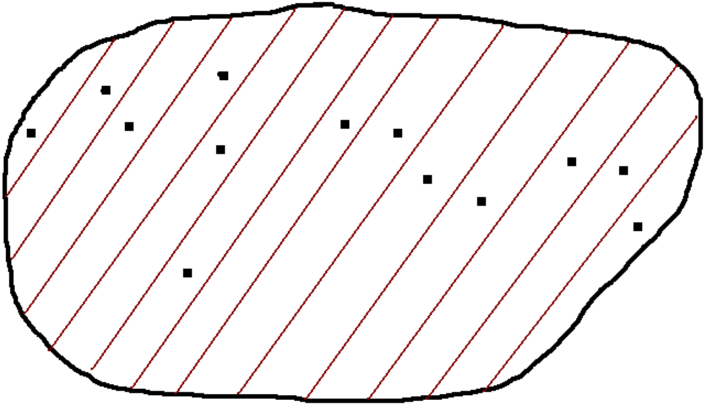
Множество $Y \subseteq X$:

- **E**-инвариантно если $[Y]_{\mathbf{E}} = Y$ (сумма полных **E**-классов);
- попарно **E**-неэквивалентно если $y \not\mathbf{E}\, y'$ для всех $y \neq y'$ в $Y$;
- **E**-трансверсаль если $[Y]_{\mathbf{E}} = X$ и $Y$ попарно **E**-неэквивалентно.
- **E**-селектор — любая $f : X \to X$ удовлетворяющая $f(x) \in [x]_{\mathbf{E}}$ и $x \,\mathbf{E}\, y \implies f(x) = f(y)$ для всех $x, y \in X$.

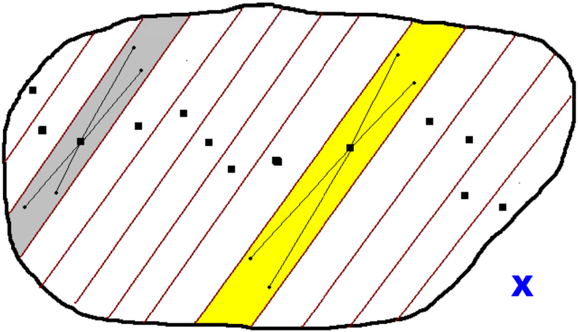
Трансверсаль выбирает один элемент в $\forall$ классе эквив-ти:



Трансверсаль выбирает один элемент в $\forall$ классе эквив-ти:



Селектор отображает $\forall x$ в каждом классе экв-ти $[x]_{\mathbf{E}}$ в выделенный элемент $f(x) \in [x]_{\mathbf{E}}$, не зависящий от выбора $x$ в $[x]_{\mathbf{E}}$:

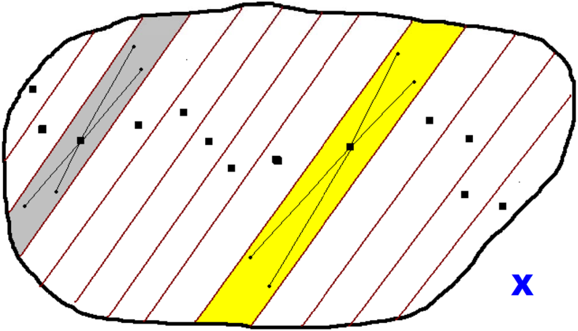



Если $f$ – селектор то множество $\operatorname{ran} f = \{f(x) : x \in X\}$ всех выделенных элементов — трансверсаль. Обратно, если $T \subseteq X$ трансверсаль, то

$$f(x) = \text{единственный элемент в } T \cap [x]_{\mathbf{E}}$$

— селектор.

Селектор отображает $\forall x$ в каждом классе экв-ти $[x]_{\mathbf{E}}$ в выделенный элемент $f(x) \in [x]_{\mathbf{E}}$, не зависящий от выбора $x$ в $[x]_{\mathbf{E}}$:




Если $f$ – селектор то множество $\operatorname{ran} f = \{f(x) : x \in X\}$ всех выделенных элементов — трансверсаль. Обратно, если $T \subseteq X$ трансверсаль, то

$$f(x) = \text{единственный элемент в } T \cap [x]_{\mathbf{E}}$$

— селектор.

Напомним, что борелевское отношение эквивалентности Витали **vit** определено на $\mathbb{R}$ так:

$$x \ \mathbf{vit} \ y \quad \text{когда} \quad \text{разность } x - y \text{ рациональна}.$$

**Теорема**

*Отношение Витали* **vit** *не имеет ни борелевской трансверсали ни борелевского селектора.*

**Док-во**

См. теорему 2. □

Напомним, что борелевское отношение эквивалентности Витали **vit** определено на $\mathbb{R}$ так:

$$x \ \mathbf{vit}\ y \quad \text{когда} \quad \text{разность } x - y \text{ рациональна}.$$

**Теорема**

*Отношение Витали* **vit** *не имеет ни борелевской трансверсали ни борелевского селектора.*

**Док-во**

См. теорему 2. □

Допустим, что

- $\mathbf{E}$ — отношение эквивалентности на $X$,
- $\mathbf{F}$ — отношение эквивалентности на $Y$.

Отображение $f : X \to Y$ называется редукцией (сводимостью)

- $\mathbf{E}$ к $\mathbf{F}$,
- $X/\mathbf{E}$ к $Y/\mathbf{F}$,

если соотношение

$$x \mathbf{E} x' \iff f(x) \mathbf{F} f(x')$$

выполнено для всех $x, x' \in X$. См. картинку.

Такое отображение $f$ индуцирует **инъекцию** $\bar{f} : X/\mathbf{E} \to Y/\mathbf{F}$, и влечет неравенство мощностей $\mathtt{card}(X/\mathbf{E}) \le \mathtt{card}(Y/\mathbf{F})$.

Допустим, что

- $\mathbf{E}$ — отношение эквивалентности на $X$,
- $\mathbf{F}$ — отношение эквивалентности на $Y$.

Отображение $f : X \to Y$ называется редукцией (сводимостью)

- $\mathbf{E}$ к $\mathbf{F}$,
- $X/\,\mathbf{E}$ к $Y/\,\mathbf{F}$,

если соотношение

$$x \,\mathbf{E}\, x' \iff f(x) \;\mathbf{F}\; f(x')$$

выполнено для всех $x, x' \in X$. См. картинку.

Такое отображение $f$ индуцирует **инъекцию** $\bar{f} : X/\mathbf{E} \to Y/\mathbf{F}$, и влечет неравенство мощностей $\mathrm{card}\,(X/\mathbf{E}) \leq \mathrm{card}\,(Y/\mathbf{F})$.

## Определение

Пусть $\mathsf{E}, \mathsf{F}$ — отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотв., $X$, $Y$ в польских пространствах. Тогда $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ означает, что $\exists$ борелевская редукция $\mathsf{E}$ к $\mathsf{F}$, т. е. борелевское отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее $x \mathrel{\mathsf{E}} x' \iff f(x) \mathrel{\mathsf{F}} f(x')$ для всех $x, x' \in X$.

Отношение $\leqslant_{\mathrm{B}}$ (борелевская сводимость) рассматривается как достаточно разумный способ сравнения сложности отношений эквивалентности и числа классов эквивалентности.

Производные отношения:

$\mathsf{E} \sim_B \mathsf{F}$ если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ и $\mathsf{F} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ борелевская би-сводимость

$\mathsf{E} <_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ но $\mathsf{F} \not\leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ строгая борел. сводимость

## Определение

Пусть $\mathsf{E}, \mathsf{F}$ — отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотв., $X$, $Y$ в польских пространствах.
Тогда $\mathsf{E} \leqslant_{\mathsf{B}} \mathsf{F}$ означает, что $\exists$ борелевская редукция $\mathsf{E}$ к $\mathsf{F}$,
т. е. борелевское отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее
$x \mathrel{\mathsf{E}} x' \iff f(x) \mathrel{\mathsf{F}} f(x')$ для всех $x, x' \in X$.

Отношение $\leqslant_{\mathsf{B}}$ (борелевская сводимость) рассматривается как достаточно разумный способ сравнения сложности отношений эквивалентности и числа классов эквивалентности.

Производные отношения:

$\mathsf{E} \sim_B \mathsf{F}$ если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathsf{B}} \mathsf{F}$ и $\mathsf{F} \leqslant_{\mathsf{B}} \mathsf{E}$ борелевская би-сводимость

$\mathsf{E} <_{\mathsf{B}} \mathsf{F}$ если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathsf{B}} \mathsf{F}$ но $\mathsf{F} \not\leqslant_{\mathsf{B}} \mathsf{E}$ строгая борел. сводимость

Для любого $n$, $(=_n)$ обозначает отношение равенства на $n$-элементном множестве $X \subseteq \mathcal{N}$.

$(=_{\aleph_0})$ — равенство на строго счетном $X \subseteq \mathcal{N}$.

$(=_{\mathcal{N}})$ — равенство на самом $\mathcal{N}$.

**Теорема (простая, упражнение)**

$$(=_1) \;<_B\; (=_2) \;<_B\; (=_3) \;<_B\; \dots \;<_B\; (=_{\aleph_0}) \;<_B\; (=_{\mathcal{N}})\,,$$

*и все $<_B$-интервалы здесь пустые.*

**Q:** $\exists$ ли борелевские отношения экв-ти строго $<_B$-над $(=_{\mathcal{N}})$?

**A:** Их очень много, и с очень сложной $\leqslant_B$-структурой.

Для любого $n$, $(=_n)$ обозначает отношение равенства на $n$-элементном множестве $X \subseteq \mathcal{N}$.

$(=_{\aleph_0})$ — равенство на строго счетном $X \subseteq \mathcal{N}$.

$(=_{\mathcal{N}})$ — равенство на самом $\mathcal{N}$.

**Теорема (простая, упражнение)**

$$(=_1) <_B (=_2) <_B (=_3) <_B \dots <_B (=_{\aleph_0}) <_B (=_{\mathcal{N}}),$$

*и все $<_B$-интервалы здесь пустые.*

**Q:** $\exists$ ли борелевские отношения экв-ти строго $<_B$-над $(=_{\mathcal{N}})$?

**A:** Их очень много, и с очень сложной $\leqslant_B$-структурой.

$\mathsf{E}_0$ отношение эквивалентности на $2^\omega \subseteq \mathcal{N}$: $x\,\mathsf{E}_0\,y$, когда $x(n) = y(n)$ для почти всех (= кроме конечного числа) $n$.

$\mathsf{E}_1$ отношение эквивалентности на $(2^\omega)^\omega$: $x\,\mathsf{E}_1\,y$, когда $x(n) = y(n)$ для почти всех $n$.

$\mathsf{E}_3$ отношение эквивалентности на $(2^\omega)^\omega$: $x\,\mathsf{E}_3\,y$, когда $x(n)\,\mathsf{E}_0\,y(n)$ для всех $n$.

$\mathsf{T}_2$ отношение экв-ти на $(2^\omega)^\omega$: $x\,\mathsf{T}_2\,y$, когда $\mathtt{ran}\,x = \mathtt{ran}\,y$:

$\langle 1,2,3,4,\dots\rangle\ \mathsf{T}_2\ \langle 2,1,4,3,\dots\rangle\ \mathsf{T}_2\ \langle 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\dots\rangle$

$\mathsf{Z}_0$ отношение эквивалентности на $2^\omega$ по плотности 0: $x\,\mathsf{Z}_0\,y$, когда $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathtt{card}\{k<n : x(k)\neq y(k)\}}{n} = 0$

$\mathsf{E}_2$ отношение эквивалентности на $2^\omega$ по суммируемости: $x\,\mathsf{E}_2\,y$, когда $\sum_{k\geq 1,\, x(k)\neq y(k)} \frac{1}{k} < +\infty$.

$\mathsf{E}_0$ отношение эквивалентности на $2^\omega \subseteq \mathcal{N}$: $x\,\mathsf{E}_0\,y$, когда $x(n) = y(n)$ для почти всех (= кроме конечного числа) $n$.

$\mathsf{E}_1$ отношение эквивалентности на $(2^\omega)^\omega$: $x\,\mathsf{E}_1\,y$, когда $x(n) = y(n)$ для почти всех $n$.

$\mathsf{E}_3$ отношение эквивалентности на $(2^\omega)^\omega$: $x\,\mathsf{E}_3\,y$, когда $x(n)\,\mathsf{E}_0\,y(n)$ для всех $n$.

$\mathsf{T}_2$ отношение экв-ти на $(2^\omega)^\omega$: $x\,\mathsf{T}_2\,y$, когда $\operatorname{ran} x = \operatorname{ran} y$:

$\langle 1,2,3,4,\dots\rangle\ \mathsf{T}_2\ \langle 2,1,4,3,\dots\rangle\ \mathsf{T}_2\ \langle 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\dots\rangle$

$\mathsf{Z}_0$ отношение эквивалентности на $2^\omega$ по плотности 0: $x\,\mathsf{Z}_0\,y$, когда $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathtt{card}\{k<n : x(k)\ne y(k)\}}{n} = 0$

$\mathsf{E}_2$ отношение эквивалентности на $2^\omega$ по суммируемости: $x\,\mathsf{E}_2\,y$, когда $\sum_{k\ge 1,\, x(k)\ne y(k)} \frac{1}{k} < +\infty$.

Борелевское отношение эквивалентности $\mathsf{E}$ на $X$ наз. гладким (наиболее простая категория) если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} (=_{\mathcal{N}})$, т. е. найдется борелевская $f : X \to \mathcal{N}$, удовлетворяющая $x \mathrel{\mathsf{E}} x' \iff f(x) = f(y)$.

Гладкие отношения эквивалентности подразделяются на: 1 которые имеют борелевскую трансверсаль, и 2 которые её не имеют.

1 Для $x, y \in \mathcal{N}$, положим $x \mathrel{\mathsf{E}} y$, если $\mathtt{ran}\, x = \mathtt{ran}\, y$, т. е. $\{x(k) : k < \omega\} = \{y(j) : j < \omega\}$. Если $\varnothing \neq Z \subseteq \omega$ бесконечно, то пусть $a_Z \in \mathcal{N}$ перечисляет $Z$ в порядке возрастания.
Если $Z = \{k_0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_m\} \subseteq \omega$ конечно, то пусть $a_Z(j) = k_j$ для $j \leq m$ и $a_Z(j) = k_m$ для $j > m$. **Докажите**, что

(a) $\{a_Z : \varnothing \neq Z \subseteq \omega\}$ — борелевская трансверсаль для $\mathsf{E}$,

(b) $\mathsf{E}$ — гладкое через посредство отображения $f(x) = a_{\mathtt{ran}\, x}$.

2 $\exists$ борелевское $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, не униформизуемое борел. множ-вом. Пусть $\langle x, y\rangle \mathrel{\mathsf{E}} \langle x', y'\rangle$, когда $\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle$ принадлежат $U$ и $x = x'$. **Докажите**, что $\mathsf{E}$ — гладкое, но не имеет борелевской трансверсали.

Борелевское отношение эквивалентности $\mathbf{E}$ на $X$ наз. гладким (наиболее простая категория) если $\mathbf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} (=_{\mathcal{N}})$, т. е. найдется борелевская $f : X \to \mathcal{N}$, удовлетворяющая $x \mathbf{E} x' \iff f(x) = f(y)$.

Гладкие отношения эквивалентности подразделяются на: 1 которые имеют борелевскую трансверсаль, и 2 которые её не имеют.

1 Для $x, y \in \mathcal{N}$, положим $x \mathbf{E} y$, если $\mathtt{ran}\, x = \mathtt{ran}\, y$, т. е. $\{x(k) : k < \omega\} = \{y(j) : j < \omega\}$. Если $\varnothing \ne Z \subseteq \omega$ бесконечно, то пусть $a_Z \in \mathcal{N}$ перечисляет $Z$ в порядке возрастания.
Если $Z = \{k_0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_m\} \subseteq \omega$ конечно, то пусть $a_Z(j) = k_j$ для $j \le m$ и $a_Z(j) = k_m$ для $j > m$. **Докажите**, что

(a) $\{a_Z : \varnothing \ne Z \subseteq \omega\}$ — борелевская трансверсаль для $\mathbf{E}$,

(b) $\mathbf{E}$ — гладкое через посредство отображения $f(x) = a_{\mathtt{ran}\, x}$.

2 $\exists$ борелевское $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, не униформизуемое борел. множ-вом. Пусть $\langle x, y\rangle \mathbf{E} \langle x', y'\rangle$, когда $\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle$ принадлежат $U$ и $x = x'$. **Докажите**, что $\mathbf{E}$ — гладкое, но не имеет борелевской трансверсали.

Борелевское отношение эквивалентности **E** на $X$ наз. счетным, если каждый класс **E**-эквивалентности — конечное или счетное множество. На слайде отношение $\mathbf{E}_0$ — счетное.

**Теорема**

*Если борелевское отношение эквивалентности* **E** *на борелевском* $X$ *гладкое и счетное, то оно имеет борелевскую трансверсаль.*

Пусть гладкость **E** дается борелевской функцией $f : X \to \mathcal{N}$, т. е. $\forall\, x, x' \in X \colon\ x\ \mathbf{E}\ x' \iff f(x) = f(y)$.

Множество $P = \{\langle y, x\rangle : f(x) = y\}$ борелевское и имеет счетные вертик. сечения $P_y = \{x : P(y, x)\} = [x]_{\mathbf{E}}$ — классы **E**-эквивален-сти.

Значит (лекция 6) существует униформизующее борелевское $Q \subseteq P$.

Но горизонтальные сечения $P_x = \{y : P(y, x)\}$ мн-ва $P$ содержат не более одной точки, именно $y = f(x)$. То же верно и для $Q \subseteq P$.

Значит (по другой теореме лекции 6) горизонтальная проекция $T = \{x : \exists\, y\ Q(y, x)\}$ множества $Q$ — борелевское множество.

Докажите, что $T$ — трансверсаль для **E**.

Борелевское отношение эквивалентности $\mathbf{E}$ на $X$ наз. счетным, если каждый класс $\mathbf{E}$-эквивалентности — конечное или счетное множество. На слайде отношение $\mathbf{E}_0$ — счетное.

**Теорема**

*Если борелевское отношение эквивалентности $\mathbf{E}$ на борелевском $X$ гладкое и счетное, то оно имеет борелевскую трансверсаль.*

Пусть гладкость $\mathbf{E}$ дается борелевской функцией $f : X \to \mathcal{N}$, т. е. $\forall\, x, x' \in X\colon\ x \mathbf{E}\, x' \iff f(x) = f(y)$.

Множество $P = \{\langle y, x\rangle : f(x) = y\}$ борелевское и имеет счетные вертик. сечения $P_y = \{x : P(y, x)\} = [x]_{\mathbf{E}}$ — классы $\mathbf{E}$-эквивален-сти.

Значит (лекция 6) существует униформизующее борелевское $Q \subseteq P$.

Но горизонтальные сечения $P_x = \{y : P(y, x)\}$ мн-ва $P$ содержат не более одной точки, именно $y = f(x)$. То же верно и для $Q \subseteq P$.

Значит (по другой теореме лекции 6) горизонтальная проекция $T = \{x : \exists\, y\, Q(y, x)\}$ множества $Q$ — борелевское множество.

Докажите, что $T$ — трансверсаль для $\mathbf{E}$.

Отношение эквивалентности $\mathbf{E}_0$ близко к отношению Витали **vit** в некоторых аспектах.

В частности, если **vit** индуцировано аддитивным действием группы $(\mathbb{Q}, +)$, то $\mathbf{E}_0$ индуцируется действием группы $G = (\mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(\omega), \triangle)$, где $\mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(\omega) = \{g \subseteq \omega : g \text{ конечно}\}$, а $u \triangle v = (u \setminus v) \cup (v \setminus u)$ — симметрическая разность.

### Упражнение

**Докажите,** что $G$ — абелева группа, которая индуцирует $\mathbf{E}_0$ своим действием на $2^\omega$, определенным так: если $g \in G$ и $x \in 2^\omega$, то

$$(gx)(k) = \begin{cases} x(k) & \text{при} \quad k \notin g \\ 1 - x(k) & \text{при} \quad k \in g \end{cases}$$

Другими словами, $[x]_{\mathbf{E}_0} = Gx = \{gx : g \in G\}$, т. е. $\mathbf{E}_0$-классы точек $x \in 2^\omega$ тождественны их $G$-орбитам.

Отношение эквивалентности $\mathbf{E}_0$ близко к отношению Витали **vit** в некоторых аспектах.

В частности, если **vit** индуцировано аддитивным действием группы $(\mathbb{Q},+)$, то $\mathbf{E}_0$ индуцируется действием группы $G = (\mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(\omega), \vartriangle)$, где $\mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(\omega) = \{g \subseteq \omega : g \text{ конечно}\}$, а $u \vartriangle v = (u \smallsetminus v) \cup (v \smallsetminus u)$ — симметрическая разность.

**Упражнение**

**Докажите,** что $G$ — абелева группа, которая индуцирует $\mathbf{E}_0$ своим действием на $2^\omega$, определенным так: если $g \in G$ и $x \in 2^\omega$, то

$$(gx)(k) = \begin{cases} x(k) & \text{при} \quad k \notin g \\ 1 - x(k) & \text{при} \quad k \in g \end{cases}$$

Другими словами, $[x]_{\mathbf{E}_0} = Gx = \{gx : g \in G\}$, т. е. $\mathbf{E}_0$-классы точек $x \in 2^\omega$ тождественны их $G$-орбитам.

**Теорема (Фельдман–Мур)**

*Любое счетное борелевское отношение эквивалентности* $\mathsf{E}$ *индуцировано непрерывным действием счётной группы.*

**Теорема (Фельдман–Мур)**

*Любое счетное борелевское отношение эквивалентности* $\mathsf{E}$ *индуцировано непрерывным действием счётной группы.*

**Теорема**

$\mathbf{E}_0$ — *негладкое борелевское отношение, точнее,* $(=_{2^\omega}) <_B \mathbf{E}_0$.

Функция $F(x) = \langle \underbrace{x(0)}, \underbrace{x(0), x(1)}, \underbrace{x(0), x(1), x(2)}, \dots \rangle$ дает $(=_{2^\omega}) \leqslant_B \mathbf{E}_0$.

Для д-ва негладкости, предположим противное. Тогда $\mathbf{E}_0$ гладкое и счетное, и по предыдущему $\mathbf{E}_0$ имеет борелевскую трансверсаль $T$. При этом $T$ имеет свойство Бэра, и потому:

**Случай 1**: $T$ тощее в $2^\omega$. Но $T$ трансверсаль, откуда $2^\omega = \bigcup_{g \in G} gT$, где все $gT = \{gx : x \in T\}$ тощие как $T$. А $G$ счетна. Противоречие.

**Случай 2**: $T$ ко-тощее на некотором канторовом интервале $C_s = \{x \in 2^\omega : s \subset x\}$, где $s$ — какой-то 0,1-кортеж, длины $m < \omega$. Пусть $g = \langle m \rangle \in G$. Тогда $g$ гомеоморфно переводит $C_s$ на себя, и потому мн-во $T' = gT$ также ко-тощее на $C_s$.

А с другой стороны, $T \cap T' = \varnothing$, поскольку $T$ — трансверсаль. Но два котощих мн-ва не могут быть дизъюнктны. Противоречие.

**Теорема**

$\mathbf{E}_0$ — *негладкое борелевское отношение, точнее,* $(\mathbf{=}_{2^\omega}) <_B \mathbf{E}_0$ .

Функция $F(x) = \langle \underbrace{x(0)}, \underbrace{x(0), x(1)}, \underbrace{x(0), x(1), x(2)}, \dots \rangle$ дает $(\mathbf{=}_{2^\omega}) \leqslant_{\mathrm{B}} \mathbf{E}_0$.

Для д-ва негладкости, предположим противное. Тогда $\mathbf{E}_0$ гладкое и счетное, и по предыдущему $\mathbf{E}_0$ имеет борелевскую трансверсаль $T$. При этом $T$ имеет свойство Бэра, и потому:

**Случай 1**: $T$ тощее в $2^\omega$. Но $T$ трансверсаль, откуда $2^\omega = \bigcup_{g \in G} gT$, где все $gT = \{gx : x \in T\}$ тощие как $T$. А $G$ счетна. Противоречие.

**Случай 2**: $T$ ко-тощее на некотором канторовом интервале $C_s = \{x \in 2^\omega : s \subset x\}$, где $s$ — какой-то 0,1-кортеж, длины $m < \omega$. Пусть $g = \langle m \rangle \in G$. Тогда $g$ гомеоморфно переводит $C_s$ на себя, и потому мн-во $T' = gT$ также ко-тощее на $C_s$.

А с другой стороны, $T \cap T' = \varnothing$, поскольку $T$ — трансверсаль. Но два котощих мн-ва не могут быть дизъюнктны. Противоречие.

# Содержание I

# Содержание II

# Редукция отношений эквивалентности: картинка

возврат