Теория множеств
Лекция 8
Борелевская сводимость. Первая дихотомическая теорема

Владимир Григорьевич Кановей (ИППИ)

Осень 2023, МИАН Москва

http://iitp.ru/ru/userpages/156/300.htm
скачиваются файлы лекций и литература

kanovei@iitp.ru — email для контактов

https://www.mathnet.ru/conf2305
сайт курса на mathnet

Литература

Jech03 *Millenium*

K-AMS Kanovei, *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification*, AMS University Lecture Series.

Kechris *Descriptive set theory*

Mos Moschovakis, *Descriptive set theory*

Йех73 *Теория множеств и метод форсинга*

КЛ-1 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики*

КЛ-2 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*

КЛ-3 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы*

Кур-1 Куратовский, *Топология том 1*

СКМЛ *Справочная книга по математической логике том 2: теория множеств.*

Натуральный ряд $\mathbb{N} = \omega$.

Бэровское пространство $\mathcal{N} = \omega^\omega$.

Бэровское произведение = любое $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$.

Множества $X \subseteq \mathbb{P}$ — точечные множества.

Борелевские мн-ва $X \subseteq \mathbb{P}$, $\quad \boldsymbol{\Sigma}^0_1 =$ открытые, $\boldsymbol{\Pi}^0_1 =$ замкнутые.

Проективные множества $X \subseteq \mathbb{P}$, классы $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, $\boldsymbol{\Pi}^1_n$, $\boldsymbol{\Delta}^1_n$.

Эффективная иерархия, классы Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n.

$\omega^{<\omega} = \bigcup_n \omega^n$ — **кортежи** натуральных чисел.

$\mathbf{lh}(s)$ — **длина** кортежа s, т. е. $s \in \omega^n \Longrightarrow \mathbf{lh}(s) = n$.

$s \subset t$ — **строгое продолжение** кортежей.

$\Lambda = \varnothing$ — **пустой** кортеж, $\mathbf{lh}(\Lambda) = 0$.

Соглашение 1 (реляционная запись)

Множества в бэровских произведениях $\mathbb{P} = \omega^k \times \mathcal{N}^m$ часто рассматриваются в виде **отношений**, т. е. если к примеру $R \subseteq \omega \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ то $\langle k, x, y \rangle \in R$ и $R(k, x, y)$ означают одно и то же.

Это позволяет использовать логические операции вместо теоретико-множественных, что бывает более удобно.

Соглашение 2 (в контексте Соглашения 1)

Буквы $k, l, m, n, i, j, \ldots$: натуральные числа и переменные по ω.

Буквы $x, y, z, a, b, p, q, \ldots$: точки $\mathcal{N} = \omega^\omega$ и переменные по $\mathcal{N}$.

$$[x]_{\mathbf{E}} = \{y \in X : y \,\mathbf{E}\, x\} \quad \text{для } x \in X \quad (\text{**E**-класс } x)$$

$$X/\mathbf{E} = \{[x]_{\mathbf{E}} : x \in X\} \quad \text{фактор-множество}$$

$$x \longmapsto [x]_{\mathbf{E}} \;-\; \text{каноническая проекция } X \text{ на } X/\mathbf{E}$$

$$[Y]_{\mathbf{E}} = \bigcup_{x \in Y} [x]_{\mathbf{E}} \quad \text{для } Y \subseteq X \quad (\text{**E**-насыщение } Y)$$

$$Y \,\mathbf{E}\, Y' \;-\; \text{означает, что } [Y]_{\mathbf{E}} = [Y']_{\mathbf{E}}\,.$$

Множество $Y \subseteq X$:

- **E**-инвариантно если $[Y]_{\mathbf{E}} = Y$ (сумма полных **E**-классов);
- попарно **E**-неэквивалентно если $y \not\!\mathbf{E}\, y'$ для всех $y \neq y'$ в Y;
- **E**-трансверсаль если $[Y]_{\mathbf{E}} = X$ и Y попарно **E**-неэквивалентно.
- **E**-селектор — любая $f : X \to X$ удовлетворяющая $f(x) \in [x]_{\mathbf{E}}$ и $x \,\mathbf{E}\, y \Longrightarrow f(x) = f(y)$ для всех $x, y \in X$.

Определение

Пусть $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ — отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотв., X, Y в польских пространствах.
Тогда $\mathbf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathbf{F}$ означает, что $\exists$ борелевская редукция $\mathbf{E}$ к $\mathbf{F}$,
т. е. борелевское отображение $f : X \to Y$, удовлетворяющее $x \mathrel{\mathbf{E}} x' \iff f(x) \mathrel{\mathbf{F}} f(x')$ для всех $x, x' \in X$.

Отношение $\leqslant_{\mathrm{B}}$ (борелевская сводимость) рассматривается как достаточно разумный способ сравнения сложности отношений эквивалентности и числа классов эквивалентности.

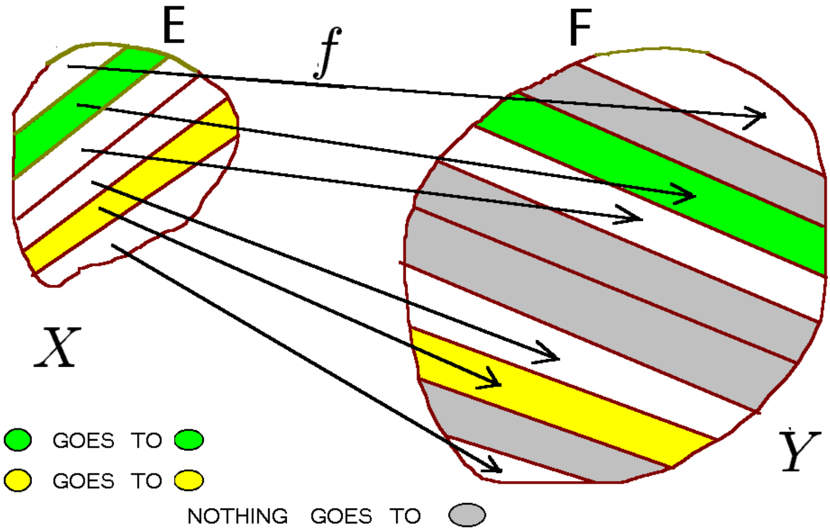
Производные отношения:

$\mathbf{E} \sim_B \mathbf{F}$ если $\mathbf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathbf{F}$ и $\mathbf{F} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathbf{E}$ борелевская би-сводимость

$\mathbf{E} <_{\mathbf{B}} \mathbf{F}$ если $\mathbf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathbf{F}$ но $\mathbf{F} \not\leqslant_{\mathrm{B}} \mathbf{E}$ строгая борел. сводимость

Редукция отношений эквивалентности: картинка

возврат



Для любого n, $(=_n)$ обозначает отношение равенства на n-элементном множестве $X \subseteq \mathcal{N}$.

$(=_{\aleph_0})$ — равенство на строго счетном $X \subseteq \mathcal{N}$.

$(=_{\mathcal{N}})$ — равенство на самом $\mathcal{N}$.

$(=_{2^\omega})$ — равенство на $2^\omega \subseteq \mathcal{N}$.

Теорема (простая, упражнение)

$$(=_1) \ <_B \ (=_2) \ <_B \ (=_3) \ <_B \ \ldots \ <_B \ (=_{\aleph_0}) \ <_B \ (=_{\mathcal{N}}) \ ,$$

и все $<_B$-интервалы здесь пустые.

E_0 отношение эквивалентности на $2^\omega \subseteq \mathcal{N}$: $x \,\mathsf{E}_0\, y$, когда $x(n) = y(n)$ для почти всех (= кроме конечного числа) n.

E_1 отношение эквивалентности на $(2^\omega)^\omega$: $x \,\mathsf{E}_1\, y$, когда $x(n) = y(n)$ для почти всех n.

E_3 отношение эквивалентности на $(2^\omega)^\omega$: $x \,\mathsf{E}_3\, y$, когда $x(n) \,\mathsf{E}_0\, y(n)$ для всех n.

T_2 отношение экв-ти на $(2^\omega)^\omega$: $x \,\mathsf{T}_2\, y$, когда $\mathtt{ran}\, x = \mathtt{ran}\, y$:

$\langle 1,2,3,4,\dots\rangle \;\mathsf{T}_2\; \langle 2,1,4,3,\dots\rangle \;\mathsf{T}_2\; \langle 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\dots\rangle$

Z_0 отношение эквивалентности на 2^ω по плотности 0: $x \,\mathsf{Z}_0\, y$, когда $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathtt{card}\{k<n : x(k)\neq y(k)\}}{n} = 0$

E_2 отношение эквивалентности на 2^ω по суммируемости: $x \,\mathsf{E}_2\, y$, когда $\sum_{k\geq 1,\, x(k)\neq y(k)} \frac{1}{k} < +\infty$.

Борелевское отношение эквивалентности $\mathbf{E}$ на X наз. $\boxed{\text{гладким}}$ (наиболее простая категория) если $\mathbf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} (=_{\mathcal{N}})$,

т. е. если найдется борелевская $f : X \to \mathcal{N}$, удовлетворяющая

$$x \mathbin{\mathbf{E}} x' \iff f(x) = f(y).$$

Гладкие отношения эквивалентности подразделяются на: $\boxed{1}$ которые имеют борелевскую трансверсаль, и $\boxed{2}$ которые её не имеют.

Борелевское отношение эквивалентности E на X наз. **счетным**, если каждый класс E-эквивалентности — конечное или счетное множество.

На слайде отношение E_0 — счетное.

Теорема

Если борелевское отношение эквивалентности E на борелевском X гладкое и счетное, то оно имеет борелевскую трансверсаль.

Теорема (Фельдман–Мур)

Любое счетное борелевское отношение эквивалентности E индуцировано польским (= непрерывным) действием счётной группы.

Однако польские действия абелевых счетных групп индуцируют гораздо более узкий класс гиперконечных отношений эквивалентности.

Теорема

E_0 — *негладкое борелевское отношение*: $(=_{2^\omega}) <_B \mathsf{E}_0$ *строго.*

Отношение эквивалентности E_0 индуцируется действием группы $G = (\mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(\omega), \vartriangle)$, где $\mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(\omega) = \{g \subseteq \omega : g$ конечно$\}$, а $u \vartriangle v = (u \smallsetminus v) \cup (v \smallsetminus u)$ — симметрическая разность.

Упражнение

Докажите, что G — абелева группа, которая индуцирует E_0 своим действием на 2^ω, определенным так: если $g \in G$ и $x \in 2^\omega$, то

$$(gx)(k) = \begin{cases} x(k) & \text{при} \quad k \notin g \\ 1 - x(k) & \text{при} \quad k \in g \end{cases}$$

Борелевское отношение эквивалентности E:

- конечное, если каждый E-класс $[x]_{\mathsf{E}}$ — конечное множество;
- гиперконечное, если $\mathsf{E} = \bigcup_n \mathsf{E}_n$, где $\mathsf{E}_0 \subseteq \mathsf{E}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathsf{E}_n \subseteq \ldots$ возрастающая посл-ть борелевских конечных отношений.

Теорема ([K-AMS] теорема 8.1.1)

Пусть E *— борелевское отно-е экв-ти. Следующее равносильно*:

1. E *гиперконечное*;
2. E *счетное и* $\mathsf{E} \leqslant_B \mathsf{E}_0$ $(\Longrightarrow$ E_0 наибольшее гиперконечное$)$;
3. E *индуцировано польским действием* $(\mathbb{Z}, +)$;
4. *существуют два борелевских отношения эквивалентности* F, F' *с 2-элементными классами эквивалентности, для которых* $\mathsf{E} = \mathsf{F} \vee \mathsf{F}'$, *т. е.* E *— наименьшее отношение эквивалентности, включающее* F, F'.

Борелевское отношение эквивалентности E:

- конечное, если каждый E-класс $[x]_{\mathsf{E}}$ — конечное множество;
- гиперконечное, если $\mathsf{E} = \bigcup_n \mathsf{E}_n$, где $\mathsf{E}_0 \subseteq \mathsf{E}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathsf{E}_n \subseteq \ldots$ возрастающая посл-ть борелевских конечных отношений.

Теорема ([K-AMS] теорема 8.1.1)

Пусть E *— борелевское отно-е экв-ти. Следующее равносильно*:

1. E *гиперконечное*;
2. E *счетное и* $\mathsf{E} \leqslant_B \mathsf{E}_0$ $(\Longrightarrow$ E_0 наибольшее гиперконечное$)$;
3. E *индуцировано польским действием* $(\mathbb{Z}, +)$;
4. *существуют два борелевских отношения эквивалентности* F, F' *с 2-элементными классами эквивалентности, для которых* $\mathsf{E} = \mathsf{F} \vee \mathsf{F}'$, *т. е.* E *— наименьшее отношение эквивалентности, включающее* F, F'.

Свободная группа с 2 генераторами F_2 состоит из всех несокращаемых «слов»

$$h = h_1 h_2 h_3 \dots h_n\,, \quad \text{где} \quad \text{каждое } h_i = a\,,\, a^{-1}\,,\, b\,,\, b^{-1}$$

($a \neq b$ просто символы); нейтральный элемент = пустое слово Λ; операция = конкатенация (с сокращением).

Пространство 2^{F_2} = все $f : F_2 \to \{0,1\}$. Группа F_2 действует на 2^{F_2} сдвигом:

$$(h \cdot f)(w) = f(h^{-1} w).$$

E_∞ = индуцированное отношение эквивалентности на 2^{F_2}.

E_∞ борелевское и счетное (F_2 счетна).

Теорема

$\mathsf{E}_0 <_B \mathsf{E}_\infty$ строго.
Если E счетное борелевское отношение эквивалентности то $\mathsf{E} \leqslant_B \mathsf{E}_\infty$.

Свободная группа с 2 генераторами F_2 состоит из всех несокращаемых «слов»

$$h = h_1 h_2 h_3 \dots h_n\,, \quad \text{где} \quad \text{каждое } h_i = a\,,\; a^{-1}\,,\; b\,,\; b^{-1}$$

$(a \ne b$ просто символы); нейтральный элемент = пустое слово Λ; операция = конкатенация (с сокращением).

Пространство 2^{F_2} = все $f : F_2 \to \{0,1\}$. Группа F_2 действует на 2^{F_2} сдвигом:

$$(h \cdot f)(w) = f(h^{-1}w).$$

E_∞ = индуцированное отношение эквивалентности на 2^{F_2}.

E_∞ борелевское и счетное (F_2 счетна).

Теорема

$\mathsf{E}_0 <_B \mathsf{E}_\infty$ строго.
Если E счетное борелевское отношение эквивалентности то $\mathsf{E} \leqslant_B \mathsf{E}_\infty$.

E_∞ : наибольшее борелевское счетное

счетные не-гиперконечные

E_0 : негладкие гиперконечные

$(=_{2^\omega})$

красные интервалы пусты

$(=_{\aleph_0})$

гладкие

$(=_n)$ $\quad (1 \le n < \aleph_0)$

$(=_2)$

$(=_1)$

E_∞ : наибольшее борелевское счетное

счетные не-гиперконечные

E_0 : негладкие гиперконечные

$(=_{2^\omega})$

красные интервалы пусты

$(=_{\aleph_0})$

гладкие $(=_n)$ $(1 \le n < \aleph_0)$

$(=_2)$

$(=_1)$

Теорема

Пусть $\mathbf{E}$ *— борелевское* (или даже $\mathbf{\Pi}^1_1$) *отношение эквивалентности. Тогда*

- *либо* (I) $\mathbf{E} \leqslant_B (=_\omega)$, *т. е.* $\mathbf{E}$ *имеет не более чем счетное число классов эквивалентности,*
- *либо* (II) $\exists$ *совершенное попарно* $\mathbf{E}$*-неэквивалентное множество* X, *и тогда* $(=_{2^\omega}) \leqslant_B \mathbf{E}$

Свойства (I) и (II) несовместны: $(=_{2^\omega}) \leqslant_{\mathrm{B}} (=_\omega)$ не имеет места.

Для вывода второй части (II) достаточно взять любую борелевскую биекцию $f : 2^\omega \xrightarrow{\text{на}} X$.

Теорема

Пусть $\mathbf{E}$ *— борелевское* (или даже $\mathbf{\Pi}^1_1$) *отношение эквивалентности. Тогда*

- *либо* (I) $\mathbf{E} \leqslant_B (=_\omega)$, *т. е.* $\mathbf{E}$ *имеет не более чем счетное число классов эквивалентности,*
- *либо* (II) $\exists$ *совершенное попарно* $\mathbf{E}$*-неэквивалентное множество* X, *и тогда* $(=_{2^\omega}) \leqslant_B \mathbf{E}$

Свойства (I) и (II) несовместны: $(=_{2^\omega}) \leqslant_{\mathrm{B}} (=_\omega)$ не имеет места.

Для вывода второй части (II) достаточно взять любую борелевскую биекцию $f : 2^\omega \xrightarrow{\text{на}} X$.

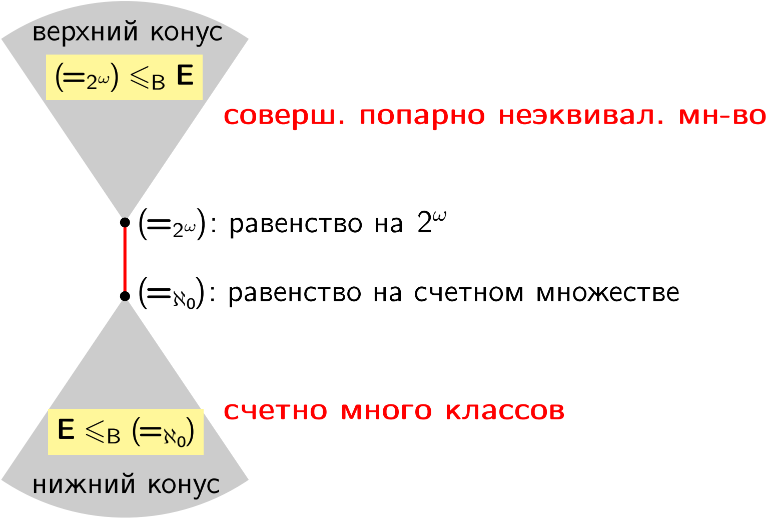


Рис.: Сводимость между борелевскими отношениями эквивал-ности. Первая дихотомия разделяет всю область на два конуса.

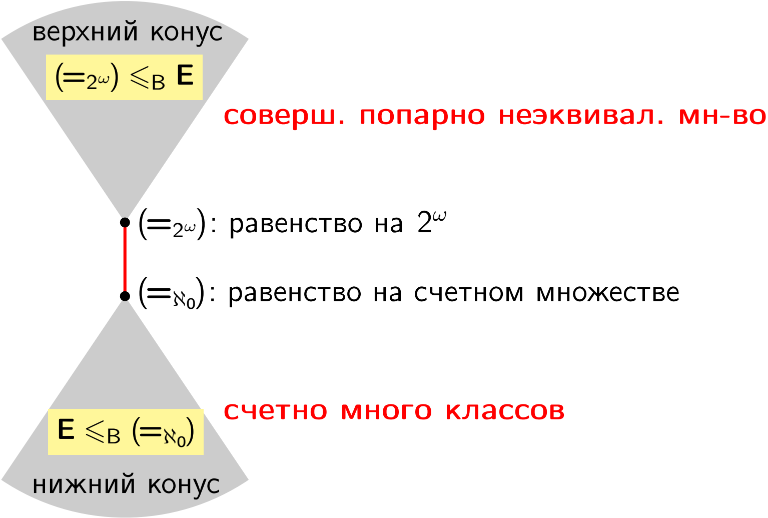


Рис.: Сводимость между борелевскими отношениями эквивал-ности. Первая дихотомия разделяет всю область на два конуса.

Начинаем доказательство 1й дихотомической теоремы.

Пусть $\mathbf{E}$ — $\mathit{\Pi}^1_1$ отношение эквивалентности on $\mathcal{N}$.

Общий случай $\mathit{\Pi}^1_1(p)$ для какого-то параметра $p \in \mathcal{N}$ рассматривается в общем аналогично.

Случай 1: $\forall x \in \mathcal{N}$, $x \in$ попарно $\mathbf{E}$-эквивалентному $\mathit{\Delta}^1_1$ м-ву X.

Но семейство всех $\mathit{\Delta}^1_1$ множеств счетно. Поэтому Случай 1 сразу ведет к опции (I) 1й дихотомической теоремы.

Случай 2: не Случай 1, т. е. множество $\mathbf{H}$ (= хаотическая область) всех $x \in \mathcal{N}$, **не принадлежащих** никакому попарно $\mathbf{E}$-эквивалентному $\mathit{\Delta}^1_1$ м-ву, непусто: $\mathbf{H} \neq \varnothing$.

Мы собираемся доказать, что Случай 2 ведет к опции (II) 1й дихотомической теоремы.

Начинаем доказательство 1й дихотомической теоремы.
Пусть **E** — Π^1_1 отношение эквивалентности on $\mathcal{N}$.

Общий случай $\Pi^1_1(p)$ для какого-то параметра $p \in \mathcal{N}$ рассматривается в общем аналогично.

Случай 1: $\forall\, x \in \mathcal{N}$, $x \in$ попарно **E**-эквивалентному Δ^1_1 м-ву X.

Но семейство всех Δ^1_1 множеств счетно. Поэтому Случай 1 сразу ведет к опции (I) 1й дихотомической теоремы.

Случай 2: не Случай 1, т. е. множество **H** (= хаотическая область) всех $x \in \mathcal{N}$, **не принадлежащих** никакому попарно **E**-эквивалентному Δ^1_1 м-ву, непусто: $\mathbf{H} \neq \varnothing$.

Мы собираемся доказать, что Случай 2 ведет к опции (II) 1й дихотомической теоремы.

Лемма 1

Если Σ^1_1-множество $X \subseteq \mathcal{N}$ попарно **E***-эквивалентно то $X \subseteq \mathbf{H}$.*

Док-во

Считая, что X непусто, рассмотрим множество

$$Y = [X]_{\mathbf{E}} = \{y \in \mathcal{N} : \underbrace{\forall x\,(\underbrace{x \in X}_{\Sigma^1_1} \Longrightarrow \underbrace{x \mathbin{\mathbf{E}} y}_{\Pi^1_1})}_{\Pi^1_1}\}.$$

Тогда Y есть Π^1_1-множество и $X \subseteq Y$.

По теореме отделимости (лекция 5) найдется Δ^1_1-множество B, для которого $X \subseteq B \subseteq Y$.

Но $B \subseteq [X]_{\mathbf{E}}$ попарно **E**-эквивалентно, так что $B \subseteq \mathbf{H}$. □

Лемма 1

Если Σ^1_1-множество $X \subseteq \mathcal{N}$ попарно **E**-*эквивалентно то $X \subseteq \mathbf{H}$.*

Док-во

Считая, что X непусто, рассмотрим множество

$$Y = [X]_{\mathbf{E}} = \{y \in \mathcal{N} : \underbrace{\forall x\,(\underbrace{x \in X}_{\Sigma^1_1} \Longrightarrow \underbrace{x\,\mathbf{E}\,y}_{\Pi^1_1})}_{\Pi^1_1}\}.$$

Тогда Y есть Π^1_1-множество и $X \subseteq Y$.

По теореме отделимости (лекция 5) найдется Δ^1_1-множество B, для которого $X \subseteq B \subseteq Y$.

Но $B \subseteq [X]_{\mathbf{E}}$ попарно **E**-эквивалентно, так что $B \subseteq \mathbf{H}$. □

Лемма 2

Множество **H** *принадлежит классу* Σ^1_1.

Док-во. В самом деле, по определению

$$x \in \mathbf{H} \iff \forall B \in \Delta^1_1 \left(x \in B \Longrightarrow \exists y \in B\,(x \not{E}\, y)\right). \qquad (1)$$

Чтобы привести правую часть к Σ^1_1-виду, используем такие Π^1_1-множества $E \subseteq \omega$ и $W \subseteq \omega \times \mathcal{N}$ и Σ^1_1-множество $W' \subseteq \omega \times \mathcal{N}$, что:

- i если $e \in E$ то $(W)_e = (W')_e$;
- ii $\{(W)_e : e \in E\} = \{(W')_e : e \in E\} = \{$все Δ^1_1-множества $X \subseteq \mathcal{N}\}$.

Это вариант теоремы о перечислении Δ^1_1-множеств, лекция 5.
$(W)_e = \{x : W(e,x)\}$ — вертикальное сечение W, то же $(W')_e$.
Тогда правая часть (1) эквивалентна следующему Σ^1_1-отношению:

$$\forall \underbrace{e \in E}_{\Pi^1_1} \Big(\underbrace{x \in (W)_e}_{\Pi^1_1} \Longrightarrow \underbrace{\exists y \in (W')_e\,(x \not{E}\, y)}_{\Sigma^1_1}\Big). \qquad \square$$

Лемма 2

Множество **H** *принадлежит классу* Σ^1_1.

Док-во. В самом деле, по определению

$$x \in \mathbf{H} \iff \forall B \in \Delta^1_1 \left(x \in B \Longrightarrow \exists y \in B \, (x \not\mathsf{E}\, y) \right). \tag{1}$$

Чтобы привести правую часть к Σ^1_1-виду, используем такие Π^1_1-множества $E \subseteq \omega$ и $W \subseteq \omega \times \mathcal{N}$ и Σ^1_1-множество $W' \subseteq \omega \times \mathcal{N}$, что:

- i если $e \in E$ то $(W)_e = (W')_e$;
- ii $\{(W)_e : e \in E\} = \{(W')_e : e \in E\} = \{$все Δ^1_1-множества $X \subseteq \mathcal{N}\}$.

Это вариант теоремы о перечислении Δ^1_1-множеств, лекция 5.
$(W)_e = \{x : W(e,x)\}$ — вертикальное сечение W, то же $(W')_e$.
Тогда правая часть (1) эквивалентна следующему Σ^1_1-отношению:

$$\forall \underbrace{e \in E}_{\Pi^1_1} \left(\underbrace{x \in (W)_e}_{\Pi^1_1} \Longrightarrow \underbrace{\exists y \in (W')_e \, (x \not\mathsf{E}\, y)}_{\Sigma^1_1} \right). \qquad \square$$

Дальнейший план доказательства для Случая 2 состоит в следующем.

Мы собираемся доказать, что множество $\mathbf{E}$ — тощее на $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$.

Однако обычная польская топология $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ для этого не подходит, нужна другая, более сильная топология.

Дальнейший план доказательства для Случая 2 состоит в следующем.

Мы собираемся доказать, что множество $\mathbf{E}$ — тощее на $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$.

Однако обычная польская топология $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ для этого не подходит, нужна другая, более сильная топология.

База топологии ГХ = все непустые Σ^1_1-множества $B \subseteq \mathcal{N}$.

Эта топология включает в себя польскую топологию: каждый бэровский интервал $\mathcal{N}_s = \{x \in \mathcal{N} : s \subset x\}$ есть Σ^1_1-множество.

Топология ГХ — не польская и даже не метризуема, но имеет свойства, которые обычно связаны с полными пространствами.

Теорема ([КЛ 2], Теорема 10.2.3)

Топология ГХ удовлетворяет теореме Бэра: котощие мн-ва плотны.

Топология ГХ также имеет польскую сеть, *т. е. семейство множеств* S_n, $n < \omega$, *удовлетворяющее таким условиям:*

1. $\forall\, n$, *каждое* $X \in S_n$ *есть непустое* Σ^1_1*-множество в* $\mathcal{N}$;
2. $\forall\, n$, *если* $X \subseteq \mathcal{N}$ *— непустое* Σ^1_1*-множество, то найдется такое множество* $Y \in S_n$, *что* $Y \subseteq X$;
3. *если семейство множеств* $X_n \in S_n$ *имеет свойство непустоты конечных пересечений, то и всё пересечение* $\bigcap_n X_n$ *непусто.*

База топологии ГХ $=$ все непустые Σ^1_1-множества $B \subseteq \mathcal{N}$.

Эта топология включает в себя польскую топологию: каждый бэровский интервал $\mathcal{N}_s = \{x \in \mathcal{N} : s \subset x\}$ есть Σ^1_1-множество.

Топология ГХ — не польская и даже не метризуема, но имеет свойства, которые обычно связаны с полными пространствами.

Теорема ([КЛ 2], Теорема 10.2.3)

Топология ГХ удовлетворяет теореме Бэра: котощие мн-ва плотны.

Топология ГХ также имеет польскую сеть*, т. е. семейство множеств S_n, $n < \omega$, удовлетворяющее таким условиям:*

1. *$\forall\, n$, каждое $X \in S_n$ есть непустое Σ^1_1-множество в $\mathcal{N}$;*
2. *$\forall\, n$, если $X \subseteq \mathcal{N}$ — непустое Σ^1_1-множество, то найдется такое множество $Y \in S_n$, что $Y \subseteq X$;*
3. *если семейство множеств $X_n \in S_n$ имеет свойство непустоты конечных пересечений, то и всё пересечение $\bigcap_n X_n$ непусто.*

Лемма 3

Предположим, что множество $Z \subseteq \mathcal{N}$ непусто и ГХ*-открыто, а множество $D \subseteq Z$ является* ГХ*-котощим в Z. Тогда произведение $D \times D$ плотно в $Z \times Z$ в смысле топологии* ГХ_2.

Топология ГХ_2 на $\mathcal{N}^2$ порождена Σ^1_1-множествами $\varnothing \neq X \subseteq \mathcal{N}^2$.

Док-во

Считаем для простоты, что $Z = \mathcal{N}$. По предположению $\bigcap_n D_n \subseteq D$, где все $D_n \subseteq \mathcal{N}$ ГХ-открыты и ГХ-плотны в $\mathcal{N}$.

Понятно, что каждое из множеств $D'_n = D_n \times \mathcal{N}$ открыто и плотно в топологии ГХ_2. (В самом деле, проекция $\mathbf{pr}(A)$ любого Σ^1_1-множества $A \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ есть снова Σ^1_1-множество в $\mathcal{N}$.)

Аналогично каждое из множеств $D''_n = \mathcal{N} \times D_n$ открыто и плотно.

Однако $\bigcap_n (D'_n \cap D''_n) \subseteq D \times D$. Остается сослаться на теорему. $\square$

Лемма 3

Предположим, что множество $Z \subseteq \mathcal{N}$ *непусто и* ΓX-*открыто, а множество* $D \subseteq Z$ *является* ΓX-*котощим в* Z. *Тогда произведение* $D \times D$ *плотно в* $Z \times Z$ *в смысле топологии* ΓX_2.

Топология ΓX_2 на $\mathcal{N}^2$ порождена Σ^1_1-множествами $\varnothing \neq X \subseteq \mathcal{N}^2$.

Док-во

Считаем для простоты, что $Z = \mathcal{N}$. По предположению $\bigcap_n D_n \subseteq D$, где все $D_n \subseteq \mathcal{N}$ ΓX-открыты и ΓX-плотны в $\mathcal{N}$.

Понятно, что каждое из множеств $D'_n = D_n \times \mathcal{N}$ открыто и плотно в топологии ΓX_2. (В самом деле, проекция **pr**(A) любого Σ^1_1-множества $A \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ есть снова Σ^1_1-множество в $\mathcal{N}$.)

Аналогично каждое из множеств $D''_n = \mathcal{N} \times D_n$ открыто и плотно.

Однако $\bigcap_n (D'_n \cap D''_n) \subseteq D \times D$. Остается сослаться на теорему. □

Лемма 4

Множество **E** *является тощим на* $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ *в смысле* ГХ^2.

Док-во. Напомним, что **E** есть $\mathbf{\Pi}^1_1$-отношение, т. е. CA-множество в польской топологии, а следовательно, и в топологии ГХ.

Отсюда следует, что **E** имеет свойство Бэра в смысле ГХ, так как свойство Бэра имеет место для A-множеств и CA-множеств по теореме, которая справедлива не только для польских пространств. (См. [КЛ-2], теорема 5.3.1.)

Таким образом, согласно теореме Улама—Куратовского, достаточно вывести, что множество-сечение $E_x := (\mathbf{E})_x \cap \mathbf{H} = \{y \in \mathbf{H} : x \mathbin{\mathbf{E}} y\}$ — тощее в смысле ГХ, какова бы ни была точка $x \in \mathbf{H}$.

Как и выше, E_x имеет свойство Бэра в топологии ГХ. Значит, чтобы проверить, что E_x — тощее в смысле ГХ, достаточно установить, что E_x не котощее ни на каком непустом Σ^1_1-множестве $D \subseteq \mathbf{H}$.

Лемма 4

Множество $\mathbf{E}$ *является тощим на* $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ *в смысле* ГХ^2.

Док-во. Напомним, что $\mathbf{E}$ есть $\mathbf{\Pi}^1_1$-отношение, т. е. CA-множество в польской топологии, а следовательно, и в топологии ГХ.

Отсюда следует, что $\mathbf{E}$ имеет свойство Бэра в смысле ГХ, так как свойство Бэра имеет место для A-множеств и CA-множеств по теореме, которая справедлива не только для польских пространств. (См. [КЛ-2], теорема 5.3.1.)

Таким образом, согласно теореме Улама—Куратовского, достаточно вывести, что множество-сечение $E_x := (\mathbf{E})_x \cap \mathbf{H} = \{y \in \mathbf{H} : x \ \mathbf{E} \ y\}$ — тощее в смысле ГХ, какова бы ни была точка $x \in \mathbf{H}$.

Как и выше, E_x имеет свойство Бэра в топологии ГХ. Значит, чтобы проверить, что E_x — тощее в смысле ГХ, достаточно установить, что E_x не котощее ни на каком непустом Σ^1_1-множестве $D \subseteq \mathbf{H}$.

Пусть, напротив, E_x ГХ-котощее на Σ^1_1-множестве $\varnothing \neq U \subseteq \mathbf{H}$.

Множ-во $D' = (E_x \cap U) \times (E_x \cap U)$ ГХ$_2$-плотно в $U \times U$ по лемме 3.

Значит D' непусто пересекает любое Σ^1_1-множество $\varnothing \neq P \subseteq U^2$.
В частности, если $P = \{\langle y, z\rangle \in U^2 : y \not\mathrel{\mathbf{E}} z\}$ непусто, то $P \cap D' \neq \varnothing$.

Допустим, что $\langle y, z\rangle \in P \cap D'$. Тогда обе точки y, z принадлежат E_x, т. е. мы имеем $y \mathrel{\mathbf{E}} z$, а это противоречит предположению $\langle y, z\rangle \in P$.

Поэтому на самом деле P — пустое множество, откуда следует, что $U \subseteq [x]_{\mathbf{E}}$, так что $U \subseteq \mathbf{H}$ по лемме 1, и мы имеем противоречие.

Лемма 4 доказана. □

Пусть, напротив, E_x ГХ-котощее на Σ^1_1-множестве $\varnothing \neq U \subseteq \mathbf{H}$.

Множ-во $D' = (E_x \cap U) \times (E_x \cap U)$ ГХ$_2$-плотно в $U \times U$ по лемме 3.

Значит D' непусто пересекает любое Σ^1_1-множество $\varnothing \neq P \subseteq U^2$.
В частности, если $P = \{\langle y, z\rangle \in U^2 : y \not\mathbf{E}\, z\}$ непусто, то $P \cap D' \neq \varnothing$.

Допустим, что $\langle y, z\rangle \in P \cap D'$. Тогда обе точки y, z принадлежат E_x, т. е. мы имеем $y \mathbin{\mathbf{E}} z$, а это противоречит предположению $\langle y, z\rangle \in P$.

Поэтому на самом деле P — пустое множество, откуда следует, что $U \subseteq [x]_{\mathbf{E}}$, так что $U \subseteq \mathbf{H}$ по лемме 1, и мы имеем противоречие.

Лемма 4 доказана. $\square$

Пусть по лемме 4, $\mathbf{E} \cap (\mathbf{H} \times \mathbf{H}) \subseteq \bigcup_n P_n$, где каждое $P_n \subseteq \mathcal{N}^2$ нигде не плотно в топологии $\Gamma X^2 = \Gamma X \times \Gamma X$.

Берем польскую сеть $\{S_n : n \in \omega\}$ для ΓX.

Строим семейство Σ^1_1-множеств $X_s \subseteq \mathbf{H}$ $(s \in 2^{<\omega})$, удовлетворяющих

1. если $s \in 2^m$ то $X_s \in S_m$ и диаметр $X_s \le m^{-1}$,
2. $X_{s^\frown i} \subseteq X_s$,
3. $(X_s \times X_t) \cap \bigcup_{m \le n} P_m = \varnothing$ при $s, t \in 2^n, s \ne t$.

$\forall a \in 2^\omega$, последовательность множеств $X_{a \restriction m}$, $m < \omega$, имеет непустое пересечение по свойствам польской сети и 2, а согласно 1, это пересечение содержит ровно одну точку x_a.

Если $a \ne a'$, то 3 влечет $\langle x_a, x_{a'} \rangle \notin P_m$, $\forall\, m$, т. е. $x_a \not\mathbf{E}\, x_{a'}$ и $x_a \ne x_{a'}$.

Поэтому $X = \{x_a : a \in 2^\omega\}$ — совершенное (гомеоморфное 2^ω через отображение $a \longmapsto x_a$) множ-во попарно $\mathbf{E}$-неэквивалентных точек. $\square$

Пусть по лемме 4, $\mathbf{E} \cap (\mathbf{H} \times \mathbf{H}) \subseteq \bigcup_n P_n$, где каждое $P_n \subseteq \mathcal{N}^2$ нигде не плотно в топологии $\Gamma X^2 = \Gamma X \times \Gamma X$.

Берем польскую сеть $\{S_n : n \in \omega\}$ для ΓX.

Строим семейство Σ^1_1-множеств $X_s \subseteq \mathbf{H}$ $(s \in 2^{<\omega})$, удовлетворяющих

1. если $s \in 2^m$ то $X_s \in S_m$ и диаметр $X_s \le m^{-1}$,
2. $X_{s^\frown i} \subseteq X_s$,
3. $(X_s \times X_t) \cap \bigcup_{m \le n} P_m = \varnothing$ при $s, t \in 2^n, s \ne t$.

$\forall\, a \in 2^\omega$, последовательность множеств $X_{a \restriction m}$, $m < \omega$, имеет непустое пересечение по свойствам польской сети и 2, а согласно 1, это пересечение содержит ровно одну точку x_a.

Если $a \ne a'$, то 3 влечет $\langle x_a, x_{a'} \rangle \notin P_m$, $\forall\, m$, т. е. $x_a \not\mathbf{E}\, x_{a'}$ и $x_a \ne x_{a'}$.

Поэтому $X = \{x_a : a \in 2^\omega\}$ — совершенное (гомеоморфное 2^ω через отображение $a \longmapsto x_a$) множ-во попарно $\mathbf{E}$-неэквивалентных точек. □

E_0 отношение эквивалентности на $2^\omega \subseteq \mathcal{N}$: $x \mathsf{E}_0 y$, когда $x(n) = y(n)$ для почти всех (= кроме конечного числа) n.

E_1 отношение эквивалентности на $(2^\omega)^\omega$: $x \mathsf{E}_1 y$, когда $x(n) = y(n)$ для почти всех n.

E_3 отношение эквивалентности на $(2^\omega)^\omega$: $x \mathsf{E}_3 y$, когда $x(n) \mathsf{E}_0 y(n)$ для всех n.

T_2 отношение экв-ти на $(2^\omega)^\omega$: $x \mathsf{T}_2 y$, когда $\operatorname{ran} x = \operatorname{ran} y$:

$\langle 1,2,3,4,\dots \rangle \ \mathsf{T}_2 \ \langle 2,1,4,3,\dots \rangle \ \mathsf{T}_2 \ \langle 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\dots \rangle$

Z_0 отношение эквивалентности на 2^ω по плотности 0: $x \mathsf{Z}_0 y$, когда $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{k < n : x(k) \neq y(k)\}}{n} = 0$

E_2 отношение эквивалентности на 2^ω по суммируемости: $x \mathsf{E}_2 y$, когда $\sum_{k\geq 1,\, x(k)\neq y(k)} \frac{1}{k} < +\infty$.

Рассматриваются банаховы группы ($p \geq 1$):

$$
\begin{aligned}
\ell^p &= \{x \in \mathbb{R}^\omega : \textstyle\sum_n |x(n)|^p < \infty\}; \qquad & \|x\|_p &= (\textstyle\sum_n |x(n)|^p)^{\frac{1}{p}} \\
\ell^\infty &= \{x \in \mathbb{R}^\omega : \sup_n |x(n)| < \infty\}; \qquad & \|x\|_\infty &= \sup_n |x(n)|
\end{aligned}
$$

Каждая ℓ^p, ℓ^∞ действует на $\mathbb{R}^\omega$ покомпонентным сложением.

$\boldsymbol{\ell^p}$, $\boldsymbol{\ell^\infty}$ индуцированные отношения эквивалентности на $\mathbb{R}^\omega$.

Теорема (Daugherty – Hjorth)

Если $1 \leq p < q \leq +\infty$ *то* $\ell^p <_B \ell^q$.

Рассматриваются банаховы группы ($p \geq 1$):

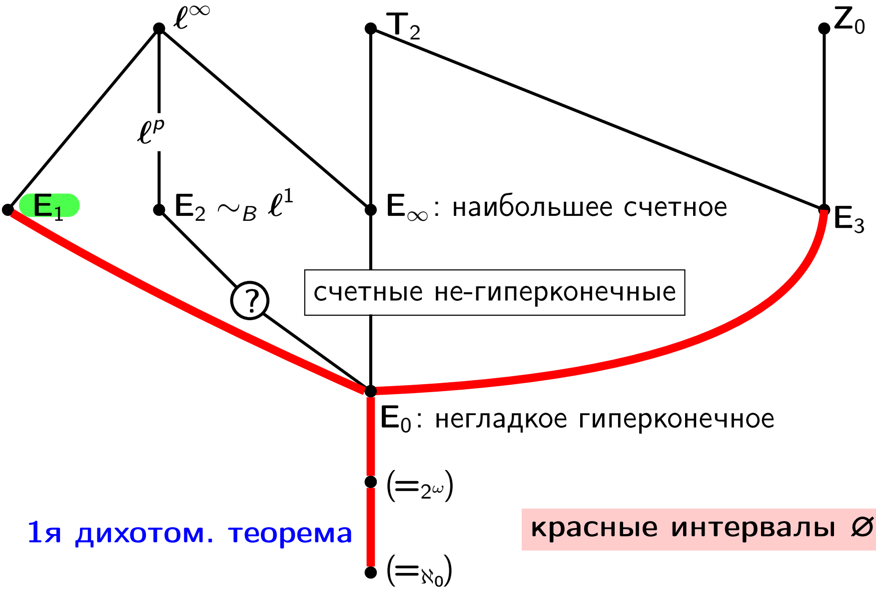
$$\begin{array}{rclcrcl} \ell^p &=& \{x \in \mathbb{R}^\omega : \sum_n |x(n)|^p < \infty\}; && \|x\|_p &=& (\sum_n |x(n)|^p)^{\frac{1}{p}} \\ \ell^\infty &=& \{x \in \mathbb{R}^\omega : \sup_n |x(n)| < \infty\}; && \|x\|_\infty &=& \sup_n |x(n)| \end{array}$$

Каждая ℓ^p, ℓ^∞ действует на $\mathbb{R}^\omega$ покомпонентным сложением.

ℓ^p, ℓ^∞ индуцированные отношения эквивалентности на $\mathbb{R}^\omega$.

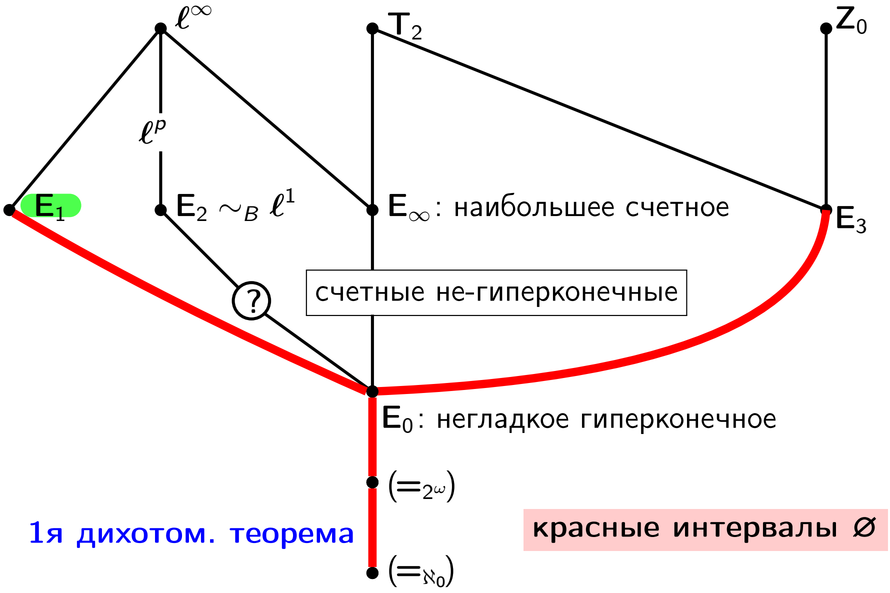
Теорема (Daugherty – Hjorth)

Если $1 \leq p < q \leq +\infty$ *то* $\ell^p <_B \ell^q$.



1я дихотом. теорема

красные интервалы $\varnothing$


ℓ^∞
T_2
Z_0
ℓ^p
E_1
$E_2 \sim_B \ell^1$
E_∞ : наибольшее счетное
E_3
?
счетные не-гиперконечные
E_0 : негладкое гиперконечное
$(=_{2^\omega})$
$(=_{\aleph_0})$
1я дихотом. теорема
красные интервалы $\varnothing$

Содержание I

Содержание II