Теория множеств
Лекция 9
Классификация счетными структурами

Владимир Григорьевич Кановей (ИППИ)

Осень 2023, МИАН Москва

Адреса

http://iitp.ru/ru/userpages/156/300.htm
скачиваются файлы лекций и литература

kanovei@iitp.ru — email для контактов

https://www.mathnet.ru/conf2305
сайт курса на mathnet

Литература

КЛ-1 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики*

K-AMS Kanovei, *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification*, AMS University Lecture Series.

Kechris *Descriptive set theory*

Jech03 *Millenium*

Mos Moschovakis, *Descriptive set theory*

Йех73 *Теория множеств и метод форсинга*

КЛ-2 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*

КЛ-3 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы*

Кур-1 Куратовский, *Топология том 1*

СКМЛ *Справочная книга по математической логике том 2*: *теория множеств.*

Натуральный ряд $\mathbb{N} = \omega$.

Бэровское пространство $\mathcal{N} = \omega^\omega$.

Бэровское произведение = любое $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$.

Множества $X \subseteq \mathbb{P}$ — точечные множества.

Борелевские мн-ва $X \subseteq \mathbb{P}$, $\mathbf{\Sigma}^0_1$ = открытые, $\mathbf{\Pi}^0_1$ = замкнутые.

Проективные множества $X \subseteq \mathbb{P}$, классы $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$.

Эффективная иерархия, классы Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n.

$\omega^{<\omega} = \bigcup_n \omega^n$ — **кортежи** натуральных чисел.

$\mathbf{lh}(s)$ — **длина** кортежа s, т. е. $s \in \omega^n \Longrightarrow \mathbf{lh}(s) = n$.

$s \subset t$ — **строгое продолжение** кортежей.

$\Lambda = \varnothing$ — **пустой** кортеж, $\mathbf{lh}(\Lambda) = 0$.

Соглашение 1 (реляционная запись)

Множества в бэровских произведениях $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$ часто рассматриваются в виде **отношений**, т. е. если к примеру $R \subseteq \omega \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ то $\langle k, x, y \rangle \in R$ и $R(k, x, y)$ означают одно и то же.

Это позволяет использовать логические операции вместо теоретико-множественных, что бывает более удобно.

Соглашение 2 (в контексте Соглашения 1)

Буквы $k, l, m, n, i, j, \ldots$: натуральные числа и переменные по ω.

Буквы $x, y, z, a, b, p, q, \ldots$: точки $\mathcal{N} = \omega^\omega$ и переменные по $\mathcal{N}$.

$[x]_{\mathbf{E}} = \{y \in X : y \,\mathbf{E}\, x\}$ для $x \in X$ (**E**-*класс* x)

$X/\mathbf{E} = \{[x]_{\mathbf{E}} : x \in X\}$ фактор-множество

$x \longmapsto [x]_{\mathbf{E}}$ – каноническая проекция X на $X/\mathbf{E}$

$[Y]_{\mathbf{E}} = \bigcup_{x \in Y} [x]_{\mathbf{E}}$ для $Y \subseteq X$ (**E**-насыщение Y)

$Y \,\mathbf{E}\, Y'$ – означает, что $[Y]_{\mathbf{E}} = [Y']_{\mathbf{E}}$.

Множество $Y \subseteq X$:

- **E**-инвариантно если $[Y]_{\mathbf{E}} = Y$ (сумма полных **E**-классов);
- попарно **E**-неэквивалентно если $y \,\not{\mathbf{E}}\, y'$ для всех $y \neq y'$ в Y;
- **E**-трансверсаль если $[Y]_{\mathbf{E}} = X$ и Y попарно **E**-неэквивалентно.
- **E**-селектор — любая $f : X \to X$ удовлетворяющая $f(x) \in [x]_{\mathbf{E}}$ и $x \,\mathbf{E}\, y \Longrightarrow f(x) = f(y)$ для всех $x, y \in X$.

Определение

Пусть E, F — отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотв., X, Y в польских пространствах.

Определение

Пусть E, F — отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотв., X, Y в польских пространствах.
Тогда $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ означает, что $\exists$ борелевская редукция E к F,

Определение

Пусть E, F — отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотв., X, Y в польских пространствах.
Тогда $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ означает, что $\exists$ борелевская редукция E к F, т. е. борелевское отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее $x \;\mathsf{E}\; x' \iff f(x) \;\mathsf{F}\; f(x')$ — для всех $x, x' \in X$.

Определение

Пусть E, F — отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотв., X, Y в польских пространствах.
Тогда $\mathsf{E} \leqslant_{\mathsf{B}} \mathsf{F}$ означает, что $\exists$ борелевская редукция E к F,
т. е. борелевское отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее
$x \mathrel{\mathsf{E}} x' \iff f(x) \mathrel{\mathsf{F}} f(x')$ — для всех $x, x' \in X$.

Отношение $\leqslant_{\mathsf{B}}$ (борелевская сводимость) рассматривается как достаточно разумный способ сравнения сложности отношений эквивалентности и числа классов эквивалентности.

Определение

Пусть E, F — отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотв., X, Y в польских пространствах.
Тогда $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ означает, что $\exists$ борелевская редукция E к F, т. е. борелевское отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее $x \,\mathsf{E}\, x' \iff f(x) \;\mathsf{F}\; f(x')$ — для всех $x, x' \in X$.

Отношение $\leqslant_{\mathrm{B}}$ (борелевская сводимость) рассматривается как достаточно разумный способ сравнения сложности отношений эквивалентности и числа классов эквивалентности.

Производные отношения:

Определение

Пусть E, F — отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотв., X, Y в польских пространствах.
Тогда $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ означает, что $\exists$ борелевская редукция E к F,
т. е. борелевское отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее
$x \mathsf{E} x' \iff f(x) \mathsf{F} f(x')$ — для всех $x, x' \in X$.

Отношение $\leqslant_{\mathrm{B}}$ (борелевская сводимость) рассматривается как достаточно разумный способ сравнения сложности отношений эквивалентности и числа классов эквивалентности.

Производные отношения:

$\mathsf{E} \sim_B \mathsf{F}$, если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ и $\mathsf{F} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ борелевская би-сводимость

Определение

Пусть E, F — отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотв., X, Y в польских пространствах.
Тогда $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ означает, что $\exists$ борелевская редукция E к F, т. е. борелевское отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее $x \mathsf{E} x' \iff f(x) \mathsf{F} f(x')$ — для всех $x, x' \in X$.

Отношение $\leqslant_{\mathrm{B}}$ (борелевская сводимость) рассматривается как достаточно разумный способ сравнения сложности отношений эквивалентности и числа классов эквивалентности.

Производные отношения:

$\mathsf{E} \sim_B \mathsf{F}$, если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ и $\mathsf{F} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ — борелевская би-сводимость

$\mathsf{E} <_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ но $\mathsf{F} \not\leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ — строгая борел. сводимость

Определение

Пусть E, F — отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотв., X, Y в польских пространствах.
Тогда $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ означает, что $\exists$ борелевская редукция E к F, т. е. борелевское отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее $x \mathrel{\mathsf{E}} x' \iff f(x) \mathrel{\mathsf{F}} f(x')$ — для всех $x, x' \in X$.

Отношение $\leqslant_{\mathrm{B}}$ (борелевская сводимость) рассматривается как достаточно разумный способ сравнения сложности отношений эквивалентности и числа классов эквивалентности.

Производные отношения:

$\mathsf{E} \sim_B \mathsf{F}$, если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ и $\mathsf{F} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ борелевская би-сводимость

$\mathsf{E} <_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ но $\mathsf{F} \not\leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ строгая борел. сводимость

Теорема

Пусть $\mathbf{E}$ *— борелевское* (или даже $\mathbf{\Pi}^1_1$) *отношение эквивалентности. Тогда*

Теорема

Пусть **E** *— борелевское* (или даже $\mathbf{\Pi}^1_1$) *отношение эквивалентности. Тогда*

- *либо* (I) **E** *имеет не более чем счетное число классов эквивалентности, и тогда* $\mathbf{E} \leqslant_B (=_\omega)$,

Теорема

Пусть $\mathbf{E}$ *— борелевское* (или даже $\mathbf{\Pi}^1_1$) *отношение эквивалентности. Тогда*

- *либо* (I) $\mathbf{E}$ *имеет не более чем счетное число классов эквивалентности, и тогда* $\mathbf{E} \leqslant_B (=_\omega)$,
- *либо* (II) *существует попарно* $\mathbf{E}$*-неэквивалентное совершенное множество, и тогда* $(=_{2^\omega}) \leqslant_B \mathbf{E}$.

Теорема

Пусть $\mathbf{E}$ *— борелевское* (или даже $\mathbf{\Pi}^1_1$) *отношение эквивалентности. Тогда*

– *либо* (I) $\mathbf{E}$ *имеет не более чем счетное число классов эквивалентности, и тогда* $\mathbf{E} \leqslant_B (=_\omega)$,

– *либо* (II) *существует попарно* $\mathbf{E}$*-неэквивалентное совершенное множество, и тогда* $(=_{2^\omega}) \leqslant_B \mathbf{E}$.

E_0 отношение эквивалентности на $2^\omega \subseteq \mathcal{N}$: $x \,\mathsf{E}_0\, y$, когда $x(n) = y(n)$ для почти всех (= кроме конечного числа) n.

E_1 отношение эквивалентности на $(2^\omega)^\omega$: $x \,\mathsf{E}_1\, y$, когда $x(n) = y(n)$ для почти всех n.

E_3 отношение эквивалентности на $(2^\omega)^\omega$: $x \,\mathsf{E}_3\, y$, когда $x(n) \,\mathsf{E}_0\, y(n)$ для всех n.

T_2 отношение экв-ти на $(2^\omega)^\omega$: $x \,\mathsf{T}_2\, y$, когда $\mathtt{ran}\, x = \mathtt{ran}\, y$:

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, \dots \rangle \;\mathsf{T}_2\; \langle x_2, x_1, x_4, x_3, \dots \rangle \;\mathsf{T}_2\; \langle x_1, x_1, x_2, x_3, x_3, x_3, x_4, x_4, x_4, \dots \rangle$$

Z_0 отношение эквивалентности на 2^ω по плотности 0: $x \,\mathsf{Z}_0\, y$, когда $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\mathtt{card}\{k < n : x(k) \ne y(k)\}}{n} = 0$

E_2 отношение эквивалентности на 2^ω по суммируемости: $x \,\mathsf{E}_2\, y$, когда $\sum_{k \ge 1,\, x(k) \ne y(k)} \frac{1}{k} < +\infty$.

Рассматриваются банаховы группы ($p \geq 1$):

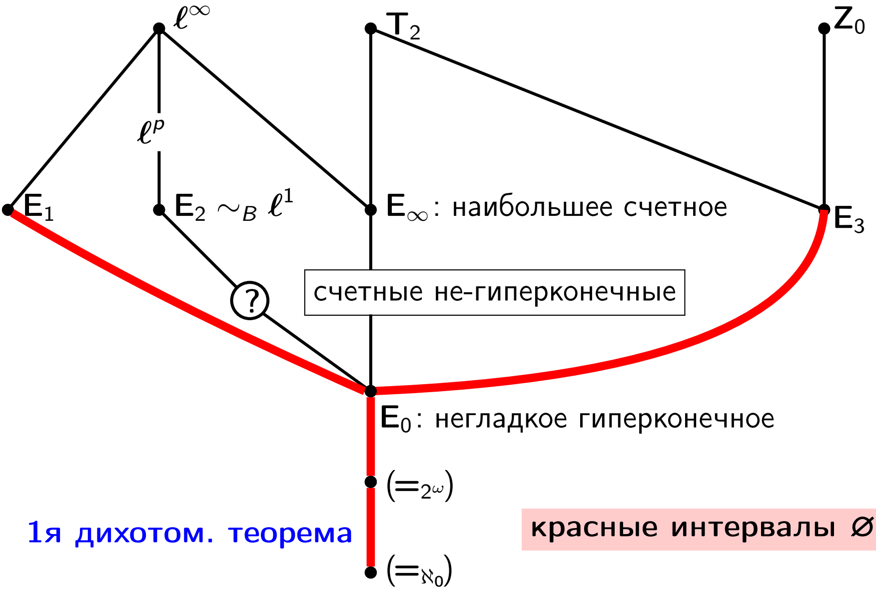
$$\begin{aligned} \ell^p &= \{x \in \mathbb{R}^\omega : \textstyle\sum_n |x(n)|^p < \infty\}; & \|x\|_p &= \left(\textstyle\sum_n |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \ell^\infty &= \{x \in \mathbb{R}^\omega : \sup_n |x(n)| < \infty\}; & \|x\|_\infty &= \sup_n |x(n)| \end{aligned}$$

Каждая ℓ^p, ℓ^∞ действует на $\mathbb{R}^\omega$ покомпонентным сложением.

ℓ^p, ℓ^∞ индуцированные отношения эквивалентности на $\mathbb{R}^\omega$.

Теорема (6.5.1 в [K-AMS])

Если $1 \leq p < q \leq +\infty$ *то* $\ell^p <_B \ell^q$.



1я дихотом. теорема

красные интервалы $\varnothing$

Для дальнейшего основные источники:

КЛ-1 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики*, глава 8.

K-AMS Kanovei, *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification*, AMS University Lecture Series.

Можно скачать с сайта
http://iitp.ru/ru/userpages/156/300.htm

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — счетный реляционный язык, где каждое R_n — реляционный символ арности $r(n)$.

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — счетный реляционный язык, где каждое R_n — реляционный символ арности $r(n)$. Тогда

$$\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{P}(\omega^{r(n)})$$

— пространство всех $\mathscr{L}$-структур с областью ω.

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — счетный реляционный язык, где каждое R_n — реляционный символ арности $r(n)$. Тогда

$$\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}(\omega^{r(n)})$$

— пространство всех $\mathscr{L}$-структур с областью ω.

Пример

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2)$, где R_1 — бинарный, а R_2 — тернарный реляционный символ.

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — счетный реляционный язык, где каждое R_n — реляционный символ арности $r(n)$. Тогда

$$\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}(\omega^{r(n)})$$

— пространство всех $\mathscr{L}$-структур с областью ω.

Пример

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2)$, где R_1 — бинарный, а R_2 — тернарный реляционный символ. Тогда $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \mathscr{P}(\omega^2) \times \mathscr{P}(\omega^3)$,

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — счетный реляционный язык, где каждое R_n — реляционный символ арности $r(n)$. Тогда

$$\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}(\omega^{r(n)})$$

— пространство всех $\mathscr{L}$-структур с областью ω.

Пример

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2)$, где R_1 — бинарный, а R_2 — тернарный реляционный символ. Тогда $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \mathscr{P}(\omega^2) \times \mathscr{P}(\omega^3)$, так что $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ состоит из пар $\langle x_1, x_2 \rangle$, где $x_1 \subseteq \omega^2$ and $x_2 \subseteq \omega^3$, отождествляемых с реляционными структурами $\langle \omega\, ; x_1, x_2 \rangle$.

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — счетный реляционный язык, где каждое R_n — реляционный символ арности $r(n)$. Тогда

$$\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}(\omega^{r(n)})$$

— пространство всех $\mathscr{L}$-структур с областью ω.

Пример

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2)$, где R_1 — бинарный, а R_2 — тернарный реляционный символ. Тогда $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \mathscr{P}(\omega^2) \times \mathscr{P}(\omega^3)$, так что $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ состоит из пар $\langle x_1, x_2 \rangle$, где $x_1 \subseteq \omega^2$ and $x_2 \subseteq \omega^3$, отождествляемых с реляционными структурами $\langle \omega\, ; x_1, x_2 \rangle$.

Топологически $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ — компактное польское пространство, гомеоморфное канторову пространству 2^ω.

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — счетный реляционный язык, где каждое R_n — реляционный символ арности $r(n)$. Тогда

$$\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}(\omega^{r(n)})$$

— пространство всех $\mathscr{L}$-структур с областью ω.

Пример

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2)$, где R_1 — бинарный, а R_2 — тернарный реляционный символ. Тогда $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \mathscr{P}(\omega^2) \times \mathscr{P}(\omega^3)$, так что $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ состоит из пар $\langle x_1, x_2 \rangle$, где $x_1 \subseteq \omega^2$ and $x_2 \subseteq \omega^3$, отождествляемых с реляционными структурами $\langle \omega\,; x_1, x_2 \rangle$.

Топологически $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ — компактное польское пространство, гомеоморфное канторову пространству 2^ω.

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — реляционный язык.

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — реляционный язык.

Если структуры $x, y \in \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ изоморфны через биекцию ω то пишем $x \cong_{\mathscr{L}} y$.

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — реляционный язык.

Если структуры $x, y \in \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ изоморфны через биекцию ω то пишем $x \cong_{\mathscr{L}} y$.

$$x \cong_{\mathscr{L}} y \iff \exists\, f : \omega \xrightarrow{\text{на}} \omega \ \underbrace{(f \text{ 1-1} \wedge f \text{ переводит } x \text{ в } y)}_{\text{арифметическое}}.$$

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — реляционный язык.

Если структуры $x, y \in \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ изоморфны через биекцию ω то пишем $x \cong_{\mathscr{L}} y$.

$$x \cong_{\mathscr{L}} y \iff \exists f : \omega \xrightarrow{\text{на}} \omega \ \underbrace{(f \text{ 1-1} \wedge f \text{ переводит } x \text{ в } y)}_{\text{арифметическое}}.$$

$\cong_{\mathscr{L}}$ является $\mathbf{\Sigma}^1_1$ отношением эквивалентности на $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$, которое называется *изоморфизм $\mathscr{L}$-структур*.

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — реляционный язык.

Если структуры $x, y \in \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ изоморфны через биекцию ω то пишем $x \cong_{\mathscr{L}} y$.

$$x \cong_{\mathscr{L}} y \iff \exists\, f : \omega \xrightarrow{\text{на}} \omega \underbrace{(f \text{ 1-1} \wedge f \text{ переводит } x \text{ в } y)}_{\text{арифметическое}}.$$

$\cong_{\mathscr{L}}$ является $\mathbf{\Sigma}^1_1$ отношением эквивалентности на $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$, которое называется *изоморфизм $\mathscr{L}$-структур*.

Через $\boldsymbol{S}_\infty$ обозначается *группа пермутаций*, т. е. всех биекций $g : \omega \xrightarrow{\text{на}} \omega$, с *суперпозицией* в роли операции.

Через $\boldsymbol{S}_\infty$ обозначается *группа пермутаций*, т. е. всех биекций $g : \omega \xrightarrow{\text{на}} \omega$, с *суперпозицией* в роли операции.

Группа $\boldsymbol{S}_\infty$ есть $\mathbf{G}_\delta$ множество в $\mathcal{N}$, т. е. польское пространство.

Через $\boldsymbol{S}_\infty$ обозначается *группа пермутаций*, т. е. всех биекций $g : \omega \xrightarrow{\text{на}} \omega$, с *суперпозицией* в роли операции.

Группа $\boldsymbol{S}_\infty$ есть $\mathbf{G}_\delta$ множество в $\mathcal{N}$, т. е. польское пространство.

Более того, $\boldsymbol{S}_\infty$ имеет совместимую польскую метрику, т. е. является польской группой.

Через $\boldsymbol{S}_\infty$ обозначается *группа пермутаций*, т. е. всех биекций $g : \omega \xrightarrow{\text{на}} \omega$, с *суперпозицией* в роли операции.

Группа $\boldsymbol{S}_\infty$ есть $\mathbf{G}_\delta$ множество в $\mathcal{N}$, т. е. польское пространство.

Более того, $\boldsymbol{S}_\infty$ имеет совместимую польскую метрику, т. е. является польской группой.

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — реляционный язык.

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — реляционный язык.

Логическое действие $\boldsymbol{S}_\infty$ на $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ естественно определяется через пермутацию области:

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — реляционный язык.

Логическое действие $\boldsymbol{S}_\infty$ на $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ естественно определяется через пермутацию области: если $x = \langle x_n \rangle_{n\in\omega} \in \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ и $g \in \boldsymbol{S}_\infty$, то $\mathscr{L}$-структура $g \cdot x = y = \langle y_n \rangle_{n\in\omega}$ $\in \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ удовлетворяет

$$\langle k_1, \dots, k_{r(n)} \rangle \in x_n \iff \langle g(k_1), \dots, g(k_{r(n)}) \rangle \in y_n$$

для всех n, где $r(n) =$ арность R_n.

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — реляционный язык.

Логическое действие $\boldsymbol{S}_\infty$ на $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ естественно определяется через пермутацию области: если $x = \langle x_n \rangle_{n \in \omega} \in \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ и $g \in \boldsymbol{S}_\infty$, то $\mathscr{L}$-структура $g \cdot x = y = \langle y_n \rangle_{n \in \omega}$ $\in \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ удовлетворяет

$$\langle k_1, \dots, k_{r(n)} \rangle \in x_n \iff \langle g(k_1), \dots, g(k_{r(n)}) \rangle \in y_n$$

для всех n, где $r(n) =$ арность R_n.

Теорема (элементарная)

Логическое действие $\boldsymbol{S}_\infty$ *на* $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ *является польским, а его орбиты в точности совпадают с* $\cong_{\mathscr{L}}$*-классами.*

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}(R_1, R_2, R_3, \dots)$ — реляционный язык.

Логическое действие $\boldsymbol{S}_\infty$ на $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ естественно определяется через пермутацию области: если $x = \langle x_n \rangle_{n\in\omega} \in \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ и $g \in \boldsymbol{S}_\infty$, то $\mathscr{L}$-структура $g \cdot x = y = \langle y_n \rangle_{n\in\omega}$ $\in \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ удовлетворяет

$$\langle k_1, \dots, k_{r(n)} \rangle \in x_n \iff \langle g(k_1), \dots, g(k_{r(n)}) \rangle \in y_n$$

для всех n, где $r(n)$ = арность R_n.

Теорема (элементарная)

Логическое действие $\boldsymbol{S}_\infty$ *на* $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$ *является польским, а его орбиты в точности совпадают с* $\cong_{\mathscr{L}}$*-классами.*

Определение

Отношение эквивалентности E *классифицируемо счетными структурами*, если $\exists$ реляционный язык $\mathscr{L}$ такой, что E борелевски сводимо к $\cong_{\mathscr{L}}$,

Определение

Отношение эквивалентности $\mathbf{E}$ *классифицируемо счетными структурами*, если $\exists$ реляционный язык $\mathscr{L}$ такой, что $\mathbf{E}$ борелевски сводимо к $\cong_{\mathscr{L}}$, т. е. $\exists$ такая борелевская $f : X \to \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$, где $X =$ область $\mathbf{E}$, что $\forall x, y \in X \, (x \, \mathbf{E} \, y \iff f(x) \cong_{\mathscr{L}} f(y))$.

Определение

Отношение эквивалентности E *классифицируемо счетными структурами*, если $\exists$ реляционный язык $\mathscr{L}$ такой, что E борелевски сводимо к $\cong_{\mathscr{L}}$, т. е. $\exists$ такая борелевская $f : X \to \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$, где $X =$ область E, что $\forall x, y \in X\, (x \mathsf{E} y \iff f(x) \cong_{\mathscr{L}} f(y))$.

Теорема 1 (теорема 8.3 в [КЛ-1])

Всякое отношение эквивалентности, индуцированное польским действием замкнутой подгруппы $G \subseteq \boldsymbol{S}_\infty$ классифицируемо счетными структурами.

Определение

Отношение эквивалентности $\mathbf{E}$ *классифицируемо счетными* структурами, если $\exists$ реляционный язык $\mathscr{L}$ такой, что $\mathbf{E}$ борелевски сводимо к $\cong_{\mathscr{L}}$, т. е. $\exists$ такая борелевская $f : X \to \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$, где $X =$ область $\mathbf{E}$, что $\forall x, y \in X\,(x \mathbf{E}\, y \iff f(x) \cong_{\mathscr{L}} f(y))$.

Теорема 1 (теорема 8.3 в [КЛ-1])

Всякое отношение эквивалентности, индуцированное польским действием замкнутой подгруппы $G \subseteq \mathbf{S}_\infty$ классифицируемо счетными структурами.

На схеме, $\mathbf{T}_2$ и всё что ниже классифицируемо счетными структурами. В частности, все счетные отношения, включая $\mathbf{E}_0$.

Определение

Отношение эквивалентности E *классифицируемо счетными* структурами, если $\exists$ реляционный язык $\mathscr{L}$ такой, что E борелевски сводимо к $\cong_{\mathscr{L}}$, т. е. $\exists$ такая борелевская $f : X \to \mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$, где $X =$ область E, что $\forall x, y \in X\,(x\,\mathsf{E}\,y \iff f(x) \cong_{\mathscr{L}} f(y))$.

Теорема 1 (теорема 8.3 в [КЛ-1])

Всякое отношение эквивалентности, индуцированное польским действием замкнутой подгруппы $G \subseteq \boldsymbol{S}_\infty$ классифицируемо счетными структурами.

На схеме, $\mathbf{T}_2$ и всё что ниже классифицируемо счетными структурами. В частности, все счетные отношения, включая E_0.

Определение (язык ориентированных графов)

Через $\mathscr{G} = \mathscr{L}(R)$ обозначается язык с единственным бинарным реляционным символом.

Определение (язык ориентированных графов)

Через $\mathscr{G} = \mathscr{L}(R)$ обозначается язык с единственным бинарным реляционным символом.

Таким образом, $\cong_{\mathscr{G}}$ — отношение изоморфизма множеств $x \in \mathscr{P}(\omega \times \omega)$, т. е. ориентированных графов на ω, через биекции ω.

Определение (язык ориентированных графов)

Через $\mathscr{G} = \mathscr{L}(R)$ обозначается язык с единственным бинарным реляционным символом.

Таким образом, $\cong_{\mathscr{G}}$ — отношение изоморфизма множеств $x \in \mathscr{P}(\omega \times \omega)$, т. е. ориентированных графов на ω, через биекции ω.

Теорема 2 (теорема 8.7 в [КЛ-1])

Если $\mathscr{L}$ — реляционный язык, то $\cong_{\mathscr{L}}$ борелевски сводится к $\cong_{\mathscr{G}}$. Значит, «отношение эквивалентности **E** *классифицируемо счетными структурами» $\Longleftrightarrow$ «***E** *борелевски сводится к $\cong_{\mathscr{G}}$».*

Определение (язык ориентированных графов)

Через $\mathscr{G} = \mathscr{L}(R)$ обозначается язык с единственным бинарным реляционным символом.

Таким образом, $\cong_{\mathscr{G}}$ — отношение изоморфизма множеств $x \in \mathscr{P}(\omega \times \omega)$, т. е. ориентированных графов на ω, через биекции ω.

Теорема 2 (теорема 8.7 в [КЛ-1])

Если $\mathscr{L}$ — реляционный язык, то $\cong_{\mathscr{L}}$ борелевски сводится к $\cong_{\mathscr{G}}$. Значит, «отношение эквивалентности **E** *классифицируемо счетными структурами» $\Longleftrightarrow$ «***E** *борелевски сводится к $\cong_{\mathscr{G}}$».*

Другими словами, одно бинарное отношение может кодировать структуры любого (счетного) языка.

Определение (язык ориентированных графов)

Через $\mathscr{G} = \mathscr{L}(R)$ обозначается язык с единственным бинарным реляционным символом.

Таким образом, $\cong_{\mathscr{G}}$ — отношение изоморфизма множеств $x \in \mathscr{P}(\omega \times \omega)$, т. е. ориентированных графов на ω, через биекции ω.

Теорема 2 (теорема 8.7 в [КЛ-1])

Если $\mathscr{L}$ — реляционный язык, то $\cong_{\mathscr{L}}$ борелевски сводится к $\cong_{\mathscr{G}}$. Значит, «отношение эквивалентности **E** *классифицируемо счетными структурами» $\Longleftrightarrow$ «***E** *борелевски сводится к $\cong_{\mathscr{G}}$».*

Другими словами, одно бинарное отношение может кодировать структуры любого (счетного) языка.

Теорема

$(=_{2^\omega}) \leqslant_B \cong_{\mathscr{G}}$, *т. е. равенство на* 2^ω *классифицируемо счетными структурами* (в данном случае графами).

Теорема

$(=_{2^\omega}) \leqslant_B \cong_{\mathscr{G}}$, *т. е. равенство на* 2^ω *классифицируемо счетными структурами* (в данном случае графами).

Каждой точке $x \in 2^\omega$ сопоставляется граф $\vartheta(x) \subseteq \omega^2$ с таким свойством: $\forall\, n$,

граф $\vartheta(x)$ имеет связную компоненту из $n+1$ элементов

$\Longleftrightarrow$

$x(n) = 1$.

Теорема

$(=_{2^\omega}) \leqslant_B \cong_{\mathscr{G}}$, *т. е. равенство на* 2^ω *классифицируемо счетными структурами* (в данном случае графами).

Каждой точке $x \in 2^\omega$ сопоставляется граф $\vartheta(x) \subseteq \omega^2$ с таким свойством: $\forall\, n$,

граф $\vartheta(x)$ имеет связную компоненту из $n+1$ элементов

$\Longleftrightarrow$

$x(n) = 1$.

Тогда $x \neq y \Longrightarrow \vartheta(x)$ и $\vartheta(y)$ неизоморфны.

Теорема

$(=_{2^\omega}) \leqslant_B \cong_{\mathscr{G}}$, *т. е. равенство на* 2^ω *классифицируемо счетными структурами* (в данном случае графами).

Каждой точке $x \in 2^\omega$ сопоставляется граф $\vartheta(x) \subseteq \omega^2$ с таким свойством: $\forall\, n$,

граф $\vartheta(x)$ имеет связную компоненту из $n+1$ элементов

$\Longleftrightarrow$

$x(n) = 1$.

Тогда $x \neq y \implies \vartheta(x)$ и $\vartheta(y)$ неизоморфны.

При этом отображение ϑ должно быть борелевским.

Теорема

$(=_{2^\omega}) \leqslant_B \cong_{\mathscr{G}}$, *т. е. равенство на* 2^ω *классифицируемо счетными структурами* (в данном случае графами).

Каждой точке $x \in 2^\omega$ сопоставляется граф $\vartheta(x) \subseteq \omega^2$ с таким свойством: $\forall\, n$,

граф $\vartheta(x)$ имеет связную компоненту из $n+1$ элементов

$\Longleftrightarrow$

$x(n) = 1$.

Тогда $x \neq y \Longrightarrow \vartheta(x)$ и $\vartheta(y)$ неизоморфны.

При этом отображение ϑ должно быть борелевским.

Такое отображение будет редукцией $(=_{2^\omega})$ к $\cong_{\mathscr{G}}$.

Теорема

$(=_{2^\omega}) \leqslant_B \cong_{\mathscr{G}}$, *т. е. равенство на* 2^ω *классифицируемо счетными структурами* (в данном случае графами).

Каждой точке $x \in 2^\omega$ сопоставляется граф $\vartheta(x) \subseteq \omega^2$ с таким свойством: $\forall\, n$,

граф $\vartheta(x)$ имеет связную компоненту из $n+1$ элементов

$\Longleftrightarrow$

$x(n) = 1$.

Тогда $x \neq y \implies \vartheta(x)$ и $\vartheta(y)$ неизоморфны.

При этом отображение ϑ должно быть борелевским.

Такое отображение будет редукцией $(=_{2^\omega})$ к $\cong_{\mathscr{G}}$.

Упражнение: построить борелевскую редукцию отношения E_0 к изоморфизму графов $\cong_{\mathscr{G}}$.

Упражнение: построить борелевскую редукцию отношения E_0 к изоморфизму графов $\cong_{\mathscr{G}}$.

Сложное!

Упражнение: построить борелевскую редукцию отношения E_0 к изоморфизму графов $\cong_{\mathscr{G}}$.

Сложное!

$\mathbb{N}$ = ω как множество атомов — теоретико-множественная принадлежность внутри ω игнорируется,

$\mathbb{N}$ = ω как множество атомов — теоретико-множественная принадлежность внутри ω игнорируется,

HF = наследственно-конечная надстройка над $\mathbb{N}$,

$\mathbb{N}$ = ω как множество атомов — теоретико-множественная принадлежность внутри ω игнорируется,

$\mathbf{HF}$ = наследственно-конечная надстройка над $\mathbb{N}$,

ε = соответствующая «принадлежность» на $\mathbf{HF}$,

$\mathbb{N}$ = ω как множество атомов — теоретико-множественная принадлежность внутри ω игнорируется,

HF = наследственно-конечная надстройка над $\mathbb{N}$,

ε = соответствующая «принадлежность» на **HF**,

$\cong_{\mathbf{HF}}$ = ε-изоморфизм множеств $X \subseteq \mathbf{HF}^2$, т. е. $X \cong_{\mathbf{HF}} Y$, если и только если $\exists$ биекция $f : \mathbf{HF} \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{HF}$, переводящая X на Y и удовлетворяющая $x \varepsilon y \iff f(x) \varepsilon f(y)$ — **аналогично** $\cong_{\mathscr{G}}$;

$\mathbb{N}$ = ω как множество атомов — теоретико-множественная принадлежность внутри ω игнорируется,

HF = наследственно-конечная надстройка над $\mathbb{N}$,

ε = соответствующая «принадлежность» на **HF**,

$\cong_{\mathbf{HF}}$ = ε-изоморфизм множеств $X \subseteq \mathbf{HF}^2$, т. е. $X \cong_{\mathbf{HF}} Y$, если и только если $\exists$ биекция $f : \mathbf{HF} \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{HF}$, переводящая X на Y и удовлетворяющая $x \,\varepsilon\, y \Longleftrightarrow f(x) \,\varepsilon\, f(y)$ — **аналогично** $\cong_{\mathscr{G}}$;

$\simeq$ = изоморфизм множеств $X \subseteq \mathbf{HF}$ через биекцию базового уровня $\mathbb{N}$ в **HF**.

$\mathbb{N}$ = ω как множество атомов — теоретико-множественная принадлежность внутри ω игнорируется,

HF = наследственно-конечная надстройка над $\mathbb{N}$,

ε = соответствующая «принадлежность» на **HF**,

$\cong_{\mathbf{HF}}$ = ε-изоморфизм множеств $X \subseteq \mathbf{HF}^2$, т. е. $X \cong_{\mathbf{HF}} Y$, если и только если $\exists$ биекция $f : \mathbf{HF} \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{HF}$, переводящая X на Y и удовлетворяющая $x \,\varepsilon\, y \Longleftrightarrow f(x) \,\varepsilon\, f(y)$ — аналогично $\cong_{\mathscr{G}}$;

$\simeq$ = изоморфизм множеств $X \subseteq \mathbf{HF}$ через биекцию базового уровня $\mathbb{N}$ в **HF**.

Лемма 1 (лемма 8.8 в [КЛ-1])

Если множества $X, Y \subseteq \mathbf{HF}$ ε-транзитивны, $\mathbb{N} \smallsetminus X$ и $\mathbb{N} \smallsetminus Y$ бесконечны, и $X \cong_{\mathbf{HF}} Y$, то $x \simeq y$.

$\mathbb{N}$ = ω как множество атомов — теоретико-множественная принадлежность внутри ω игнорируется,

HF = наследственно-конечная надстройка над $\mathbb{N}$,

ε = соответствующая «принадлежность» на **HF**,

$\cong_{\mathbf{HF}}$ = ε-изоморфизм множеств $X \subseteq \mathbf{HF}^2$, т. е. $X \cong_{\mathbf{HF}} Y$, если и только если $\exists$ биекция $f : \mathbf{HF} \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{HF}$, переводящая X на Y и удовлетворяющая $x \,\varepsilon\, y \iff f(x) \,\varepsilon\, f(y)$ — **аналогично** $\cong_{\mathscr{G}}$;

$\simeq$ = изоморфизм множеств $X \subseteq \mathbf{HF}$ через биекцию базового уровня $\mathbb{N}$ в **HF**.

Лемма 1 (лемма 8.8 в [КЛ-1])

Если множества $X, Y \subseteq \mathbf{HF}$ ε-транзитивны, $\mathbb{N} \smallsetminus X$ и $\mathbb{N} \smallsetminus Y$ бесконечны, и $X \cong_{\mathbf{HF}} Y$, то $x \simeq y$.

Отношения эквивалентности $\cong_{\mathscr{G}}$ и $\cong_{\mathbf{HF}}$ борелевски изоморфны (через любую биекцию $\mathbb{N}$ на $\mathbf{HF}$), поэтому **борел. би-сводимы**.

Отношения эквивалентности $\cong_{\mathscr{G}}$ и $\cong_{\mathbf{HF}}$ борелевски изоморфны (через любую биекцию $\mathbb{N}$ на $\mathbf{HF}$), поэтому **борел. би-сводимы**.

Значит, для док-ва теоремы 2 достаточно вывести $\cong_{\mathscr{L}} \leqslant_{\mathrm{B}} \cong_{\mathbf{HF}}$.

Отношения эквивалентности $\cong_{\mathscr{G}}$ и $\cong_{\mathbf{HF}}$ борелевски изоморфны (через любую биекцию $\mathbb{N}$ на $\mathbf{HF}$), поэтому **борел. би-сводимы**. Значит, для док-ва теоремы 2 достаточно вывести $\cong_{\mathscr{L}} \leqslant_{\mathsf{B}} \cong_{\mathbf{HF}}$.

Для простоты рассмотрим случай когда $\mathscr{L} = \mathscr{L}(T)$, где $T(\cdot,\cdot,\cdot)$ — тернарный символ; тогда $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \mathscr{P}(\mathbb{N}^3)$.

Отношения эквивалентности $\cong_{\mathscr{G}}$ и $\cong_{\mathbf{HF}}$ борелевски изоморфны (через любую биекцию $\mathbb{N}$ на $\mathbf{HF}$), поэтому **борел. би-сводимы**.
Значит, для док-ва теоремы 2 достаточно вывести $\cong_{\mathscr{L}} \leqslant_{\mathrm{B}} \cong_{\mathbf{HF}}$.

Для простоты рассмотрим случай когда $\mathscr{L} = \mathscr{L}(T)$, где $T(\cdot,\cdot,\cdot)$ — тернарный символ; тогда $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \mathscr{P}(\mathbb{N}^3)$.

Если $s = \langle i, j, k\rangle \in \omega^3$ то пусть $\vartheta(s) = \langle 2i, 2j, 2k\rangle_{\mathbf{HF}}$.

Отношения эквивалентности $\cong_{\mathscr{G}}$ и $\cong_{\mathbf{HF}}$ борелевски изоморфны (через любую биекцию $\mathbb{N}$ на $\mathbf{HF}$), поэтому **борел. би-сводимы**. Значит, для док-ва теоремы 2 достаточно вывести $\cong_{\mathscr{L}} \leqslant_{\mathrm{B}} \cong_{\mathbf{HF}}$.

Для простоты рассмотрим случай когда $\mathscr{L} = \mathscr{L}(T)$, где $T(\cdot,\cdot,\cdot)$ — тернарный символ; тогда $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \mathscr{P}(\mathbb{N}^3)$.

Если $s = \langle i, j, k\rangle \in \omega^3$ то пусть $\vartheta(s) = \langle 2i, 2j, 2k\rangle_{\mathbf{HF}}$.

Если $x \subseteq \omega^3$ то пусть $\Theta(x) = \mathrm{TC}_{\varepsilon}(\{\vartheta(s) : s \in x\})$, где $\mathrm{TC}_{\varepsilon}(Z)$ есть ε-транзитивное замыкание в $\mathbf{HF}$ множества $Z \subseteq \mathbf{HF}$.

Отношения эквивалентности $\cong_{\mathscr{G}}$ и $\cong_{\mathbf{HF}}$ борелевски изоморфны (через любую биекцию $\mathbb{N}$ на $\mathbf{HF}$), поэтому **борел. би-сводимы**. Значит, для док-ва теоремы 2 достаточно вывести $\cong_{\mathscr{L}} \leqslant_{\mathrm{B}} \cong_{\mathbf{HF}}$.

Для простоты рассмотрим случай когда $\mathscr{L} = \mathscr{L}(T)$, где $T(\cdot,\cdot,\cdot)$ — тернарный символ; тогда $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \mathscr{P}(\mathbb{N}^3)$.

Если $s = \langle i,j,k\rangle \in \omega^3$ то пусть $\vartheta(s) = \langle 2i, 2j, 2k\rangle_{\mathbf{HF}}$.

Если $x \subseteq \omega^3$ то пусть $\Theta(x) = \mathrm{TC}_\varepsilon(\{\vartheta(s) : s \in x\})$, где $\mathrm{TC}_\varepsilon(Z)$ есть ε-транзитивное замыкание в $\mathbf{HF}$ множества $Z \subseteq \mathbf{HF}$.

Лемма 2 (упражнение)

Θ — борелевская редукция $\cong_{\mathscr{L}(T)}$ к $\cong_{\mathbf{HF}}$, т. е. если $x, y \subseteq \omega^3$, то $x \cong_{\mathscr{L}(T)} y$ равносильно $\Theta(x) \cong_{\mathbf{HF}} \Theta(y)$.

Отношения эквивалентности $\cong_{\mathscr{G}}$ и $\cong_{\mathbf{HF}}$ борелевски изоморфны (через любую биекцию $\mathbb{N}$ на $\mathbf{HF}$), поэтому **борел. би-сводимы**. Значит, для док-ва теоремы 2 достаточно вывести $\cong_{\mathscr{L}} \leqslant_{\mathrm{B}} \cong_{\mathbf{HF}}$.

Для простоты рассмотрим случай когда $\mathscr{L} = \mathscr{L}(T)$, где $T(\cdot,\cdot,\cdot)$ — тернарный символ; тогда $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \mathscr{P}(\mathbb{N}^3)$.

Если $s = \langle i,j,k\rangle \in \omega^3$ то пусть $\vartheta(s) = \langle 2i,2j,2k\rangle_{\mathbf{HF}}$.

Если $x \subseteq \omega^3$ то пусть $\Theta(x) = \mathrm{TC}_\varepsilon(\{\vartheta(s) : s \in x\})$, где $\mathrm{TC}_\varepsilon(Z)$ есть ε-транзитивное замыкание в $\mathbf{HF}$ множества $Z \subseteq \mathbf{HF}$.

Лемма 2 (упражнение)

Θ — борелевская редукция $\cong_{\mathscr{L}(T)}$ к $\cong_{\mathbf{HF}}$, т. е. если $x,y \subseteq \omega^3$, то $x \cong_{\mathscr{L}(T)} y$ равносильно $\Theta(x) \cong_{\mathbf{HF}} \Theta(y)$.

Для нетривиального направления $\Longleftarrow$ использовать лемму 1.

Отношения эквивалентности $\cong_{\mathscr{G}}$ и $\cong_{\mathbf{HF}}$ борелевски изоморфны (через любую биекцию $\mathbb{N}$ на **HF**), поэтому борел. би-сводимы. Значит, для док-ва теоремы 2 достаточно вывести $\cong_{\mathscr{L}} \leqslant_{\mathrm{B}} \cong_{\mathbf{HF}}$.

Для простоты рассмотрим случай когда $\mathscr{L} = \mathscr{L}(T)$, где $T(\cdot,\cdot,\cdot)$ — тернарный символ; тогда $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}} = \mathscr{P}(\mathbb{N}^3)$.

Если $s = \langle i,j,k\rangle \in \omega^3$ то пусть $\vartheta(s) = \langle 2i,2j,2k\rangle_{\mathbf{HF}}$.

Если $x \subseteq \omega^3$ то пусть $\Theta(x) = \mathrm{TC}_\varepsilon(\{\vartheta(s) : s \in x\})$, где $\mathrm{TC}_\varepsilon(Z)$ есть ε-транзитивное замыкание в **HF** множества $Z \subseteq \mathbf{HF}$.

Лемма 2 (упражнение)

Θ — борелевская редукция $\cong_{\mathscr{L}(T)}$ к $\cong_{\mathbf{HF}}$, т. е. если $x,y \subseteq \omega^3$, то $x \cong_{\mathscr{L}(T)} y$ равносильно $\Theta(x) \cong_{\mathbf{HF}} \Theta(y)$.

Для нетривиального направления $\Longleftarrow$ использовать лемму 1.

Счетная степень отношения эквивалентности E на множестве X определяется как отношение эквивалентности E^+ на X^ω:

$$x \ \mathsf{E}^+ \ y\,, \quad \text{когда} \quad [\{x(n) : n < \omega\}]_{\mathsf{E}} = [\{y(k) : k < \omega\}]_{\mathsf{E}}\,.$$

Счетная степень отношения эквивалентности E на множестве X определяется как отношение эквивалентности E^+ на X^ω:

$$x \mathsf{E}^+ y\,, \quad \text{когда} \quad [\{x(n) : n < \omega\}]_{\mathsf{E}} = [\{y(k) : k < \omega\}]_{\mathsf{E}}\,.$$

Борелевские отношения эквивалентности T_ξ определяются индукцией по $\xi < \omega_1$:

Счетная степень отношения эквивалентности E на множестве X определяется как отношение эквивалентности E^+ на X^ω:

$$x \; \mathsf{E}^+ \; y \,, \quad \text{когда} \quad [\{x(n) : n < \omega\}]_{\mathsf{E}} = [\{y(k) : k < \omega\}]_{\mathsf{E}} \,.$$

Борелевские отношения эквивалентности T_ξ определяются индукцией по $\xi < \omega_1$:

1. T_1 есть $(=_{2^\omega})$, равенство на пространстве 2^ω;

Счетная степень отношения эквивалентности E на множестве X определяется как отношение эквивалентности E^+ на X^ω:

$$x\ \mathsf{E}^+\ y\,,\quad \text{когда} \quad [\{x(n) : n < \omega\}]_{\mathsf{E}} = [\{y(k) : k < \omega\}]_{\mathsf{E}}\,.$$

Борелевские отношения эквивалентности T_ξ определяются индукцией по $\xi < \omega_1$:

1. T_1 есть $(=_{2^\omega})$, равенство на пространстве 2^ω;
2. $\mathsf{T}_{\xi+1} = \mathsf{T}_\xi{}^+$;

Счетная степень отношения эквивалентности $\mathbf{E}$ на множестве X определяется как отношение эквивалентности $\mathbf{E}^+$ на X^ω:

$$x \ \mathbf{E}^+ \ y\,, \quad \text{когда} \quad [\{x(n) : n < \omega\}]_{\mathbf{E}} = [\{y(k) : k < \omega\}]_{\mathbf{E}}\,.$$

Борелевские отношения эквивалентности $\mathbf{T}_\xi$ определяются индукцией по $\xi < \omega_1$:

1. $\mathbf{T}_1$ есть $(=_{2^\omega})$, равенство на пространстве 2^ω;
2. $\mathbf{T}_{\xi+1} = \mathbf{T}_\xi{}^+$;
3. если λ пределен, то $\mathbf{T}_\lambda = \bigvee_{\xi<\lambda} \mathbf{T}_\xi$,

   т. е. $\mathrm{dom}\,\mathbf{T}_\lambda = \{\langle \xi, x\rangle : \xi < \lambda \wedge x \in \mathrm{dom}\,\mathbf{T}_\xi\}$,

   и $\langle \xi, x\rangle \ \mathbf{T}_\lambda \ \langle \eta, y\rangle \iff \xi = \eta$ и $x \ \mathbf{T}_\xi \ y$.

Счетная степень отношения эквивалентности E на множестве X определяется как отношение эквивалентности E^+ на X^ω:

$$x\ \mathsf{E}^+\ y\,, \quad \text{когда} \quad [\{x(n) : n < \omega\}]_{\mathsf{E}} = [\{y(k) : k < \omega\}]_{\mathsf{E}}\,.$$

Борелевские отношения эквивалентности T_ξ определяются индукцией по $\xi < \omega_1$:

1. T_1 есть $(=_{2^\omega})$, равенство на пространстве 2^ω;
2. $\mathsf{T}_{\xi+1} = {\mathsf{T}_\xi}^+$;
3. если λ пределен, то $\mathsf{T}_\lambda = \bigvee_{\xi<\lambda} \mathsf{T}_\xi$,
   т. е. $\operatorname{dom} \mathsf{T}_\lambda = \{\langle \xi, x\rangle : \xi < \lambda \wedge x \in \operatorname{dom} \mathsf{T}_\xi\}$,
   и $\langle \xi, x\rangle\ \mathsf{T}_\lambda\ \langle \eta, y\rangle \iff \xi = \eta$ и $x\ \mathsf{T}_\xi\ y$.

Если $\xi < \eta < \omega_1$ то $\mathsf{T}_\xi <_{\mathsf{B}} \mathsf{T}_\eta$ строго!

Счетная степень отношения эквивалентности E на множестве X определяется как отношение эквивалентности E^+ на X^ω:

$$x \, \mathsf{E}^+ \, y\,, \quad \text{когда} \quad [\{x(n) : n < \omega\}]_{\mathsf{E}} = [\{y(k) : k < \omega\}]_{\mathsf{E}}\,.$$

Борелевские отношения эквивалентности $\mathbf{T}_\xi$ определяются индукцией по $\xi < \omega_1$:

1. $\mathbf{T}_1$ есть $(=_{2^\omega})$, равенство на пространстве 2^ω;
2. $\mathbf{T}_{\xi+1} = {\mathbf{T}_\xi}^+$;
3. если λ пределен, то $\mathbf{T}_\lambda = \bigvee_{\xi<\lambda} \mathbf{T}_\xi$,
   т. е. $\operatorname{dom} \mathbf{T}_\lambda = \{\langle \xi, x\rangle : \xi < \lambda \wedge x \in \operatorname{dom} \mathbf{T}_\xi\}$,
   и $\langle \xi, x\rangle \, \mathbf{T}_\lambda \, \langle \eta, y\rangle \iff \xi = \eta$ и $x \, \mathbf{T}_\xi \, y$.

Если $\xi < \eta < \omega_1$ то $\mathbf{T}_\xi <_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_\eta$ строго!

Предложение (предложение 8.9 в [КЛ-1])

Если E *классифицируемо счетными структурами, то* E^+ *также. Следовательно, все отношения эквивалентности* T_ξ *классифицируемы счетными структурами*.

Док-во предложения основано на теореме 1

Предложение (предложение 8.9 в [КЛ-1])

Если $\mathbf{E}$ *классифицируемо счетными структурами, то* $\mathbf{E}^+$ *также. Следовательно, все отношения эквивалентности* $\mathbf{T}_\xi$ *классифицируемы счетными структурами.*

Док-во предложения основано на теореме 1

Теорема 3 (теорема 8.10 в [КЛ-1])

Если $\mathbf{E}$ *— борелевское отношение эквивалентности, классифицируемое счетными структурами, то* $\mathbf{E} \leqslant_B \mathbf{T}_\xi$ *для какого-то* $\xi < \omega_1$.

Предложение (предложение 8.9 в [КЛ-1])

Если $\mathbf{E}$ *классифицируемо счетными структурами, то* $\mathbf{E}^+$ *также. Следовательно, все отношения эквивалентности* $\mathbf{T}_\xi$ *классифицируемы счетными структурами.*

Док-во предложения основано на теореме 1

Теорема 3 (теорема 8.10 в [КЛ-1])

Если $\mathbf{E}$ *— борелевское отношение эквивалентности, классифицируемое счетными структурами, то* $\mathbf{E} \leqslant_B \mathbf{T}_\xi$ *для какого-то* $\xi < \omega_1$.

Нижеследующий набросок док-ва теоремы 3 основан на *анализе Скотта*.

Предложение (предложение 8.9 в [КЛ-1])

Если $\mathbf{E}$ *классифицируемо счетными структурами, то* $\mathbf{E}^+$ *также. Следовательно, все отношения эквивалентности* $\mathbf{T}_\xi$ *классифицируемы счетными структурами.*

Док-во предложения основано на теореме 1

Теорема 3 (теорема 8.10 в [КЛ-1])

Если $\mathbf{E}$ *— борелевское отношение эквивалентности, классифицируемое счетными структурами, то* $\mathbf{E} \leqslant_B \mathbf{T}_\xi$ *для какого-то* $\xi < \omega_1$.

Нижеследующий набросок док-ва теоремы 3 основан на *анализе Скотта*.

Для $\alpha < \omega_1$, определим отнош. эквивал-ти $\equiv^\alpha$ на $\omega^{<\omega} \times \mathscr{P}(\omega^2)$ так.

Для $\alpha < \omega_1$, определим отнош. эквивал-ти $\equiv^\alpha$ на $\omega^{<\omega} \times \mathscr{P}(\omega^2)$ так.

Формально $\langle s, A \rangle \equiv^\alpha \langle t, B \rangle$, где $s, t \in \omega^{<\omega}$ и $A, B \subseteq \omega^2$,

Для $\alpha < \omega_1$, определим отнош. эквивал-ти $\equiv^\alpha$ на $\omega^{<\omega} \times \mathscr{P}(\omega^2)$ так.

Формально $\langle s, A\rangle \equiv^\alpha \langle t, B\rangle$, где $s, t \in \omega^{<\omega}$ и $A, B \subseteq \omega^2$,

но неформально пишем $A \equiv^\alpha_{st} B$.

Для $\alpha < \omega_1$, определим отнош. эквивал-ти $\equiv^\alpha$ на $\omega^{<\omega} \times \mathscr{P}(\omega^2)$ так.

Формально $\langle s, A\rangle \equiv^\alpha \langle t, B\rangle$, где $s, t \in \omega^{<\omega}$ и $A, B \subseteq \omega^2$,

но неформально пишем $A \equiv^\alpha_{st} B$.

1 $A \equiv^0_{st} B$ когда: $\langle s(i), s(j)\rangle \in A \iff \langle t(i), t(j)\rangle \in B$ для всех $i, j < h = \operatorname{len} s = \operatorname{len} t$.

Для $\alpha < \omega_1$, определим отнош. эквивал-ти $\equiv^\alpha$ на $\omega^{<\omega} \times \mathscr{P}(\omega^2)$ так.

Формально $\langle s, A\rangle \equiv^\alpha \langle t, B\rangle$, где $s, t \in \omega^{<\omega}$ и $A, B \subseteq \omega^2$,

но неформально пишем $A \equiv^\alpha_{st} B$.

1 $A \equiv^0_{st} B$ когда: $\langle s(i), s(j)\rangle \in A \iff \langle t(i), t(j)\rangle \in B$ для всех $i, j < h = \operatorname{len} s = \operatorname{len} t$.

2 $A \equiv^{\alpha+1}_{st} B$ когда: $\forall\, k\, \exists\, l\, (A \equiv^\alpha_{s^\frown k, t^\frown l} B)$ и $\forall\, l\, \exists\, k\, (A \equiv^\alpha_{s^\frown k, t^\frown l} B)$

Для $\alpha < \omega_1$, определим отнош. эквивал-ти $\equiv^\alpha$ на $\omega^{<\omega} \times \mathscr{P}(\omega^2)$ так. Формально $\langle s, A \rangle \equiv^\alpha \langle t, B \rangle$, где $s, t \in \omega^{<\omega}$ и $A, B \subseteq \omega^2$, но неформально пишем $A \equiv^\alpha_{st} B$.

1. $A \equiv^0_{st} B$ когда: $\langle s(i), s(j) \rangle \in A \iff \langle t(i), t(j) \rangle \in B$ для всех $i, j < h = \operatorname{len} s = \operatorname{len} t$.

2. $A \equiv^{\alpha+1}_{st} B$ когда: $\forall k \, \exists l \, (A \equiv^\alpha_{s^\frown k, t^\frown l} B)$ и $\forall l \, \exists k \, (A \equiv^\alpha_{s^\frown k, t^\frown l} B)$

3. $A \equiv^\lambda_{st} B$ (λ пределен) когда: $A \equiv^\alpha_{st} B$ когда $\alpha < \lambda$.

Для $\alpha < \omega_1$, определим отнош. эквивал-ти $\equiv^\alpha$ на $\omega^{<\omega} \times \mathscr{P}(\omega^2)$ так.

Формально $\langle s, A\rangle \equiv^\alpha \langle t, B\rangle$, где $s, t \in \omega^{<\omega}$ и $A, B \subseteq \omega^2$,

но неформально пишем $A \equiv^\alpha_{st} B$.

1 $A \equiv^0_{st} B$ когда: $\langle s(i), s(j)\rangle \in A \iff \langle t(i), t(j)\rangle \in B$ для всех $i, j < h = \mathrm{len}\, s = \mathrm{len}\, t$.

2 $A \equiv^{\alpha+1}_{st} B$ когда: $\forall\, k\, \exists\, l\, (A \equiv^\alpha_{s^\frown k, t^\frown l} B)$ и $\forall\, l\, \exists\, k\, (A \equiv^\alpha_{s^\frown k, t^\frown l} B)$

3 $A \equiv^\lambda_{st} B$ (λ пределен) когда: $A \equiv^\alpha_{st} B$ когда $\alpha < \lambda$.

Если $\alpha < \gamma$ то $\equiv^\gamma$ есть под-отношение для отношения $\equiv^\alpha$.

Для $\alpha < \omega_1$, определим отнош. эквивал-ти $\equiv^\alpha$ на $\omega^{<\omega} \times \mathscr{P}(\omega^2)$ так.

Формально $\langle s, A\rangle \equiv^\alpha \langle t, B\rangle$, где $s, t \in \omega^{<\omega}$ и $A, B \subseteq \omega^2$,

но неформально пишем $A \equiv^\alpha_{st} B$.

1 $A \equiv^0_{st} B$ когда: $\langle s(i), s(j)\rangle \in A \iff \langle t(i), t(j)\rangle \in B$ для всех $i, j < h = \operatorname{len} s = \operatorname{len} t$.

2 $A \equiv^{\alpha+1}_{st} B$ когда: $\forall k \, \exists l \, (A \equiv^\alpha_{s^\frown k, t^\frown l} B)$ и $\forall l \, \exists k \, (A \equiv^\alpha_{s^\frown k, t^\frown l} B)$

3 $A \equiv^\lambda_{st} B$ (λ пределен) когда: $A \equiv^\alpha_{st} B$ когда $\alpha < \lambda$.

Если $\alpha < \gamma$ то $\equiv^\gamma$ есть под-отношение для отношения $\equiv^\alpha$.

Лемма 3 (упражнение: прямая индукция по α)

Если $A, B \subseteq \omega^2$ и $A \cong_{\mathscr{G}} B$, то $A \equiv^\alpha_{\Lambda\Lambda} B$ для всех $\alpha < \omega_1$.
Другими словами, мы имеем $(\cong_{\mathscr{G}}) \subseteq \bigcap_\alpha (\equiv^\alpha_{\Lambda\Lambda})$

Для $\alpha < \omega_1$, определим отнош. эквивал-ти $\equiv^\alpha$ на $\omega^{<\omega} \times \mathscr{P}(\omega^2)$ так.
Формально $\langle s, A\rangle \equiv^\alpha \langle t, B\rangle$, где $s, t \in \omega^{<\omega}$ и $A, B \subseteq \omega^2$,
но неформально пишем $A \equiv^\alpha_{st} B$.

1. $A \equiv^0_{st} B$ когда: $\langle s(i), s(j)\rangle \in A \iff \langle t(i), t(j)\rangle \in B$ для всех $i, j < h = \operatorname{len} s = \operatorname{len} t$.
2. $A \equiv^{\alpha+1}_{st} B$ когда: $\forall k\, \exists l\, (A \equiv^\alpha_{s^\frown k, t^\frown l} B)$ и $\forall l\, \exists k\, (A \equiv^\alpha_{s^\frown k, t^\frown l} B)$
3. $A \equiv^\lambda_{st} B$ (λ пределен) когда: $A \equiv^\alpha_{st} B$ когда $\alpha < \lambda$.

Если $\alpha < \gamma$ то $\equiv^\gamma$ есть под-отношение для отношения $\equiv^\alpha$.

Лемма 3 (упражнение: прямая индукция по α)

Если $A, B \subseteq \omega^2$ и $A \cong_{\mathscr{G}} B$, то $A \equiv^\alpha_{\Lambda\Lambda} B$ для всех $\alpha < \omega_1$.
Другими словами, мы имеем $(\cong_{\mathscr{G}}) \subseteq \bigcap_\alpha (\equiv^\alpha_{\Lambda\Lambda})$

Мн-во $P \subseteq \mathscr{P}(\omega^2) \times \mathscr{P}(\omega^2)$ *ограничено* если $\exists\, \alpha < \omega_1$, $P \cap (\equiv^{\alpha}_{\wedge\!\wedge}) = \varnothing$.

Мн-во $P \subseteq \mathscr{P}(\omega^2) \times \mathscr{P}(\omega^2)$ *ограничено* если $\exists\, \alpha < \omega_1,\ P \cap (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda}) = \varnothing$.

Лемма 4 (лемма 8.11 в [КЛ-1])

Если P есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество и $P \cap (\cong_{\mathscr{G}}) = \varnothing$ — т. е. нет таких пар $\langle A, B\rangle \in P$ что $A \cong_{\mathscr{G}} B$ — то P ограничено.

Мн-во $P \subseteq \mathscr{P}(\omega^2) \times \mathscr{P}(\omega^2)$ *ограничено* если $\exists\, \alpha < \omega_1,\ P \cap (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda}) = \varnothing$.

Лемма 4 (лемма 8.11 в [КЛ-1])

Если P есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество и $P \cap (\cong_{\mathscr{G}}) = \varnothing$ — т. е. нет таких пар $\langle A, B\rangle \in P$ что $A \cong_{\mathscr{G}} B$ — то P ограничено.

Поскольку отношение $\cong_{\mathscr{G}}$ имеет класс Σ^1_1, лемму 4 можно понимать как частный случай *принципа ограничения* в эффективной дескриптивной теолрии, где отношения $\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda}$ играют роль конституант.

Мн-во $P \subseteq \mathscr{P}(\omega^2) \times \mathscr{P}(\omega^2)$ *ограничено* если $\exists\, \alpha < \omega_1 ,\ P \cap (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda}) = \varnothing$.

Лемма 4 (лемма 8.11 в [КЛ-1])

Если P есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество и $P \cap (\cong_{\mathscr{G}}) = \varnothing$ — т. е. нет таких пар $\langle A, B\rangle \in P$ что $A \cong_{\mathscr{G}} B$ — то P ограничено.

Поскольку отношение $\cong_{\mathscr{G}}$ имеет класс Σ^1_1, лемму 4 можно понимать как частный случай *принципа ограничения* в эффективной дескриптивной теолрии, где отношения $\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda}$ играют роль конституант.

Доказательство см. 8.11 в [КЛ-1].

Мн-во $P \subseteq \mathscr{P}(\omega^2) \times \mathscr{P}(\omega^2)$ *ограничено* если $\exists\, \alpha < \omega_1$, $P \cap (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda}) = \varnothing$.

Лемма 4 (лемма 8.11 в [КЛ-1])

Если P есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество и $P \cap (\cong_{\mathscr{G}}) = \varnothing$ — т. е. нет таких пар $\langle A, B\rangle \in P$ что $A \cong_{\mathscr{G}} B$ — то P ограничено.

Поскольку отношение $\cong_{\mathscr{G}}$ имеет класс Σ^1_1, лемму 4 можно понимать как частный случай *принципа ограничения* в эффективной дескриптивной теолрии, где отношения $\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda}$ играют роль конституант.

Доказательство см. 8.11 в [КЛ-1].

Следствие

Если E *— борелевское отношение эквивалентности и* $\mathsf{E} \leqslant_B (\cong_{\mathscr{G}})$ *то* $\mathsf{E} \leqslant_B (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$ *for some* $\alpha < \omega_1$.

Следствие

Если $\mathbf{E}$ *— борелевское отношение эквивалентности и* $\mathbf{E} \leqslant_B (\cong_{\mathscr{G}})$ *то* $\mathbf{E} \leqslant_B (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$ *for some* $\alpha < \omega_1$.

В самом деле, пусть ϑ — борелевская редукция $\mathbf{E}$ к $\cong_{\mathscr{G}}$.

Следствие

Если $\mathbf{E}$ *— борелевское отношение эквивалентности и* $\mathbf{E} \leqslant_B (\cong_{\mathscr{G}})$ *то* $\mathbf{E} \leqslant_B (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$ *for some* $\alpha < \omega_1$.

В самом деле, пусть ϑ — борелевская редукция $\mathbf{E}$ к $\cong_{\mathscr{G}}$. Тогда $\{\langle\vartheta(x), \vartheta(y)\rangle : x \not\mathrel{\mathbf{E}} y\}$ есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-подмножество в $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ которое не пересекает $\cong_{\mathscr{G}}$.

Следствие

Если $\mathbf{E}$ *— борелевское отношение эквивалентности и* $\mathbf{E} \leqslant_B (\cong_{\mathscr{G}})$ *то* $\mathbf{E} \leqslant_B (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$ *for some* $\alpha < \omega_1$.

В самом деле, пусть ϑ — борелевская редукция $\mathbf{E}$ к $\cong_{\mathscr{G}}$. Тогда $\{\langle\vartheta(x), \vartheta(y)\rangle : x \not\mathbf{E}\, y\}$ есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-подмножество в $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ которое не пересекает $\cong_{\mathscr{G}}$. Поэтому оно ограничено по лемме 4.

Следствие

Если $\mathbf{E}$ — *борелевское отношение эквивалентности и* $\mathbf{E} \leqslant_B (\cong_{\mathscr{G}})$ *то* $\mathbf{E} \leqslant_B (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$ *for some* $\alpha < \omega_1$.

В самом деле, пусть ϑ — борелевская редукция $\mathbf{E}$ к $\cong_{\mathscr{G}}$. Тогда $\{\langle\vartheta(x), \vartheta(y)\rangle : x \not\mathbf{E}\, y\}$ есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-подмножество в $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ которое не пересекает $\cong_{\mathscr{G}}$. Поэтому оно ограничено по лемме 4.

Пусть ординал $\alpha < \omega_1$ обеспечивает ограниченность: если $x \not\mathbf{E}\, y$ то $\langle\vartheta(x), \vartheta(y)\rangle \notin (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$, т. е. $\vartheta(x) \not\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda} \vartheta(y)$.

Следствие

Если $\mathbf{E}$ *— борелевское отношение эквивалентности и* $\mathbf{E} \leqslant_B (\cong_{\mathscr{G}})$ *то* $\mathbf{E} \leqslant_B (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$ *for some* $\alpha < \omega_1$.

В самом деле, пусть ϑ — борелевская редукция $\mathbf{E}$ к $\cong_{\mathscr{G}}$. Тогда $\{\langle\vartheta(x), \vartheta(y)\rangle : x \not\mathbf{E}\, y\}$ есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-подмножество в $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ которое не пересекает $\cong_{\mathscr{G}}$. Поэтому оно ограничено по лемме 4.

Пусть ординал $\alpha < \omega_1$ обеспечивает ограниченность: если $x \not\mathbf{E}\, y$ то $\langle\vartheta(x), \vartheta(y)\rangle \notin (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$, т. е. $\vartheta(x) \not\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda} \vartheta(y)$. Если же $x \mathbf{E} y$ то $\vartheta(x) \cong_{\mathscr{G}} \vartheta(y)$ по выбору ϑ, откуда $\vartheta(x) \equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda} \vartheta(y)$ по лемме 3.

Следствие

Если $\mathbf{E}$ *— борелевское отношение эквивалентности и* $\mathbf{E} \leqslant_B (\cong_{\mathscr{G}})$ *то* $\mathbf{E} \leqslant_B (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$ *for some* $\alpha < \omega_1$.

В самом деле, пусть ϑ — борелевская редукция $\mathbf{E}$ к $\cong_{\mathscr{G}}$. Тогда $\{\langle\vartheta(x), \vartheta(y)\rangle : x \not\mathbf{E}\, y\}$ есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-подмножество в $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ которое не пересекает $\cong_{\mathscr{G}}$. Поэтому оно ограничено по лемме 4.

Пусть ординал $\alpha < \omega_1$ обеспечивает ограниченность: если $x \not\mathbf{E}\, y$ то $\langle\vartheta(x), \vartheta(y)\rangle \notin (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$, т. е. $\vartheta(x) \not\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda} \vartheta(y)$. Если же $x \mathbf{E} y$ то $\vartheta(x) \cong_{\mathscr{G}} \vartheta(y)$ по выбору ϑ, откуда $\vartheta(x) \equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda} \vartheta(y)$ по лемме 3.

Лемма 5 (предложение 8.14 в [КЛ-1])

Если $\alpha < \omega_1$ *then* $(\equiv^{\alpha}) \leqslant_B \mathbf{T}_{\xi}$ *for some* $\xi < \omega_1$.

Следствие

Если $\mathbf{E}$ *— борелевское отношение эквивалентности и* $\mathbf{E} \leqslant_B (\cong_{\mathscr{G}})$ *то* $\mathbf{E} \leqslant_B (\equiv^{\alpha}_{\wedge\wedge})$ *for some* $\alpha < \omega_1$ *.*

В самом деле, пусть ϑ — борелевская редукция $\mathbf{E}$ к $\cong_{\mathscr{G}}$. Тогда $\{\langle\vartheta(x), \vartheta(y)\rangle : x \not\mathbf{E}\, y\}$ есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-подмножество в $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ которое не пересекает $\cong_{\mathscr{G}}$. Поэтому оно ограничено по лемме 4.

Пусть ординал $\alpha < \omega_1$ обеспечивает ограниченность: если $x \not\mathbf{E}\, y$ то $\langle\vartheta(x), \vartheta(y)\rangle \notin (\equiv^{\alpha}_{\wedge\wedge})$, т. е. $\vartheta(x) \not\equiv^{\alpha}_{\wedge\wedge} \vartheta(y)$. Если же $x \mathbf{E}\, y$ то $\vartheta(x) \cong_{\mathscr{G}} \vartheta(y)$ по выбору ϑ, откуда $\vartheta(x) \equiv^{\alpha}_{\wedge\wedge} \vartheta(y)$ по лемме 3.

Лемма 5 (предложение 8.14 в [КЛ-1])

Если $\alpha < \omega_1$ *then* $(\equiv^{\alpha}) \leqslant_B \mathbf{T}_{\xi}$ *for some* $\xi < \omega_1$ *.*

Эта лемма доказывает теорему 3, поскольку $(\equiv^{\alpha}_{\wedge\wedge}) \leqslant_B (\equiv^{\alpha})$.

Следствие

Если $\mathbf{E}$ *— борелевское отношение эквивалентности и* $\mathbf{E} \leqslant_B (\cong_{\mathscr{G}})$ *то* $\mathbf{E} \leqslant_B (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$ *for some* $\alpha < \omega_1$.

В самом деле, пусть ϑ — борелевская редукция $\mathbf{E}$ к $\cong_{\mathscr{G}}$. Тогда $\{\langle\vartheta(x), \vartheta(y)\rangle : x \not\mathbf{E}\, y\}$ есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-подмножество в $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ которое не пересекает $\cong_{\mathscr{G}}$. Поэтому оно ограничено по лемме 4.

Пусть ординал $\alpha < \omega_1$ обеспечивает ограниченность: если $x \not\mathbf{E}\, y$ то $\langle\vartheta(x), \vartheta(y)\rangle \notin (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$, т. е. $\vartheta(x) \not\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda} \vartheta(y)$. Если же $x \mathbf{E} y$ то $\vartheta(x) \cong_{\mathscr{G}} \vartheta(y)$ по выбору ϑ, откуда $\vartheta(x) \equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda} \vartheta(y)$ по лемме 3.

Лемма 5 (предложение 8.14 в [КЛ-1])

Если $\alpha < \omega_1$ *then* $(\equiv^{\alpha}) \leqslant_B \mathbf{T}_{\xi}$ *for some* $\xi < \omega_1$.

Эта лемма доказывает теорему 3, поскольку $(\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda}) \leqslant_B (\equiv^{\alpha})$.

Доказываем лемму 5 индукцией.

Доказываем лемму 5 индукцией. Если $\alpha = 0$ то по определению $\equiv^0$ имеет счетно много классов, так что $(\equiv^0) \leqslant_{\mathrm{B}} \mathbf{T}_1 = (=_{2^\omega})$.

Доказываем лемму 5 индукцией. Если $\alpha = 0$ то по определению $\equiv^0$ имеет счетно много классов, так что $(\equiv^0) \leqslant_{\mathsf{B}} \mathsf{T}_1 = (=_{2^\omega})$.

Шаг $\alpha \to \alpha + 1$.

Доказываем лемму 5 индукцией. Если $\alpha = 0$ то по определению $\equiv^0$ имеет счетно много классов, так что $(\equiv^0) \leqslant_{\mathsf{B}} \mathsf{T}_1 = (=_{2^\omega})$.

Шаг $\alpha \to \alpha + 1$. Отображение $\langle s, A\rangle \longmapsto \langle\langle s^\frown k, A\rangle\rangle_{k<\omega}$ есть борелевская редукция $\equiv^{\alpha+1}$ к $(\equiv^\alpha)^+$.

Доказываем лемму 5 индукцией. Если $\alpha = 0$ то по определению $\equiv^0$ имеет счетно много классов, так что $(\equiv^0) \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_1 = (=_{2^\omega})$.

Шаг $\alpha \to \alpha + 1$. Отображение $\langle s, A\rangle \longmapsto \langle\langle s^\frown k, A\rangle\rangle_{k<\omega}$ есть борелевская редукция $\equiv^{\alpha+1}$ к $(\equiv^\alpha)^+$. Поэтому если $(\equiv^\alpha) \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_\xi$ то $(\equiv^{\alpha+1}) \leqslant_{\mathsf{B}} {\mathbf{T}_\xi}^+ = \mathbf{T}_{\xi+1}$.

Доказываем лемму 5 индукцией. Если $\alpha = 0$ то по определению $\equiv^0$ имеет счетно много классов, так что $(\equiv^0) \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_1 = (=_{2^\omega})$.

Шаг $\alpha \to \alpha + 1$. Отображение $\langle s, A\rangle \longmapsto \langle\langle s^\frown k, A\rangle\rangle_{k<\omega}$ есть борелевская редукция $\equiv^{\alpha+1}$ к $(\equiv^\alpha)^+$. Поэтому если $(\equiv^\alpha) \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_\xi$ то $(\equiv^{\alpha+1}) \leqslant_{\mathsf{B}} {\mathbf{T}_\xi}^+ = \mathbf{T}_{\xi+1}$.

Предельный шаг λ. Достаточно проверить: если $\xi < \omega_1$ и $\mathbf{E}_n$ — борелевские отношения эквивалентности на 2^ω такие что $\mathbf{E}_n \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_{\xi+n}$ для всех n, и $\mathbf{E} = \bigcap_n \mathbf{E}_n$, то $\mathbf{E} \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_{\xi+\omega+1}$.

Доказываем лемму 5 индукцией. Если $\alpha = 0$ то по определению $\equiv^0$ имеет счетно много классов, так что $(\equiv^0) \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_1 = (=_{2^\omega})$.

Шаг $\alpha \to \alpha + 1$. Отображение $\langle s, A\rangle \longmapsto \langle\langle s^\frown k, A\rangle\rangle_{k<\omega}$ есть борелевская редукция $\equiv^{\alpha+1}$ к $(\equiv^\alpha)^+$. Поэтому если $(\equiv^\alpha) \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_\xi$ то $(\equiv^{\alpha+1}) \leqslant_{\mathsf{B}} {\mathbf{T}_\xi}^+ = \mathbf{T}_{\xi+1}$.

Предельный шаг λ. Достаточно проверить: если $\xi < \omega_1$ и $\mathbf{E}_n$ — борелевские отношения эквивалентности на 2^ω такие что $\mathbf{E}_n \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_{\xi+n}$ для всех n, и $\mathbf{E} = \bigcap_n \mathbf{E}_n$, то $\mathbf{E} \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_{\xi+\omega+1}$.

Пусть $\vartheta_n : 2^\omega \to X_n = \mathtt{dom}\,\mathbf{T}_\xi$ — борел. редукция $\mathbf{E}_n$ к $\mathbf{T}_{\xi+n}$, $\forall\, n$.

Доказываем лемму 5 индукцией. Если $\alpha = 0$ то по определению $\equiv^0$ имеет счетно много классов, так что $(\equiv^0) \leqslant_B \mathbf{T}_1 = (=_{2^\omega})$.

Шаг $\alpha \to \alpha + 1$. Отображение $\langle s, A \rangle \longmapsto \langle \langle s^\frown k, A \rangle \rangle_{k<\omega}$ есть борелевская редукция $\equiv^{\alpha+1}$ к $(\equiv^\alpha)^+$. Поэтому если $(\equiv^\alpha) \leqslant_B \mathbf{T}_\xi$ то $(\equiv^{\alpha+1}) \leqslant_B {\mathbf{T}_\xi}^+ = \mathbf{T}_{\xi+1}$.

Предельный шаг λ. Достаточно проверить: если $\xi < \omega_1$ и $\mathbf{E}_n$ — борелевские отношения эквивалентности на 2^ω такие что $\mathbf{E}_n \leqslant_B \mathbf{T}_{\xi+n}$ для всех n, и $\mathbf{E} = \bigcap_n \mathbf{E}_n$, то $\mathbf{E} \leqslant_B \mathbf{T}_{\xi+\omega+1}$.

Пусть $\vartheta_n : 2^\omega \to X_n = \operatorname{dom} \mathbf{T}_\xi$ — борел. редукция $\mathbf{E}_n$ к $\mathbf{T}_{\xi+n}$, $\forall\, n$.

Напомним: $\operatorname{dom} \mathbf{T}_{\xi+\omega} = \{\langle \eta, x \rangle : \eta < \xi + \omega \wedge x \in \operatorname{dom} \mathbf{T}_\eta\}$ и $\operatorname{dom} \mathbf{T}_{\xi+\omega+1} = (\operatorname{dom} \mathbf{T}_{\xi+\omega})^\omega$.

Доказываем лемму 5 индукцией. Если $\alpha = 0$ то по определению $\equiv^0$ имеет счетно много классов, так что $(\equiv^0) \leqslant_B \mathbf{T}_1 = (=_{2^\omega})$.

Шаг $\alpha \to \alpha + 1$. Отображение $\langle s, A\rangle \longmapsto \langle\langle s^\frown k, A\rangle\rangle_{k<\omega}$ есть борелевская редукция $\equiv^{\alpha+1}$ к $(\equiv^\alpha)^+$. Поэтому если $(\equiv^\alpha) \leqslant_B \mathbf{T}_\xi$ то $(\equiv^{\alpha+1}) \leqslant_B {\mathbf{T}_\xi}^+ = \mathbf{T}_{\xi+1}$.

Предельный шаг λ. Достаточно проверить: если $\xi < \omega_1$ и $\mathbf{E}_n$ — борелевские отношения эквивалентности на 2^ω такие что $\mathbf{E}_n \leqslant_B \mathbf{T}_{\xi+n}$ для всех n, и $\mathbf{E} = \bigcap_n \mathbf{E}_n$, то $\mathbf{E} \leqslant_B \mathbf{T}_{\xi+\omega+1}$.

Пусть $\vartheta_n : 2^\omega \to X_n = \operatorname{dom} \mathbf{T}_\xi$ — борел. редукция $\mathbf{E}_n$ к $\mathbf{T}_{\xi+n}$, $\forall\, n$.

Напомним: $\operatorname{dom} \mathbf{T}_{\xi+\omega} = \{\langle \eta, x\rangle : \eta < \xi + \omega \wedge x \in \operatorname{dom} \mathbf{T}_\eta\}$ и $\operatorname{dom} \mathbf{T}_{\xi+\omega+1} = (\operatorname{dom} \mathbf{T}_{\xi+\omega})^\omega$.

Отображение $\vartheta(x) = \langle\langle \xi + n, \vartheta_n(x)\rangle\rangle_{n<\omega}$, то есть $\vartheta(x)(n) = \langle \xi + n, \vartheta_n(x)\rangle,\ \forall\, n$, будет борелев. редукцией $\mathbf{E}$ к $\mathbf{T}_{\xi+\omega+1}$.

Доказываем лемму 5 индукцией. Если $\alpha = 0$ то по определению $\equiv^0$ имеет счетно много классов, так что $(\equiv^0) \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_1 = (=_{2^\omega})$.

Шаг $\alpha \to \alpha+1$. Отображение $\langle s, A\rangle \longmapsto \langle\langle s^\frown k, A\rangle\rangle_{k<\omega}$ есть борелевская редукция $\equiv^{\alpha+1}$ к $(\equiv^\alpha)^+$. Поэтому если $(\equiv^\alpha) \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_\xi$ то $(\equiv^{\alpha+1}) \leqslant_{\mathsf{B}} {\mathbf{T}_\xi}^+ = \mathbf{T}_{\xi+1}$.

Предельный шаг λ. Достаточно проверить: если $\xi < \omega_1$ и $\mathbf{E}_n$ — борелевские отношения эквивалентности на 2^ω такие что $\mathbf{E}_n \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_{\xi+n}$ для всех n, и $\mathbf{E} = \bigcap_n \mathbf{E}_n$, то $\mathbf{E} \leqslant_{\mathsf{B}} \mathbf{T}_{\xi+\omega+1}$.

Пусть $\vartheta_n : 2^\omega \to X_n = \operatorname{dom} \mathbf{T}_\xi$ — борел. редукция $\mathbf{E}_n$ к $\mathbf{T}_{\xi+n}$, $\forall\, n$.

Напомним: $\operatorname{dom} \mathbf{T}_{\xi+\omega} = \{\langle \eta, x\rangle : \eta < \xi+\omega \wedge x \in \operatorname{dom} \mathbf{T}_\eta\}$ и $\operatorname{dom} \mathbf{T}_{\xi+\omega+1} = (\operatorname{dom} \mathbf{T}_{\xi+\omega})^\omega$.

Отображение $\vartheta(x) = \langle\langle \xi+n, \vartheta_n(x)\rangle\rangle_{n<\omega}$, то есть $\vartheta(x)(n) = \langle \xi+n, \vartheta_n(x)\rangle,\ \forall\, n$, будет борелев. редукцией $\mathbf{E}$ к $\mathbf{T}_{\xi+\omega+1}$.

Напоминание: классифицируемость счетными структурами $=$ борелевская сводимость к $\cong_{\mathscr{L}}$, изоморфизму $\mathscr{L}$-структур, для какого-то счетного языка $\mathscr{L}$.

Напоминание: классифицируемость счетными структурами = борелевская сводимость к $\cong_{\mathscr{L}}$, изоморфизму $\mathscr{L}$-структур, для какого-то счетного языка $\mathscr{L}$.

1. $\cong_{\mathscr{L}}$ это отношение эквивалентности, индуцированное логическим действием группы $\boldsymbol{S}_\infty$ on $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$.

Напоминание: классифицируемость счетными структурами = борелевская сводимость к $\cong_{\mathscr{L}}$, изоморфизму $\mathscr{L}$-структур, для какого-то счетного языка $\mathscr{L}$.

1. $\cong_{\mathscr{L}}$ это отношение эквивалентности, индуцированное логическим действием группы $\boldsymbol{S}_{\infty}$ on $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$.
2. Каждое отношение эквивалентности, индуцированное польским действием $\boldsymbol{S}_{\infty}$ или замкнутой подгруппы $\boldsymbol{S}_{\infty}$, классифицируемо счетными структурами по теореме 1.

Напоминание: классифицируемость счетными структурами = борелевская сводимость к $\cong_{\mathscr{L}}$, изоморфизму $\mathscr{L}$-структур, для какого-то счетного языка $\mathscr{L}$.

1. $\cong_{\mathscr{L}}$ это отношение эквивалентности, индуцированное логическим действием группы $\boldsymbol{S}_\infty$ on $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$.
2. Каждое отношение эквивалентности, индуцированное польским действием $\boldsymbol{S}_\infty$ или замкнутой подгруппы $\boldsymbol{S}_\infty$, классифицируемо счетными структурами по теореме 1.
3. Каждое отношение эквивалентности, классифицируемое счетными структурами, борелевски сводимо к отношению изоморфизма ориентированных графов $\cong_{\mathscr{G}}$ по теореме 2.

Напоминание: классифицируемость счетными структурами = борелевская сводимость к $\cong_{\mathscr{L}}$, изоморфизму $\mathscr{L}$-структур, для какого-то счетного языка $\mathscr{L}$.

1. $\cong_{\mathscr{L}}$ это отношение эквивалентности, индуцированное логическим действием группы $\boldsymbol{S}_\infty$ on $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$.
2. Каждое отношение эквивалентности, индуцированное польским действием $\boldsymbol{S}_\infty$ или замкнутой подгруппы $\boldsymbol{S}_\infty$, классифицируемо счетными структурами по теореме 1.
3. Каждое отношение эквивалентности, классифицируемое счетными структурами, борелевски сводимо к отношению изоморфизма ориентированных графов $\cong_{\mathscr{G}}$ по теореме 2.
4. Каждое отношение эквивалентности $\mathbf{T}_\xi$ классифицируемо счетными структурами по предложению.

Напоминание: классифицируемость счетными структурами = борелевская сводимость к $\cong_{\mathscr{L}}$, изоморфизму $\mathscr{L}$-структур, для какого-то счетного языка $\mathscr{L}$.

1. $\cong_{\mathscr{L}}$ это отношение эквивалентности, индуцированное логическим действием группы $\boldsymbol{S}_\infty$ on $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$.
2. Каждое отношение эквивалентности, индуцированное польским действием $\boldsymbol{S}_\infty$ или замкнутой подгруппы $\boldsymbol{S}_\infty$, классифицируемо счетными структурами по теореме 1.
3. Каждое отношение эквивалентности, классифицируемое счетными структурами, борелевски сводимо к отношению изоморфизма ориентированных графов $\cong_{\mathscr{G}}$ по теореме 2.
4. Каждое отношение эквивалентности T_ξ классифицируемо счетными структурами по предложению.
5. Каждое борелевское отношение эквивалентности E, классифицируемое счетными структурами, борелевски сводимо к одному из отношений T_ξ по теореме 3.

Напоминание: классифицируемость счетными структурами $=$ борелевская сводимость к $\cong_{\mathscr{L}}$, изоморфизму $\mathscr{L}$-структур, для какого-то счетного языка $\mathscr{L}$.

1. $\cong_{\mathscr{L}}$ это отношение эквивалентности, индуцированное логическим действием группы $\boldsymbol{S}_\infty$ on $\mathbf{Mod}_{\mathscr{L}}$.
2. Каждое отношение эквивалентности, индуцированное польским действием $\boldsymbol{S}_\infty$ или замкнутой подгруппы $\boldsymbol{S}_\infty$, классифицируемо счетными структурами по теореме 1.
3. Каждое отношение эквивалентности, классифицируемое счетными структурами, борелевски сводимо к отношению изоморфизма ориентированных графов $\cong_{\mathscr{G}}$ по теореме 2.
4. Каждое отношение эквивалентности T_ξ классифицируемо счетными структурами по предложению.
5. Каждое борелевское отношение эквивалентности E, классифицируемое счетными структурами, борелевски сводимо к одному из отношений T_ξ по теореме 3.

Содержание I

Содержание II