РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ им. А.А. ХАРКЕВИЧА

В.Г. КАНОВЕЙ В.А. ЛЮБЕЦКИЙ

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

НАЧАЛА ДЕСКРИПТИВНОЙ ДИНАМИКИ

МОСКВА НАУКА 2007

УДК 510
ББК 22.12
К19

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук *Е.А. Палютин*

Рецензенты:

академик *Н.А. Кузнецов*,
доктор физико-математических наук *А.М. Вершик*

Кановей В.Г.

Современная теория множеств : начала дескриптивной динамики / В.Г. Кановей, В.А. Любецкий ; [отв. ред. Е.А. Палютин] ; Ин-т проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН. — М. : Наука, 2007. — 231 с. — ISBN 978-5-02-035577-4.

Книга служит введением в один из центральных разделов современной теории множеств — раздел «Дескриптивная динамика», который выделяется наиболее тесной связью с традиционными математическими вопросами и поэтому наиболее подходит для первого знакомства с современной теорией множеств.

Главное содержание работы составляет изложение структуры множества всех «борелевских мощностей». Особое внимание уделяется «счетным» отношениям эквивалентности. Помимо действий счетных групп, в книге подробно рассматривается действие группы всех перестановок натурального ряда, к которому в некотором смысле сводятся вопросы изоморфизма или элементарной эквивалентности математических структур.

Для математиков (студентов, аспирантов, научных работников).

Темплан 2007-I-151

ISBN 978-5-02-035577-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Естественно представить современную теорию множеств в нескольких книгах, каждая из которых посвящена одному из ее разделов, пользующихся в наши дни повышенным интересом. Каждый из разделов должен излагаться на уровне, который не требует от читателя специальной подготовки. Эта небольшая книга является введением в один из таких разделов — *дескриптивную динамику*, которая интенсивно развивается в последние 10–15 лет. Этот раздел можно рассматривать как область дескриптивной теории множеств. В нем, если сказать буквально в два слова, изучаются *отношения эквивалентности*. Казалось бы, что можно сказать о столь простом объекте, как отношение эквивалентности на некотором множестве?

В первом приближении дескриптивная динамика изучает фактормножества, которые получаются с помощью борелевских и аналитических отношений эквивалентности на полных сепарабельных топологических пространствах. С точки зрения классической дескриптивной теории множеств, здесь возникает, первым из наиболее интересных, вопрос о сравнении мощностей двух возникающих фактормножеств. Если говорить об обычной мощности, то все множества вида X/E, где E — борелевское или аналитическое отношение эквивалентности на полном сепарабельном пространстве $\mathbb{X}$, имеют мощность не выше, чем $\mathfrak{c}$, и точнее: ровно мощность $\mathfrak{c}$ отрезка $[0,1]$ вещественных чисел, или первую несчетную мощность $\aleph_1$, счетную или конечную мощности. Три последних случая вырожденные. Любое множество в таком пространстве $\mathbb{X}$ называется *точечным*. Разумеется, мощность вещественной прямой $\mathbb{R}$ равна $\mathfrak{c}$, так как существуют инъекции $\mathbb{R}$ в $[0,1]$ и $[0,1]$ в $\mathbb{R}$.

Более содержательная картина возникает из определения борелевской мощности [1], которое отличается от обычного понятия мощности только тем, что при сравнении мощностей двух точечных множеств или их фактормножеств рассматриваются только борелевские отображения. Неожиданности возникают уже в самых простых примерах. Серпинский [67] еще в 1910-х гг. обнаружил, что не существует борелевской инъекции классов эквивалентности Витали в $\mathbb{R}$, так что, если обозначить $\mathtt{Vit}$ отношение Витали на $\mathbb{R}$, то борелевская мощность фактормножества $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$ строго больше, чем мощность прямой $\mathbb{R}$. Здесь, конечно, нужно уточнить, какие отображения вида $\mathbb{R}/\mathtt{Vit} \to \mathbb{R}$ называются борелевскими. Первая мысль, которая здесь приходит, — назвать борелевскими те отображения этого вида, которые являются таковыми в фактортопологии пространства $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$ — не годится. Дело в том, что в книге рассматриваются отношения эквивалентности, которые типично приводят к плохой фактортопологии. Например, в случае $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$ она состоит из двух множеств: пустого множества $\emptyset$ и всего пространства, см. § 1.4.

Еще бóльшие борелевские мощности получаются из других отношений эквивалентности: например, в случае $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathbf{c}_0$, где отношение $\mathbf{c}_0$ определяется на бесконечных последовательностях вещественных чисел с помощью действия аддитивной группы соответствующего банахова пространства, т. е. как стремление к нулю покоординатных разностей двух последовательностей. Так возникают фактормножества, борелевские мощности которых даже несравнимы между собой, что, конечно, невозможно для канторовых мощностей.

Главное содержание книги — доказательства результатов о борелевских мощностях фактормножеств, и изложение весьма тонких методов, разработанных с этой целью.

Глава 1 начинается с объяснения, почему и в каком смысле отношение эквивалентности Витали имеет строго больше классов эквивалентности, чем количество точек в отрезке $[0, 1]$ вещественных чисел. Затем вводится центральное определение **борелевской сводимости** $\leq_{\mathtt{B}}$ одного отношения эквивалентности

[1] Заметим, что это понятие может применяться только в ситуациях, когда определены борелевские отображения. Это гораздо более частная ситуация, чем общее понятие мощности множества по Кантору.

к другому, выражающее то, что первое из них имеет не больше классов эквивалентности, чем второе, т.е. борелевская мощность первого фактормножества меньше или равна борелевской мощности второго фактормножества. Здесь вводятся и соответствующие понятие двусторонней борелевской сводимости $\sim_B$, которое означает равенство борелевских мощностей фактормножеств, и понятие строгой борелевской сводимости $<_B$. Таким образом, изучение борелевских мощностей фактормножеств сводится к изучению структуры семейства фактормножеств, взятого вместе с с отношением борелевской сводимости $\leq_B$.

Затем рассматриваются два обычных способа определить отношение эквивалентности. При первом способе оно определяется как равенство двух множеств с точностью до фиксированного идеала «маленьких» множеств. Этот способ рассматривается в **главе 2**. Если берется тривиальный идеал, состоящий из одного пустого множества $\emptyset$, то получается обычное равенство множеств из данного пространства. Если берется простейший нетривиальный идеал Fin всех конечных подмножеств натурального ряда $\mathbb{N}$, то получается отношение E_0 в пространстве $2^{\mathbb{N}}$ — равенство двух последовательностей с точностью до конечного числа их координат. Кстати, оно борелевски эквивалентно отношению Витали, т.е. оба эти отношения имеют в борелевском смысле равное число классов эквивалентности. Здесь вводятся отношения эквивалентности E_1, E_2, E_3, которые имеют строго больше классов эквивалентности, чем E_0, но между собой несравнимые, и также интересное отношение Z_0, порождаемое идеалом множеств с нулевой плотностью.

При втором способе отношение эквивалентности определяется как принадлежность к одной орбите действия группы. Этот способ рассматривается в **главе 3**. Здесь рассматриваются топологические группы и их непрерывные действия и реже группы со структурой борелевских множеств и их борелевские действия. Многие важные отношения эквивалентности образуются таким способом — в этом смысле нами употребляется введенное Кехрисом [55] выражение «дескриптивная динамика», как название направления в дескриптивной теории множеств. Может быть, было бы точнее говорить о «дескриптивной кинематике», но такой термин нигде не употребляется.

Отношение, порожденное идеалом, можно рассматривать как индуцированное действием Δ-группы этого идеала, т.е. тем же идеалом с симметрической разностью Δ двух множеств в роли групповой операции. В **главе 3** рассматриваются и другие примеры: действие счетных групп, действие сдвига, действие аддитивных групп банаховых пространств. Все они относятся к наиболее простым *польским* действиям.[2] Например, таковы действия счетных групп гомеоморфизмами данного пространства, поскольку любая счетная группа «полизируется» — становится польской, если рассматривать в ней дискретную топологию.

Глава 4 содержит развернутое введение в главную задачу нашей книги — изложение результатов по борелевской сводимости таких важных борелевских отношений эквивалентности, как упомянутые отношения E_i, $i = 0, 1, 2, 3$, отношение Z_0, универсальное счетное отношение эквивалентности E_∞, отношения ℓ^p и c_0, индуцированные действиями банаховых пространств, и ряд других. Основные результаты о борелевской сводимости приведены в диаграмме на с. 56. Доказательства одних результатов требуют лишь аккуратного применения соображений, связанных с топологией и комбинаторикой таких пространств, как вещественная прямая $\mathbb{R}$, бэровское пространство $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, и канторов дисконтинуум $2^\mathbb{N}$. Доказательства других результатов оказываются весьма тонкими. К числу последних относится теорема Догерти–Хъерта о взаимной сводимости отношений эквивалентности вида ℓ^p. Эти результаты собраны в **главе 5**.

Еще более сложные результаты, требующие применения специальных методов, приводятся в следующих главах **6–10**.

В частности, в них устанавливается $\mathsf{E}_0 <_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_\infty$ и доказательство опирается на теорию счетных и гиперконечных отношений эквивалентности. Напомним, что *счетным* называется отношение эквивалентности, у которого каждый класс эквивалентности не более чем счетен. Счетные отношения эквивалентности характеризуются как орбитальные эквивалентности польских дей-

[2] Напомним, что *польским* называется топологическое пространство, гомеоморфное какому-то полному сепарабельному метрическому пространству. Соответственно *польской* группой называется топологическая группа с польским носителем. *Польским* действием называется непрерывное действие польской группы на польском пространстве.

ствий счетных групп. Например, отношение Витали порождается действием аддитивной группы $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$. Счетные отношения эквивалентности, и в особенности их подкласс, известный как гиперконечные отношения эквивалентности, были предметом многих исследований, начиная с 1970-х годов, и особенно в последние 10–15 лет. Результаты, характеризующие гиперконечные отношения эквивалентности, рассматриваются в **главе 6**.

Особую роль в частично упорядоченном множестве борелевских отношениий эквивалентности играет отношение E_1. Оно служит границей между «полизируемыми» отношениями эквивалентности, т.е. такими, которые можно индуцировать польским действием, и всеми другими отношениями эквивалентности. Среди идеалов аналогичным свойством обладает идеал $\mathscr{I}_1$, порождающий отношение E_1. Эти вопросы рассматриваются в **главе 7**.

В главе 8 для исследования борелевской сводимости подробнее рассматривается действие группы S_∞ всех перестановок натурального ряда $\mathbb{N}$. Также в **главе 8** рассматривается отношение изоморфизма двух математических структур. Отношения эквивалентности, индуцированные польскими действиями группы S_∞, борелевски сводятся к отношению изоморфности подходящих счетных объектов, так что здесь речь идет об отношениях, которые допускают *классификацию счетными структурами*.

В главе 9 вводится понятие *турбулентного* действия польских групп, которое определяется в терминах топологических свойств орбит. Исследования последних лет показали, что такие отношения эквивалентности, несравнимы в частично упорядоченном множестве борелевской сводимости с теми, которые порождаются польскими действиями группы S_∞. Из этого вытекают новые результаты о борелевской несводимости.

Наконец, в последней **главе 10** излагаются приложения так называемых c_0-равенств. Это особый класс отношений эквивалентности, похожих на отношение c_0, который содержит явно определяемую континуальную по мощности совокупность попарно несравнимых отношений эквивалентности.

Книга, не претендуя на полный охват этой бурно развивающейся области, задумана как введение, описывающее характер проблем, методов, результатов и приложений в этой области. Книга ориентирована на математиков (студентов, аспирантов, научных работников), знакомых с основами анализа, теории функций и топологии в объеме первого курса университета.

Для понимания доказательств более сложных результатов, в частности, связанных с теорией турбулентности, необходимо еще знакомство с основами метода вынуждения Коэна (форсинга) и самый минимальный запас сведений из теории множеств. Чтобы сделать эти доказательства более доступными, книга содержит дополнения А–Е. В дополнении А говорится несколько слов об общей теории множеств. В дополнениях Б–Е приводятся определения и утверждения из дескриптивной теории множеств, которые часто используются в доказательствах и касаются свойств борелевских множеств в польских пространствах и метода вынуждения Коэна для таких пространств.

Авторы благодарны рецензентам книги А. М. Вершику и Н. А. Кузнецову за ценные замечания и предложения, большинство из которых учтено в окончательном тексте. К сожалению, время, которым располагали авторы, не позволило расширить книгу за счет обсуждения родственных проблем эргодической теории — здесь авторы ограничились иллюстративными замечаниями.

Одновременно с этой книгой В. Г. Кановеем закончена подготовка электронной монографии [47], ориентированной на специалистов по теории множеств, в которой некоторые из рассмотренных здесь вопросов излагаются в более общих предположениях.

Работа авторов над книгой была частично поддержана грантами:

В. Г. Кановея — РФФИ 03-01-00757 и 06-01-00608,

В. А. Любецкого — РФФИ 07-01-00445, МНТЦ 2766 и ФЦНТП 37.053.11.0061.

Авторы посвящают книгу своим родителям.

1. СКОЛЬКО КЛАССОВ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИМЕЕТ ОТНОШЕНИЕ ВИТАЛИ?

Напомним определение: два вещественных числа $x, y \in \mathbb{R}$ *эквивалентны по Витали*, если их разность $x - y$ является рациональным числом. Отсюда возникает отношение эквивалентности, обозначаемое $\mathtt{Vit}$, так что $x \,\mathtt{Vit}\, y$, если $x - y \in \mathbb{Q}$. Классы $\mathtt{Vit}$-эквивалентности $[x]_{\mathtt{Vit}} = \{y \in \mathbb{R} : x \,\mathtt{Vit}\, y\}$ вещественных чисел являются орбитами действия аддитивной группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$, т.е. $[x]_{\mathtt{Vit}} = x + \mathbb{Q}$.

> Возникает вопрос: какова мощность фактормножества $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$, состоящего из всех классов эквивалентности $[x]_{\mathtt{Vit}}$, $x \in \mathbb{R}$?

Этот вопрос впервые прямо сформулировал Лузин [61] и ранее в несколько иной плоскости Серпинский [67].

1.1. Ответ из канторовой теории множеств

Следующая очень простая теорема дает ответ на этот вопрос с точки зрения канторовой теории множеств. Мощность континуума определяется как обычно: $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \mathtt{card}\,\mathbb{R} = \mathtt{card}\,2^{\mathbb{N}} = \mathtt{card}\,[0,1]$, где $[0,1]$ — замкнутый единичный интервал, множество всех вещественных чисел от 0 до 1.

Теорема 1.1. *Мощность множества* $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$ *в точности равна мощности континуума.*

Доказательство. *Часть 1.* Для доказательства $\mathtt{card}\,(\mathbb{R}/\mathtt{Vit}) \le \mathfrak{c}$ выберем по одному элементу в каждом классе $[x]_{\mathtt{Vit}}$, и пусть

X — множество таким образом выбранных элементов. Мощности X и $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$ совпадают: в самом деле, отображение $x \mapsto [x]_{\mathtt{Vit}}$ является биекцией X на $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$. В то же время $\mathtt{card}\, X \le \mathfrak{c}$, так как X — подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Часть 2: доказываем $\mathfrak{c} \le \mathtt{card}(\mathbb{R}/\mathtt{Vit})$. Здесь используется следующая лемма. Напомним, что совершенным называется непустое, топологически замкнутое и не имеющее изолированных точек множество — в любом топологическом пространстве. В данном случае в пространстве $\mathbb{R}$.

Лемма 1.2. *Существует совершенное подмножество P единичного отрезка $[0,1]$ из попарно $\mathtt{Vit}$-неэквивалентных элементов.*

Лемма влечет искомый результат. В самом деле, каждое совершенное подмножество $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума (см., например, теорему 1 на с. 140 книги П. С. Александрова [1]), так что $\mathtt{card}\, P = \mathfrak{c}$. С другой стороны, разные элементы P принадлежат разным $\mathtt{Vit}$-классам, и поэтому $\mathfrak{c} = \mathtt{card}\, P \le \mathtt{card}\, \mathbb{R}/\mathtt{Vit}$, что и требовалось.

Доказательство (лемма). Каждое число $0 \le x < 1$ допускает единственное представление в виде $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 2^{-k}$, где каждое $\alpha_k = \alpha_k(x)$ есть 0 или 1 и имеется бесконечно много коэффициентов $\alpha_k = 0$. Другими словами, речь идет о двоичном разложении числа x с недостатком.

Разобьем множество $U' = \{n^2 : 1 \le n\}$ на бесконечное число попарно непересекающихся бесконечных же множеств: $U' = U \cup U_1 \cup U_2 \cup \ldots$ Обозначим через P множество всех таких чисел $0 \le x < 1$, что

1) для всякого k, если $\alpha_k(x) = 1$, то $k \in U'$,
2) найдется хотя бы один индекс $k \in U$ такой, что $\alpha_k(x) = 1$,
3) $\alpha_m(x) = \alpha_k(x)$ всякий раз, когда $k \in U$ и $m \in U_k$.

Заметим, что если числа $x \ne y$ принадлежат P, то $\alpha_x(m) \ne \alpha_y(m)$ для бесконечно многих m, собственно, по крайней мере для всех m из некоторого одного множества U_k, $k \in U$. А поскольку $\alpha_x(m) \ne \alpha_y(m)$ влечет $m \in U'$, где по определению U'

— достаточно разреженное множество в $\mathbb{N}$, разность $y - x$ любых двух точек $x \neq y$ в P иррациональна. Итак, множество P является попарно $\mathtt{Vit}$-неэквивалентным.

Наконец, множество P — совершенное в $\mathbb{R}$: мы оставим несложное доказательство этого положения читателю.

$\square$ (лемма и теорема)

1.2. Эффективные и неэффективные описания объектов

Теорема 1.1 вместе с ее доказательством не исчерпывают *все* аспекты вопроса о мощности фактормножества $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$. А именно, доказательство неравенства $\mathfrak{c} \leq \mathtt{card}\,(\mathbb{R}/\mathtt{Vit})$ эффективно в том смысле, что сводится к построению явно описанной непрерывной инъекции $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, множество $P = \mathtt{ran}\, f$ всех значений которой (т.е. множество P леммы 1.2) состоит из попарно $\mathtt{Vit}$-неэквивалентных элементов. Тем самым, явно описывается инъекция $F : 2^{\mathbb{N}} \to (\mathbb{R}/\mathtt{Vit})$ как $F(a) = [f(a)]_{\mathtt{Vit}}$.

Напротив, доказательство обратного неравенства $\mathtt{card}\,(\mathbb{R}/ /\mathtt{Vit}) \leq \mathfrak{c}$ хотя и много короче, но неэффективно: оно включает использование аксиомы выбора для выбора по одному элементу в каждом $\mathtt{Vit}$-классе. Множество X из доказательства этого неравенства не имеет конкретного индивидуального описания, и не видно, как такое описание можно получить, например, за счет более аккуратного проведения этого доказательства. В случаях, когда в описании множества используется аксиома выбора,[1] говорят, что объект (в данном случае множество) описан *неэффективно*. Это относится и к множеству X из доказательства теоремы. Когда объект описан без аксиомы выбора, как функция f в доказательстве теоремы, говорят, что объект описан *эффективно*.

Таким образом, если связывать понятие мощности лишь с эффективно заданными отображениями множеств, теорема 1.1

[1] Обычно исключение делается только для важной *счетной* аксиомы выбора.

решает вопрос о мощности фактормножества $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$ только в одну сторону, а именно, $\mathfrak{c} \le \mathtt{card}\,(\mathbb{R}/\mathtt{Vit})$.

Конечно, чтобы ставить вопрос об эффективном существовании объекта в математически точной форме, нужно сначала привести математически точное определение эффективности. Здесь возможны разные подходы. Например, в очень широком плане, эффективность можно понимать как возможность определить объект какой-то формулой теории множеств, содержащей лишь ординалы и вещественные числа в качестве параметров определения, в этом смысле говорят о ROD-определимости (от real-ordinal definable) (см. [4] или [5]). Свои понятия эффективности разработаны в других областях теории множеств. В обычной же математике гораздо удобнее понимать эффективность объекта как его принадлежность к классу **борелевских**[2] множеств того пространства (или одного из тех пространств), которое естественно связано с рассматриваемой задачей.

1.3. Классов Витали строго больше чем континуум

Вернемся к предмету дискуссии — неравенствумощностей $\mathtt{card}\,(\mathbb{R}/\mathtt{Vit}) \le \mathfrak{c}$, и попробуем найти его «борелевскую» форму.

Напомним, что *борелевской* называется функция, график которой — борелевское множество (в произведении соответствующих пространств). Представляется невозможным говорить о борелевской инъекции из $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$ в $\mathbb{R}$ потому, что классы Витали не образуют разумного топологического пространства. Однако можно говорить о борелевских функциях $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые можно *поднять* до $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$, т.е. для которых можно определить $\widehat{\vartheta}([x]_{\mathtt{Vit}}) = \vartheta(x)$ для каждого $x \in \mathbb{R}$. Понятно, что условие *инвариантности*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x\,\mathtt{Vit}\,y \Longrightarrow \vartheta(x) = \vartheta(y)) \tag{1}$$

необходимо и достаточно для корректности определения *поднятия* $\widehat{\vartheta}$, а требование, чтобы $\widehat{\vartheta}$ была еще и инъекцией из $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$ в $\mathbb{R}$, выражается так:

[2] См. раздел Б дополнения о борелевских множествах и функциях.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x \,\mathtt{Vit}\, y \iff \vartheta(x) = \vartheta(y)). \tag{2}$$

Получаем следующий отрицательный результат, основанный на трансляционной инвариантности меры Лебега.

Теорема 1.3. (i) *Любая борелевская функция $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая* (1), *является почти константой в том смысле, что найдётся множество $X \subseteq \mathbb{R}$ полной лебеговой меры*[3] *такое, что ϑ — константа на X.*

(ii) *Нет борелевских функций $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих* (2).

Доказательство. Понятно, что (ii) следует из (i): любое множество полной меры несчетно, а потому содержит пару Vit-неэквивалентных элементов. Для доказательства (i), пусть ϑ — борелевская функция, удовлетворяющая (1). Тогда $X_r = \{x \in \mathbb{R} : \vartheta(x) = r\}$ — борелевское подмножество $\mathbb{R}$ для любого вещественного r. Кроме того, из (1) следует, что каждое X_r Vit-инвариантно, т.е. $X_r = q + X_r$ для каждого $q \in \mathbb{Q}$. То же самое справедливо и для множеств $X_{<q} = \bigcup_{r<q} X_r$ и $X_{\le q} = \bigcup_{r \le q} X_r$.

Нам нужен следующий факт об инвариантных множествах:

Утверждение 1.4. *Если борелевское или хотя бы измеримое по Лебегу множество $X \subseteq \mathbb{R}$ является* Vit*-инвариантным, то оно имеет либо нулевую либо полную меру Лебега.*

Доказательство. Обозначим через $\mu(Y)$ лебегову меру множества $Y \subseteq \mathbb{R}$. Если $\mu(X) > 0$, то найдется рациональный интервал I такой, что $\mu(I \cap X) = 4\varepsilon > 0$. Имеется замкнутое, а тогда и компактное множество $F \subseteq I \cap X$ такое, что $\mu(F) \ge 3\varepsilon$. Мы можем накрыть F счетным, а следовательно и конечным в силу компактности, объединением U открытых рациональных интервалов общей меры $\mu(U) \le 5\varepsilon$. Ясно, что среди этих интервалов найдется по крайней мере один рациональный интервал J такой, что $\frac{\mu(F \cap J)}{\mu(J)} \ge \frac{3}{5}$, а потому и $\frac{\mu(X \cap J)}{\mu(J)} \ge \frac{3}{5}$. Вследствие Vit-инвариантности X можно считать, что J есть интервал вида $(0, r)$, где $r_1 = \frac{k}{n} > 0$ — рациональное число. Тогда, по той же инвариантности, $\mu(X \cap (0, km) > \frac{3}{5}km$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

[3] В том смысле, что его дополнение $\complement X = \mathbb{R} \smallsetminus X$ имеет нулевую меру.

Аналогично, если дополнение $Z = \mathbb{R} \smallsetminus X$ имеет меру $\mu(Z){>}0$, то найдется такое натуральное k', что $\mu(X \cap (0, k'm') > \frac{3}{5}k'm'$ для любого $m' \in \mathbb{N}$.

Возьмем $m = k'$ и $m' = k$ — тогда для одного и того же интервала $I = (0, kk')$ длины kk' каждое из взаимно дополнительных множеств X, Z имеет меру $\geq \frac{3}{5}kk'$, что является противоречием.

□ (Утверждение)

Возвращаясь к доказательству теоремы 1.3, мы можем заключить из утверждения 1.4, что каждое из множеств $X_{<q}$ имеет либо нулевую либо полную меру. Поскольку $\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} X_{<q} = \emptyset$ и $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} X_{<q}{=}\mathbb{R}$, из счетной аддитивности меры следует, что имеются $X_{<q}$ нулевой меры и имеются $X_{<q}$ полной меры. Благодаря дедекиндовой полноте, найдется вещественное α такое, что $\mu(X_{<q}) = 0$ — множество нулевой меры для всех $q < \alpha$ и $X_{<q}$ — множество полной меры для всех $q > \alpha$.

Однако $X_{<\alpha} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q},\, q<r} X_{<q}$, так что само $X_{<\alpha}$ — множество нулевой меры. По аналогичной причине множество $X_{\leq\alpha} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q},\, q>r} X_{<q}$ имеет полную меру. Значит, $X_\alpha = X_{\leq\alpha} \smallsetminus X_{<\alpha}$ — также множество полной меры. □

Итак, согласно пункту (ii) теоремы 1.3 неравенство $\mathtt{card}(\mathbb{R}/\mathtt{Vit}) \leq \mathfrak{c}$ не может быть подтверждено никаким борелевским отображением. Можно заключить, что борелевская мощность фактормножества $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$ строго больше континуума. Заметим, что обратное неравенство $\mathfrak{c} \leq \mathtt{card}(\mathbb{R}/\mathtt{Vit})$ подтверждается даже непрерывной инъекцией из $2^{\mathbb{N}}$ в $\mathbb{R}$, см. §1.2.

Утверждение (i) теоремы 1.3 относится к элементарной эргодической теории; ниже рассматриваются аналоги этого утверждения для некоторых других отношений эквивалентности.

Упражнение 1.5 (Витали). *Трансверсалью* отношения эквивалентности E называется любое множество в области E, пересекающее каждый E-класс ровно по одной точке. Докажите, что отношение $\mathtt{Vit}$ не имеет борелевской трансверсали, и даже трансверсали, измеримой по Лебегу.

Указание. Если борелевское $X \subseteq \mathbb{R}$ является трансверсалью для $\mathtt{Vit}$, то отображение $\vartheta(x) = x'$, где x' — единственный элемент пересечения $[x]_{\mathsf{E}} \cap X$, доставляет контрпример к теореме 1.3(ii). Чтобы получить прямое независимое доказательство, покажите, что если трансверсаль X измерима по Лебегу, то каждый ее сдвиг $X_q = \{x + q : x \in X\}$ измерим и имеет ту же меру. Однако $\mathbb{R} = = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} X_q$, а потому X имеет строго положительную меру. Пересечение $Y = X \cap [a, b]$ с одним из отрезков вещественной прямой также имеет меру $\varepsilon > 0$. Ту же меру ε имеет и любое множество вида $Y_q = \{y + q : y \in Y\}$. В то же время, объединение $U = \bigcup_{q\in\mathbb{Q},\, 0\le q\le 1} Y_q$ имеет бесконечную меру как бесконечное объединение дизъюнктных множеств одинаковой ненулевой меры. Но U является подмножеством интервала $[a - 1, b + 1]$. □

Упражнение 1.6. Рассмотрите отношение эквивалентности E, определенное на вещественной прямой $\mathbb{R}$ условием: $x \,\mathsf{E}\, y$, если разность $x - y$ есть *целое* число. Если $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$ понимать с алгебраической точки зрения как $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, то фактормножество $\mathbb{R}/\mathsf{E}$ естественно понимается как $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Докажите, что единичный полуинтервал $X = [0, 1)$ является борелевской трансверсалью для E. Для каждого вещественного x обозначим через $\vartheta(x)$ то единственное число $x' \in X$, для которого $x - x'$ — целое. Докажите, что ϑ — борелевская функция, причем $x \,\mathsf{E}\, y$ эквивалентно равенству $\vartheta(x) = \vartheta(y)$. Выведите, что борелевская мощность $\mathbb{R}/\mathsf{E}$ равна континууму. □

Отношение E из 1.6 относится к простейшему типу *гладких* отношений эквивалентности среди рассматриваемых дескриптивной динамикой, а внутри него — к более простому подклассу отношений, имеющих борелевскую трансверсаль. Отношение Витали $\mathtt{Vit}$ относится к более сложному классу *гиперконечных негладких* отношений. См. об этом главу 6.

Упражнение 1.7. Докажите аналоги 1.3, 1.4, 1.5 для категории вместо меры: например, любое $\mathtt{Vit}$-инвариантное множество, имеющее свойство Бэра — либо тощее либо котощее.[4] □

[4] *Тощими* (или синоним: первой категории) называются счетные объединения нигде не плотных множеств. *Котощими* называются дополнительные к тощим множества.

1.4. Борелевская сводимость

Метод, намеченный в § 1.3 для сравнения борелевской мощности фактормножества $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$ и континуума, сразу ведет к вопросу о том, как сравнивать борелевские мощности подобных фактормножеств между собой. Кстати, континуум $\mathbb{R}$ и $2^{\mathbb{N}}$ — также фактормножества по равенству, рассматриваемому как отношение эквивалентности.

Предположим, что $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — два польских пространства — во многих случаях можно считать, что $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ суть полные сепарабельные метрические пространства. Рассмотрение в книге именно категории польских пространств связано как с применимостью в этом случае основных методов дескриптивной теории множеств, так и с характером приложений.

Допустим, что E и F являются отношениями эквивалентности на соответственно множествах $X \subseteq \mathbb{X}$ и $Y \subseteq \mathbb{Y}$. Ниже в качестве областей X, Y рассматриваемых отношений эквивалентности будут фигурировать, как правило, *борелевские* множества[5], а чаще всего сами пространства $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$. Соответственно, будут рассматриваться главным образом *борелевские* отношения эквивалентности, т. е. такие отношения E, которые являются борелевскими множествами как множества пар $\{\langle x, y\rangle : x \mathrel{\mathsf{E}} y\}$. Рассматриваются и в том же смысле *аналитические* отношения эквивалентности — это более широкий класс, включающий, в частности, все отношения эквивалентности, индуцированные борелевскими действиями борелевских групп.

[5] Конечно, X и Y могут не быть полными пространствами в наследуемой метрике. Более того, по метризационной теореме Александрова–Хаусдорфа, X и Y метризуемы полной метрикой, если только они являются множествами класса $\mathbf{G}_\delta$. Однако известно, см. [52], что любое борелевское множество X польского пространства $\mathbb{X}$ допускает метрику d такую, что: 1) d — польская метрика, 2) d-топология на X включает (в смысле включения семейства открытых множеств) топологию, наследуемую из $\mathbb{X}$, 3) d-борелевские множества — те же самые, что и борелевские подмножества X в смысле топологии $\mathbb{X}$. Другими словами, борелевские множества в польских пространствах сами являются польскими пространствами с точки зрения их борелевской структуры (но не топологии или метрики, кроме особых случаев).

Идея сравнения борелевских мощностей фактормножеств X/E и Y/F заключена в соотношении (2) на стр. 13. Заменим в нем Vit на E и равенство в правой части на F, и получим следующее определение.

Определение 1.8. *Редукцией* отношения эквивалентности E на множестве X к отношению эквивалентности F на множестве Y называется любое отображение $\vartheta : X \to Y$ для которого $x \mathrel{\mathsf{E}} y \iff \vartheta(x) \mathrel{\mathsf{F}} \vartheta(y)$ для всех $x, y \in X$.

Если, кроме того, X, Y являются борелевскими множествами в каких-то топологических пространствах, то соотношение $\mathsf{E} \le_{\mathsf{B}} \mathsf{F}$ (словами: E *борелевски сводится* к F) означает, что существует **борелевская** функция $\vartheta : X \to Y$, являющаяся редукцией отношения E к F. □

Итак, отображение $\vartheta : X \to Y$ — редукция E к F, если каждый E-класс $[x]_{\mathsf{E}} = \{x' \in X : x \mathrel{\mathsf{E}} x'\}$, $x \in X$, целиком отображается внутрь некоторого F-класса $[y]_{\mathsf{F}}$, $y \in Y$, причем разные E-классы отображаются в разные F-классы. Другими словами, функция ϑ индуцирует *инъекцию* $\widehat{\vartheta}$ фактормножества X/E в фактормножество Y/F, определяемую равенством $\widehat{\vartheta}([x]_{\mathsf{E}}) = [y]_{\mathsf{F}}$, когда $\vartheta(x) = y'$ для какого-то $y' \in [y]_{\mathsf{F}}$. Таким образом, отображение ϑ показывает, что канторова мощность множества X/E мажорируется канторовой мощностью множества Y/F. А поскольку отображение ϑ предполагается борелевским, то неравенство $\mathsf{E} \le_{\mathsf{B}} \mathsf{F}$ мы естественно понимаем в том смысле, что борелевская мощность фактормножества X/E мажорируется борелевской мощностью фактормножества Y/F. В этой связи иногда даже пишут $X/\mathsf{E} \le_{\mathsf{B}} Y/\mathsf{F}$ вместо $\mathsf{E} \le_{\mathsf{B}} \mathsf{F}$.

Таким образом, аналогично понятию мощности в канторовской теории множеств, борелевская мощность фактормножества X/E не определяется как конкретный математический объект, скорее дается конкретное математическое определение того, что борелевская мощность множества X/E мажорируется борелевской мощностью Y/F — через существование борелевской редукции $\vartheta : X \to Y$ отношения E к F.

Предложение 1.9. $\le_{\mathsf{B}}$ — *отношение частичного порядка на совокупности всех борелевских отношений эквивалентности* E

на борелевских множествах польских пространств, т. е. $\mathsf{E} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ *для всех* E *и* $\mathsf{E} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{F} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{G}$ *влечет* $\mathsf{E} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{G}$ *для всех* $\mathsf{E}, \mathsf{F}, \mathsf{G}$. [6]

Доказательство. Редукцией E к самому себе служит тождественное отображение. Если E, F, G заданы на борелевских множествах, соответственно, X, Y, Z, а $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — борелевские редукции E к F и F к G, то суперпозиция $h(x) = g(f(x))$ является редукцией E к G. Из теории борелевских функций известно, что этот класс замкнут относительно суперпозиций. □

Несколько слов о возможных альтернативных определениях борелевской сводимости отношений эквивалентности.

1. Можно было бы попытаться изменить определение, допустив многозначную сводимость. Назовем *многозначной редукцией* отношения эквивалентности E на множестве X к отношению F на множестве Y любое множество $R \subseteq X \times Y$, для которого $\mathtt{dom}\, R = X$ и выполняется $x \mathrel{\mathsf{E}} x' \iff y \mathrel{\mathsf{F}} y'$ всякий раз, когда пары $\langle x, y\rangle$ и $\langle x', y'\rangle$ принадлежат R. Такое множество R (а его можно понимать как многозначную функцию из X в Y) также очевидным образом определяет инъективное вложение фактормножеств, так что можно было бы определить борелевскую сводимость через существование борелевской многозначной редукции. Однако в этом случае предложение 1.9 перестает быть верным, поскольку суперпозиция двух борелевских многозначных функций не обязательно будет борелевской!

2. Более радикальной была бы попытка вообще дать определение сводимости в терминах борелевских вложений фактормножеств, не обращаясь к борелевским отображениям самих пространств. Следует начать с определения борелевской алгебры для области вида X/E, где E — отношение эквивалентности на борелевском множестве X польского пространства $\mathbb{X}$.

Можно попробовать воспользоваться стандартной фактортопологией в X/E, где открытыми являются все множества $A \subseteq X/\mathsf{E}$, для которых $U = \bigcup A$ открыто в X. (Пояснение: множество A состоит из классов E-эквивалентности точек $x \in X$, а множество $U = \bigcup A$, т. е. объединение всех классов из A, состоит из самих точек. Множество U, очевидно, E-инвариантно в X, т. е. $x \in U$ эквивалентно $y \in U$ всякий раз, когда $x, y \in X$ и $x \mathrel{\mathsf{E}} y$.) Этот путь, однако, не примемлем,

[6] Заметим, что $\leq_{\mathrm{B}}$ **не** удовлетворяет требованию антисимметричности, состоящему в том, что если $\mathsf{E} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ и $\mathsf{F} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, то $\mathsf{E} = \mathsf{F}$, даже если понимать равенство в смысле, например, изоморфизма. В таких случаях иногда говорят о частичном *предпорядке*, или *квазипорядке*, а не о порядке.

так как во многих важных случаях эта топология, как и основанная на ней борелевская алгебра, оказывается просто тривиальной. Например, вещественная прямая $\mathbb{R}$ не имеет открытых $\mathtt{Vit}$-инвариантных множеств, кроме пустого и самой $\mathbb{R}$, соответственно, открытыми в фактортопологии $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$ будут только $\emptyset$ и $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$.

3. Другой вариант состоит в прямом определении борелевской алгебры в X/E. Примем, что борелевскими в в X/E являются все множества $A \subseteq X/\mathsf{E}$, для которых множество $U = \bigcup A$ является борелевским в X. Эта борелевская алгебра, например, в $\mathbb{R}/\mathtt{Vit}$ будет достаточно богатой — конечно, много богаче, чем указанная тривиальная топология, хотя и всё равно отчасти вырожденной, поскольку инвариантные борелевские множества имеют нулевую либо полную лебегову меру по утверждению 1.4. Если задано еще одно фактормножество Y/F того же вида, то борелевскую алгебру можно определить и там, и кроме того можно дать определение *борелевской функции* как такой $f : X/\mathsf{E} \to Y/\mathsf{F}$, что множество $R_f = \{\langle x, y\rangle \in X \times Y : f([x]_{\mathsf{E}}) = [y]_{\mathsf{F}}\}$ (многозначная функция из X в Y) является борелевским. Таким образом, речь идет о модификации определения из п. 1, с дополнительным требованием *инвариантности* R по второму аргументу: если $\langle x, y\rangle \in R$ и $y' \in Y$, $y \mathbin{\mathsf{F}} y'$, то $\langle x, y'\rangle \in R$. Приходим, однако, к той же проблеме с замкнутостью полученного класса отображений относительно суперпозиции.

4. Наконец, вместо борелевских можно рассматривать *B-измеримые* отображения, т. е. такие функции $f : X/\mathsf{E} \to Y/\mathsf{F}$, что f-прообраз любого борелевского множества в Y/F является борелевским в X/E. В этом случае проблемы с суперпозицией, очевидно, не возникает. Однако, с другой стороны, не видно и подходящего инструментария для работы с таким определением, поскольку свести это определение к какому-то типу многозначных борелевских функций не удается. Короче, и этот альтернативный подход, похоже, ведет в никуда.

1.5. Двусторонняя сводимость

Определим несколько производных соотношений между отношениями эквивалентности. Начнем со следующих двух:

$\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, если $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ и $\mathsf{F} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, — *борелевская би-сводимость*, или *борелевская эквивалентность*;

$\mathsf{E} <_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, если $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, но не $\mathsf{F} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, — *строгая сводимость*.

Соотношение $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ означает, что факторможества X/E и Y/F инъективно вкладываются друг в друга посредством борелевских отображений, так что борелевские мощности фактор-множеств X/E и Y/F признаются равными. Соответственно, $\mathsf{E} <_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ означает строгое неравенство между борелевскими мощностями.

Отметим, что равенство борелевских мощностей определено нами через комбинацию двух противоположных неравенств, а не через существование определенного рода биекции, как для мощностей в канторовской теории множеств. Здесь имеет место различие с теорией канторовых мощностей. В последней из наличия инъекций (взаимно однозначных отображений) $f : A \to B$ и $g : B \to A$ по теореме Кантора–Бернштейна следует существование биекции $\beta : A \xrightarrow{\text{на}} B$. Однако в случае, когда $A = X/\mathsf{E}$, $B = Y/\mathsf{F}$, $f = \bar{\vartheta}$, $g = \bar{\tau}$, а ϑ и τ являются борелевскими редукциями соответственно E к F и F к E, доказательство теоремы Кантора–Бернштейна, конечно, дает биекцию из X/E на Y/F, но не приводит к борелевской биекции X на Y, в обе стороны сводящей E и F друг к другу, т.е. не приводит к борелевскому изоморфизму (о котором см. ниже). **Упражнение**: проанализируйте доказательство теоремы Кантора–Бернштейна в указанном случае.

Упражнение 1.10. Докажите, что соотношение $\sim_{\mathrm{B}}$ само является отношением эквивалентности. □

Наряду с $\sim_{\mathrm{B}}$, имеется еще и соотношение *борелевского изоморфизма* $\mathsf{E} \cong_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, означающее, что существует борелевская биекция $\vartheta : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, которая является редукцией E к F — тогда обратная функция $\vartheta^{-1} : Y \xrightarrow{\text{на}} X$, очевидно, является борелевской редукцией F к E. Понятно, что $\mathsf{E} \cong_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ влечет $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, но обратное неверно. Например, возьмите $X = \{0\}$ с отношением $0 \,\mathsf{E}\, 0$ и $Y = \{0, 1\}$ с отношением $0 \,\mathsf{F}\, 1$.

Суммируем рассуждения в §1.1–1.3 в следующем следствии.

Следствие 1.11. $\Delta_{\mathbb{R}} <_{\mathrm{B}} \mathtt{Vit}$ *строго, где* $\Delta_{\mathbb{R}}$ *— равенство на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Неравенство $\Delta_{\mathbb{R}} \le_{\mathrm{B}} \mathtt{Vit}$ фактически установлено доказательством леммы 1.1 (часть 2). А теорема 1.3(ii) показывает, что обратное соотношение не имеет места. □

Закончим этот раздел еще несколькими родственными определениями.

Непрерывная сводимость $\mathsf{E} \le_{\mathrm{C}} \mathsf{F}$ означает, что существует **непрерывная** редукция отношения E к F. В аналогичном смысле понимаются соотношения $<_{\mathrm{C}}$ и $\sim_{\mathrm{C}}$. Непрерывная сводимость — более сильное требование, чем борелевская, но в ряде случаев вторая влечет первую, см. теорему 2.12 ниже.

Соотношение $\mathsf{E} \sqsubseteq_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ означает, что существует борелевское *вложение*, т.е. взаимно однозначная (борелевская) редукция E к F. Следует отметить, что вообще редукция по определению не обязана быть взаимно однозначной функцией, хотя она и осуществляет взаимно однозначное отображение на уровне классов эквивалентности. Соответственно, $\mathsf{E} \sqsubseteq_{\mathrm{C}} \mathsf{F}$ означает, что существуют **непрерывное** вложение.

Наконец, верхний индекс i, добавленный к значку $\le$ или $\sqsubseteq$, означает, что образ отображения редукции или вложения является инвариантным множеством. Здесь, если F — отношение эквивалентности на множестве Y, то подмножество $Y' \subseteq Y$ называется F-*инвариантным*, если выполняется $[y]_{\mathsf{F}} \subseteq Y'$ для любого элемента $y \in Y'$. Например, соотношение $\mathsf{E} \sqsubseteq^{\mathrm{i}}_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ означает, что существует борелевское *инвариантное* вложение, т.е. такое вложение ϑ что его область значений $\mathtt{ran}\,\vartheta = \{\vartheta(x) : x \in X = \mathtt{dom}\,\mathsf{E}\}$ является F-*инвариантным* множеством. В сущности это означает, что ϑ есть борелевский изоморфизм отношения E и ограничения $\mathsf{F} \restriction \mathtt{ran}\,\vartheta$ отношения F на F-инвариантную часть области F.

Упражнение 1.12. Докажите, что соотношения $\le_{\mathrm{C}}$, $\sqsubseteq^{\mathrm{i}}_{\mathrm{B}}$, и им подобные, являются частичными порядками в смысле 1.9. □

1.6. Сводимость почти всюду

Подчеркнем, что в определении редукции в 1.8 требуется, чтобы эквивалентность $x \mathrel{\mathsf{E}} y \iff \vartheta(x) \mathrel{\mathsf{F}} \vartheta(y)$ была выполнена именно для всех точек $x, y \in X$. Отдельный интерес, в особенности в тех областях математики, которые связаны с теорией меры, представляет та модификация данного определения, которая требует, чтобы указанная эквивалентность была выполнена для «почти всех», в каком-то конкретном смысле, точек x, y.

Например, предположим, что на X задана *вероятностная мера* μ, т.е. требуется, чтобы счетно аддитивная мера μ была определена на всех борелевских подмножествах множества X и удовлетворяла $\mu(X) = 1$. В этом случае, отображение $\vartheta : X \to Y$ называется *редукцией почти всюду* отношения эквивалентности E на множестве X к отношению эквивалентности F на множестве Y, когда эквивалентность $x \mathsf{E} y \iff \vartheta(x) \mathsf{F} \vartheta(y)$ выполнена для всех x, y из некоторого множества $X' \subseteq X$ полной μ-меры.

Если и на Y задана некоторая вероятностная мера ν, то можно говорить об *изоморфизме почти всюду*, т.е. о сохраняющей меру (в смысле: переводящей μ в ν) биекции $\vartheta : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, для которой указанная эквивалентность выполнена для всех x, y из некоторого множества полной μ-меры.

Этот значительно более широкий класс отображений сводимости и порождаемая им структура изучаются в основном в рамках эргодической теории, и в рамках настоящей книги, в общем, не рассматривается. Впрочем, только для иллюстрации тех изменений, к которым в этих вопросах ведет пренебрежение множеством меры 0, ниже приводится одно замечание в связи с теоремой Дая, см. §6.6.

Известны и модификации, основанные на определении выполнимости «почти всюду» в терминах не меры, а категории. Например, изменим определение редукции так, чтобы эквивалентность $x \mathsf{E} y \iff \vartheta(x) \mathsf{F} \vartheta(y)$ требовалась для всех точек x, y из некоторого котощего множества. Такие модификации вызывают относительно меньший интерес, однако они находят определенные технические приложения в тех вопросах, которые здесь действительно рассматриваются, в частности, для решения некоторых проблем борелевской несводимости в связи с турбулентными действиями групп, см. главу 9.

2. ИДЕАЛЫ И ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Итак, мы будет заниматься сравнением борелевских мощностей фактор-множеств $\mathbb{X}/\mathsf{E}$, где E — борелевское отношение эквивалентности на каком-то польском пространстве $\mathbb{X}$. Это сравнение, как уже отмечалось выше, производится в терминах борелевской сводимости $\le_{\mathrm{B}}$ соответствующих отношений эквивалентности E. В этой главе выясняется один общий и математически важный источник борелевских отношений эквивалентности.

Рассматривая подмножества какого-то фиксированного множества A, естественно трактовать множества $x, y \subseteq A$ как эквивалентные, если они мало отличаются друг от друга; мерой отличия служит *симметрическая разность* $x \,\Delta\, y = (x \smallsetminus y) \cup (y \smallsetminus x)$ этих множеств, а мерой малости — принадлежность к заранее выбранному идеалу на A.

2.1. Отношения эквивалентности, порожденные идеалами

Напомним, что *идеалом* на множестве A называется всякое множество $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(A)$ [1] , которое содержит пустое множество $\emptyset$ и, кроме того,

1) $\subseteq$-замкнуто, т.е. $x \in \mathscr{I}$, если $x \subseteq y$ и y принадлежит $\mathscr{I}$,

2) $\cup$-замкнуто, т.е. $x \cup y \in \mathscr{I}$, если x и y принадлежат $\mathscr{I}$.

Условие $\subseteq$-замкнутости означает, что идеал может служить в качестве критерия малости для подмножеств A.

[1] $\mathscr{P}(A) = \{x : x \subseteq A\}$ есть *множество-степень* множества A.

Обычно рассматриваются только *нетривиальные* идеалы $\mathscr{I}$, которые содержат все одноэлементные множества $\{a\} \subseteq A$ и не содержат само множество A. В этом случае $\mathscr{I}$ содержит и все конечные множества $x \subseteq A$, не содержит ни одного ко-конечного множества, само A бесконечно и $A = \bigcup \mathscr{I}$. Множество A называется *областью* нетривиального идеала $\mathscr{I}$. Если $A \in \mathscr{I}$ то, очевидно, $\mathscr{I} = \mathscr{P}(A)$.

Определение 2.1. Допустим, что $\mathscr{I}$ — идеал над множеством A. Отношение эквивалентности $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ на $\mathscr{P}(A)$ определяется условием: $x \mathsf{E}_{\mathscr{I}} y$, если симметрическая разность $x \Delta y$ принадлежит $\mathscr{I}$. □

Упражнение 2.2. Докажите, что $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ — отношение эквивалентности. Например, рефлексивность $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ следует из $\emptyset \in \mathscr{I}$. □

Иногда удобнее рассматривать $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ как отношение эквивалентности на множестве функций 2^A, определенное следующим образом:

$$f \mathsf{E}_{\mathscr{I}} g, \quad \text{если} \quad f \Delta g \in \mathscr{I},$$

где

$$f \Delta g = \{a \in A : f(a) \neq g(a)\}.$$

Переход от области $\mathscr{P}(A)$ к области 2^A осуществляется через *характеристические функции* $\chi_x \in 2^A$ множеств $x \subseteq A$. Напомним, что χ_x определена условием $\chi_x(a) = 1$ при $a \in x$ и $\chi_x(a) = 0$ при $a \in A \smallsetminus x$. Таким образом, отображение $x \mapsto \chi_x$ является биекцией $\mathscr{P}(A)$ на 2^A.

Теперь рассмотрим топологический аспект. Каждое множество вида 2^A можно рассматривать как топологическое пространство с топологией произведения. Другими словами, топология пространства 2^A порождена конечными пересечениями множеств вида $\{x \in 2^A : x(a) = i\}$, где $a \in A$ и $i = 0, 1$. Тогда топологическое пространство 2^A компактно, а при счетном множестве A, как это и будет всегда ниже, еще и сепарабельное полное метрическое, т.е. 2^A — *польское* пространство.

Естественно, и $\mathscr{P}(A)$ становится польским пространством с помощью отображения $x \mapsto \chi_x$. Топология $\mathscr{P}(A)$ порождена конечными пересечениями множеств вида $\{x \subseteq A : i \in x\}$ и $\{x \subseteq A : i \in x\}$, где $a \in A$. Итак, будем рассматривать борелевские множества в пространствах 2^A и $\mathscr{P}(A)$, борелевские отношения на этих пространствах, их борелевские редукции.

Напомним, что *тощим* (или первой категории) называется множество, которое является счетным объединением нигде не плотных множеств. Множества, дополнительные к тощим, называются *котощими*.

Лемма 2.3. *Каждый нетривиальный борелевский идеал $\mathscr{I}$ на $\mathbb{N}$ является тощим подмножеством $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.*

Доказательство. Иначе $\mathscr{I}$ станет котощим на одной из непустых базовых окрестностей вида $U = \{x \subseteq \mathbb{N} : u \subseteq x \wedge v \cap x = \emptyset\}$, где $u, v \subseteq \mathbb{N}$ — конечные дизъюнктные множества. Для каждой точки $x \in U$ положим $\tilde{x} = u \cup ((\mathbb{N} \setminus v) \setminus x)$ (дополнение в смысле структуры U). Легко видеть, что отображение $x \mapsto \tilde{x}$ есть гомеоморфизм множества U на себя, а потому $X = \{\tilde{x} : x \in \mathscr{I} \cap U\}$ — снова котощее подмножество U. Значит, множества $\mathscr{I} \cap U$ и X имеют общую точку, скажем $y = \tilde{x}$, где $x \in \mathscr{I} \cap U$. Тогда $z = x \cup y$ принадлежит $\mathscr{I}$ по определению идеала. Однако z, очевидно, ко-конечное множество в $\mathbb{N} \setminus v$. Само же v также принадлежит $\mathscr{I}$ из предположения о нетривиальности $\mathscr{I}$. Значит, $z \cup v = \mathbb{N}$ принадлежит $\mathscr{I}$; противоречие. $\square$

Упражнение 2.4. Пусть $\mathscr{I}$ — борелевский идеал в пространстве $\mathscr{P}(A)$. Докажите, что $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ — борелевское отношение эквивалентности. $\square$

Сводимость идеалов. Если $\mathscr{I}, \mathscr{J} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ — борелевские идеалы, то соотношение $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{J}}$ между соответствующими отношениями эквивалентности рассматривается как своего рода сводимость между идеалами. Имеются и специальные отношения между идеалами, которые обеспечивают неравенство $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{J}}$ и связаны со структурой идеалов более тесно. Следующее определение известно как *сводимость* (или порядок) *по Рудин*[2] *– Блассу*: $\mathscr{I} \le_{\text{RB}} \mathscr{J}$, если существует семейство $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ непустых попарно дизъюнктных конечных множеств $w_i \subseteq \mathbb{N}$, для которого $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} w_i = \mathbb{N}$ и выполняется эквивалентность $x \in \mathscr{I} \iff w_x = \bigcup_{i\in x} w_i \in \mathscr{J}$ для всех $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Опустив требование $\bigcup_{i\in x} w_i = \mathbb{N}$, получим *модифицированный* вариант этой сводимости, который обозначим $\mathscr{I} \le^{+}_{\text{RB}} \mathscr{J}$. Более сильный вариант $\mathscr{I} \le^{++}_{\text{RB}} \mathscr{J}$ требует в дополнение к $\mathscr{I} \le^{+}_{\text{RB}} \mathscr{J}$, чтобы множества w_i удовлетворяли условию $\max w_i < \min w_{i+1}$.

Упражнение 2.5. Пусть $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ — идеалы на $\mathbb{N}$. Докажите, что соотношение $\mathscr{I} \le^{+}_{\text{RB}} \mathscr{J}$ (самое слабое из трех вариантов) влечет $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \le_{\text{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{J}}$. □

2.2. Примеры

Имеется несколько идеалов, которые часто рассматривают в контексте борелевской сводимости. Для тривиального «пустого» идеала $\mathscr{I} = \{\emptyset\}$ на данном множестве A, очевидно, $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} = \Delta_A$. В дальнейшем предполагается, что все одноэлементные множества $\{a\}$, $a \in A$, принадлежат $\mathscr{I}$, — тогда, в частности, $A = \bigcup \mathscr{I}$. Итак, перечислим несколько идеалов:

- тривиальный идеал $\{\emptyset\}$, иногда обозначаемый 0;
- $\mathsf{Fin} = \{x \subseteq \mathbb{N} : x \text{ конечно}\}$, идеал конечных подмножеств $\mathbb{N}$, часто называемый также *идеалом Фреше*;
- $\mathscr{I}_1 = \{x \subseteq \mathbb{N}^2 : \{k : (x)_k \ne \emptyset\} \in \mathsf{Fin}\}$;
- $\mathscr{I}_3 = \{x \subseteq \mathbb{N}^2 : \forall k\, ((x)_k \in \mathsf{Fin})\}$.

Здесь $(x)_a = \{b : \langle a, b\rangle \in x\}$ — *сечение* множества x, состоящего из пар.

[2] Мэри Эллен Рудин (Rudin), американский математик, женщина, фамилия на русском языке не склоняется. Некоторые книги ее мужа Уолтера Рудина переведены на русский язык и хорошо знакомы отечественным математикам.

- $\mathscr{I}_2 = \mathscr{S}_{\{\frac{1}{n+1}\}} = \left\{x \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n\in x} \frac{1}{n+1}\right\} < +\infty$ — один из так называемых *суммируемых* идеалов;

- $\mathscr{Z}_0 = \left\{x \subseteq \mathbb{N} : \mathtt{lim}_{n\to+\infty} \frac{\#([0,n)\cap x)}{n} = 0\right\}$ — *идеал плотности* 0,

где $\#(y)$ обозначает число элементов в конечном множестве y.

Идеал $\mathscr{I}_2$ является типичным представителем семейства суммируемых идеалов. Каждая последовательность вещественных чисел $r_n \geq 0$ задает идеал $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ всех множеств $x \subseteq \mathbb{N}$, для которых $\sum_{n\in x} r_n < +\infty$. Все идеалы $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ называются *суммируемыми идеалами*. Идеал $\mathscr{Z}_0$ также принадлежит определенному семейству идеалов. О разных семействах идеалов в связи с дескриптивной теорией множеств см. книгу Фараха [25].

Упражнение 2.6. Докажите, что $\mathscr{I}_2 \subseteq \mathscr{Z}_0$.

Указание. Пусть $x \subseteq \mathbb{N}$ не принадлежит $\mathscr{Z}_0$. Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что множество $\{n : \frac{\#(x\cap[0,n))}{n} > 2\varepsilon\}$ бесконечно. Для вывода $x \notin \mathscr{I}_2$ строим возрастающую последовательность натуральных чисел $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$, удовлетворяющую $n_{i+1} \geq 2n_i$ и $\frac{\#(x\cap[n_i,n_{i+1}))}{n_{i+1}-n_i} > \varepsilon$ для всех i.

Докажите, что любой идеал $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ содержит все конечные множества $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, а при условии $\{r_n\} \to 0$ — также и некоторые бесконечные множества. Если $\sum_n r_n = +\infty$, то идеал $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ не содержит ко-конечных множеств. □

Из этих идеалов возникают следующие отношения эквивалентности:

- отношение $\mathsf{E}_{\{\emptyset\}}$ на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ — просто равенство $\Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}$ на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$;

- $\mathsf{E}_0 = \mathsf{E}_{\mathtt{Fin}}$ является отношением эквивалентности на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, причем $x \mathrel{\mathsf{E}_0} y$, когда $x \mathbin{\Delta} y \in \mathtt{Fin}$.

По другому E_0 можно определить как отношение эквивалентности на $2^{\mathbb{N}}$, заданное условием: $a \mathrel{\mathsf{E}_0} b$, если $a(k) = b(k)$ для почти всех значений k.[3] Изоморфизм между $\mathscr{P}(\mathbb{N})$-вариантом и $2^{\mathbb{N}}$-вариантом задается отображением множества в его характеристическую функцию.

[3] В настоящей книге *почти все* означает «все кроме конечного числа».

- $\mathsf{E}_1 = \mathsf{E}_{\mathscr{I}_1}$ является отношением эквивалентности на $\mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, причем $x \mathsf{E}_1 y$, когда $(x)_k = (y)_k$ для почти всех значений $k \in \mathbb{N}$.

- $\mathsf{E}_3 = \mathsf{E}_{\mathscr{I}_3}$ является отношением эквивалентности на $\mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, причем $x \mathsf{E}_3 y$, когда $(x)_k \mathsf{E}_0 (y)_k$, $\forall k$.

Аналогично, отношение E_1 можно определить как отношение эквивалентности на пространстве $\mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ или даже на $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ условием: $x \mathsf{E}_1 y$, если $x(k) = y(k)$ для почти всех (т.е. кроме конечного числа) k, а отношение E_3 — определить как отношение эквивалентности на $\mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ или на $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, условием: $x \mathsf{E}_3 y$, если $x(k) \mathsf{E}_0 y(k)$ для всех k.

- $\mathsf{E}_2 = \mathsf{E}_{\mathscr{I}_2}$ есть отношение эквивалентности на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, причем $x \mathsf{E}_2 y$, когда $\sum_{k \in x \Delta y} \frac{1}{k+1} < \infty$.

Вообще, любой суммируемый идеал $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ порождает отношение эквивалентности $\mathsf{S}_{\{r_n\}} = \mathsf{E}_{\mathscr{S}_{\{r_n\}}}$ на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, определенное условием: $x \mathsf{S}_{\{r_n\}} y$, если множество $x \Delta y$ принадлежит $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$. В частном случае $r_n = \frac{1}{n+1}$ получаем идеал $\mathscr{I}_2$ и отношение E_2.

- $\mathsf{Z}_0 = \mathsf{E}_{\mathscr{Z}_0}$ является отношением эквивалентности на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, причем $x \mathsf{Z}_0 y$, когда $\mathtt{lim}_{n \to \infty} \frac{\#([0, n) \cap (x \Delta y))}{n} = 0$.

Упражнение 2.7. (1) Докажите, что каждый из идеалов Fin, $\mathscr{I}_1$, $\mathscr{I}_2$, $\mathscr{I}_3$, $\mathscr{Z}_0$ является борелевским множеством в $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, и, следовательно, определенные ими отношения эквивалентности E_0, E_1, E_2, E_3, Z_0 являются борелевскими.

(2) Докажите, что $\mathsf{E}_0 \le_{\mathrm{C}} \mathsf{E}_1$, $\mathsf{E}_0 \le_{\mathrm{C}} \mathsf{E}_2$, $\mathsf{E}_0 \le_{\mathrm{C}} \mathsf{E}_3$, $\mathsf{E}_0 \le_{\mathrm{C}} \mathsf{Z}_0$.

Например, для вывода первого соотношения подойдет отображение $\vartheta(x) = x \times \mathbb{N}$ из $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ в $\mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Для E_3 нужно взять наоборот, $\vartheta(x) = \mathbb{N} \times x$. Для E_2 подойдет отображение $\vartheta(x) = \{n : \exists k \in x\, (2^k \le n < 2^{k+1})\}$. □

Мы увидим ниже, что на самом деле во всех четырех случаях из (2) выполняется строгое соотношение $<_{\mathrm{C}}$ (а также и $<_{\mathrm{B}}$).

Отношения E_1, E_2, E_3 обладают следующим свойством:

Лемма 2.8. *Пусть* E *— борелевское отношение эквивалентности на борелевском множестве* X *польского пространства* $\mathbb{X}$, *и* $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$. *Тогда* $\mathsf{E} \sqsubseteq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$ (т.е. посредством взаимно однозначной борелевской функции). *То же для отношений* E_2 *и* E_3 *вместо* E_1.

Доказательство. Мы можем не ограничивая общности предполагать, что $\mathbb{X} = 2^{\mathbb{N}}$, поскольку все польские пространства борелевски изоморфны (теорема Б.1(ii) дополнения Б). Рассматриваем E_1 как отношение эквивалентности на $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ (см. выше). Пусть $\vartheta : X \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ является борелевской редукцией E к E_1. Определим другую функцию $\varphi : X \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ так, что $\varphi(x)(0) = x$ и $\varphi(x)(n+1) = \vartheta(x)(n)$ для всех n. Другими словами, понимая точки пространства $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ как бесконечные последовательности элементов $2^{\mathbb{N}}$, для любого аргумента $x \in X$ последовательность $\varphi(x)$ получается присоединением x к последовательности $\varphi(x)$ в качестве начального члена. Легко видеть, что $\varphi : X \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ — однозначная, и всё еще борелевская функция, и она по-прежнему сводит E к E_1.

Доказательство для E_2 и E_3 оставляется в качестве **упражнения** для читателя; конечно, функцию φ надо определить из ϑ по-другому. $\square$

2.3. Идеал конечных множеств и отношении E_0

Следующая теорема [43, 62, 73] демонстрирует особую роль идеала $\mathtt{Fin}$ и порожденного им отношения $\mathsf{E}_0 = \mathsf{E}_{\mathtt{Fin}}$.

Теорема 2.9. *Если* $\mathscr{I}$ *— нетривиальный идеал на* $\mathbb{N}$ *со свойством Бэра в топологии* $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, *то* $\mathsf{E}_0 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$, *и более того,* $\mathtt{Fin} \le_{\mathrm{RB}}^{++} \mathscr{I}$, *причем соответствующие попарно дизъюнктные конечные множества* w_i *можно выбрать так, чтобы их объединение равнялось* $\mathbb{N}$.

Доказательство. Идеал $\mathscr{I}$ — тощее множество в $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ по лемме 2.3, так что $\mathscr{I} = \mathscr{P}(\mathbb{N}) \smallsetminus \bigcap_n D_n$, где все множества D_n открыты и плотны в $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ и $D_n \subseteq D_{n+1}$ для каждого n.

Лемма 2.10. *Существует последовательность чисел* $0 = n_0 < < n_1 < n_2 < \ldots$, *и множества* $s_i \subseteq [n_i, n_{i+1})$ *для всех* i, *для которых при любом* $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ *равенство* $x \cap [n_i, n_{i+1}) = s_i$ *влечет* $x \in D_i$.

Множества типа s_i в этой лемме называются *стабилизаторами*.

Доказательство (лемма). Построение по индукции. Допустим, что n_i уже определено, и определим n_{i+1}. Возьмем какое-то множество $u \subseteq [0, n_i)$.

Из открытости и плотности D_i следует, что найдутся число $n{>}n_i$ и множество $s \subseteq [n_i, n)$, для которых: равенство $x{\cap}[0, n) = = u \cup s$ влечет $x \in D_i$. Возьмем какое-то другое множество $u' \subseteq [0, n_i)$. По той же причине найдутся число $n' > n$ и множество $s' \subseteq [n_i, n')$, для которых $s' \cap [n_i, n) = s$ и $x \cap [0, n') = u' \cup s'$ влечет $x \in D_i$. Продолжая эту конструкцию, т. е. перебирая по очереди все множества $u \subseteq [0, n_i)$, получим в результате число, скажем, $m > n$ и множество $t \subseteq [n, m)$ такие, что для каждого $u \subseteq [0, n_i)$ выполнено: $x \cap [0, m) = u \cup t$ влечет $x \in D_i$. Теперь возьмем $n_{i+1} = m$ и $s_i = t$, и индуктивный шаг выполнен.

□ (лемма)

Возвращаясь к доказательству теоремы, отметим, что согласно выбору множеств D_n любое объединение бесконечного числа стабилизаторов s_k не принадлежит $\mathscr{I}$. Отсюда легко получается $\mathsf{Fin} \le_{\mathrm{RB}}^{++} \mathscr{I}$. Остается накрыть множества s_k попарно непересекающимися конечными множествами w_k, объединение которых равно $\mathbb{N}$. □

Несмотря на этот результат, отношение эквивалентности $\mathsf{E}_0 = \mathsf{E}_{\mathsf{Fin}}$ <u>не</u> является $\le_{\mathrm{B}}$-минимальным среди борелевских отношений эквивалентности. Простейший контрпример доставляет равенство. Обозначим через Δ_X равенство на множестве X, рассматриваемое как отношение эквивалентности на X. Понятно, что Δ_X — борелевское отношение эквивалентности в случае, когда само X — борелевское множество в польском пространстве. Мы увидим ниже, что отношение $\mathsf{D} = \Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}$ равенства на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$

удовлетворяет строгому неравенству $\mathsf{D} <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$. И оно не порождается никаким нетривиальным идеалом.[4]

Упражнение 2.11. Пусть W — не более, чем счетное множество, содержащее не менее двух элементов. Определим отношение $\mathsf{E}_0^{(W)}$ на $W^{\mathbb{N}}$ условием: $x\, \mathsf{E}_0^{(W)}\, y$, если $x(k) = y(k)$ для всех значений $k \in \mathbb{N}$ кроме конечного их числа. Сравните с определением $2^{\mathbb{N}}$-варианта E_0 выше. Можно сказать, что $\mathsf{E}_0^{(W)}$ является $W^{\mathbb{N}}$-вариантом отношения $\mathsf{E}_0 = \mathsf{E}_0^{(2)}$.

Докажите, что $\mathsf{E}_0 \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0^{(W)}$.

Указание. В нетривиальную сторону, для доказательства, скажем, неравенства $\mathsf{E}_0^{(\mathbb{N})} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$, сопоставим каждой точке $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ точку $\tilde{x} \in 2^{\mathbb{N}}$, определенную так, что $\tilde{x}(2^n(2k+1)-1) = 1$, когда $x(n) = k$ — для всех $n,\ k \in \mathbb{N}$. Проверьте, что отображение $x \mapsto \tilde{x}$ есть борелевская редукция $\mathsf{E}_0^{(\mathbb{N})}$ к E_0. □

2.4. Непрерывная сводимость идеалов

Следующая теорема Джаста [44]–Луво [59] показывает, что борелевская сводимость $\le_{\mathrm{B}}$ отношений, порожденных идеалами, в ряде важных случаев влечет и непрерывную сводимость $\le_{\mathrm{C}}$.

Теорема 2.12. *Если $\mathscr{I}$ — борелевский идеал на счетном множестве A, E — отношение эквивалентности на польском пространстве $\mathbb{X}$ и $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, то $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \le_{\mathrm{C}} (\mathsf{E} \times \mathsf{E})$, и кроме того, найдется множество $X \subseteq A$, $X \notin \mathscr{I}$ такое, что $\mathsf{E}_{\mathscr{I} \restriction X} \le_{\mathrm{C}} \mathsf{E}$, где $\mathscr{I} \restriction X = \mathscr{I} \cap \mathscr{P}(X)$.*

Здесь $\mathsf{E} \times \mathsf{E}$ — отношение эквивалентности на $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$, определенное условием: $\langle x, y\rangle$ и $\langle x', y'\rangle$ эквивалентны, если выполняется $x\, \mathsf{E}\, x'$ и $y\, \mathsf{E}\, y'$. Заметим, что соотношение $\mathsf{E} \times \mathsf{E} \le_{\mathrm{C}} \mathsf{E}$ имеет место для значительного числа отношений эквивалентности E. В этом случае теорему можно усилить, заменив неравенство $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \le_{\mathrm{C}} \mathsf{E} \times \mathsf{E}$ неравенством $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \le_{\mathrm{C}} \mathsf{E}$.

[4] Разумеется, отношение $\Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}$ порождается идеалом, состоящим из одного пустого множества, но по определению мы считаем этот идеал тривиальным.

Доказательство. Предположим $A = \mathbb{N}$. Пусть $\vartheta : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{X}$ — борелевская редукция $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ к E. Тогда ϑ непрерывна на некотором плотном $\mathbf{G}_\delta$-множестве $D = \bigcap_i D_i \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$, где все D_i открытые и плотные и $D_{i+1} \subseteq D_i$.

Применив лемму 2.10 в этой ситуации, мы получаем последовательность чисел $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$, и множества $s_i \subseteq \subseteq [n_i, n_{i+1})$ для всех i, для которых при любом $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ равенство $x \cap [n_i, n_{i+1}) = s_i$ влечет $x \in D_i$.

Теперь положим

$$N_0 = \textstyle\bigcup_i [n_{2i}, n_{2i+1}), \ N_1 = \bigcup_i [n_{2i+1}, n_{2i+2}),$$
$$S_0 = \bigcup_i s_{2i}, \ S_1 = \bigcup_i s_{2i+1}.$$

Далее, пусть $f_0(x) = (x \cap N_0) \cup S_1$ и $f_1(x) = (x \cap N_1) \cup S_0$. Это непрерывные функции $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, чьи области значений — множества

$$X_0 = \{x \subseteq \mathbb{N} : x \cap N_1 = S_1\} \quad \text{и} \quad X_1 = \{x \subseteq \mathbb{N} : x \cap N_0 = S_0\},$$

замкнутые и удовлетворяющие условию $X_0 \cup X_1 \subseteq D$ в силу выбора чисел n_i и множеств s_i. Поэтому функции $\vartheta_0(x) = \vartheta(f_0(x))$ и $\vartheta_1(x) = \vartheta(f_1(x))$ непрерывны.

Наконец, для любых $x, y \subseteq \mathbb{N}$ соотношение $x \,\Delta\, y \in \mathscr{I}$ равносильно условию: множества

$$f_0(x) \,\Delta\, f_0(y) = (x \,\Delta\, y) \cap N_0 \quad \text{и} \quad f_1(x) \,\Delta\, f_1(y) = (x \,\Delta\, y) \cap N_1$$

принадлежат идеалу $\mathscr{I}$, а значит и тому, что одновременно $\vartheta_0(x) \mathrel{\mathsf{E}} \vartheta_0(y)$ и $\vartheta_1(x) \mathrel{\mathsf{E}} \vartheta_1(y)$. Таким образом, непрерывная функция $\tau(x) = \langle \vartheta_0(x), \vartheta_1(x) \rangle$ доказывает $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \leq_{\mathrm{C}} \mathsf{E} \times \mathsf{E}$.

Для вывода второго утверждения теоремы, возьмем в качестве X то из множеств N_0 и N_1, которое не принадлежит идеалу $\mathscr{I}$ (или любое из них, если не принадлежат оба). Пусть, для определенности, $X = N_0 \notin \mathscr{I}$. Как и выше, для любых $x, y \subseteq X$ мы имеем $x \,\Delta\, y = f_0(x) \,\Delta\, f_0(y)$. Таким образом, непрерывная функция $\vartheta_0(x) = \vartheta(f_0(x))$ доказывает $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} {\restriction} X \leq_{\mathrm{C}} \mathsf{E}$. □

2.5. Сумма и произведение Фубини для идеалов

Известно несколько операций, с помощью которых из одних идеалов можно получать другие. Среди них пересечение и объединение (если оно дает идеал) идеалов на одном и том же множестве, которые не рассматриваются отдельно из-за их простоты. Рассмотрим операции важные тем, что они позволяют получать идеалы в определенном смысле более сложные, чем исходные.

Определение 2.13. *Дизъюнктной суммой* $\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$ идеалов $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ на множествах соответственно A, B называется идеал, состоящий из всех множеств $y \subseteq (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$ таких, что

$$\{a \in A : \langle 0, a\rangle \in y\} \in \mathscr{I} \quad \text{и} \quad \{b \in B : \langle 1, b\rangle \in y\} \in \mathscr{J}.$$

Если множества A, B дизъюнктны, то идеал $\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$ просто изоморфен идеалу $\{x \cup y : x \in \mathscr{I} \wedge y \in \mathscr{J}\}$, который и берется в этом случае за определение $\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$.

Произведением Фубини $\mathscr{I} \otimes \mathscr{J}$ идеалов $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ на множествах A, B называется идеал, состоящий из всех множеств $y \subseteq A \times B$ таких, что $\{a \in A : (y)_a \notin \mathscr{J}\} \in \mathscr{I}$. Напомним, что $(y)_a = \{b \in B : \langle a, b\rangle \in y\}$. □

Мы уже встречались с идеалами, определения которых основаны на произведении Фубини более простых идеалов.

Упражнение 2.14. Докажите, что $\mathscr{I}_1 = \mathsf{Fin} \times 0$ и $\mathscr{I}_3 = 0 \times \mathsf{Fin}$, где $\times$ обозначает произведение Фубини $\otimes$, а 0 обозначает идеал $\{\emptyset\}$ на $\mathbb{N}$. Здесь $\mathsf{Fin} \times 0$ и $0 \times \mathsf{Fin}$ являются принятыми обозначениями для этих идеалов.

Докажите при помощи этих примеров, что произведение Фубини некоммутативно. Докажите, что оно, однако, ассоциативно. □

Произведение Фубини является частным случаем следующей более общей операции. Предположим, что $\mathscr{I}$ — идеал на множестве A и для всякого $a \in A$ задан идеал $\mathscr{J}_a$ на множестве B_a. Через $\sum_{a \in A} \mathscr{J}_a \,/\, \mathscr{I}$ обозначим идеал $\mathscr{K}$ на множестве $C = \{\langle a, b\rangle : a \in A \wedge b \in B_a\}$, определенный так, что любое множество $y \subseteq C$ принадлежит $\mathscr{K}$, если $\{a \in A : (y)_a \notin \mathscr{J}_a\} \in \mathscr{I}$.

Упражнение 2.15. Покажите, что произведение двух идеалов $\mathscr{I} \otimes \mathscr{J}$ совпадает с $\sum_{a \in A} \mathscr{J}_a \,/\, \mathscr{I}$, где $\mathscr{J}_a = \mathscr{J}$ для всех $a \in A$. □

Используя эти операции, можно построить последовательность идеалов Fr_ξ, $\xi < \omega_1$, (*обобщенные идеалы Фреше*) на счетных множествах A_ξ следующим образом: $\mathsf{Fr}_0 = \mathsf{Fin}$; $\mathsf{Fr}_{\xi+1} = \mathsf{Fin} \otimes \mathsf{Fr}_\xi$ для всех $\xi < \omega_1$; и если ординал $\lambda < \omega_1$ предельный, то $\mathsf{Fr}_\lambda = \sum_{\xi < \lambda} \mathsf{Fr}_\xi \,/\, \mathsf{Fin}_\lambda$, где Fin_λ обозначает идеал конечных подмножеств множества $\lambda = \{\xi : \xi < \lambda\}$. Некоторые приложения этой трансфинитной последовательности идеалов рассматриваются в §4.2.

3. ДЕЙСТВИЯ ГРУПП И ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Действие группы относится к числу центральных понятий многих разделов математики. В дескриптивной теории множеств действия групп и борелевская сводимость индуцированных ими отношений эквивалентности интенсивно изучаются с начала 1990-х годов, а некоторые близкие вопросы рассматривались в рамках эргодической теории начиная с 1970-х, в частных случаях по крайней мере с 1950-х годов.

3.1. Отношения, индуцированные действиями групп

Напомним, что *действием* группы $\mathbb{G}$ на множестве $\mathbb{X}$ называется любое отображение $\mathfrak{a} : \mathbb{G} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, обозначаемое $\mathfrak{a}(g,x) = g{\cdot}x$, для которого $g{\cdot}(h{\cdot}x) = (gh){\cdot}x$. Для любого $g \in \mathbb{G}$ отображение $x \mapsto g{\cdot}x$ является биекцией $\mathbb{X}$ на себя, а отображение $x \mapsto g^{-1}{\cdot}x$ — обратной биекцией. Пара $\langle \mathbb{X}\,; \mathfrak{a}\rangle$ и также само $\mathbb{X}$ называется $\mathbb{G}$-*пространством.*

Из определения вытекает $e{\cdot}x = x$ для всех x, где e — нейтральный элемент группы G. Действие называется *свободным*, если для любого x и любого $g \in G$, $g \neq e$, выполнено $g{\cdot}x \neq x$.

Орбитальное отношение эквивалентности $\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathfrak{a}} = \mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}$ на $\mathbb{X}$ определяется условием: $x \mathbin{\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}} y$, если существует $g \in \mathbb{G}$, для которого $y = g{\cdot}x$. Об этом отношении говорят, что оно *индуцируется действием* $\mathfrak{a}$ *группы* G *на* $\mathbb{X}$. Таким образом, $\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}$-классы — то же самое, что и $\mathbb{G}$-*орбиты* данного действия, т. е. множества вида

$$[x]^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}} = [x]^{\mathbb{X}}_{\mathfrak{a}} = [x]_{\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}} = [x]_{\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathfrak{a}}} = \{y : \exists g \in \mathbb{G}\ (g{\cdot}x = y)\}\,.$$

Произвольные действия абстрактных групп на каких-то множествах трудно изучать методами дескриптивной теории множеств. Ограничиваясь объектами, изучаемыми в дескриптивной теории, приходим к следующему определению.

Определение 3.1. (а) *Польской группой* называется группа, множество элементов которой является польским пространством, а групповая операция и обращение непрерывны. *Борелевской группой* называется группа, множество элементов которой — борелевское множество в польском пространстве, а операции являются борелевскими функциями.

(б) Борелевская группа *полизируема*, если существует польская топология на множестве ее элементов, которая порождает те же борелевские множества, что и исходная топология, и в ней группа является польской. Борелевское действие борелевской группы *полизируемо*, если для группы существует полизирующая топология, в которой ее действие непрерывно.[1] □

Если пространство $\mathbb{X}$ и группа $\mathbb{G}$ являются польскими, а действие $\mathfrak{a}$ — непрерывным как функция двух аргументов, то действие называется *польским*, а $\langle \mathbb{X} ; \mathfrak{a} \rangle$ и, неформально, само пространство $\mathbb{X}$ называются *польским* $\mathbb{G}$-пространством. В этом случае при любом $g \in \mathbb{G}$ отображение $x \mapsto g \cdot x$ — гомеоморфизм $\mathbb{X}$ на себя.

Если $\mathbb{X}$, $\mathbb{G}$, $\mathfrak{a}$ — борелевские, то $\langle \mathbb{X} ; \mathfrak{a} \rangle$ и также само $\mathbb{X}$ называется *борелевским* $\mathbb{G}$-пространством.

Достаточно трудное доказательство следующей теоремы можно найти в книге [17, 5.2.1].

Теорема 3.2. *Предположим, что $\mathbb{G}$ — польская группа и $\langle \mathbb{X} ; \mathfrak{a} \rangle$ — борелевское $\mathbb{G}$-пространство. Тогда $\mathbb{X}$ допускает польскую топологию, которая порождает те же борелевские множества, что и исходная топология, и в ней действие является польским.* □

Таким образом, любое борелевское действие польской группы превращается в ее польское действие.

[1] Если действие непрерывно в смысле исходной топологии на группе, то оно остается непрерывным и в более сильной топологии.

Что можно сказать о дескриптивном типе индуцированных отношений эквивалентности? Даже польские действия приводят к, вообще говоря, неборелевским отношениям эквивалентности. Напомним, что *аналитическими множествами* называются непрерывные образы борелевских множеств. В польских пространствах это более широкий класс, чем класс борелевских множеств.

Теорема 3.3. *Если* $\langle \mathbb{X} ; \mathfrak{a}\rangle$ *— борелевское* $\mathbb{G}$*-пространство (соответственно,* $\mathbb{G}$ *— борелевская группа), то индуцированное отношение* $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ *— аналитическое, иными словами,* $\mathbf{\Sigma}_1^1$*, множество в пространстве* $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$*.*

Доказательство. В сделанных предположениях множество

$$P = \{\langle x, y, g\rangle : x, y \in \mathbb{X} \wedge g \in \mathbb{G} \wedge \mathfrak{a}(g, x) = y\}$$

является борелевским в пространстве $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathbb{G}$. С другой стороны, $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}} = \{\langle x, y\rangle : \exists g\, (\langle x, y, g\rangle \in P\}$ — проекция множества P. Но проекции являются непрерывным образами, чтó и приводит здесь к классу аналитических множеств. □

Исследования последних лет показали, что топологические (например, компактность и локальная компактность) и чисто алгебраические (например, абелевость) свойства группы $\mathbb{G}$ влияют на свойства индуцированных отношений $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ в контексте неравенства $\le_{\mathsf{B}}$. Например, локальная компактность польской группы влечет, что все отношения эквивалентности, индуцированные ее польскими (а тогда и борелевскими) действиями — борелевские, см. [17].

3.2. Примеры

Простейшим примером отношения эквивалентности, индуцированным действием группы, является равенство $\Delta_{\mathbb{X}}$ на польском пространстве $\mathbb{X}$. Понятно, что оно индуцируется тривиальной группой $\{e\}$, состоящей из одного нейтрального элемента e, если определить ее действие как $e \cdot x = x$ для всех $x \in \mathbb{X}$.

Рассмотрим менее тривиальные примеры.

Пример 3.4. Отношение эквивалентности Витали $\mathtt{Vit}$ индуцируется *действием сдвига* аддитивной группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$, определенным через $\mathfrak{a}(q, x) = q + x$. Это — свободное действие, так как из $q + x = x$ следует $q = 0$.

Упражнение: покажите, что это действие является польским при условии, что на $\mathbb{Q}$ введена дискретная топология[2] — как и всякое вообще действие любой счетной дискретной (а потому и польской) группы гомеоморфизмами пространства. □

Пример 3.5. *Каноническое* или *действие сдвига* группы $\mathbb{G}$ на множестве $X^{\mathbb{G}}$, где X — любое множество,[3] определяется равенством $(g \cdot x)(f) = x(g^{-1}f)$ для всех $x \in X^{\mathbb{G}}$ и $f, g \in \mathbb{G}$. Если X — польское пространство, $\mathbb{G}$ — счетная дискретная группа и $X^{\mathbb{G}}$ имеет топологию произведения, то указанное действие является польским. Отношение эквивалентности на $X^{\mathbb{G}}$, индуцированное этим действием, обозначается через $\mathsf{E}(\mathbb{G}, X)$.

Хорошим примером является действие сдвига аддитивной группы $\mathbb{Z}$ целых чисел на пространстве $\mathbb{X}^{\mathbb{Z}}$, где $\mathbb{X}$ — польское пространство. Тогда $\mathbb{X}^{\mathbb{Z}}$ состоит из всех бесконечных в обе стороны последовательностей $a = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = \{\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ точек $a_i \in \mathbb{X}$, и каждое $z \in \mathbb{Z}$ преобразует такую последовательность в $b = \{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, где $b_i = a_{i-z}$ для всех индексов $i \in \mathbb{Z}$.

В главе 6 доказывается, что отношения эквивалентности вида $\mathsf{E}(\mathbb{Z}, \mathbb{X})$ $\sim_{\mathsf{B}}$-эквивалентны таким отношениям, как $\mathtt{Vit}$ и E_0. □

Упражнение 3.6. Докажите, что действие сдвига группы $\mathbb{Z}$ на любом множестве $X^{\mathbb{Z}}$ несвободно, если X имеет по меньшей мере два элемента. Элементы $a \in X^{\mathbb{Z}}$, которые удовлетворяют условию $z \cdot a = a$ для некоторого $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, можно характеризовать некоторым свойством периодичности. Сформулируйте его.

[2] В этой области все счетные группы рассматриваются, как правило, с дискретной топологией независимо от наличия какой-либо иной топологии, математически более естественной для данной счетной группы, как например интервальная топология для группы $\mathbb{Q}$. Впрочем, действие сдвига $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$ непрерывно и в интервальной топологии, хотя сама группа $\mathbb{Q}$, и вообще любая счетная группа, является польской только с дискретной топологией.

[3] Напомним, что множество $X^{\mathbb{G}}$ состоит из всех функций из $\mathbb{G}$ в X.

Докажите, что это действие является польским, если в $\mathbb{Z}$ рассматривается дискретная топология. □

Упражнение 3.7. Допустим, что X — не более, чем счетное множество, а G, H — не более, чем счетные группы, и G — подгруппа или гомоморфный образ H. Докажите, что $\mathsf{E}(G, X) \leq_{\mathrm{B}}$ $\leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}(H, X)$.[4]

Указание. Если G — подгруппа H, то искомая редукция переводит всякую точку $x \in X^G$ в точку $y \in X^H$, определенную как $y(g) = x(g)$ при $g \in G$, но $y(h) = \xi$ при $h \in H \setminus G$, где $\xi \in X$ — фиксированный элемент. Если имеется гомоморфизм $\varphi : H \xrightarrow{\text{на}} G$, то $y(h) = x(\varphi(h))$. □

Пример 3.8. Свободная группа F_2 с двумя образующими состоит из (конечных) слов, составленных из четырех символов a, b, a^{-1}, b^{-1}, включая пустое слово Λ, *несократимых* в том смысле, что a не может стоять рядом (слева или справа) с a^{-1}, и соответственно b не может стоять рядом с b^{-1}. Групповой операцией является конкатенация[5] слов, сопровождаемая последовательными сокращениями возникающих при конкатенации подслов вида aa^{-1}, $a^{-1}a$, bb^{-1}, $b^{-1}b$. Например, $(ab^{-1}a^{-1})(abba^{-1}) = aba^{-1}$. Пустое слово является, конечно, нейтральным элементом.

Действие сдвига группы F_2 на компактном польском пространстве 2^{F_2} (оно состоит из всех функций $x : F_2 \to 2 =$ $= \{0, 1\}$) определяется как указано в примере 3.5, т.е. равенством $(w{\cdot}x)(u) = x(w^{-1}u)$ для всех $w, u \in F_2$ и $x \in 2^{F_2}$. Это действие — польское (топология группы F_2 дискретна) по той же причине, что и в примере 3.4.

Индуцированное этим действием отношение эквивалентности на 2^{F_2} обозначается через E_∞. Таким образом, для $x, y \in 2^{F_2}$ выполняется $x \mathrel{\mathsf{E}_\infty} y$, когда $x = w{\cdot}y$ для некоторого $w \in F_2$. Это действие несвободно по той же причине, что в упражнении 3.6 для действия сдвига группы $\mathbb{Z}$. Не так просто определить свободное действие группы F_2 на каком-либо польском пространстве — оно будет построено посредством липшицевых гомеоморфизмов пространства $2^{\mathbb{N}}$, см. теорему 6.27. □

---

[4] Книга [17] содержит гораздо более сильные результаты о редукции действий групп к действиям надгрупп или гомоморфных прообразов.

[5] Т.е. последовательное записывание одного слова за другим.

Как и всякое отношение эквивалентности, индуцированное действием счетной группы, отношение E_∞ принадлежит к семейству отношений эквивалентности с не более, чем счетными классами эквивалентности. Такие отношения называются *счетными*.[6] К этому типу относится, например, отношение Витали. Но отношение E_∞ занимает особое место в этом семействе: оно является $\le_\mathsf{B}$-наибольшим отношением среди всех борелевских счетных отношений эквивалентности, т.е. если E — такое отношение, то $\mathsf{E} \le \mathsf{E}_\infty$, см. теорему 6.24.

3.3. Каноническое действие идеала

Любой идеал $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ является группой с симметрической разностью Δ в роли групповой операции. В самом деле, если x, $y \in \mathscr{I}$, то $x \,\Delta\, y \in \mathscr{I}$ поскольку $x \,\Delta\, y \subseteq x \cup y \in \mathscr{I}$. Определим *каноническое действие*, или Δ-*действие* идеала $\mathscr{I}$ или, точнее, группы $\langle \mathscr{P}(\mathbb{N}) \,;\, \Delta \rangle$ на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ так: $g{\cdot}x = g \,\Delta\, x$ для $g \in \mathscr{I}$ и $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Это действие свободно: $x = w{\cdot}x$ влечет $w = x \Delta x = \emptyset$, где $\emptyset$ — нейтральный элемент. Если $\mathscr{I}$ — борелевский идеал в обычной польской топологии на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, то группа $\langle \mathscr{P}(\mathbb{N}) \,;\, \Delta \rangle$ — борелевская, а ее Δ-действие на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ непрерывно в польской топологии $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Таким образом, отношения эквивалентности, порожденные идеалами по одному из способов, указанных в §2.1, относятся к орбитальным отношениям. Отметим, что группа $\langle \mathscr{P}(\mathbb{N}) \,;\, \Delta \rangle$ является польской даже в случае, если $\mathscr{I}$ — множество класса $\mathbf{G}_\delta$ в $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Это следует из теоремы метризации Александрова — Хаусдорфа, согласно которой $\mathbf{G}_\delta$-множества польских пространств метризуются полной метрикой. Более того, Δ-группа идеала полизируема для значительно более широкого, чем $\mathbf{G}_\delta$, семейства идеалов, называемых *P-идеалами*, см. §7.2 и теорему 7.12.

Пример 3.9. Δ-действие идеала $\mathrm{Fin} = \mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{N})$ на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ индуцирует отношение эквивалентности E_0. Группа $\langle \mathrm{Fin} \,;\, \Delta \rangle$ —

[6] Следует иметь в виду, что речь идет здесь отнюдь не о счетности отношения эквивалентности как множества пар.

счетная, а потому польская с дискретной топологией. Её действие переносится на пространство $2^{\mathbb{N}}$ с помощью характеристических функций: если $w \in \mathrm{Fin}$ и $x \in 2^{\mathbb{N}}$, то $w \cdot x = y \in 2^{\mathbb{N}}$, где $y(n) = x(n)$ при $n \in w$ и $y(n) = 1 - x(n)$ при $n \notin w$. Это действие индуцирует опять-таки отношение E_0, которое, напомним, определено на $2^{\mathbb{N}}$, так что $x \mathrel{\mathsf{E}_0} y$, когда множество $\{n : x(n) \neq y(n)\}$ конечно. □

Упражнение 3.10. Найдите «полизирующие» топологии для идеалов $\mathscr{I}_2$, $\mathscr{I}_3$, $\mathscr{Z}_0$. См. доказательство теоремы 9.5 относительно идеала $\mathscr{I}_2$. □

Идеал $\mathscr{I}_1$ не является полизируемым, см. главу 7.

Мы увидим, что отношение E_0 на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ или на $2^{\mathbb{N}}$ имеет много общего с эквивалентностью Витали $\mathtt{Vit}$ на вещественных числах $\mathbb{R}$, в частности, $\mathsf{E}_0 \sim_{\mathrm{B}} \mathtt{Vit}$, однако обычно с E_0 проще работать. Сравните следующее упражнение с результатами о $\mathtt{Vit}$ в главе 1.

Упражнение 3.11. Докажите следующие утверждения:

(1) E_0 не имеет борелевской трансверсали;

(2) всякое E_0-инвариантное, т.е. $x \in X \wedge x \mathrel{\mathsf{E}_0} y$ влечет $y \in X$, борелевское множество $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ является либо тощим либо котощим, а также имеет либо меру 0 либо меру 1 в смысле однородной вероятностной меры на пространстве $2^{\mathbb{N}}$;

(3) выполняется $\Delta_{2^{\mathbb{N}}} <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$;

(4) нет такого борелевского идеала $\mathscr{I}$, для которого $\Delta_{2^{\mathbb{N}}} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$;

(5) E_0 индуцируется польским действием группы $\mathbb{Z}$ целых чисел.

□

Указание к (1) – (3). Следуйте выкладкам из упражнения 1.5 и доказательств теоремы 1.3, утверждения 1.4, заменив действие сдвига группы $\mathbb{Q}$ на вещественной прямой Δ-действием Fin на $2^{\mathbb{N}}$.

Для доказательства (3) нужно построить совершенное множество $P \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ из попарно E_0-неэквивалентных точек. Фиксируем перечисление $2^{<\omega} = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ всех конечных бинарных последовательностей, и пусть $x_a = \{n : s_n \subseteq a\}$ для $a \in 2^{\mathbb{N}}$. Все множества вида x_a бесконечны, но имеют конечные попарные пересечения. Таким образом, $P = \{x_a : a \in 2^{\mathbb{N}}\}$ — совершенное (докажите) попарно E_0-неэквивалентное множество в $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Перейдя к характеристическим функциям, получим такое же множество в $2^{\mathbb{N}}$.

Для доказательства (4) используйте (3) вместе с теоремой 2.9.

Для (5). Определите действие группы $\mathbb{Z}$ на $x \in 2^{\mathbb{N}}$ так, что если $x = 1^{\mathbb{N}}$ — последовательность из одних единиц, то $1 \cdot x = 0^{\mathbb{N}}$ — последовательность из одних нулей, а иначе берем наименьший номер k, для которого $x(k) = 0$, и полагаем $(1 \cdot x)(k) = 1$ и $(1 \cdot x)(j) = 0$ для всех $j < k$, но $(1 \cdot x)(j) = x(j)$ для всех $j > k$. Это действие — польское, и называется *одометрическим*, а его орбиты совпадают с E_0-классами, за исключением того, что классы эквивалентности $[0^{\mathbb{N}}]_{\mathsf{E}_0}$ и $[1^{\mathbb{N}}]_{\mathsf{E}_0}$ сливаются в одну орбиту. Это, конечно, легко исправить, подкорректировав действие только на счетном множестве $[0^{\mathbb{N}}]_{\mathsf{E}_0} \cup [1^{\mathbb{N}}]_{\mathsf{E}_0}$, но тогда действие перестает быть польским. Правильная польская модификация одометрического действия группы $\mathbb{Z}$ на $2^{\mathbb{N}}$, индуцирующая E_0, указана в [19].

3.4. Действия банаховых пространств

Здесь возникают несколько отношений эквивалентности, индуцированных естественным действием аддитивных групп банаховых пространств. В частности, следующих пространств, хорошо известных из учебников по функциональному анализу, для которых указаны соответствующие нормы:

$$\ell^p = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_n |x(n)|^p < \infty \right\},$$

где $p \geq 1$ и $\|x\|_p = (\sum_n |x(n)|^p)^{\frac{1}{p}}$,

$$\ell^\infty = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_n |x(n)| < \infty\}, \quad \|x\|_\infty = \sup_n |x(n)|;$$

$$\mathsf{c}_0 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_n x(n) = 0\}, \quad \|x\| = \sup_n |x(n)|;$$

а также

$$\mathbf{c} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_n x(n) \text{ существует и конечен}\},$$
$$\|x\| = \sup_n |x(n)|.$$

Здесь $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — множество всех функций вида $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, т.е. множество всех бесконечных последовательностей вещественных чисел из $\mathbb{R}$.

Упражнение 3.12. Докажите или найдите доказательства в учебниках по анализу, что перечисленные пространства банаховы, т.е. линейные с покомпонентными операциями на последовательностях, и полные, причем ℓ^p, $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}$ сепарабельные, а ℓ^∞ несепарабельное. □

Каждое из этих пространств является подгруппой аддитивной группы $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с покомпонентным сложением. Мы рассматриваем группу $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с обычной топологией произведения и она является польской.

Упражнение 3.13. Докажите, что топологии, индуцированные на этих пространствах указанными метриками, строго сильнее наследственной топологии из $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, а потому аддитивные группы этих пространств не являются топологическими подгруппами аддитивной группы $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. И также: аддитивные группы этих пространств являются *борелевскими* подгруппами $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — в том смысле, что их борелевские подмножества в точности совпадают с борелевскими подмножествами наследственной топологии.

Указанные польские топологии в ℓ^p, $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_0$ (кроме несепарабельного пространства ℓ^∞) сильнее наследственной топологии из $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. □

Каждое из этих четырех банаховых пространств естественным образом индуцирует борелевское отношение эквивалентности на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, обозначаемое соответственно ℓ^p, ℓ^∞, $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}$. Например, для $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ соотношение $x \,\ell^p\, y$ имеет место, если $\sum_k |x(k) - y(k)|^p < +\infty$. Другими словами, имеется отношение эквивалентности, индуцированное действием аддитивной группы ℓ^p на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с помощью покомпонентного сложения: если $g \in \ell^p$ и $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, то $(g \cdot x)(n) = g(n) + x(n)$ для всех n.

В главе 5 будет доказано, что $\ell^1 \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_2$, $\mathsf{c}_0 \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{Z}_0$, и $\ell^p <_{\mathrm{B}} \ell^q$ при $1 \le p < q$.

Упражнение 3.14. Докажите, что эти действия аддитивных групп пространств ℓ^p, c, c_0 непрерывные, и в силу результата 3.13 польские. □

3.5. Действие группы перестановок

Группа S_∞ всех перестановок натурального ряда $\mathbb{N}$, т.е. всех биекций $\mathbb{N}$ на себя, с суперпозицией $\circ$ в качестве групповой операции, является, очевидно, $\mathbf{G}_\delta$-множеством в бэровском пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. По метризационной теореме Александрова–Хаусдорфа, это польская группа.

Упражнение 3.15. Полную метрику на S_∞, совместимую с польской топологией, наследственной из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, определим как $D(x,y) = d(x,y) + d(x^{-1},y^{-1})$, где d — стандартная польская метрика на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, т.е. $d(x,y) = 2^{-m-1}$, где m есть наименьшее число, для которого $x(m) \neq y(m)$. Докажите, что эта метрика не является инвариантной ни слева, т.е. не всегда $D(x,y) = D(z \circ x, z \circ y)$, ни справа, т.е. не всегда $D(x,y) = D(x \circ z, y \circ z)$. □

Группа S_∞ вообще не имеет ни одной хотя бы односторонне инвариантной метрики, совместимой с ее топологией, см. [17, 1.5].

Изучение действий группы S_∞ и ее замкнутых подгрупп — самостоятельная тема в дескриптивной динамике, ей посвящена глава 8. Рассмотрим связь S_∞ с важным отношением эквивалентности.

Определение 3.16. Отношение эквивалентности T_2 определяется на пространстве $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ всех функций $x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ так, что $x \mathrel{\mathsf{T}_2} y$, если множества $\operatorname{ran} x = \{x(n) : n \in \mathbb{N}\}$ и аналогичное $\operatorname{ran} y$ совпадают. Иными словами,

$$\forall k\, \exists l\, (x(k) = y(l)) \quad \text{и} \quad \forall l\, \exists k\, (x(k) = y(l)). \qquad \square$$

Отношение T_2 часто называют *равенством счетных множеств вещественных чисел*, понимая под вещественными числами точки из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, как это принято в современной дескриптивной теории множеств. И вот почему. Каждое не более чем счетное подмножество X, $\emptyset \neq X \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, можно отождествить с соответствующим классом эквивалентности в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}/\mathsf{T}_2$, т.е. с классом всех функций x, для которых $\mathtt{ran}\, x = X$. Таким образом, множество $\mathscr{P}_{\mathtt{ctbl}}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \{X \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} : 0 < \mathtt{card}\, X \leq \aleph_0\}$ всех непустых и не более чем счетных $X \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ отождествляется с фактор-множеством $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}/\mathsf{T}_2$ польского пространства $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. Это представление вызывает интерес в связи с тем, что нет разумного способа превратить само $\mathscr{P}_{\mathtt{ctbl}}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ в польское пространство.

Непосредственно индуцировать отношение T_2 польским действием затруднительно. С другой стороны, можно определить действие группы S_∞ на $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ так: если $f \in S_\infty$ и $x \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, то $y = f \cdot x$ также принадлежит $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ и $y(f(n)) = x(n)$ для всех n.

Упражнение 3.17. Докажите, что это действие группы S_∞ на $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ польское. □

Индуцированное этим действием группы S_∞ отношение эквивалентности на $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ обозначим, по общему правилу, через $\mathsf{E}_{S_\infty}^{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}}$. Другими словами, $x\, \mathsf{E}_{S_\infty}^{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}}\, y$ означает, что $y \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ получается из последовательности $x \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ перестановкой ее членов. Понятно, что $x\, \mathsf{E}_{S_\infty}^{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}}\, y$ влечет $x\, \mathsf{T}_2\, y$, но обратное неверно: возьмите $x, y \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ так, что $x(k) \neq x(n)$ при $k \neq n$, и выполняется $y(0) = y(1) = x(0)$ и $y(n+1) = x(n)$ для всех n. Таким образом, непосредственно отношение T_2 не совпадает с отношением, индуцированным указанным действием S_∞. Однако имеет место

Предложение 3.18. $\mathsf{E}_{S_\infty}^{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}} \sim_{\mathsf{B}} \mathsf{T}_2$.

Доказательство. Для доказательства $\mathsf{T}_2 \leq_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_{S_\infty}^{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}}$ рассмотрим функцию $\vartheta : (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, определенную так, что $\vartheta(x)(2^n(2m+1)-1) - x(n)$ для всех m, n. Таким образом, $\mathtt{ran}\, x = \mathtt{ran}\, \vartheta(x)$, но $y = \vartheta(x)$ (функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) принимает каждое свое значение бесконечное число раз. На области всех таких y отношения T_2 и $\mathsf{E}_{S_\infty}^{(\mathbb{N}^\mathbb{N})^\mathbb{N}}$ очевидно совпадают, так что $x \, \mathsf{T}_2 \, y$ равносильно $\vartheta(x) \; \mathsf{E}_{S_\infty}^{(\mathbb{N}^\mathbb{N})^\mathbb{N}} \; \vartheta(y)$, т.е. ϑ — редукция T_2 к $\mathsf{E}_{S_\infty}^{(\mathbb{N}^\mathbb{N})^\mathbb{N}}$. Борелевость (даже непрерывность) легко проверяется.

Построим обратную редукцию. Если $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ то определим $k^\wedge a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ через $(k^\wedge a)(0) = k$ и $(k^\wedge a)(n+1) = a(n)$ для всех n. Теперь пусть $x \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\mathbb{N}$. Определим $y = \tau(x) \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\mathbb{N}$ так. Возьмем любой индекс n. Значение $y(n)$ будет зависеть не только от $x(n)$, но и от числа s_n тех индексов n', для которых $x(n') = x(n)$. (s_n — или конечное число ≥ 1 или $\aleph_0$, бесконечность.) Именно, если $s_n = k \in \mathbb{N}$ то полагаем $y(n) = k^\wedge x(n)$. Если же $s_n = \aleph_0$ то пусть $y(n) = 0^\wedge x(n)$. Нетрудно проверить, что τ — редукция $\mathsf{E}_{S_\infty}^{(\mathbb{N}^\mathbb{N})^\mathbb{N}}$ к T_2. □

3.6. Борелевость орбит

Как говорилось, отношение $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ не обязательно является борелевским даже для польских действий. Однако во многих важных и достаточно общих случаях оно оказывается борелевским отношением. Например, когда $\mathbb{G}$ — счетная группа и действие борелевское. Еще один пример необходимой борелевости $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ образуют Δ-действия борелевских идеалов $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ на $\mathbb{X} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, когда отношение $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}^{\mathscr{P}(\mathbb{N})} = \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ является борелевским, потому что $x \; \mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathscr{P}(\mathbb{N})} \; y$ эквивалентно $x \, \Delta \, y \in \mathscr{I}$. Несколько не столь тривиальных случаев борелевости индуцированных отношений $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ указаны в [17, гл. 7]. Например, достаточное условие борелевости действия — все орбиты являются борелевскими множествами ограниченного ранга [17, 7.1.1]. Однако **орбиты** борелевских действий польских групп — всегда борелевские множества, хотя прямая оценка множества, данная в доказательстве теоремы 3.3, дает только его аналитичность.

Теорема 3.19. *Если $\mathbb{G}$ — польская группа и $\langle \mathbb{X} ; \mathfrak{a} \rangle$ — борелевское $\mathbb{G}$-пространство, то все $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$-классы — борелевские множества.*

Доказательство. Согласно теореме 3.2 можно считать, что действие непрерывно. Тогда *стабилизатор* $\mathbb{G}_x = \{g : g{\cdot}x = x\}$ любой точки $x \in \mathbb{X}$ — замкнутая подгруппа $\mathbb{G}$. Рассмотрим непрерывное действие $g{\cdot}h = gh$ этой подгруппы $\mathbb{G}_x$ на $\mathbb{G}$. Через F обозначим индуцированное отношение эквивалентности на $\mathbb{G}$. Каждый F-класс $[g]_{\mathsf{F}} = g\,\mathbb{G}_x$ — сдвиг $\mathbb{G}_x$, т.е. замкнутое подмножество $\mathbb{G}$. С другой стороны, F-насыщение $[\mathscr{O}]_{\mathsf{F}}$ любого открытого множества $\mathscr{O} \subseteq \mathbb{G}$ само открыто. Далее, см. лемма 6.3(iv), мы покажем, что в этом случае F имеет борелевскую трансверсаль $S \subseteq \mathbb{G}$. Однако $g \mapsto g{\cdot}x$ является борелевской биекцией борелевского множества S на $[x]_{\mathsf{E}}$, следовательно, $[x]_{\mathsf{E}}$ — также борелевское множество по следствию Г.4.[7] □

Из этой теоремы вытекает, что **не** все аналитические отношения эквивалентности индуцируются борелевскими действиями польских групп. Например, рассмотрим неборелевское аналитическое множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и определим отношение эквивалентности: $x \mathrel{\mathsf{E}} y$, когда $x = y$ или $x, y \in X$. Получим аналитическое отношение эквивалентности с неборелевским классом X.

В качестве приложения приведем результат Скотта [66], который в свое время решил проблему, стоявшую с 1930-х годов.

Теорема 3.20. *Для всякого счетного порядкового типа τ, множество X_τ всех множеств $x \subseteq \mathbb{Q}$, упорядоченных естественным порядком рациональных чисел по типу τ,— борелевское.*

Заметим: в случае, если τ — вполне упорядоченный тип, т.е. τ — некоторый ординал $\xi < \omega_1$, то борелевость довольно легко доказывается трансфинитной индукцией по ξ, — что было доказано в самые первые годы развития дескриптивной теории множеств.

Доказательство (набросок). Группа $\mathbb{G}$ всех сохраняющих порядок биекций $f : \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{Q}$ с суперпозицией в качестве операции является, как легко проверить, $\mathbf{G}_\delta$-множеством в пространстве $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$. Последнее рассматривается с топологией произведения, считая топологию $\mathbb{Q}$ дискретной, так что в сущности это бэровское пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. По метризационной теореме Александрова –

[7] Альтернативное доказательство этой теоремы см. в Кекрис [52, 9.17].

Хаусдорфа $\mathbb{G}$ — польская группа в подходящей метрике, порождающей ту же топологию.

Определим польское действие $\mathbb{G}$ на пространстве $\mathbb{X} = \mathscr{P}(\mathbb{Q})$ с топологией канторова дисконтинуума $2^{\mathbb{Q}}$ так: $f \cdot x = \{f(q) : q \in x\}$. Множества X_τ из условия этой теоремы не являются, вообще говоря, орбитами этого действия. (*Упражнение*: приведите контрпримеры.) Чтобы исправить это, рассмотрим подпространство $\mathbb{Y}$ всех $x \in \mathbb{X}$, которые, как подмножества $\mathbb{Q}$, замкнуты в интервальной топологии $\mathbb{Q}$ и обладают свойством: если $p < q$, p, q — элементы множества $\{-\infty\} \cup x \cup \{+\infty\}$, то интервал (p, q) в $\mathbb{Q}$ содержит бесконечно много чисел из $\mathbb{Q}$.

Упражнение 3.21. Докажите, что $\mathbb{Y}$ — замкнутое подмножество $\mathbb{X}$, инвариантное относительно действия $\mathbb{G}$, и орбиты $\mathbb{G}$ на $\mathbb{Y}$ в точности совпадают с множествами вида $Q_\tau \cap \mathbb{Y}$.

Постройте борелевскую функцию $\vartheta : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ такую, что x и $\vartheta(x)$ имеют один и тот же порядковый тип для любого $x \in \mathbb{X}$. □

Теперь не составляет труда закончить доказательство теоремы 3.20. Именно, всѐ множества вида $Q_\tau \cap \mathbb{Y}$ оказываются борелевскими по теореме 3.19, но само Q_τ является прообразом борелевского множества $Q_\tau \cap \mathbb{Y}$ при борелевском же отображении ϑ. □ (теорема 3.20)

4. СТРУКТУРА БОРЕЛЕВСКОЙ СВОДИМОСТИ И КЛЮЧЕВЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Мы познакомились с приемами, которые позволяют определить отношение эквивалентности, и с некоторыми специальными отношениями вроде E_i, $i = 0, 1, 2, 3$, E_∞, Z_0, $\boldsymbol{\ell}^p$, $\mathbf{c}_0$, T_2. В этой главе рассмотрим структуру борелевских отношений эквивалентности с отношением $\le_{\mathrm{B}}$ в качестве отношения частичного порядка (см. предложение 1.9.) Затем остановимся на месте упомянутых ключевых отношений в этой структуре. Начнем с определения нескольких *операций* над отношениями эквивалентности.

4.1. Операции над отношениями эквивалентности

Аналогично случаю идеалов из одних отношений эквивалентности можно получать другие, в принципе более сложные, с помощью некоторых операций. Ограничимся счетными случаями этих операций, так как в несчетном случае они могут вывести за пределы семейства борелевских множеств и отношений. Это операции:

(o1) *Счетное объединение* (если результат является отношением эквивалентности — например, в случае объединения возрастающей цепочки) и *счетное пересечение* отношений эквивалентности на одном множестве.

(o2) *Счетное произведение* $\mathsf{E} = \prod_{a \in A} \mathsf{F}_a$ отношений эквивалентности F_a на множествах X_a, где индексное множество A счетно, т.е. отношение эквивалентности на множестве $\prod_{a \in A} X_a$, определенное так, что $x \mathrel{\mathsf{E}} y$, если $x(a) \mathrel{\mathsf{F}_a} y(a)$ для всех $a \in A$.

(o3) *Счетное произведение Фубини* (ультрапроизведение) $\prod_{a\in A} \mathsf{F}_a / \mathscr{I}$ отношений эквивалентности F_a на множествах X_a по модулю идеала $\mathscr{I}$ на счетном индексном множестве A, т.е. отношение эквивалентности на множестве $\prod_a X_a$, определенное так, что $x \mathrel{\mathsf{E}} y$, если множество $\{a \in A : \neg\,(x(a) \mathrel{\mathsf{F}_a} y(a))\}$ принадлежит $\mathscr{I}$. Оно совпадает с $\prod_{a\in A} \mathsf{F}_a$, если $\mathscr{I}$ – тривиальный идеал $\{\emptyset\}$.

(o4) *Счетная степень* отношения эквивалентности E на множестве X, т.е. отношение эквивалентности E^+ на $X^{\mathbb{N}}$, определенное так, что $x \mathrel{\mathsf{E}^+} y$, если $\{[x(k)]_{\mathsf{E}} : k \in \mathbb{N}\} = \{[y(k)]_{\mathsf{E}} : k \in \mathbb{N}\}$, Иными словами, если

$$\forall k\, \exists l\, (x(k) \mathrel{\mathsf{E}} y(l)) \quad \text{и} \quad \forall l\, \exists k\, (x(k) \mathrel{\mathsf{E}} y(l)).$$

Таким образом, классы эквивалентности отношения E^+ — это в сущности непустые и не более чем счетные множества классов E-эквивалентности. Отсюда и название этой операции.

Упражнение 4.1. Докажите следующее.

(1) Отношения эквивалентности $\Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}$, т.е. равенство на множестве $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, и E_0 борелевски изоморфны с помощью борелевского изоморфизма их областей соответственно с отношениями $\Delta_2{}^{\mathbb{N}}$ и $\Delta_2{}^{\mathbb{N}}/\mathtt{Fin}$, где степень ${}^{\mathbb{N}}$ означает произведение счетного числа копий отношения Δ_2, т.е. равенства на двухэлементном множестве $2 = \{0, 1\}$, в смысле операций **o2** или **o3**.

(2) Отношения E_1 и E_3 борелевски изоморфны соответственно отношениям $\Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}{}^{\mathbb{N}}/\mathtt{Fin}$, т.е. $(\Delta_2{}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}/\mathtt{Fin}$, и $\mathsf{E}_0{}^{\mathbb{N}}$, т.е. $(\Delta_2{}^{\mathbb{N}}/\mathtt{Fin})^{\mathbb{N}}$. Таким образом, в данном случае перестановка операций ${}^{\mathbb{N}}$ и ${}^{\mathbb{N}}/\mathtt{Fin}$ приводит к изменению результата.

(3) Отношение T_2 из § 3.5 тождественно отношению $\Delta_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}{}^+$ и борелевски изоморфно отношению $\Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}{}^+$. □

Таким образом, некоторые из ранее рассмотренных отношений эквивалентности можно представить как значения этих операций над совсем тривиальным отношением равенства на двухэлементном множестве.

Упражнение 4.2. Докажите следующее.

(1) Каждая из четырех операций преобразует отношения эквивалентности снова в отношения эквивалентности, и, кроме того, сохраняет борелевость. Для операции **o3** при выполнении дополнительного требования: $\mathscr{I}$ — борелевский идеал.

(2) Операции **o2**, **o3**, **o4** $\sim_{\mathrm{B}}$-инвариантны, т. е. переводят $\sim_{\mathrm{B}}$-эквивалентные отношения в $\sim_{\mathrm{B}}$-эквивалентные. В частности, если $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, то $\mathsf{E}^+ \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{F}^+$. Но для операции **o1** это неверно.

(3) Операции **o1**, **o2**, **o3**, примененные к отношениям эквивалентности вида $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$, приводят к отношениям эквивалентности того же вида, и в сущности сводятся к некоторым операциям над порождающими идеалами, которые переводят борелевские идеалы снова в борелевские идеалы. В частности, операция **o3** сводится к операции $\sum_{a \in A} \mathscr{I}_a \,/\, \mathscr{I}$ в случае, если $\mathsf{F}_a = \mathsf{E}_{\mathscr{I}_a}$ для всех a. □

Операция **o4** носит иной характер: связь с идеалами теряется, в частности, для отношения эквивалентности T_2. Во-первых, $\mathsf{T}_2 \sim_{\mathrm{B}} \Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}{}^+$ согласно 4.1(3), а равенство $\Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}$ на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, очевидно, тождественно $\mathsf{E}_{\{\emptyset\}}$, где $\{\emptyset\}$ рассматривается как идеал на $\mathbb{N}$, единственным элементом которого является пустое множество. В то же время, согласно следствию 9.30 ниже, нет ни одного борелевского идеала $\mathscr{I}$, для которого $\mathsf{T}_2 \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$. Таким образом, операция **o4** вывела за пределы борелевских отношений эквивалентности вида $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$.

Имеется еще одна операция с отношениями эквивалентности, полезная в случае, когда требуется объединить некоторую совокупность отношений эквивалентности, не смешивая их области.

(o5) *Дизъюнктное объединение* $\mathsf{E} = \bigvee_{a \in A} \mathsf{F}_a$ отношений эквивалентности F_a на множествах X_a, т. е. отношение эквивалентности на множестве $U = \bigcup_{a \in A}(\{a\} \times X_a)$, определенное так, что $\langle a, x\rangle \mathrel{\mathsf{E}} \langle b, y\rangle$, если $a = b$ и $x \mathrel{\mathsf{F}_a} y$. Если при этом X_a наделены топологической структурой, то топология на $\bigcup_{a \in A}(\{a\} \times X_a)$ порождается множествами вида $\{a\} \times U$, где $U \subseteq X_a$ открытое.

Если множества X_a попарно дизъюнктны и топологически открыты в $X' = \bigcup_a X_a$, то можно в сущности с тем же результатом определить $\mathsf{E} = \bigvee_{a \in A} \mathsf{F}_a$ на X' так, что $x \mathrel{\mathsf{E}} y$, когда точки x, y принадлежат одному и тому же множеству X_a и $x \mathrel{\mathsf{F}_a} y$.

Замечание 4.3. Однако операция **o5** сводится к произведению **o2**. В самом деле, произвольно выбрав элемент x_b в каждом их множеств X_b, определим редукцию $\vartheta : U \to Y = \prod_{a \in A} X_a$ отношения $\bigvee_{a \in A} \mathsf{F}_a$ к $\prod_{a \in A} \mathsf{F}_a$ так: если $\langle a, x \rangle \in U$, то $y = \vartheta(a, x) \in Y$, $y(a) = x$ и $y(b) = x_b$ для любого $b \in A$, $b \neq a$. Если все X_a и F_a — борелевские, то редукция ϑ также является борелевской. $\square$

4.2. Борелевская сводимость

Следуя Луво [59], обозначим через $\mathtt{BOREQ}$ множество всех борелевских отношений эквивалентности на польских пространствах. Что можно сказать о частично упорядоченном множестве $\langle \mathtt{BOREQ} ; \leq_{\mathrm{B}} \rangle$?

Например, является ли этот порядок линейным, т.е. любые два отношения E, F из $\mathtt{BOREQ}$ $\leq_{\mathrm{B}}$-сравнимы? Отрицательный ответ на этот вопрос был известен уже в конце 1980-х. В частности, Джаст [45] доказал, что отношения E_2 и Z_0 $\leq_{\mathrm{B}}$-несравнимы друг с другом, а затем в [44] доказал существование в $\langle \mathtt{BOREQ} ; \leq_{\mathrm{B}} \rangle$ антицепей, т.е. совокупностей из попарно $\leq_{\mathrm{B}}$-несравнимых отношений, сколь угодно большого *конечного* размера, состоящих из конечных произведений Фубини отношений E_0 и E_2.[1]

Много более сильный результат в этом направлении, полученный Луво и Величковичем в [60], изложен ниже в главе 10. Обозначим через $\subseteq^*$ включение по модулю конечного множества, т.е. $x \subseteq^* y$ означает, что разность $x \setminus y$ конечна. Теорема 10.15 доказывает, что частично упорядоченное множество $\langle \mathscr{P}(\mathbb{N}) ; \subseteq^* \rangle$ допускает порядковое вложение в $\langle \mathtt{BOREQ} ; \leq_{\mathrm{B}} \rangle$, т.е. имеется функция $\vartheta : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathtt{BOREQ}$, для которой $x \subseteq^* y$ эквивалентно $\vartheta(x) \leq_{\mathrm{B}} \vartheta(y)$ для всех $x, y \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Отсюда следует, что в $\mathtt{BOREQ}$ имеются как антицепи континуальной мощности, так и строго возрастающие и строго убывающие цепи, т.е. линейно

[1] Более подробно о ранних работах в этой области см. в [51].

$<_B$-упорядоченные подмножества длины ω_1. Просто потому, что этими свойствами обладает структура $\langle \mathscr{P}(\mathbb{N}) ; \subseteq^* \rangle$.

Строго возрастающие ω_1-цепи в BOREQ были построены еще раньше у Фридмана и Стенли [29], которые итерировали операцию счетной степени **o4** из §4.1. Следующее определение излагает их конструкцию.

Определение 4.4. Определим трансфинитную последовательность отношений эквивалентности T_ξ, $\xi < \omega_1$ следующим образом.[2] Положим $\mathsf{T}_0 = \Delta_{\mathbb{N}}$, равенство на $\mathbb{N}$. Далее, положим $\mathsf{T}_{\xi+1} = \mathsf{T}_\xi{}^+$ для всех ξ. Если $\lambda < \omega_1$ — предельный ординал, то положим $\mathsf{T}_\lambda = \bigvee_{\xi<\lambda} \mathsf{T}_\xi$. □

Оказалось, что последовательность отношений T_ξ *строго* $<_B$-*возрастающая* (в сущности, $\mathsf{E} <_B \mathsf{E}^+$ для любого борелевского отношения эквивалентности E с более, чем одним классом эквивалентности), и даже является *неограниченной* в классе BOREQ : не существует борелевского отношения E, для которого $\mathsf{T}_\xi \leq_B \mathsf{E}$ для всех ξ. Отсюда следует и отсутствие $\leq_B$-максимальных элементов в решетке BOREQ.

Упражнение 4.5. Обозначим D_ξ область отношения T_ξ. Определите D_ξ индукцией по ξ и покажите, что каждое D_ξ — польское пространство. □

Другая возрастающая неограниченная последовательность борелевских отношений эквивалентности была построена Луво в [59] на основе последовательности идеалов Фреше Fr_ξ из §2.5. Оказывается, что эти идеалы являются борелевскими, причем их борелевские ранги[3] монотонно стремятся к ω_1, как доказано в [18]. Отсюда следует, что последовательность отношений $\mathsf{F}_\xi = \mathsf{E}_{\mathsf{Fr}_\xi}$ является $\leq_B$-неограниченной среди всех борелевских отношениий эквивалентности. В самом деле, пусть, напротив, E — борелевское отношение эквивалентности и $\mathsf{F}_\xi \leq_B \mathsf{E}$ для всех ξ. Тогда по теореме 2.12 выполнены и соотношения $\mathsf{F}_\xi \leq_C \mathsf{E} \times \mathsf{E}$.

[2] См. в конце этого раздела о месте ранее определенного отношения T_2 в этой трансфинитной последовательности.

[3] *Борелевским рангом* борелевского множества X называется наименьший ординал $\xi < \omega_1$, для которого X появляется на ξ-ом уровне борелевской иерархии.

Значит, борелевские ранги отношений F_ξ ограничены рангом отношения $\mathsf{E} \times \mathsf{E}$, так как ранг борелевского множества не увеличивается при взятии непрерывного прообраза; противоречие с их стремлением к ω_1.

Упражнение 4.6. Покажите, что последовательность отношений F_ξ альтернативно строится с отношения F_0, по определению равного E_0 и далее $\mathsf{F}_{\xi+1} = \mathsf{F}_\xi{}^{\mathbb{N}}/\mathsf{Fin}$ и $\mathsf{F}_\lambda = \prod_{\xi<\lambda} \mathsf{F}_\xi \,/\, \mathsf{Fin}_\lambda$ для предельных ординалов λ. □

Более того, существуют не только неограниченные, но и $\le_{\mathrm{B}}$-*конфинальные* ω_1-последовательности $\{\mathsf{F}_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ в $\mathtt{BOREQ}$, т.е. дополнительно требуется, чтобы любое отношение E из $\mathtt{BOREQ}$ удовлетворяло $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}_\xi$ для какого-то ξ. Простое и, видимо, фольклорное чистое доказательство существования такой последовательности без явного ее описания, известно давно. Оно основано на определенном выборе борелевских конституант универсального аналитического отношения эквивалентности, и приведено, например, в [10]. Там же в дано и более сложное, но эффективное описание такой конфинальной последовательности.

Недавно удалось прояснить и вопрос о решетке $\mathtt{BOREQ}$, касающийся положения в ней отношений вида $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ порожденных борелевскими идеалами $\mathscr{I}$. Согласно следствию 9.30 ниже, не все борелевские отношения эквивалентности порождены идеалами. С другой стороны, Розендаль [65] доказал, что для всякого борелевского отношения эквивалентности E на польском пространстве найдется борелевский идеал $\mathscr{I}$ на $\mathbb{N}$ такой, что $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$. Это означает, что отношения вида $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ образуют конфинальное семейство в решетке всех борелевских отношений эквивалентности на польских пространствах. На самом деле несмотря на конфинальность это достаточно специальное семейство: многие вопросы решаются для отношений вида $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ проще, а полученные результаты оказываются сильнее, чем для борелевских отношений эквивалентности общего вида.

В заключение скажем несколько слов о связи отношения T_2 из определенной выше в этом параграфе последовательности отношений T_ξ и отношением эквивалентности T_2 из § 3.5. Временно обозначим второе из них через T_2'. Следующая лемма показывает, что оба определения дают, в сущности, один и тот же результат с точностью до $\sim_{\mathrm{B}}$.

Лемма 4.7. $\mathsf{T}_1 \sim_{\mathrm{B}} \Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}$ *и* $\mathsf{T}_2 \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{T}_2'$.

Доказательство. По определению, $\mathrm{dom}\,\mathsf{T}_1 = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и для всех x, $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ выполняется $x\ \mathsf{T}_1\ y$, если $\mathtt{ran}\,x = \mathtt{ran}\,y$. Отображение $\vartheta(x) = \mathtt{ran}\,x$ дает $\mathsf{T}_1 \le_{\mathrm{B}} \Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}$. В обратную сторону, определим $\beta(a) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для каждого $a \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ как (единственную) возрастающую биекцию из $\mathbb{N}$ на множество $\{2n : n \in a\} \cup \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$. Легко видеть, что отображение β обеспечивает $\Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{T}_1$.

Итак, $\mathsf{T}_1 \sim_{\mathrm{B}} \Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}$. Однако по построению T_2 тождественно ${\mathsf{T}_1}^{+}$, т.е. $\mathsf{T}_2 \sim_{\mathrm{B}} {\Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}}^{+}$ в силу 4.2(3). С другой стороны, имеем $\mathsf{T}_2' \sim_{\mathrm{B}} {\Delta_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}}^{+}$ согласно 4.1(2). Значит, $\mathsf{T}_2 \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{T}_2'$. □

4.3. Диаграмма сводимостей ключевых отношений эквивалентности

Среди борелевских отношений эквивалентности, кроме отношений вида $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$, выделяются и другие важные типы отношений, например:

— индуцированные польскими действиями,

— индуцированные польскими действиями группы перестановок S_∞,

— индуцированные так называемыми турбулентными действиями, которые характеризуются особыми топологическими свойствами орбит,

— отношения, которые получаются из простейших отношений эквивалентности операциями из § 4.1

и другие. Исследования последних 10–15 лет показали, что такие классы борелевских отношений эквивалентности часто находятся в определенной связи, которая описывается в терминах $\le_{\mathrm{B}}$-сводимости, с теми конкретными отношениями эквивалентности, которые определены выше.

Диаграмма на рис. 1 представляет структуру борелевской сводимости между этими ключевыми отношениями эквивалентности. На диаграмме линии означают борелевскую сводимость нижележащих отношений к вышележащим, а их отсутствие — известную или предполагаемую несводимость.

Внизу диаграммы указаны мощности: натуральные числа n, $1 \le n \in \mathbb{N}$, счетная мощность $\aleph_0$ и мощность континуума $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Они отождествляются с отношениями эквивалентности равенства на польских пространствах каждой из этих мощностей. Все несчетные польские пространства по теореме Б.1 борелевски изоморфны и, в частности, имеют одну и ту же мощность $\mathfrak{c}$. Поэтому отношение равенства $\Delta_{\mathbb{X}}$ на польских пространствах $\mathbb{X}$ полностью характеризуется в $\le_{\mathrm{B}}$-структуре (или даже с точностью до борелевского изоморфизма между областями отношений) канторовой мощностью $\mathtt{card}\,\mathbb{X}$ самих пространств $\mathbb{X}$, которая равна любому числу n или $\aleph_0$ или $\mathfrak{c}$.

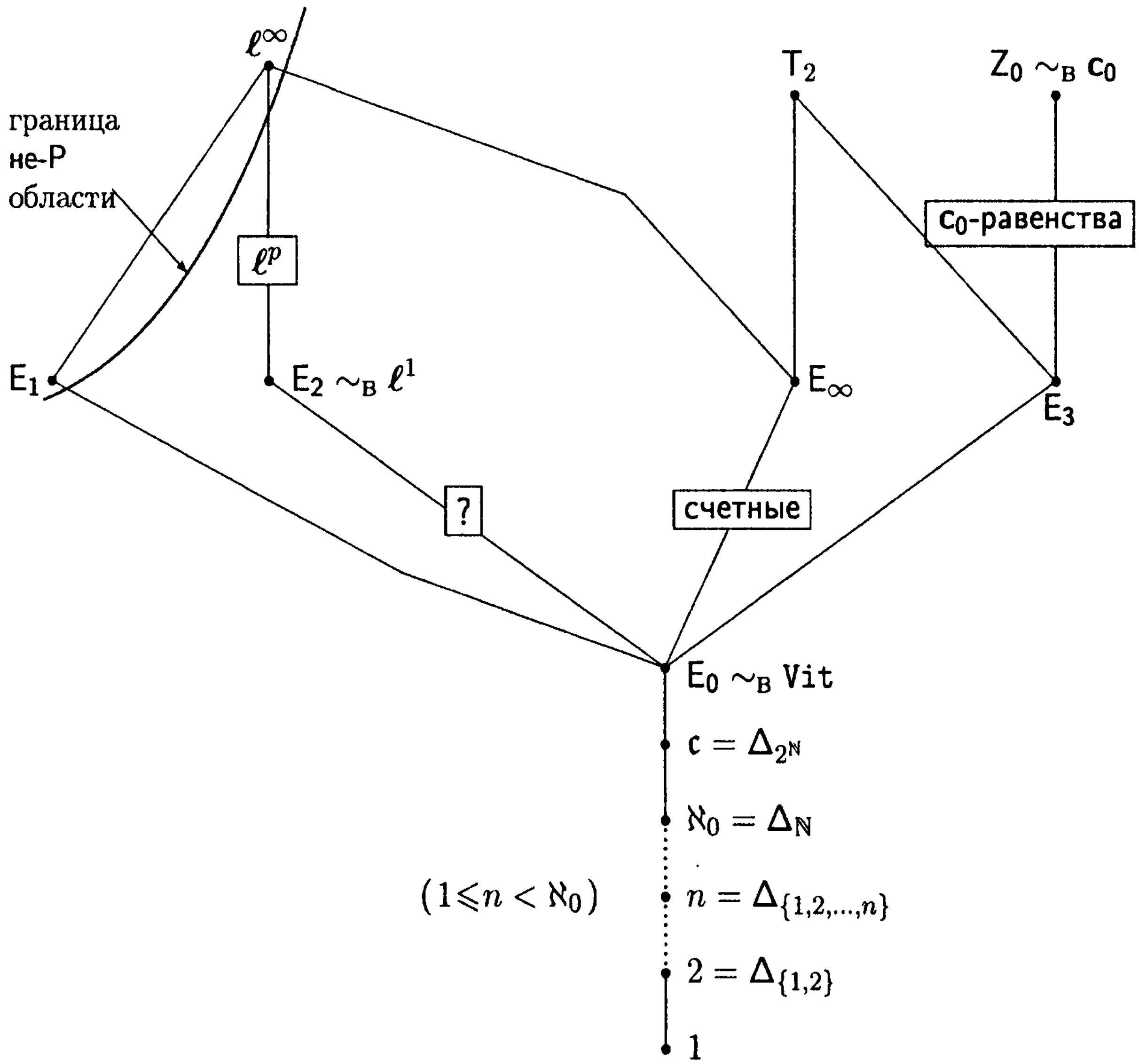

Рис. 1. Борелевская сводимость некоторых отношений эквивалентности

Упражнение 4.8. Докажите: для любой пары польских пространств $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, соотношение $\Delta_{\mathbb{X}} \le_{\mathsf{B}} \Delta_{\mathbb{Y}}$ эквивалентно неравенству $\mathtt{card}\,\mathbb{X} \le \mathtt{card}\,\mathbb{Y}$ канторовых мощностей. □

О строгом неравенстве в соотношении$\Delta_{2^{\mathbb{N}}} <_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_0$ см. упражнение 3.11.

Выше на диаграмме имеем $\mathsf{E}_0 \le_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_i$, $i = 1, 2, 3$, см. упражнение 2.7. А также — $\mathsf{E}_0 \le_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_\infty$, что доказывается более сложно в следствии 6.30, вытекающем из теоремы 6.24, по которой вообще любое борелевское счетное (т.е. с не более, чем счетными классами эквивалентности) отношение эквивалентности борелевски сводится к E_∞. Мы увидим, что на самом деле эти четыре соотношения — строгие, т.е. для них имеет место даже $<_{\mathsf{B}}$. Что касается соотношений $\mathsf{E}_0 <_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_i$, $i = 1, 2, 3$, то они верны и в части строгости (т.е. невозможности $\sim_{\mathsf{B}}$) являются следствием того факта, что отношения эквивалентности E_1, E_2, E_3 попарно $\le_{\mathsf{B}}$-несравнимы. Что же касается E_∞, строгое соотношение $\mathsf{E}_0 <_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_\infty$ будет доказано в главе 6. Несравнимость отношения E_∞ с E_1 и E_3 также будет доказана, а вот $\le_{\mathsf{B}}$-несравнимость E_∞ с E_2 до настоящего времени является открытой проблемой: доказано, что $\mathsf{E}_2 \not\le_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_\infty$, а об обратном соотношении ничего не известно, см. §4.4.

Наконец, еще выше на диаграмме.

В теореме 5.2 доказывается, что отношение $\boldsymbol{\ell}^\infty$ является $\le_{\mathsf{B}}$-максимальным среди всех отношений эквивалентности класса $\mathbf{K}_\sigma$, к которому относятся E_1, E_2, E_∞ и каждое из $\boldsymbol{\ell}^p$. Эквивалентности $\boldsymbol{\ell}^1 \sim_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_2$ и $\mathsf{Z}_0 \sim_{\mathsf{B}} \mathsf{c}_0$ доказываются в леммах 5.10 и 5.11.

Борелевская сводимость E_3 к T_2 и c_0 доказывается в лемме 5.4. Как и всякое борелевское счетное отношение эквивалентности, E_∞ сводится к T_2 по лемме 5.5. Что касается банаховых отношений эквивалентности $\boldsymbol{\ell}^p$, в теореме 5.14 доказывается, что борелевская сводимость в этом семействе в точности соответствует значению параметра p.

Запись «граница не-P области» на диаграмме отделяет семейство отношений эквивалентности, которые уже не могут быть индуцированы польским действием. Это деление основано на теореме Кехриса и Луво [57] (у нас теорема 7.26) о том, что отношение E_1 борелевски не сводится ни к какому отношению эквивалентности, индуцированному польским действием, которую мы докажем в § 7.7. Дальнейшие исследования Солецкого [70, 71] показали, что, по крайней мере в области борелевских отношений вида $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$, отношение E_1 является в определенном смысле минимальным отношением эквивалентности, не связанным с польскими действиями. Этот вопрос подробнее излагается в главе 7.

Аналогично E_1, отношения эквивалентности E_2 и E_3 занимают важное место в $\le_{\mathrm{B}}$-структуре в связи с такими типами борелевских отношений эквивалентности, как отношения, индуцированные действиями группы перестановок натурального ряда S_∞, отношения, индуцированные *турбулентными* действиями польских групп, или отношения, получаемые в результате трансфинитной итерации операций из § 4.1. Об этом говорится в главах 8, 9.

Запись $\boxed{\mathsf{c}_0\text{-равенства}}$ на диаграмме обозначает интересное семейство отношений эквивалентности, называемых c_0-равенствами и отчасти похожих на $\mathbf{c}_0$ — эти отношения рассмотрены в главе 10. Запись $\boxed{\text{счетные}}$ указывает на максимальность отношения E_∞ в классе борелевских счетных отношений эквивалентности, об этом говорится в главу 6. Знак $\boxed{?}$ на диаграмме относится к одной нерешенной проблеме, которая упоминается в § 4.5.

Несколько слов об области между E_0 и E_∞. В силу максимальности E_∞ в классе борелевских счетных отношений эквивалентности (см. пример 3.8) эта область состоит из всех борелевских неявно счетных (т. е. $\le_{\mathrm{B}}$-сводимых к счетным) отношений эквивалентности E. Конечно, кроме тех, которые удовлетворяют соотношению $\mathsf{E} <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$ — это достаточно простая область, исчерпывающе описанная в упражнении 4.14. Среди счетных и неявно счетных борелевских отношений эквивалентности имеется много математически значимых отношений, например, тьюрингова эквивалентность на $2^{\mathbb{N}}$; подробнее об этом классе говорится в главе 6.

Одно время предполагалась гипотеза из [39] о том, что любое борелевское отношение эквивалентности E, **не** являющееся неявно несчетным, т. е. борелевски несводимое к E_∞, удовлетворяет неравенству $\mathsf{E}_i \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ для по крайней мере одного индекса

$i = 1, 2, 3$. Она была опровергнута контрпримерами, указанными Фарахом в [26, 24] и Величковичем в [74]. Эти контрпримеры относятся к классу отношений эквивалентности, порождаемых *идеалами Цирельсона.*

В целом диаграмма на рис. 1 дает представление лишь о нижней части $\le_B$-решетки борелевских отношений эквивалентности. Операции, рассмотренные в §4.1, позволяют строить разнообразные $<_B$-возрастающие трансфинитные цепочки борелевских отношений эквивалентности, естественно, выходящие за рамки тех, которые непосредственно показаны на диаграмме. Имеются и другие методы построения сложных борелевских отношений эквивалентности, например, рассмотренные в [41] в связи с потенциальными борелевскими классами.

4.4. Несводимость отношений эквивалентности: общий анализ

Наиболее интересным вопросом в связи с диаграммой на стр. 56 является степень ее полноты по отношению к вопросам борелевской несводимости для отношений, которые не соединены линиями на диаграмме. Это следующие предположения о несводимости:

$$(1)\quad \mathsf{E}_1 \;\not\le_B :\; \mathsf{E}_2,\ \mathsf{T}_2,\ \mathsf{c}_0,$$

т.е. предположение о том, что E_1 не сводится ни к одному из отношений E_2, T_2, c_0, и аналогично

$$(2)\quad \ell^\infty \;\not\le_B :\; \mathsf{E}_1,\ \mathsf{E}_2,\ \mathsf{T}_2,\ \mathsf{c}_0;$$
$$(3)\quad \mathsf{E}_2 \;\not\le_B :\; \mathsf{E}_1,\ \mathsf{T}_2,\ \mathsf{c}_0;$$
$$(4)\quad \mathsf{E}_\infty \;\not\le_B :\; \mathsf{E}_1,\ \mathsf{E}_2,\ \mathsf{c}_0;$$
$$(5)\quad \mathsf{E}_3 \;\not\le_B :\; \ell^\infty;$$
$$(6)\quad \mathsf{T}_2 \;\not\le_B :\; \ell^\infty,\ \mathsf{c}_0;$$
$$(7)\quad \mathsf{c}_0 \;\not\le_B :\; \ell^\infty,\ \mathsf{T}_2.$$

Три соотношения из группы (1) вытекают из упоминавшейся теоремы 7.26 о польских действиях и об отношении E_1, поскольку отношения эквивалентности E_2, T_2, c_0 индуцированы польскими действиями согласно результатам 3.14, 3.10, 3.18 в предыдущем разделе.

Соотношение $\ell^\infty \not\leq_B \mathsf{E}_1$ в (2) вытекает из $\mathsf{E}_2 \not\leq_B \mathsf{E}_1$ в (3), поскольку $\mathsf{E}_2 \leq_B \ell^\infty$. Три оставшихся соотношения в (2) по аналогичной причине следуют из (1) и $\mathsf{E}_1 \leq_B \ell^\infty$.

Соотношение $\mathsf{E}_2 \not\leq_B \mathsf{E}_1$ в (3) доказано в §7.1, следствие 7.4, на основе общего анализа структуры идеалов $\mathscr{I}$, для которых $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \leq_B \mathscr{I}_1$. Соотношение $\mathsf{E}_2 \not\leq_B \mathsf{T}_2$, доказанное ниже в главе 9, следствие 9.28, основано на теории турбулентности Хъерта. Соотношение $\mathsf{E}_2 \not\leq_B \mathsf{c}_0$ устанавливается теоремой 5.12.

Результат (5) составляет содержание леммы 5.6. Из него, кстати, следует $\mathsf{c}_0 \not\leq_B \ell^\infty$ в (7). Второе соотношение $\mathsf{c}_0 \not\leq_B \mathsf{T}_2$ в (7) доказано в главе 9 вместе с $\mathsf{E}_2 \not\leq_B \mathsf{T}_2$ из группы (3).

Утверждения группы (6) доказаны недавно в [13], однако доказательство, использующее форсинг и некоторые другие современные теоретико-множественные методы, слишком сложно чтобы его можно было бы привести в рамках объема этой книги. Сейчас мы приведем точную формулировку более частного результата Хъёрта [36] для последующих ссылок.

Теорема 4.9. *Отношение T_2 борелевски не сводится ни к какому отношению эквивалентности, индуцированному борелевским действием польской группы, допускающей инвариантную слева метрику.*

Следовательно, T_2 борелевски не сводится к борелевским действиям польских абелевых групп. □

Например эта теорема применяется к Δ-действию полизируемых идеалов, и в частности, таких идеалов, как $\mathscr{I}_2$, $\mathscr{I}_3$, $\mathscr{Z}_0$, полизируемых согласно результату 3.10.

Наконец, обратимся к группе (4). Простых и прямых доказательств соотношения $\mathsf{E}_\infty \not\leq_B \mathsf{E}_1$, кажется, неизвестно. Оно легко выводится из теоремы 4.15, которую мы не доказываем, см. следствие 4.17 ниже. Другое доказательство, основанное на некоторых результатах о гиперконечных и счетных отношениях эквивалентности, дается в главе 6, следствие 6.32. Наконец, два оставшихся соотношения в (4) ведут к вопросам, которые пока остаются открытыми.

Проблема 4.10. Является ли отношение E_∞ борелевски сводимым к c_0? к ℓ^1 или, что равносильно, E_2 или к любому другому из отношений ℓ^p? □

В связи с первой частью проблемы отметим, что более сильный, чем соотношение $\mathsf{E}_\infty \le_{\mathrm{B}} \mathsf{c}_0$, вариант $\mathsf{E}_\infty \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$ опровергается на основании тех же соображений, что и опровержение $\mathsf{E}_\infty \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$ в следствии 4.17.

4.5. Дихотомические теоремы

Что происходит в $<_{\mathrm{B}}$-интервалах между связанными линиями отношениями на диаграмме на стр. 56? Некоторые из них пусты по очевидным соображениям.

Упражнение 4.11. Докажите, что не существует отношения эквивалентности E, удовлетворяющего условию $\Delta_{\{1,2,\dots,n\}} <_{\mathrm{B}}$ $<_{\mathrm{B}} \mathsf{E} <_{\mathrm{B}} \Delta_{\{1,2,\dots,n,n+1\}}$ для любого фиксированного n или удовлетворяющего $\Delta_{\{1,2,\dots,n\}} <_{\mathrm{B}} \mathsf{E} <_{\mathrm{B}} \Delta_{\mathbb{N}}$ для каждого n. □

Исследования интервалов между $\aleph_0$ и $\mathfrak{c}$, между $\mathfrak{c}$ и E_0, а также между E_0 и отношениями $\mathsf{E}_i, i = 1, 2, 3,$[4] потребовало глубоких и трудных результатов, вносящих замечательную регулярность в эту проблему о борелевской сводимости и известных как *теоремы дихотомии*. Известные доказательства этих теорем имеют то общее свойство, что рассуждения основаны на свойствах топологии эффективных суслинских множеств и потому существенным образом выходят за рамки методов элементарной топологии польских пространств. Сложность доказательств не позволяет привести их в книге. Однако дадим формулировки некоторых из теорем дихотомии: тех, которые связаны с исследованием упомянутых $<_{\mathrm{B}}$-интервалов. На русском языке доказательства теорем 4.12 и 4.13 приведены в статье [7].

Для исследования интервала между $\aleph_0$ и $\mathfrak{c}$ используется

[4] Интервал между E_0 и E_∞, состоящий из счетных борелевских отношений эквивалентности, очень богат и исследуется другими методами, см. главу 6.

Теорема 4.12 (1-я дихотомия, [68]). *Любое борелевское*[5] *отношение эквивалентности* E *удовлетворяет ровно одному из следующих условий:*

(I) E *имеет не более, чем счетное число классов эквивалентности;*

(II) E *удовлетворяет* $\Delta_{2^{\mathbb{N}}} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$. □

Заметим, что $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \Delta_{\mathbb{N}}$ в случае (I). В самом деле, пусть $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ — список всех классов E-эквивалентности. Каждое C_n — борелевское множество вследствие борелевости самого E. Определим борелевскую редукцию E к $\Delta_{\mathbb{N}}$, полагая $\vartheta(x) = n$ при $x \in C_n$.

Итак, мы можем заключить, что $<_{\mathrm{B}}$-интервал между $\aleph_0 = \Delta_{\mathbb{N}}$ и $\mathfrak{c} = \Delta_{2^{\mathbb{N}}}$ на диаграмме пуст, и более того, любое борелевское отношение эквивалентности является либо $\le_{\mathrm{B}} \Delta_{\mathbb{N}}$, либо $\ge_{\mathrm{B}} \Delta_{2^{\mathbb{N}}}$. Следующая теорема доказывает пустоту уже для интервала между $\Delta_{2^{\mathbb{N}}}$ и E_0.

Теорема 4.13 (2-я дихотомия, [34]). *Любое борелевское отношение эквивалентности* E *удовлетворяет ровно одному из следующих условий:*

(I) $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \Delta_{2^{\mathbb{N}}}$, (II) $\mathsf{E}_0 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$. □

Упражнение 4.14. Выведите из теорем 4.12, 4.13, что любое борелевское отношение эквивалентности $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$ является $\sim_{\mathrm{B}}$-эквивалентным одному из следующих отношений: Δ_n $(n \ge 1)$, $\Delta_{\mathbb{N}}$, $\Delta_{2^{\mathbb{N}}}$ или самому E_0. □

Структура $\le_{\mathrm{B}}$-интервалов между E_0 и отношениями E_1, E_2, E_3 полностью или частично (для отношения E_2) описывается следующими тремя теоремами 4.15, 4.16, 4.18:

Теорема 4.15 (3-я дихотомия, [57]). *Любое борелевское отношение эквивалентности* $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$ *удовлетворяет ровно одному из условий:*

(I) $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$, (II) $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$. □

---

[5] Теорема справедлива даже для более широкого класса коаналитических отношений эквивалентности.

Теорема 4.16 (6-я дихотомия[5], [39, 40]). *Любое борелевское отношение эквивалентности* $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$ *удовлетворяет ровно одному из условий:*

(I) $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$, (II) $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$. □

Эти две теоремы полностью проясняют $\le_{\mathrm{B}}$-структуру борелевских отношений эквивалентности, расположенных $\le_{\mathrm{B}}$-ниже отношений E_1 и E_3. Например, из них без труда получается следующий важный результат о несводимости:

Следствие 4.17. $\mathsf{E}_\infty \not\le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$ *и* $\mathsf{E}_\infty \not\le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$.

Доказательство. Если $\mathsf{E}_\infty \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$, то по теореме 4.15, либо $\mathsf{E}_\infty \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$ либо $\mathsf{E}_\infty \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$. Первое противоречит следствию 6.30, а второе — теореме 7.26, поскольку отношение E_∞ индуцировано польским действием группы F_2 (счетной, а потому польской в дискретной топологии). Доказательство $\mathsf{E}_\infty \not\le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$ начинается аналогично, но с теоремой 4.16 вместо 4.15, а соотношение $\mathsf{E}_\infty \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$ опровергается из тех соображений, что мы имеем $\mathsf{E}_\infty \le_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\ell}^\infty$ по теореме 5.2, но $\mathsf{E}_3 \not\le_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\ell}^\infty$ согласно лемме 5.6. □

Альтернативное доказательство $\mathsf{E}_\infty \not\le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$, не ссылающееся на дихотомические теоремы, будет дано ниже, следствие 6.32.

Структура $\le_{\mathrm{B}}$-области ниже E_2 окончательно не выяснена, однако следующая теорема значительно сужает круг возможных контрпримеров. Напомним, что *счетным* называется отношение эквивалентности, все классы эквивалентности которого не более чем счетны. Назовем борелевское отношение эквивалентности E *неявно счетным*,[6] если найдется такое счетное борелевское отношение эквивалентности F, что $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$.

Теорема 4.18 (4-я дихотомия, [35]). *Любое борелевское отношение эквивалентности* $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_2$ *удовлетворяет ровно одному из условий:*

(I) E *неявно счетно,* (II) $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_2$. □

---

[5] Отметим, что нумерация дихотомических теорем этой серии зафиксирована в ряде статей второй половины 1990-х годов, см., например, [40, 54]. Эта серия содержит и другие теоремы, в частности, 4-ю и 5-ю, которые здесь не обсуждаются.

[6] В англоязычной литературе essentially countable.

Случай (I) в этой теореме остается до конца не исследованным. Нерешенность следующей проблемы отмечена знаком $\boxed{?}$ на диаграмме со стр. 56.

Проблема 4.19. Можно ли, по аналогии с теоремами 4.18 и 4.16, заменить (I) в теореме 4.18 на условие $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$? Другими словами, верно ли, что любое неявно счетное борелевское отношение $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_2$ удовлетворяет $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$? □

Закончим еще несколькими сложными вопросами.

Проблема 4.20. Имеется ли какой-то разумный «базис» борелевских отношений эквивалентности над E_0? □

Здесь имеется в виду следующее. Согласно дихотомическим теоремам 4.12 и 4.13, если E — любое из отношений эквивалентности $\Delta_{\mathbb{N}}$, $\Delta_{2^{\mathbb{N}}}$, E_0, то оно обладает тем свойством, что всякое другое борелевское отношение эквивалентности F $\le_{\mathrm{B}}$-сравнимо с E. Это верно и для отношений равенства $\mathsf{E} = \Delta_{\{1,2,\dots,n\}}$ на конечных множествах. То обстоятельство, что $\le_{\mathrm{B}}$-структура разветвляется над E_0, показывает, что других борелевских отношений E с таким свойством нет. Но может быть имеются конечные или счетные, или вообще малые в каком-то смысле *семейства* $\mathscr{E}$ борелевских отношений эквивалентности, обладающие тем свойством, что любое борелевское отношение эквивалентности $\le_{\mathrm{B}}$-сравнимо с одним из отношений из $\mathscr{E}$?

И еще вопрос:

Проблема 4.21. Что можно сказать об $\le_{\mathrm{B}}$-интервалах между отношениями E_i, E_∞ и вышележащими отношениями, в частности, ℓ^∞ и c_0? Верны ли для них какие-то дихотомические теоремы? □

5. СВОДИМОСТЬ И НЕСВОДИМОСТЬ БОРЕЛЕВСКИХ ОТНОШЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ: ПРИМЕРЫ

В этой главе приводятся доказательства результатов о борелевской сводимости, показанных на диаграмме на стр. 56, а также некоторых теорем о несводимости — именно тех которые не требуют развития специальных методов и допускают простые и компактные доказательства. Другие теоремы о несводимости с более длинными доказательствами будут представлены в последующих главах.

Начнем с доказательства теоремы о максимальности ℓ^∞ в классе σ-компактных отношений эквивалентности и затем докажем несколько утверждений об отношениях E_3, T_2, $\mathbf{c}_0$, установим связь отношений эквивалентности ℓ^1 и $\mathbf{c}_0$ с суммируемым идеалом и идеалом нулевой плотности, выясним, что эти два идеала порождают $\le_{\mathrm{B}}$-несравнимые отношения, и наконец, докажем, что борелевская сводимость в классе отношений вида ℓ^p определяется значением параметра p, т. е. $\ell^p \le_{\mathrm{B}} \ell^q$ эквивалентно $p \le q$.

5.1. ℓ^∞ — максимальное отношение σ-компактного класса

Напомним, что $\mathbf{K}_\sigma$ обозначает класс всех σ-компактных множеств, в данном случае, в польских пространствах.

Упражнение 5.1. Докажите, что отношения эквивалентности E_0, E_1, E_∞, ℓ^p, $1 \le p \le \infty$, как множества пар точек в соответствующих польских пространствах принадлежат классу $\mathbf{K}_\sigma$. $\square$

Заметим следующее: если E — отношение эквивалентности класса $\mathbf{K}_\sigma$ на польском пространстве $\mathbb{X}$, то $\mathbb{X}$ само σ-компактно, так как непрерывные образы компактных множеств компактны а $\mathbb{X}$ — непрерывный образ множества E при отображении $\langle x, y\rangle \mapsto x$. Значит, $\mathbf{K}_\sigma$-отношения эквивалентности на польских пространствах — то же самое, что $\mathbf{F}_\sigma$-отношения эквивалентности на σ-компактных польских пространствах. Следующая теорема Розендаля [65] показывает особую роль отношения $\boldsymbol{\ell}^\infty$ в этом классе.

Теорема 5.2. *Каждое $\mathbf{K}_\sigma$-отношение эквивалентности E на польском пространстве борелевски сводится к $\boldsymbol{\ell}^\infty$. В частности, выполнены соотношения $\mathsf{E}_1 \le_{\mathsf{B}} \boldsymbol{\ell}^\infty$, $\mathsf{E}_2 \le_{\mathsf{B}} \boldsymbol{\ell}^\infty$, $\mathsf{E}_\infty \le_{\mathsf{B}} \boldsymbol{\ell}^\infty$, $\boldsymbol{\ell}^p \le_{\mathsf{B}} \boldsymbol{\ell}^\infty$ для любого $1 \le p < +\infty$.*

Мы увидим ниже, что в заключительных соотношениях теоремы $\le_{\mathsf{B}}$ можно заменить строгой сводимостью $<_{\mathsf{B}}$.

Доказательство. Рассмотрим замкнутое множество $\mathbb{A}$ всех точек x пространства $\mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$, являющихся $\subseteq$-возрастающими последовательностями (подмножеств $\mathbb{N}$) в том смысле что $x(n) \subseteq \subseteq x(n+1)$ для всех n. Определим отношение эквивалентности H на $\mathbb{A}$ следующим образом:

$$x \,\mathsf{H}\, y \quad \text{когда} \quad \exists N \,\forall m\,(x(m) \subseteq y(N+m) \land y(m) \subseteq x(N+m)).$$

Утверждение 1: выполнено $\mathsf{H} \le_{\mathsf{B}} \boldsymbol{\ell}^\infty$.

Это просто. Для любой последовательности $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ определим $\vartheta(x) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, так что

$$\vartheta(x)(n,k) = \begin{cases} \text{наименьшее } j \le k \text{ такое, что } n \in x(j), \\ \text{или просто } k, \text{ когда } n \notin x(k). \end{cases}$$

Тогда отношение $x \,\mathsf{H}\, y$ эквивалентно существованию числа N, для которого $|\vartheta(x)(n,k) - \vartheta(y)(n,k)| \le N$ для всех n, k. Взяв произвольную биекцию $b : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}$, определяем редукцию τ отношения H к $\boldsymbol{\ell}^\infty$ через $\tau(x)(b(n,k)) = \vartheta(x)(n,k)$.

Утверждение 2: каждое $\mathbf{K}_\sigma$-отношение эквивалентности E на польском пространстве $\mathbb{X}$ борелевски сводится к H.

Будучи множеством типа $\mathbf{K}_\sigma$, E имеет вид $\mathsf{E} = \bigcup_n E_n$, где каждое E_n является компактным подмножеством в $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ (но не обязательно отношением эквивалентности), и $E_n \subseteq E_{n+1}$. Не ограничивая общности, предполагаем, что каждое множество E_n рефлексивно и симметрично на своей области $D_n = \operatorname{dom} E_n = \operatorname{ran} E_n$, которая является компактным множеством, в частности, $\langle x, x\rangle \in E_n$ для всех $x \in D_n$. Положим $P_0 = E_0$ и далее, по индукции,

$$P_{n+1} = P_n \cup E_{n+1} \cup P_n^{(2)},$$

где

$$P_n^{(2)} = \{\langle x, y\rangle : \exists z\, (\langle x, z\rangle \in P_n \wedge \langle z, y\rangle \in P_n)\}.$$

Таким образом, каждое P_n — кóмпактное подмножество $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$, более того, подмножество E, поскольку E является отношением эквивалентности. Кроме того, $E_n \subseteq P_n \subseteq P_{n+1}$ и, значит, $\mathsf{E} = \bigcup_n P_n$.

Возьмем какую-нибудь счетную базу $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ топологии пространства $\mathbb{X}$. Определим для каждого $x \in \mathbb{X}$ множество $\vartheta_n(x) = \{k : U_k \cap P_n(x) \neq \emptyset\}$, где $P_n(x) = \{y : \langle x, y\rangle \in R_n\}$. Понятно, что $\vartheta_n(x) \subseteq \vartheta_{n+1}(x)$, и потому $\vartheta(x) = \{\vartheta_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{A}$. Утверждается, что ϑ — редукция E к H.

В самом деле, если $x \mathrel{\mathsf{E}} y$, то $\langle y, x\rangle \in P_n$ для некоторого n, так что $\langle x, z\rangle \in P_m$ влечет $\langle y, z\rangle \in P_{1+\max\{m,n\}}$ для всех m и $z \in \mathbb{X}$. Другими словами, $P_m(x) \subseteq P_{1+\max\{m,n\}}(y)$ и, следовательно, $\vartheta_m(x) \subseteq \vartheta_{1+\max\{m,n\}}(y)$ для всех m. Аналогично, для некоторого n' имеем $\vartheta_m(y) \subseteq \vartheta_{1+\max\{m,n'\}}(y)\quad \forall m$. Тем самым, $\vartheta(x) \mathrel{\mathsf{H}} \vartheta(y)$.

Обратно, предположим, что $\vartheta(x) \mathrel{\mathsf{H}} \vartheta(y)$. Для некоторого числа N выполнено $P_m(x) \subseteq P_{N+m}(y)$ и $P_m(y) \subseteq P_{N+m}(x)$ для всех m. Взяв здесь m достаточно большим, чтобы P_m содержало пару $\langle x, x\rangle$, получим $x \in P_{N+m}(y)$, откуда немедленно следует $x \mathrel{\mathsf{E}} y$. □

Упражнение 5.3. Результат теоремы 5.2 для $\mathsf{E} = \ell^p$ получен Су Гао [32]. Он определил $d_p(x, s) = (\sum_{k=0}^{\operatorname{lh} s-1} |x(k) - s(k)|^p)^{\frac{1}{p}}$ для всех $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $s \in \mathbb{Q}^{<\omega}$, т.е. s — конечная последовательность рациональных чисел. Понятно, что ℓ^p-расстояние

$(\sum_{k=0}^{\infty} |x(k) - y(k)|^p)^{\frac{1}{p}}$ между любыми точками $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ конечно в том и только в том случае, когда существует константа C такая, что $|d_p(x,s) - d_p(y,s)| < C$ для всех $s \in \mathbb{Q}^{<\omega}$. Из этого наблюдения извлекается искомая редукция отношения ℓ^p к ℓ^∞. Дополните детали этого рассуждения. □

5.2. Отношения эквивалентности E_3, T_2, c_0

Отношения, перечисленные в заголовке (см. определение 3.16 относительно T_2), выделяются среди всех отношений эквивалентности, явно упомянутых на диаграмме со стр. 56, тем свойством, что они не принадлежат борелевскому классу $\mathbf{F}_\sigma$. Довольно длинное доказательство этого утверждения здесь не приводится. Вместо этого мы сначала докажем две простые леммы о сводимости отношения E_3 к T_2 и к c_0, и сводимости E_∞ к T_2, а затем более сложную лемму о несводимости отношения E_3 к ℓ^∞.

Лемма 5.4. *Выполняется* $\mathsf{E}_3 \le_{\mathsf{B}} \mathsf{T}_2$ *и* $\mathsf{E}_3 \le_{\mathsf{B}} \mathsf{c}_0$.

Доказательство. (1) Если $a \in 2^{\mathbb{N}}$ и $s \in 2^{<\omega}$, то определим $sa \in 2^{\mathbb{N}}$ через $(sa)(k) = a(k) +_2 s(k)$ при $k < \mathrm{lh}\, s$, где $+_2$ означает сложение по модулю 2, и $(sa)(k) = a(k)$ при $k \ge \mathrm{lh}\, s$. Если $m \in \mathbb{N}$, то $m^\wedge a \in 2^{\mathbb{N}}$ обозначает присоединение члена m слева к a, т.е. $(m^\wedge a)(0) = m$ и $(m^\wedge a)(k+1) = x(k)$. В этих обозначениях понятно, что

$$x \,\mathsf{E}_3\, y \iff \{m^\wedge(s\,x(m)) : s \in 2^{<\omega},\ m \in \mathbb{N}\} = \\ = \{m^\wedge(s\,y(m)) : s \in 2^{<\omega},\ m \in \mathbb{N}\}$$

для всех $x, y \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. Любая биекция $2^{<\omega} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}$ индуцирует борелевскую редукцию E_3 к T_2.

(2) Для доказательства соотношения $\mathsf{E}_3 \le_{\mathsf{B}} \mathsf{c}_0$ возьмем борелевское отображение $\vartheta : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, для которого $\vartheta(x)(2^n(2k+1) - 1) = n^{-1} x(n)(k)$. □

Лемма 5.5. *Любое счетное борелевское отношение эквивалентности борелевски сводится к отношению* T_2.

Доказательство. Пусть E — счетное борелевское отношение эквивалентности на $2^{\mathbb{N}}$. По теореме Г.5 имеется последовательность борелевских функций $f_n : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющая условию $[a]_{\mathsf{E}} = \{f_n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ для всех $a \in 2^{\mathbb{N}}$. Отображение ϑ, переводящее каждую точку $a \in 2^{\mathbb{N}}$ в точку $x = \vartheta(a) \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, для которой $(x)_n = f_n(a) \quad \forall n$, является редукцией отношения E к T_2. □

Теперь докажем довольно тонкую лемму о несводимости.

Лемма 5.6. *Отношение* E_3 *борелевски несводимо к* $\boldsymbol{\ell}^\infty$.

Доказательство. Рассмотрим E_3 как отношение эквивалентности на $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, т.е. $x\,\mathsf{E}_3\,y$ эквивалентно тому, что $x(k)\,\mathsf{E}_0\,y(k)$ для всех k, и напомним, $a\,\mathsf{E}_0\,b$ означает, что $a\Delta b = \{m : a(m) \neq b(m)\}$ — конечное множество.

Предположим противное: $\vartheta : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ является борелевской редукцией E_3 к $\boldsymbol{\ell}^\infty$. Заметим, что $\boldsymbol{\ell}^\infty \times \boldsymbol{\ell}^\infty \leq_{\mathrm{C}} \boldsymbol{\ell}^\infty$. В самом деле, для $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ определим $f(x, y) = z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ так, что $z(2n) = x(n)$ и $z(2n+1) = y(n)$. Отображение $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ непрерывно в обычной польской топологии $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и, очевидно, сводит $\boldsymbol{\ell}^\infty \times \boldsymbol{\ell}^\infty$ к $\boldsymbol{\ell}^\infty$ в том смысле, что $f(x, y)\,\boldsymbol{\ell}^\infty\,f(x', y')$ равносильно $x\,\boldsymbol{\ell}^\infty\,x' \wedge y\,\boldsymbol{\ell}^\infty\,y'$. Значит, согласно теореме 2.12, можно не ограничивая общности считать, что редукция ϑ непрерывна.

Определим $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in 2^{\mathbb{N}}$ («константы 0 и 1») через $\mathbf{0}(n){=}0$, $\mathbf{1}(n){=}1$ $\forall n$. Определим $\mathbb{0} \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ посредством $\mathbb{0}(k) = \mathbf{0}$ для всех k. Наконец, для каждого k определим $\mathbf{z}_k \in 2^{\mathbb{N}}$ условиями: $\mathbf{z}_k(n) = 1$ при $n < k$ и $\mathbf{z}_k(n) = 0$ при $n \geq k$.

Утверждается, что существуют возрастающие последовательности натуральных чисел $\{k_m\}$ и $\{j_m\}$, для которых $|\vartheta(x)(j_m) - \vartheta(\mathbb{0})(j_m)| > m$ для всех m и всех $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющих условию

$$x(k) = \begin{cases} \mathbf{z}_{k_i} & \text{при } i < m \text{ и } k = k_i, \\ \mathbf{0} & \text{для всех } k < k_m, \text{ не имеющих вида } k_i. \end{cases}$$

Чтобы увидеть, как отсюда следует противоречие, определим $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ так, что $x(k_i) = \mathbf{z}_{k_i} \quad \forall i$ и $(x)_k = \mathbf{0}$, если k не имеет вида k_i. Тогда $x\,\mathsf{E}_3\,\mathbb{0}$, но $|\vartheta(x)(j_m) - \vartheta(\mathbb{0})(j_m)| > m$ для всех m, поэтому $\vartheta(x)\,\boldsymbol{\ell}^\infty\,\vartheta(\mathbb{0})$ не имеет места, что и требовалось.

Положим $k_0 = 0$. Чтобы определить j_0 и k_1, рассмотрим точку $x_0 \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, определенную как $x_0(0) = \mathbf{1}$, и $x_0(k) = \mathbf{0}$ для всех $k \geq 1$. Тогда $x_0 \ \mathsf{E}_3\ \mathbb{0}$ не выполнено, значит и $\vartheta(x_0)\ \boldsymbol{\ell}^\infty\ \vartheta(\mathbb{0})$ не имеет места. Возьмем любое число j_0, удовлетворяющее $|\vartheta(x_0)(j_0) - \vartheta(\mathbb{0})(j_0)| > 0$. Поскольку функция ϑ непрерывна, найдется окрестность точки x_0 в $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ такая, что $|\vartheta(x)(j_0) - \vartheta(\mathbb{0})(j_0)| > 0$ для всех x из этой окрестности. По выбору x_0, тем более найдется число $k_1 > 0$ такое, что $|\vartheta(x)(j_0) - \vartheta(\mathbb{0})(j_0)| > 0$, если $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, $x(0) = \mathbf{z}_{k_1}$, и $x(k) = \mathbf{0}$ при $0 < k < k_1$.

Чтобы определить j_1 и k_2, рассмотрим точку $x_1 \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, определенную через $x_1(0) = \mathbf{z}_{k_1}$ и $x_1(k) = \mathbf{0}$ при $0<k<k_1$, и $x_1(k_1) = \mathbf{1}$. Снова имеется число j_1 такое, что $|\vartheta(x_1)(j_1) - \vartheta(\mathbb{0})(j_1)| > 1$, и затем число $k_2 > k_1$ такое, что $|\vartheta(x)(j_1) - \vartheta(\mathbb{0})(j_1)| > 1$ для всех точек $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющих условию $x(0) = \mathbf{z}_{k_1}$, $x(k_1) = \mathbf{z}_{k_1}$, и $x(k) = \mathbf{0}$ при $0 < k < k_1$ и $k_1 < k < k_2$.

И так далее. □

Упражнение 5.7. Используя результаты 5.2, 5.4, 5.6, докажите, что отношение $\mathbf{c}_0$ борелевски не сводится к $\boldsymbol{\ell}^1$. См. также начало §5.4. □

Дальнейшее изучение отношения T_2 в [13, 49] показало, что T_2 не является борелевски сводимым к отношениям эквивалентности из большой группы, включающей, например, $\mathbf{c}_0, \boldsymbol{\ell}^p, \boldsymbol{\ell}^\infty$, $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3, \mathsf{E}_\infty$. Но и отношения из этого списка, кроме $\mathsf{E}_3, \mathsf{E}_\infty$, также борелевски несводимы к T_2. Это следует из теории турбулентности, представленной в главе 9.

5.3. Дискретизация и связь с идеалами

Некоторые отношения эквивалентности на диаграмме со стр. 56 прямо определены через идеалы, в частности E_i, $i = 0, 1, 2, 3$. Другие отношения эквивалентности определены иначе. В то же время отношения $\mathbf{c}_0, \boldsymbol{\ell}^1, \boldsymbol{\ell}^\infty$ оказываются эквивалентными в смысле борелевской сводимости некоторым борелевским идеалам. Важным шагом здесь является «дискретизация» через ограничение на подходящие подмножества в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Определение 5.8. Положим $\mathbb{X}=\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n=\{x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n\,(x(n)\in X_n)\}$, где $X_n = \left\{\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n}{2^n}\right\}$. □

Лемма 5.9. *Выполнено* $\mathbf{c}_0 \le_{\mathrm{B}} \mathbf{c}_0 \restriction \mathbb{X}$ *и* $\boldsymbol{\ell}^p \le_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\ell}^p \restriction \mathbb{X}$ *для всех* $1 \le p < \infty$.

С другой стороны, $\boldsymbol{\ell}^\infty \le_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\ell}^\infty \restriction \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

Доказательство. Для начала покажем $\mathbf{c}_0 \le_{\mathrm{B}} \mathbf{c}_0 \restriction [0,1]^{\mathbb{N}}$. Пусть π — любая биекция множества $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ на $\mathbb{N}$. Для $x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, определим $\vartheta(x)\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ следующим образом. Допустим, что $k=\pi(n,\eta)$ и $\eta\in\mathbb{Z}$. Положим для каждого k

$$\vartheta(x)(k) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x(n) < \eta, \\ x(n), & \text{если} \quad \eta \le x(n) < \eta+1, \\ 1, & \text{если} \quad x(n) \ge \eta+1. \end{cases}$$

Так определенная ϑ является борелевской редукцией $\mathbf{c}_0$ к $\mathbf{c}_0 \restriction [0,1]^{\mathbb{N}}$.

Теперь докажем, что $\mathbf{c}_0 \restriction [0,1]^{\mathbb{N}} \le_{\mathrm{B}} \mathbf{c}_0 \restriction \mathbb{X}$. Для каждого $x\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ определим $\psi(x)\in\mathbb{X}$ так, что $\psi(x)(n)$ — наибольшее число вида $\frac{i}{2^n}$, $0\le i\le 2^n$, меньшее, чем $x(n)$. Тогда, очевидно, $x\ \mathbf{c}_0\ \psi(x)$ для всех $x\in[0,1]^{\mathbb{N}}$, следовательно, ψ — борелевская редукция $\mathbf{c}_0 \restriction [0,1]^{\mathbb{N}}$ к $\mathbf{c}_0 \restriction \mathbb{X}$.

Итак, $\mathbf{c}_0 \le_{\mathrm{B}} \mathbf{c}_0 \restriction \mathbb{X}$. Тем самым, $\mathbf{c}_0 \sim_{\mathrm{B}} \mathbf{c}_0 \restriction \mathbb{X}$, поскольку обратная редукция задается тождественным отображением.

Доказательство $\boldsymbol{\ell}^1 \le_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\ell}^1 \restriction \mathbb{X}$ аналогично. Для $\boldsymbol{\ell}^\infty$ такое утверждение очевидно: если $x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, то заменим каждое значение $x(n)$ наибольшим целым числом $z\le x(n)$.

Доказательство $\boldsymbol{\ell}^p \le_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\ell}^p \restriction \mathbb{X}$ при $1<p<\infty$ требует некоторых изменений в первой части доказательства $\mathbf{c}_0 \le_{\mathrm{B}} \mathbf{c}_0 \restriction \mathbb{X}$ (редукция к $[0,1]^{\mathbb{N}}$). Заметим следующее: если $\eta\in\mathbb{Z}$ и $\eta-1\le$ $\le x(n) < \eta < \zeta \le y(n) < \zeta+1$, то значение $(y(n)-x(n))^p$ в формуле расстояния $\|y-x\|_p = (\sum_n |y(n)-x(n)|^p)^{\frac{1}{p}}$ переходит в $(\zeta-\eta)+(\eta-x(n))^p+(y(n)-\zeta)^p$ в формуле для $\|\vartheta(y)-\vartheta(x)\|_p$. Если это имеет место для бесконечно многих n, то оба расстояния бесконечны, а иначе таким случаем можно пренебречь.

Если $\eta-1\le x(n)<\eta\le y(n)<\eta+1$, то член $(y(n)-x(n))^p$ в $\|y-x\|_p$ переходит в $(\eta-x(n))^p+(y(n)-\eta)^p$ в $\|\vartheta(y)-\vartheta(x)\|_p$.

Однако

$$(\eta - x(n))^p + (y(n) - \eta)^p \le (y(n) - x(n))^p \le$$
$$\le 2^{p-1}((\eta - x(n))^p + (y(n) - \eta)^p),$$

и поэтому такие члены сумм $\|y-x\|_p$ и $\|\vartheta(y)-\vartheta(x)\|_p$ отличаются друг от друга на множитель, заключенный между 1 и 2^{p-1}.

Если $\eta \le x(n), y(n) < \eta + 1$ для одного и того же $\eta \in \mathbb{Z}$, то член $(y(n) - x(n))^p$ в $\|y - x\|_p$ переходит в $\|\vartheta(y) - \vartheta(x)\|_p$, сохраняя свой вид.

Итак, конечность $\|y - x\|_p$ равносильна конечности $\|\vartheta(y) - \vartheta(x)\|_p$. □

Используем «дискретизацию» из леммы 5.9 для вывода следующего утверждения, принадлежащего Оливеру [64].

Лемма 5.10. *Выполняется* $\mathsf{c}_0 \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{Z}_0$.

Доказательство. Напомним, что $\mathsf{Z}_0 = \mathsf{E}_{\mathscr{Z}_0}$, см. §2.2. Докажем соотношение $\mathsf{c}_0 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{Z}_0$. По лемме 5.9 достаточно определить борелевскую редукцию $\mathsf{c}_0 \restriction \mathbb{X}$ к Z_0, т.е. борелевскую функцию $\vartheta : \mathbb{X} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, для которой $x \mathrel{\mathsf{c}_0} y$ эквивалентно $\vartheta(x) \,\Delta\, \vartheta(y) \in \mathscr{Z}_0$ для всех $x, y \in \mathbb{X}$. Пусть $x \in \mathbb{X}$. Тогда для всякого n выполняется $x(n) = \frac{k(n)}{2^n}$ для какого-то натурального числа $k(n) \le 2^n$. Значение $k(n)$ определяет пересечение $\vartheta(x) \cap [2^n, 2^{n+1})$ следующим образом: для каждого $j < 2^n$ полагаем $2^n + j \in \vartheta(x)$, если $j < k(n)$. Тогда $x(n) = \frac{\#(\vartheta(x) \cap [2^n, 2^{n+1}))}{2^n}$ для каждого n и, более того, $|y(n) - x(n)| = \frac{\#([\vartheta(x) \,\Delta\, \vartheta(y)] \cap [2^n, 2^{n+1}))}{2^n}$ для всех $x, y \in \mathbb{X}$ и всех n. Отсюда следует, что ϑ — искомая редукция.

Для доказательства обратного соотношения $\mathsf{Z}_0 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{c}_0$ нужно определить борелевскую функцию $\vartheta : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, для которой соотношение $X \,\Delta\, Y \in \mathscr{Z}_0$ эквивалентно $\vartheta(X) \mathrel{\mathsf{c}_0} \vartheta(Y)$. Здесь простые соображения типа $\vartheta(X)(n) = \frac{\#(X \cap [0,n))}{n}$ не приводят к успеху. Правильный путь основан на том, что для любых множеств $s, t \subseteq [0, n)$ необходимым и достаточным условием для $\#(s \,\Delta\, t) \le k$ является неравенство $|\#(s \,\Delta\, z) - \#(t \,\Delta\, z)| \le k$ для всех $z \subseteq [0, n)$. Чтобы использовать это, фиксируем такое перечисление, возможно, с повторениями, $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$, что

$$\{z_j : 2^n \le j < 2^{n+1}\} \quad = \quad \mathscr{P}([0, n))$$

для каждого n. Определим для любых $X \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ и $2^n \le j < 2^{n+1}$ функцию $\vartheta(X)(j) = \frac{\#(X \cap z_j)}{n}$. Тогда $\vartheta : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ — искомая редукция. □

Следующий результат Кехриса доказывает, что $\mathsf{E}_2 \sim_{\mathrm{B}} \ell^1$, однако мы докажем более общее утверждение. Напомним, что для любой последовательности вещественных чисел $r_n > 0$ отношение эквивалентности на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, определенное *суммируемым идеалом* $\mathscr{S}_{\{r_n\}} = \{x \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in x} r_n < +\infty\}$, обозначается $\mathsf{S}_{\{r_n\}}$. Иными словами, для $x, y \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ соотношение $x \mathrel{\mathsf{S}_{\{r_n\}}} y$ эквивалентно тому, что $\sum_{n \in x \Delta y} r_n < +\infty$. Разумеется, $\mathsf{S}_{\{r_n\}}$ можно определить и на $2^{\mathbb{N}}$ таким образом: $a \mathrel{\mathsf{S}_{\{r_n\}}} b$, если $\sum_{a(n) \neq b(n)} r_n < +\infty$.

Лемма 5.11. *Если $r_n \ge 0$, $r_n \to 0$, $\sum_n r_n = +\infty$, то $\mathsf{S}_{\{r_n\}} \sim_{\mathrm{B}} \ell^1$. В частности, отношение $\mathsf{E}_2 = \mathsf{S}_{\{\frac{1}{n+1}\}}$ удовлетворяет условию $\mathsf{E}_2 \sim_{\mathrm{B}} \ell^1$.*

Доказательство. Для вывода соотношения $\mathsf{S}_{\{r_n\}} \le_{\mathrm{B}} \ell^1$, для каждого $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ определим $\vartheta(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ следующим образом:

$$\vartheta(x)(n) = \begin{cases} r_n & \text{при } n \in x, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $x \Delta y \in \mathscr{S}_{\{r_n\}}$ эквивалентно $\vartheta(x) \mathrel{\ell^1} \vartheta(y)$, что и требовалось.

В обратную сторону, достаточно построить борелевскую редукцию $\ell^1 \restriction \mathbb{X}$ к $\mathsf{S}_{\{r_n\}}$. Каждой паре из $n \in \mathbb{N}$ и $k < 2^n$ сопоставим, вообще говоря, бесконечное множество $s_{nk} \subseteq \mathbb{N}$ так, чтобы множества s_{nk} были попарно дизъюнктны и $\sum_{j \in s_{nk}} r_j = 2^{-n}$. Отображение $\vartheta(x) = \bigcup_n \bigcup_{k < 2^n x(n)} s_{nk}$ для $x \in \mathbb{X}$ является искомой редукцией. □

5.4. Суммируемые идеалы и идеал нулевой плотности

Утверждение о $\le_{\mathsf{B}}$-независимости двух наиболее известных банаховых отношений эквивалентности $\boldsymbol{\ell}^1$ и c_0 весьма важно. В одну сторону оно доказано выше в упражнении 5.7. В другую сторону оно доказывается в следующей теореме 5.12, плученной Хъёртом [35] в общем виде, и только для E_2 и Z_0 — Джастом [45]. Ее любопытно сравнить с результатом 2.6: борелевская сводимость не вытекает из включения соответствующих идеалов!

Теорема 5.12. *Предположим* $r_n \ge 0$, $r_n \to 0$, $\sum_n r_n = +\infty$. *Тогда отношение* $\mathsf{S}_{\{r_n\}}$ *борелевски несводимо к* Z_0. *В частности, при* $r_n = \frac{1}{n+1}$, *отношение эквивалентности* $\mathsf{S}_{\{r_n\}} = \mathsf{E}_2$ *борелевски несводимо к* Z_0.

Доказательство. Предположим противное: найдется борелевская функция $\vartheta : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, являющаяся редукцией $\mathsf{S}_{\{r_n\}}$ к Z_0, т.е.

$$x \,\Delta\, y \in \mathscr{S}_{\{r_n\}} \iff \vartheta(x)\,\Delta\,\vartheta(y) \in \mathscr{Z}_0 \qquad \text{для всех } x, y \subseteq \mathbb{N}. \quad (1)$$

Отношение эквивалентности $\mathsf{Z}_0 \times \mathsf{Z}_0$ сводится к Z_0 с помощью непрерывной функции, которая каждой паре множеств $x, y \subseteq \mathbb{N}$ сопоставляет множество $\{2n : n \in x\} \cup \{2n+1 : n \in y\}$. Поэтому по теореме 2.12 можно считать, что указанная редукция ϑ непрерывна.

Вывод противоречия состоит из двух частей. Нам понадобится еще один вариант определения сводимости по Рудин–Блассу из §2.1. Именно, если $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ — идеалы на $\mathbb{N}$, то скажем, что соотношение $\mathscr{I} \le^{++}_{\mathrm{RB}} \mathscr{J}$ выполняется *экспоненциально*, если существует последовательность натуральных чисел k_i, удовлетворяющих условию $k_{i+1} \ge 2k_i$, и семейство непустых множеств $w_i \subseteq [k_i, k_{i+1})$, для которых эквивалентность $x \in \mathscr{I} \iff w_x = \bigcup_{i \in x} w_i \in \mathscr{J}$ выполнена для всех $x \subseteq \mathbb{N}$.

Часть 1: докажем, что $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \le^{++}_{\mathrm{RB}} \mathscr{Z}_0$ экспоненциально.

Положим $\nu(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{\#(x \cap [0, n))}{n}$ — это можно понимать как *плотность* множества $x \subseteq \mathbb{N}$. Мы оставляем читателю в качестве **упражнения** несложный вывод следующей эквивалентности, связывающей ν с идеалом $\mathscr{Z}_0$:

$$x \in \mathscr{Z}_0 \iff \lim_{k\to\infty} \nu(x \cap [k,\infty)) = 0 \qquad \text{для всех } x \subseteq \mathbb{N}. \tag{2}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Временно фиксируем $\varepsilon > 0$ и множества $u, v \subseteq [0, n)$. Для любого $x \subseteq [n, \infty)$ симметрическая разность $(u \cup x) \,\Delta\, (v \cup x) = u \,\Delta\, v$ конечна, и потому она принадлежит идеалу $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$. Согласно (1) соответствующее множество $\vartheta(u \cup x) \,\Delta\, \vartheta(v \cup x)$ принадлежит $\mathscr{Z}_0$. Значит, согласно (2) найдется такое число $k > n$, что $\nu([\vartheta(u \cup x) \Delta \vartheta(v \cup x)] \cap [k, \infty)) < \varepsilon$. Однако функция ϑ непрерывна, поэтому найдется такое $n' > k$ и множество $s \subseteq [n, n')$, что выполняется $\nu([\vartheta(u \cup x') \,\Delta\, \vartheta(v \cup x')] \cap [k, \infty)) < \varepsilon$ для *каждого* множества $x' \subseteq [n, \infty)$, удовлетворяющего условию $x' \cap [n, n') = s$.

Фиксировав эти k и n', рассмотрим теперь какую-нибудь другую пару множеств $u_1, v_1 \subseteq [0, n)$. Аналогичное рассуждение дает нам числа $k_1 > k$ и $n'_1 > n'$, и множество $s_1 \subseteq [n, n'_1)$, для которых $s = s_1 \cap [n, n')$ и неравенство $\nu([\vartheta(u_1 \cup x') \,\Delta\, \vartheta(v_1 \cup x')] \cap [k_1, \infty)) < \varepsilon$ выполнено для *каждого* множества $x' \subseteq [n, \infty)$, удовлетворяющего $x' \cap [n, n'_1) = s_1$.

Продолжая этот процесс так, чтобы просмотреть все пары множеств $u, v \subseteq [0, n)$, получим в результате числа $n' > k > n$ и множество $s \subseteq [n, n')$, для которых при всех $u, v \subseteq [0, n)$ и $x \subseteq [n', \infty)$ выполняется

$$\nu\big([\vartheta(u \cup s \cup x) \,\Delta\, \vartheta(v \cup s \cup x)] \cap [k, \infty)\big) < \varepsilon\,. \tag{3}$$

Причем, если увеличить k, то (3) сохранится. Сверх этого, вследствие непрерывности ϑ имеются число $n'' > n'$ и множество $s' \subseteq [n, n'')$ для которых $s = s' \cap [n, n')$ и для всех $u \subseteq [0, n)$ и $x, y \subseteq [n'', \infty)$ выполняется

$$[\vartheta(u \cup s' \cup x) \,\Delta\, \vartheta(u \cup s' \cup y)] \cap [0, k) = \emptyset\,. \tag{4}$$

При этом соотношение (3) сохраняется, т.е. для всех $u, v \subseteq [0, n)$ и $x \subseteq [n'', \infty)$

$$\nu\big([\vartheta(u \cup s' \cup x) \,\Delta\, \vartheta(v \cup s' \cup x)] \cap [k, \infty)\big) < \varepsilon\,. \tag{5}$$

Итерируя эту конструкцию, построим последовательность натуральных чисел $0 = k_0 = a_0 < b_0 < k_1 < a_1 < b_1 < k_2 < \dots$ и для каждого i множество $s_i \subseteq [b_i, a_{i+1})$ такие, что для любой пары множеств $x, y \subseteq [a_{i+1}, \infty)$ и всех u, $v \subseteq [0, b_i)$ выполняется

(a) $\nu\big([\vartheta(u \cup s_i \cup x) \,\Delta\, \vartheta(v \cup s_i \cup x)] \cap [k_{i+1}, \infty)\big) < 2^{-i-1}$,

(b) $[\vartheta(u \cup s_i \cup x) \,\Delta\, \vartheta(u \cup s_i \cup y)] \cap [0, k_{i+1}) = \emptyset$,

(c) $k_{i+1} \geq 2k_i$ для всех i,

(d) существует множество $t_i \subseteq [a_i, b_i)$, для которого $|r_i - \sum_{n \in t_i} r_n| < 2^{-i}$.

Опишем эту конструкцию более подробно. Начав с $a_0 = 0$, в наших предположениях о последовательности $\{r_n\}$, находим число $b_0 > a_0$ и множество $t_0 \subseteq [a_0, b_0)$ так, чтобы выполнить (d) для $i = 0$. Теперь, приняв $n = b_0$ и $\varepsilon = 2^{-1}$, выполним построение, которое приводит к (4) и (5), и обозначим через k_1 и a_1 полученные значения k' и n'' и через s_0 полученное множество $s' \subseteq [b_0, a_1)$. Понятно, что (a), (b) выполнены для $i = 0$.

Второй шаг. Находим $b_1 > a_1$ и $t_1 \subseteq [a_1, b_1)$, удовлетворяющие (d) для $i = 1$. Приняв $n = b_1$ и $\varepsilon = 2^{-2}$, выполним построение, которое приводит к (4) и (5), и обозначим через k_2 и a_2 полученные значения k' и n'' и через s_1 — полученное множество $s' \subseteq [b_1, a_2)$. Если нужно, увеличиваем k' между шагами (4) и (5), чтобы выполнилось (c).

И т. д.

Из (d) следует, что отображение $\xi \mapsto t_\xi = \bigcup_{i \in \xi} t_i$ $(\xi \subseteq \mathbb{N})$ является $\leq^{++}_{\mathrm{RB}}$-редукцией $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ к $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \restriction N$, где $N = \bigcup_i [a_i, b_i)$. При этом соотношение $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \leq^{++}_{\mathrm{RB}} \mathscr{S}_{\{r_n\}} \restriction N$ выполнено экспоненциально вследствие (c).

Положим $S = \bigcup_i s_i$; тогда $S \cap N = \emptyset$.

Наконец, положим $f(z) = \vartheta(z \cup S) \,\Delta\, \vartheta(S)$ для каждого $z \subseteq N$. Тогда для любых множеств $x, y \subseteq N$ (возможно, не для всех

$x, y \subseteq \mathbb{N}$):

$$x \,\Delta\, y \in \mathscr{S}_{\{r_n\}} \iff \vartheta(x \cup S) \,\Delta\, \vartheta(y \cup S) \in \mathscr{Z}_0 \iff$$
$$\iff f(x) \,\Delta\, f(y) \in \mathscr{Z}_0,$$

так что f является редукцией отношения $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \restriction N$ к $\mathscr{Z}_0$. Пусть $w_i = f(t_i) \cap [k_i, k_{i+1})$ и $w_\xi = \bigcup_{i \in \xi} w_i$. Утверждается, что отображение $i \mapsto w_i$ доказывает $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \leq^{++}_{\text{RB}} \mathscr{Z}_0$ (в экспоненциальном смысле согласно (c)), т.е.

$$\xi \,\Delta\, \eta \in \mathscr{S}_{\{r_n\}} \iff w_\xi \,\Delta\, w_\eta \in \mathscr{Z}_0$$

для любых $\xi, \eta \subseteq \mathbb{N}$. В самом деле, по сказанному выше имеем

$$\xi \,\Delta\, \eta \in \mathscr{S}_{\{r_n\}} \iff t_\xi \,\Delta\, t_\eta \in \mathscr{S}_{\{r_n\}} \iff f(t_\xi) \,\Delta\, f(t_\eta) \in \mathscr{Z}_0\,,$$

так что достаточно доказать, что $f(t_\xi) \,\Delta\, w_\xi \in \mathscr{Z}_0$ для каждого $\xi \subseteq \mathbb{N}$.

Из (2) следует, что достаточно вывести неравенства

$$\nu\big([f(t_i) \,\Delta\, f(t_\xi)] \cap [k_i, k_{i+1})\big) < 2^{-i} \quad \text{для всех} \quad i \in \xi, \text{ и}$$
$$\nu(f(t_\xi) \cap [k_i, k_{i+1})) < 2^{-i} \quad \text{для всех} \quad i \in \mathbb{N} \smallsetminus \xi\,,$$

что́ по определению превращается в неравенства

(i) $\nu\big([\vartheta(t_i \cup S) \,\Delta\, \vartheta(t_\xi \cup S)] \cap [k_i, k_{i+1})\big) < 2^{-i}$ для всех $i \in \xi$, и

(ii) $\nu\big([\vartheta(S) \,\Delta\, \vartheta(t_\xi \cup S)] \cap [k_i, k_{i+1})\big) < 2^{-i}$ для всех $i \in \mathbb{N} \smallsetminus \xi$.

Положим $\eta = \xi \cap [0, i]$. Тогда множества $x = t_\xi \cup S$ и $y = t_\eta \cup S$ удовлетворяют условию $x \cap [0, a_{i+1}) = y \cap [0, a_{i+1})$, причем $x \cap [b_i, a_{i+1}) = y \cap [b_i, a_{i+1}) = s_i$, так что $[\vartheta(x) \Delta \vartheta(y)] \cap [0, k_{i+1}) = \emptyset$ согласно (b).

Теперь положим $\zeta = \{i\}$ при $i \in \xi$ и $\zeta = \emptyset$ при $i \notin \xi$ и $z = t_\zeta$. Тогда $z \cap [b_{i-1}, \infty) = y \cap [b_{i-1}, \infty)$, причем $z \cap [b_{i-1}, a_i) = {}$ $= y \cap [b_{i-1}, a_i) = s_{i-1}$. Поэтому согласно (a) для $i-1$ вместо i выполнено $\nu([\vartheta(z) \,\Delta\, \vartheta(y)] \cap \cap [k_i, \infty)) < 2^{-i}$. Отдельно, если $i = 0$, то просто $\eta = \zeta$ и $z = y$, так что последнее неравенство выполнено очевидным образом.

Соединяя оба результата, получим

$$\nu\big([\vartheta(z) \,\Delta\, \vartheta(x)] \cap [k_i, k_{i+1})\big) = \nu\big([\vartheta(z) \,\Delta\, \vartheta(y)] \cap [k_i, k_{i+1})\big) < 2^{-i}.$$

Отсюда сразу следует (i), так как $z = t_i \cup S$ при $i \in \xi$, и также (ii), так как $z = S$ при $i \notin \xi$.

Часть 2: выведем противоречие из части 1.

Итак, определенное выше отображение $i \mapsto w_i$ из $\mathbb{N}$ в конечные подмножества $\mathbb{N}$ доказывает, что $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \leq^{++}_{\mathrm{RB}} \mathscr{Z}_0$ экспоненциально при указанной последовательности чисел k_i, удовлетворяющей условиям $k_{i+1} \geq 2k_i$ и $w_i \subseteq [k_i, k_{i+1})$. Если $d_i = \frac{\#(w_i)}{k_{i+1}} \to 0$, то очевидно $\bigcup_i w_i \in \mathscr{Z}_0$ по выбору последовательности $\{k_i\}$. Иначе найдется множество $x \in \mathscr{S}_{\{r_n\}}$ такое, что $d_i > \varepsilon$ для всех $i \in x$ и одного и того же $\varepsilon > 0$, так что $w_x = \bigcup_{i \in x} w_i \notin \mathscr{Z}_0$. В обоих случаях получаем противоречие с выбором отображения $i \mapsto w_i$. □

Проблема 5.13. Фарах [24] указывает, что часть 1 доказательства теоремы 5.12 проходит также для идеала $\mathscr{I}_3$ (вместо $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$) и спрашивает для каких еще идеалов можно повторить рассуждение части 1. □

5.5. Семейство отношений ℓ^p

Согласно следующей теореме Догерти–Хъёрта [21], борелевская сводимость между отношениями эквивалентности ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, определяется значением параметра p.

Теорема 5.14. *Если* $1 \leq p < q < \infty$, *то* $\ell^p <_{\mathrm{B}} \ell^q$.

Доказательство. *Часть 1*: доказательство $\ell^q \not\leq_{\mathrm{B}} \ell^p$. По лемме 5.9 достаточно показать $\ell^q \restriction \mathbb{X} \not\leq_{\mathrm{B}} \ell^p \restriction \mathbb{X}$. Допустим $\ell^q \restriction \mathbb{X} \leq_{\mathrm{B}}$ $\leq_{\mathrm{B}} \ell^p \restriction \mathbb{X}$.

Упражнение 5.15. Следуя доказательству теоремы 2.12, покажите, что в этом случае $\ell^q \restriction \mathbb{X} \leq_{\mathrm{C}} \ell^p \restriction \mathbb{X} \times \ell^p \restriction \mathbb{X}$ и, тем самым, $\ell^q \restriction \mathbb{X} \leq_{\mathrm{C}} \ell^p \restriction \mathbb{X}$. Для этого шага нужно вывести $\ell^p \restriction \mathbb{X} \times \ell^p \restriction \mathbb{X} \leq_{\mathrm{C}}$ $\leq_{\mathrm{C}} \ell^p \restriction \mathbb{X}$, для чего используйте отображение, сопоставляющее каждой паре $x, y \in \mathbb{X}$ точку $z \in \mathbb{X}$, определенную как $z(2n) =$ $= x(n)$ и $z(2n+1) = y(n)$. □

Итак, пусть $\vartheta : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ — непрерывная редукция $\ell^q \restriction \mathbb{X}$ к $\ell^p \restriction \mathbb{X}$.

Упражнение 5.16. Рассуждая, как в доказательстве теоремы 5.12, часть 1, покажите, что существуют последовательности чисел $0 = j(0) < j(1) < j(2) < \dots$ и $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ и отображение $\tau : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, где $\mathbb{Y} = \prod_{n=0}^{\infty} X_{j(n)}$, которое сводит $\ell^q \restriction \mathbb{Y}$ к $\ell^p \restriction \mathbb{X}$ и имеет вид $\tau(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} t_n^{x(n)}$, где $t_n^r \in \prod_{k=a_n}^{a_{n+1}-1} X_k$ для каждого $r \in X_{j_n}$. См. определение 5.8. □

Случай 1: существуют $c > 0$ и число N, для которых $\|\tau_n^1 - \tau_n^0\|_p \geq c$ для всех $n \geq N$. Из предположения $p < q$ следует, что имеется неубывающая последовательность натуральных чисел $i_n \leq j_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, для которой ряд $\sum_n 2^{(i_n - j_n)p}$ расходится, но ряд $\sum_n 2^{(i_n-j_n)q}$ сходится. *Указание*: i_n — одного порядка с $j_n - p^{-1}\log_2 n$.

Пусть $n \geq N$. Тогда $\|\tau_n^1 - \tau_n^0\|_p \geq c$, и поскольку $\|...\|_p$ является нормой, то существует пара чисел $r(n) < s(n)$ в X_{j_n}, для которых $s(n) - r(n) = 2^{i_n - j_n}$ и $\|\tau_n^{s(n)} - \tau_n^{r(n)}\|_p \geq c\,2^{i_n-j_n}$. Положим $r(n) = s(n) = 0$ для $n < N$. Тогда ℓ^q-расстояние между бесконечными последовательностями $x = \{s(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $y = \{t(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{Y}$ равно $\sum_{n=N}^{\infty} 2^{(i_n-j_n)q} < +\infty$, в то время как ℓ^p-расстояние между $\tau(x)$ и $\tau(y)$ не может быть меньше, чем $\sum_{n=N}^{\infty} c^p\, 2^{(i_n-j_n)p} = \infty$. Это противоречит предположению о том, что τ – редукция $\ell^q \restriction \mathbb{Y}$ к $\ell^p \restriction \mathbb{X}$.

Случай 2: такого N нет. Тогда имеется строго возрастающая последовательность $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, для которой $\|\tau_{n_k}^1 - \tau_{n_k}^0\|_p \leq\ \leq 2^{-k}$ для всех k. Обозначим $x \in \mathbb{Y}$ константу 0 и $y \in \mathbb{Y}$ определим так, что $y(n_k) = 1 \quad \forall k$, и $y(n) = 0$ для всех прочих n. Тогда $x\, \ell^q\, y$ не имеет места, поскольку $|y(n) - x(n)| \not\to 0$, но выполнено $\tau(x)\, \ell^p\, \tau(y)$; противоречие.

Часть 2: доказываем $\ell^p \leq_{\mathrm{B}} \ell^q$. По лемме 5.9 достаточно вывести соотношение $\ell^p \restriction [0,1]^{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{B}} \ell^q$. Без ограничения общности можно считать, что $q < 2p$: любое большее значение q может быть достигнуто в несколько шагов. Для любого $\vec{x} = \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$ положим $\|\vec{x}\|_h = (x^h + y^h)^{1/h}$.

Лемма 5.17. *По всякому числу* α, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, *найдется непрерывная функция* $K_\alpha : [0,1] \to [0,1]^2$ *и числа* $M > m > 0$ *та-*

кие, что для всех $x < y$ *из* $[0, 1]$ *выполняется* $m(y-x)^\alpha \leq$ $\leq \|K_\alpha(y) - K_\alpha(x)\|_2 \leq M(y-x)^\alpha$.

Доказательство. Построение искомой функции K проще изложить в терминах фрактальной геометрии, чем предъявить её явное аналитическое выражение. Пусть $r = 4^{-\alpha}$, тогда $\frac{1}{4} < r < \frac{1}{2}$ и $\alpha = -\log_4 r$. Начиная с сегмента $[(0,0)\,,\,(1,0)]$ горизонтальной оси декартовой плоскости, заменим этот текущий сегмент четырьмя меньшими сегментами длины r (тонкие линии на рис. 2, слева). Каждый из них заменим четырьмя сегментами длины r^2 (тонкие линии на рис. 2, справа). И так далее бесконечное число шагов.

Полученную кривую K параметризуем, сопоставив вершинам получаемых ломаных линий значения, кратные 4^{-n}, где n — номер шага построения. Например, вершинам левой ломаной на рис. 2 сопоставляются числа $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, а вершинам правой — числа $0, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \ldots, \frac{14}{16}, \frac{15}{16}, 1$ в порядке их следования слева направо. Таким образом, получается непрерывное отображение $K : [0, 1] \to [0, 1]^2$, область значений которого совпадает с предельной кривой последовательности ломаных линий на рис. 2.

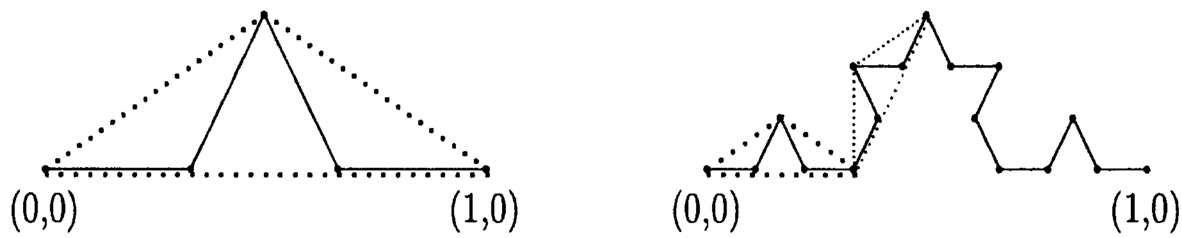

Рис. 2. $r = \frac{1}{3}$, слева: шаг 1, справа: шаг 2

Как ломаные, так и предельная кривая K, ограничены треугольниками, окаймляющими ломаные. В частности, вся кривая K расположена внутри треугольника, показанного пунктиром на рис. 5.5, слева. Пунктирная линия, в действительности совпадающая с основанием $[(0,0)\,,\,(1,0)]$ этого треугольника, нарисована чуть ниже ее настоящего положения. Соответственно, части $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$ кривой K расположены в треугольниках, ограниченных (слегка различающимися) пунктирными линиями на рис. 2, справа. И так далее. Назовем эти треугольники *ограничивающими*.

Для доказательства неравенства в лемме рассмотрим любую пару вещественных чисел $x < y$ в $[0,1]$. Обозначим через n наименьшее число такое, что x, y принадлежат к несоседним интервалам ранга n, т.е. соответственно, интервалам $[\frac{i-1}{4^n}, \frac{i}{4^n}]$ и $[\frac{j-1}{4^n}, \frac{j}{4^n}]$, где $j > i+1$. Тогда $4^{-n} \le |y-x| \le 8 \cdot 4^{-n}$.

В этом случае точки $K(x)$ и $K(y)$ принадлежат к одному отрезку или к соседним отрезкам $n-1$-й ломаной линии. Во втором случае, пусть C — общая вершина этих двух отрезков. Геометрически ясно, что евклидовы расстояния от $K(x)$ и $K(y)$ до C не превосходят r^{n-1} (длины каждого отрезка $(n-1)$-й ломаной), так что $\|K(x) - K(y)\|_2 \le 2\,r^{n-1}$.

Оценка снизу требует бо́льших усилий. Точки $K(x)$ и $K(y)$ принадлежат ограничивающим треугольникам, построенным соответственно на сегментах $[K(\frac{i-1}{4^n}), K(\frac{i}{4^n})]$ и $[K(\frac{j-1}{4^n}), K(\frac{j}{4^n})]$, причем очевидно $i+1 < j \le i+8$, так что имеется не более шести ограничивающих треугольников между этими двумя. Соседние ограничивающие треугольники могут соединяться только под двумя возможными углами, которые зависят от r, но не от n. С другой стороны, примем как наглядный факт, что несоседние ограничивающие треугольники не имеют общих точек. (Строгое доказательство этого не так просто.) Поэтому существует некоторая константа $c > 0$, зависящая от r, но не от n, для которой расстояние между двумя несоседними ограничивающими треугольниками ранга n с не более, чем 6 ограничивающими треугольниками ранга n между ними, не превосходит $c \cdot r^n$. В частности, $\|K(x) - K(y)\|_2 \ge c \cdot r^n$.

Таким образом, выполняется $m(y-x)^\alpha \le \|K(y) - K(x)\|_2 \le$ $\le M(y-x)^\alpha$, где $m = \frac{c}{8^\alpha}$ и $M = \frac{2}{r}$ (и $\alpha = -\log_4 r$). □ (лемма)

Возвращаясь к доказательству теоремы, положим $\alpha = p/q$ и пусть K_α — кривая из леммы для этого значения α. Рассмотрим любую последовательность $x = \langle x_0, x_1, x_2, ...\rangle \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Тогда $K_\alpha(x_i) = \langle x_i', x_i''\rangle \in [0,1]^2$. Положим $\vartheta(x) = \langle x_0', x_0'', x_1', x_1'', x_2', x_2'', ...\rangle$. Докажем, что так определенная непрерывная функция ϑ является редукцией $\ell^p \restriction [0,1]^{\mathbb{N}}$ к ℓ^q.

Пусть $x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ принадлежат $[0,1]^{\mathbb{N}}$; требуется доказать, что $x\,\ell^p\,y$ эквивалентно $\vartheta(x)\,\ell^q\,\vartheta(y)$. Для упрощения картины заметим, что

$$2^{-1/2}\|w\|_2 \le \mathtt{max}\{w', w''\} \le \|w\|_q \le \|w\|_1 \le 2\|w\|_2$$

для любой точки $w = \langle w', w'' \rangle \in \mathbb{R}^2$. Теперь нужно доказать:

$$\sum_i (x_i - y_i)^p < \infty \iff \sum_i \|K_\alpha(x_i) - K_\alpha(y_i)\|_2{}^q < \infty\,.$$

По выбору K_α эта эквивалентность преобразуется к виду

$$\sum_i (x_i - y_i)^p < \infty \iff \sum_i (x_i - y_i)^{\alpha q} < \infty\,,$$

что́ имеет место, поскольку $\alpha q = p$. □ (теорема 5.14)

6. СЧЕТНЫЕ И ГИПЕРКОНЕЧНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Напомним, что *счетным* называется отношение эквивалентности, каждый класс эквивалентности которого не более чем счетен. К этому типу относятся, пожалуй, лучше всего изученные борелевские отношения. Значительный интерес к ним в области эргодической теории можно проследить еще с 1970-х годов, см., например, [28], а для некоторых частных случаев — с 1950-х, см., например, [22, 23] и §6.6 ниже. Однако некоторые фундаментальные проблемы удалось решить только в сравнительно недавней работе [16], а некоторые весьма просто формулируемые вопросы остаются открытыми до сих пор.

В классе счетных борелевских отношений эквивалентности особый интерес вызывают *гладкие* и *гиперконечные* отношения, характеризуемые их борелевской сводимостью соответственно к отношениям $\Delta_{2^{\mathbb{N}}}$ и E_0. Мы начнем с гладких отношений, после чего докажем теорему характеризации гиперконечных отношений с точностью до $\sim_{\mathrm{B}}$ (теорема 6.6), затем остановимся на их же характеризации с точностью до борелевского изоморфизма и с точностью до борелевского изоморфизма почти всюду и, наконец, построим счетное борелевское отношение, которое не является гиперконечным.

6.1. Гладкие отношения

Отношение эквивалентности E на борелевском множестве $X \subseteq \mathbb{X}$ польского пространства $\mathbb{X}$ называется *гладким*, если $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \Delta_{2^{\mathbb{N}}}$. Таким образом, *гладкость* отношения E на борелевском множестве X означает, по существу, наличие борелевского пересчета его классов эквивалентности элементами пространства $2^{\mathbb{N}}$, т.е. имеется борелевская функция $\vartheta : X \to 2^{\mathbb{N}}$, для которой $x \mathsf{E} y \iff \vartheta(x) = \vartheta(y)$. В этом случае говорят еще, что отображение ϑ образует *систему инвариантов* для отношения E. В математике немало примеров таких систем инвариантов. Чтобы не забираться в специальные области, рассмотрим такой элементарный пример.

Пример 6.1. Назовем «окружностью» точку пространства $\mathbb{R}^3$, три координаты которой понимаются как декартовы координаты центра окружности в $\mathbb{R}^2$ и величину радиуса окружности. Скажем, что две «окружности» эквивалентны, если соответствующие им плоские окружности можно совместить жестким движением плоскости (с поворотами). Обозначим через $\vartheta(c)$ площадь плоской окружности, соответствующей «окружности» $c \in \mathbb{R}^3$. Отображение $\vartheta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — борелевское, даже непрерывное, и оно доказывает гладкость указанного отношения эквивалентности. □

Упражнение 6.2. Докажите, что равенство $\Delta_{\mathbb{X}}$ на любом польском пространстве $\mathbb{X}$ является гладким отношением. Докажите, что каждое гладкое отношение является борелевским.

Докажите, что отношение E из упражнения 1.6 — также гладкое. □

В классе гладких отношений эквивалентности выделяется подкласс отношений, имеющих борелевскую *трансверсаль*, т.е. множество, пересекающее каждый класс эквивалентности ровно по одной точке. Для следующей леммы, раскрывающей взаимоотношения этих классов, нам понадобится такое определение: *насыщением* множества $Y \subseteq X$ из области $X = \operatorname{dom} \mathsf{E}$ отношения эквивалентности E называется объединение $[Y]_{\mathsf{E}} = \bigcup_{y \in Y} [y]_{\mathsf{E}}$ всех классов E-эквивалентности элементов $y \in Y$.

Лемма 6.3. (i) *Любое борелевское отношение эквивалентности, имеющее борелевскую трансверсаль — гладкое, но гладкое отношение эквивалентности не обязательно имеет борелевскую трансверсаль;*

(ii) *любое борелевское конечное*[1] *отношение эквивалентности имеет борелевскую трансверсаль;*

[1] Т.е. с конечными классами эквивалентности.

(iii) *любое борелевское счетное гладкое отношение эквивалентности имеет борелевскую трансверсаль;*

(iv) *любое борелевское отношение эквивалентности* E *на польском пространстве* $\mathscr{X}$, *для которого каждый* E*-класс замкнут и насыщение* $[\mathscr{O}]_{\mathsf{E}}$ *любого открытого множества* $\mathscr{O}\subseteq\mathscr{X}$ *— борелевское, имеет борелевскую трансверсаль и следовательно, является гладким;*[2]

(v) E_0 *— не гладкое отношение.*

Доказательство. (i) Допустим, что T — борелевская трансверсаль для отношения E. Отображение $\vartheta(x) =$ «единственный элемент $y{\in}T$, который E-эквивалентен x» является борелевской редукцией E к Δ_T. Для доказательства борелевости графика ϑ заметим, что

$$\{\langle x,y\rangle : y=\vartheta(x)\} \;=\; \{\langle x,y\rangle : x\in X\wedge y\in T\wedge x\mathrel{\mathsf{E}}y\},$$

где $X = \operatorname{dom}\mathsf{E}$ — борелевское множество в данном польском пространстве $\mathscr{X}$, так что речь идет о пересечении борелевских множеств E и $X\times T$ в пространстве $\mathscr{X}\times\mathscr{X}$. Чтобы построить гладкое отношение, не имеющее борелевской трансверсали, возьмем замкнутое множество $P\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ с $\operatorname{dom}P=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, не униформизуемое борелевским множеством, и определим $\langle x,y\rangle\mathrel{\mathsf{E}}\langle x',y'\rangle$, если пары $\langle x,y\rangle$ и $\langle x',y'\rangle$ принадлежат P и $x=x'$. (О существовании такого множества P см., например, 4.14 в [5].)

(ii) Искомую трансверсаль можно определить как множество $<$-наименьших элементов всех E-классов, где $<$ — фиксированный борелевский линейный порядок на пространстве где определено E.

(iii) Используем теорему Г.6 дополнения.

(iv) Теорема о том, что всякое борелевское множество в польском пространстве — непрерывный образ бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (теорема Б.1), сводит всё к случаю, когда E — отношение на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Для любого $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ замкнутое множество $[x]_{\mathsf{E}}\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ естественно отождествляется с деревом $T_x\subseteq\mathbb{N}^{<\omega}$, состоящим

[2] Шривастава [72] доказал этот результат даже для отношениий эквивалентности с $\mathbf{G}_\delta$-классами, чтó трудно улучшить, поскольку E_0 — борелевское отношение эквивалентности с $\mathbf{F}_\sigma$-классами и открытыми насыщениями открытых множеств, но даже не гладкое. См. также [52, 18.20 iv)].

из всех конечных последовательностей $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, имеющих продолжение в $[x]_{\mathsf{E}}$. Обозначим $\vartheta(x)$ самый левый «путь» в T_x. Понятно, что $x \mathrel{\mathsf{E}} \vartheta(x)$ и $x \mathrel{\mathsf{E}} y \Longrightarrow \vartheta(x) = \vartheta(y)$, так что $Z = \{\vartheta(x) : x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ — трансверсаль. Проверим борелевость Z. Имеем

$$z \in Z \iff \forall m \,\forall s, t \in \mathbb{N}^m \left(s <_{\mathtt{lex}} t \wedge z \in \mathscr{O}_t \Longrightarrow [z]_{\mathsf{E}} \cap \mathscr{O}_s = \emptyset\right),$$

где $<_{\mathtt{lex}}$ — лексикографический порядок на множестве $\mathbb{N}^m$ всех m-элементных последовательностей натуральных чисел и $\mathscr{O}_s = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset x\}$. Далее, $[x]_{\mathsf{E}} \cap \mathscr{O}_t = \emptyset$ эквивалентно $x \notin [\mathscr{O}_t]_{\mathsf{E}}$, а все множества $[\mathscr{O}_t]_{\mathsf{E}}$ — борелевские.

(v) В противном случае E_0 имело бы борелевскую трансверсаль T согласно (iii), что противоречит результату упражнения 3.11(1). □

6.2. Гладкость как аддитивное свойство областей

Предположим, что E — борелевское отношение эквивалентности на борелевском множестве X некоторого польского пространства. Можно рассматривать ограниченные отношения вида $\mathsf{E} \restriction Y$, где Y — борелевское подмножество X. Такие ограничения могут быть гладкими или негладкими. Ясно, что если $\mathsf{E} \restriction Y$ — гладкое отношение и $Y' \subseteq Y$ — борелевское множество, то $\mathsf{E} \restriction Y'$ — гладкое отношение. Это означает, что гладкость $\mathsf{E} \restriction Y$ как свойство множества Y при фиксированном E является характеристикой типа «малости». В таких случаях типичной задачей является выяснить, насколько это свойство аддитивно. Следующая теорема доказывает, что в нашем случае имеет место счетная аддитивность.

Теорема 6.4. *Пусть E — борелевское отношение эквивалентности на борелевском множестве $X = \bigcup_k X_k$, где все X_k — борелевские множества. Если каждое отношение вида $\mathsf{E} \restriction X_k$ является гладким, то и E — гладкое.*

Доказательство. Можно считать, что множества X_k попарно дизъюнктны; иначе заменим X_k на $X_k \smallsetminus \bigcup_{i<k} X_i$. Для каждого

k имеется борелевская редукция $f_k : X_k \to Q_k$, где $Q_k \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — некоторое борелевские множество, обеспечивающая гладкость ограниченного отношения $\mathsf{E} \restriction X_k$. По очевидным соображениям можно считать, что Q_k попарно дизъюнктны, например, выполнено $q \in Q_k \Longrightarrow q(0) = k$. Положим $R_k = \mathtt{ran}\, f_k$. Это f_k-образ множества X_k, являющийся в нашем случае аналитическим и подмножеством Q_k.

Определенным образом составим из данных функций f_k борелевскую редукцию $f : X \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ отношения E к отношению равенства $\Delta_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$.

Положим $f(x) = f_0(x)$ для каждой точки $x \in X_0$.

Мы не можем теперь определить $f(x) = f_1(x)$ на X_1, поскольку, хотя X_0 и X_1 не имеют общих точек, могут найтись точки $x \in X_0$ и $y \in X_1$ такие, что $x \mathrel{\mathsf{E}} y$. Придется действовать более изобретательно. Заметим, что множество

$$F = \{\langle r_1, r_0\rangle : \exists x_1 \in X_1\, \exists x_0 \in X_0\, \big(f_1(x_1) = r_1 \wedge f_0(x_0) = \\ = r_0 \wedge x_0 \mathrel{\mathsf{E}} x_1\big)\}$$

— аналитическое множество в $R_1 \times R_0$, так как кванторы $\exists x_1 \exists x_0$ показывают, что речь идет о проекции борелевского множества.

Кроме того, F — частично определенная функция $R_1 \to R_0$. По теореме Г.7 дополнения найдутся борелевские функции $G : Q_1 \to Q_0$ и $H : Q_0 \to Q_1$, продолжающие соответственно F и F^{-1}. Тогда $\Phi = G \cap H^{-1}$ является борелевской частично определенной биекцией $Q_1 \to Q_0$, продолжающей F. Отсюда следует, что коаналитическое множество

$$P = \{\langle r_1, r_0\rangle \in \Phi : \forall x_1 \in X_1\, \forall x_0 \in X_0\, \big(f_1(x_1) = r_1 \wedge f_0(x_0) = \\ = r_0 \Longrightarrow x_0 \mathrel{\mathsf{E}} x_1\big)\}$$

удовлетворяет условию $F \subseteq P \subseteq \Phi$. Поэтому, используя теорему отделимости Г.1 дополнения, найдем борелевскую функцию Ψ, для которой $F \subseteq \Psi \subseteq P$. Множества $A = \mathtt{dom}\,\Psi \subseteq R_1$ и $B = \mathtt{ran}\,\Psi \subseteq R_0$ — борелевские по следствию Г.4. Положим для $x \in X_1$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x)\,, & \text{если} \quad f_1(x) \notin A\,, \\ \Psi(f_1(x))\,, & \text{если} \quad f_1(x) \in A\,. \end{cases}$$

Борелевость этой функции легко проверяется. Утверждается, что она сводит $\mathsf{E} \restriction (X_0 \cup X_1)$ к равенству. Нужно доказать эквивалентность $x \,\mathsf{E}\, y \iff f(x) = f(y)$ для $x, y \in X_0 \cup X_1$. Случай, когда x, y принадлежат одному и тому же из множеств X_0, X_1 тривиален, поэтому пусть $x \in X_0$ и $y \in X_1$.

Если $x \,\mathsf{E}\, y$, то пара $\langle r_1, r_0 \rangle$ из точек $r_1 = f_1(y)$ и $r_0 = f_0(x) = f(x)$ принадлежит множествам F и Ψ, т.е. просто $r_0 = \Psi(r_1)$, а значит $f(x) = f(y)$. Допустим теперь, что $x \not\mathsf{E}\, y$. Если $r_1 = f_1(y) \notin A = \operatorname{dom} \Psi$, то точки $f(y) = r_1$ и $f(x) = r_0$ принадлежат дизъюнктным множествам X_1 и X_0. Предполагаем, что $r_1 \in A$. Тогда $f(y) = r$, где $r = \Psi(r_1)$, и нужно доказать, что $r \neq r_0$. Если $r = r_0$, то пара $\langle r_1, r \rangle$ принадлежит множествам Ψ и P, так что по определению выполнено $x \,\mathsf{E}\, y$, противоречие.

Следующим шагом мы определяем f на X_2 точно так же, считая $X_0 \cup X_1$ за новое X_0 и уже определенную $f \restriction (X_0 \cup X_1)$ за f_0. И т. д. □

6.3. Гиперконечные отношения: основная теорема

Отношение эквивалентности E на борелевском множестве $X \subseteq \mathbb{X}$ польского пространства $\mathbb{X}$ называется:

конечным, если каждый E-класс $[x]_{\mathsf{E}} = \{y : y \,\mathsf{E}\, x\}$, где $x \in X$, конечен;

гиперконечным, если $\mathsf{E} = \bigcup_n \mathsf{F}_n$ для некоторой $\subseteq$-возрастающей последовательности *борелевских* конечных отношений эквивалентности F_n;

гипергладким, если $\mathsf{E} = \bigcup_n \mathsf{F}_n$ для некоторой $\subseteq$-возрастающей последовательности борелевских гладких отношений эквивалентности F_n.

Отметим, что конечные отношения эквивалентности обычно рассматриваются только в категории борелевских отношений. Гиперконечные и гипергладкие отношения являются борелевскими по определению. Важно помнить, что конечность (как и счетность в определении счетного отношения эквивалентности) здесь относятся к *размеру*, но не к *числу* классов эквивалентности, и разумеется не к самому отношению как множеству пар.

Упражнение 6.5. Докажите, что отношение эквивалентности E_0, см. §2.2, гиперконечно. Соответствующие конечные отношения F_n могут быть определены на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ так: $x\ E_n\ y$, если $x \,\Delta\, y \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$. □

Этот раздел посвящен гиперконечным отношениям эквивалентности. Мы изложим доказательство одной весьма емкой теоремы (теорема 6.6), согласно которой гиперконечные отношения характеризуются в классе всех счетных борелевских отношений эквивалентности дополнительными требованиями, например, сводимостью к E_0, индуцированностью через борелевское действие группы $\mathbb{Z}$, соотнесением некоторой дополнительной структуры с классами эквивалентности как в (vii), (viii). Все отдельные части этой теоремы были доказаны не позднее первой половины 1990-х годов, и собраны вместе в виде теорем 5.1 и 7.1 в [20] и 12.1(ii) в [42], куда, а также к [58], мы и отсылаем читателя за более подробной информацией. Доказательство этой теоремы представляет собой замечательное сочетание методов дескриптивной теории множеств и комбинаторики действий счетных групп.

Теорема 6.6. *Для любого борелевского отношения эквивалентности* E *на польском пространстве* $\mathbb{X}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathsf{E} \leq_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_0$ *и* E *— счетное отношение эквивалентности,*

(ii) E *гиперконечное,*

(iii) E *гипергладкое и счетное,*

(iv) *существует борелевское множество* $X \subseteq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ *такое, что ограниченное отношение* $\mathsf{E}_1 \restriction X$ *является счетным отношением эквивалентности, изоморфным* E *с помощью борелевской биекции из* X *на* $\mathbb{X}$*;* [3]

(v) E *индуцируется борелевским действием аддитивной группы* $\mathbb{Z}$*;*

[3] В этом техническом по своему характеру условии фигурирует отношение эквивалентности E_1, здесь определенное на $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ так: $x\ \mathsf{E}_1\ y$, если $x(n) = y(n)$ для всех n кроме конечного их числа. См. главу 7 об этом важном отношении.

(vi) *существуют борелевские отношения эквивалентности* F, R *типа* 2, *для которых* $\mathsf{E} = \mathsf{F} \vee \mathsf{R}$;[4]

(vii) *существует борелевский частичный порядок* $<$ *на* $\mathbb{X}$, *упорядочивающий каждый* E-*класс* C *подобно некоторому подмножеству* $\mathbb{Z}$;[5]

(viii) *существует борелевский ориентированный граф* Γ *на* $\mathbb{X}$, *ограничение* $\Gamma \restriction C$ *которого на каждый* E-*класс* C *является ориентированной цепью.*[6]

К пункту (v) добавим, что индуцированность отношения E на X борелевским действием аддитивной группы целых чисел $\mathbb{Z}$ равносильна существованию борелевской биекции $f : X \to X$ такой, что $[x]_{\mathsf{E}} = \{f^a(x) : a \in \mathbb{Z}\}$ для любой точки $x \in X$, где степень понимается в смысле операции суперпозиции.

Перед началом доказательства теоремы приведем следствие.

Следствие 6.7. *Отношение* E_0 *является* $\leq_{\mathsf{B}}$-*максимальным гиперконечным отношением эквивалентности.*

Доказательство. Если E гиперконечно, то $\mathsf{E} \leq_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_0$ по теореме. □

По этой причине E_0 еще называют *универсальным* гиперконечным отношением эквивалентности. О гиперконечности E_0 см. упражнение 6.5.

Замечание 6.8. По теореме 4.13, если E — негладкое гиперконечное отношение эквивалентности, то $\mathsf{E}_0 \leq_{\mathsf{B}} \mathsf{E}$, и значит

---

[4] Отношение эквивалентности F имеет *тип* n если любой F-класс содержит не более n элементов. Через $\mathsf{F} \vee \mathsf{R}$ обозначается наименьшее отношение эквивалентности, включающее $\mathsf{F} \cup \mathsf{R}$.

[5] Это условие чаще формулируют в том варианте, что каждому E-классу C можно сопоставить его линейное упорядочивание $<_C$, подобное подмножеству $\mathbb{Z}$, причем борелевским способом в том смысле, что $\{\langle x, y, z\rangle : y <_{[x]_{\mathsf{E}}} z\}$ — борелевское множество. Но это, как легко видеть, равносильно требованию пункта (vii). Такая же переформулировка известна и для (viii).

[6] Ориентированной цепью называется ориентированный граф вида $\dots \to x_{-2} \to x_{-1} \to x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$, конечный или бесконечный в каждую сторону, или конечный циклический граф, т.е. граф вида $x_1 \to x_2 \to x_3 \to \to \dots \to x_n \to x_1$. К последним по определению относятся двухвершинные графы $x_1 \to x_2 \to x_1$ и одновершинные графы $x \to x$.

$\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$ по следствию 6.7. Тем самым, имеется всего один $\sim_{\mathrm{B}}$-тип негладких гиперконечных отношений с точностью до $\sim_{\mathrm{B}}$. $\square$

Известна более тонкая классификация негладких гиперконечных отношений в терминах борелевского изоморфизма $\cong_{\mathrm{B}}$, а не борелевской би-сводимости $\sim_{\mathrm{B}}$, которая расщепляет этот тип (см. §6.5 ниже).

6.4. Доказательство основной теоремы

К сожалению, вывод всех эквивалентностей теоремы трудно изложить в виде простой последовательности импликаций. Доказательство носит более сложную структуру, состоящую из следующих цепочек:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\text{(i)} & \Longrightarrow & \text{(iii)} & \Longrightarrow & \text{(iv)} & \Longrightarrow & \text{(viii)} & \Longrightarrow & \text{(v)} & \Longrightarrow & \text{(i)} & ; \\
\text{(v)} & \Longrightarrow & \text{(vi)} & \Longrightarrow & \text{(viii)} & ; \\
\text{(v)} & \Longrightarrow & \text{(ii)} & \Longrightarrow & \text{(iii)} & ; \\
\text{(vii)} & \Longrightarrow & \text{(viii)} & \Longrightarrow & \text{(vii)} & .
\end{array}
$$

Начнем с простых замечаний.

Вывод (ii) $\Longrightarrow$ (iii) и (i) $\Longrightarrow$ (iii) элементарен.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Предположим, что E является счетным и гипергладким отношением эквивалентности на пространстве $\mathbb{X}$. Тогда $\mathsf{E} = \bigcup_n \mathsf{F}_n$, где все F_n — гладкие и счетные отношения, и $\mathsf{F}_n \subseteq \mathsf{F}_{n+1}\quad \forall n$. Можно предполагать, что $\mathbb{X} = 2^{\mathbb{N}}$ и $\mathsf{F}_0 = \Delta_{2^{\mathbb{N}}}$ (последнее — отношение равенства на $2^{\mathbb{N}}$). По лемме 6.3(iii) каждое F_n имеет борелевскую трансверсаль $T_n \subseteq \mathbb{X}$. Обозначим через $\vartheta_n(x)$ единственный элемент из T_n, удовлетворяющий условию $v\ \mathsf{F}_n\ \vartheta_n(x)$. Тогда отображение $x \mapsto \{\vartheta_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть борелевская биекция вида $\mathbb{X} \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ и $x\ \mathsf{E}\ y \Longleftrightarrow \vartheta(x)\ \mathsf{E}_1\ \vartheta(y)$. Образ этого отображения — борелевское множество по следствию Г.4 дополнения.

6.4.1. Приложения цепей в классах эквивалентости

Здесь приводится доказательство двух импликаций из теоремы 6.6, общей чертой которых является наличие условия (viii) в посылке.

(viii) $\Longrightarrow$ (v). Пусть Γ — ориентированный граф, удовлетворяющий (viii). Условимся писать $x \to y$ вместо $\langle x, y\rangle \in \Gamma$. Для данного E-класса C конструкция понятна: определим для $y, z \in C$ действие единицы через $1 \cdot y = z$, если $y \to z$. Это определение годится, когда цепь $\to$ на C не имеет концов, т. е. циклична или бесконечна в обе стороны. Если цепь $\to$ на C конечна с двумя концами, т. е. $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n$, то дополним предыдущее определение, положив $1 \cdot x_n = x_1$. Остался случай цепи бесконечной в одну сторону, например $x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to \dots$. Тогда определим $1 \cdot x_{2n} = x_{2n+2}$ и $1 \cdot x_{2n+3} = x_{2n+1}$, и отдельно $1 \cdot x_1 = x_0$. То же для цепи бесконечной влево.

Определение $1 \cdot y$ можно очевидным образом продолжить до действия группы $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{X}$, индуцирующего исходное отношение E. Борелевость этого действия следует из борелевости функции $y \mapsto 1 \cdot y$. Для проверки последнего утверждения фиксируем семейство борелевских функций $f_i : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, для которого $[x]_{\mathsf{E}} = \{g_i(x) : i \in \mathbb{N}\}$ при всех x. Определение отношения $z = 1 \cdot y$ мы дадим в виде

$$z = 1 \cdot y, \text{ если } \bigvee\nolimits_{s=1,2,3,4} \big(A_s(y) \wedge B_s(y,z)\big), \tag{1}$$

где индекс s обозначает один из четырех типов структуры цепи $\to$ на $[y]_{\mathsf{E}}$, т. е. нет концевых элементов, два концевых элемента, один левый концевой элемент и один правый концевой элемент — пусть соответственно $s = 1, 2, 3, 4$. Формулы $A_s(y)$ выражают принадлежность класса $[y]_{\mathsf{E}}$ типу s, а формулы $B_s(y, z)$ — определение $z = 1 \cdot y$ для типа s. Точнее,

$$\begin{array}{lll}
A_1(y) & \text{есть} & \forall i\, \exists k\, \Gamma(f_k(y), f_i(y)) \wedge \forall j\, \exists k\, \Gamma(f_j(y), f_k(y)), \\
A_2(y) & \text{есть} & \exists i\, \forall k\, \neg\, \Gamma(f_k(y), f_i(y)) \wedge \exists j\, \forall k\, \neg\, \Gamma(f_j(y), f_k(y)), \\
A_3(y) & \text{есть} & \exists i\, \forall k\, \neg\, \Gamma(f_k(y), f_i(y)) \wedge \forall j\, \exists k\, \Gamma(f_j(y), f_k(y)), \\
A_4(y) & \text{есть} & \forall i\, \exists k\, \Gamma(f_k(y), f_i(y)) \wedge \exists j\, \forall k\, \neg\, \Gamma(f_j(y), f_k(y)),
\end{array}$$

где $\Gamma(y,z)$ означает $\langle y,z\rangle \in \Gamma$. Далее,

$B_1(y,z)$ есть $y\mathsf{E}z\wedge\Gamma(y,z)$;

$B_2(y,z)$ есть $y\mathsf{E}z\wedge[\Gamma(y,z) \vee \big(\forall k\neg\Gamma(z,f_k(y))\wedge$

$\wedge\,\forall k\neg\,\Gamma(f_k(y),y)\big)]$.

Для определения B_3 — случай, когда цепь обрывается слева, но бесконечна справа — положим $L = \{\langle y,z\rangle : y \;\mathsf{E}\; z\wedge$ $\wedge\forall k \neg\; \Gamma(f_k(y),z)\}$, так что L является борелевской функцией, определенной на множестве $\{y : A_3(y)\}$, и такой, что $L(y)$ есть просто левый конец цепи $\to$ на $[y]_{\mathsf{E}}$. Наконец, $F = \{\langle x,y\rangle :$ $x\,\mathsf{E}\,y \wedge \Gamma(x,y)\}$ — борелевская частично определенная функция, для которой если y не является правым концом цепи $\to$ на $[y]_{\mathsf{E}}$, то $y \to F(y)$. Теперь определяем $L_0(y) = L(y)$ и далее по индукции $L_{n+1}(y) = F(L_n(y))$. Все функции L_n — частично определенные борелевские функции $\mathbb{X} \to \mathbb{X}$. Если $y \in \mathbb{X}$ удовлетворяет $A_3(y)$, то $L_n(y)$ определено для всех n и цепь $\to$ на $[y]_{\mathsf{E}}$ в точности совпадает с цепью $L_0(y) \to L_1(y) \to L_2(y) \to L_3(y) \to \ldots$ Это позволяет определить $B_3(y,z)$ как дизъюнкцию вида:

$$\exists n\,\big(y{=}L_{2n}(y)\wedge z{=}L_{2n+2}(y)\big)\;\vee\;\exists n\,\big((y{=}L_{2n+3}(y)\wedge z{=}L_{2n+1}(y)\big)$$
$$\vee\;\big(y{=}L_1(y)\wedge z{=}L_0(y)\big).$$

Определение B_4 (когда цепь обрывается справа, но бесконечна слева) формулируется аналогично. Мы оставляем читателю в качестве упражнения вернуться к (1) и завершить вывод импликации (viii) $\Longrightarrow$ (v).

(viii) $\Longrightarrow$ (vii). Пусть Γ — ориентированный граф, удовлетворяющий (viii). Пишем $x \to y$ вместо $\langle x,y\rangle \in \Gamma$. Положим $y < z$, если существует цепочка вида $y = y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_n = z$, где $n \ge 2$. Остается доказать, что $L = \{\langle x,y\rangle : x < y\}$ — борелевское множество. Достаточно проверить, что

$$L_n = \{\langle x,y\rangle : \exists x_1 \ldots \exists x_n\,(x = x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n = y)\}$$

— борелевское множество при любом $n \geq 2$. Из борелевости Γ следует, что L_n является проекцией на $\mathbb{X}^3$ некоторого борелевского множества в $\mathbb{X}^{3+n}$. Более того, выбор $x_1, \ldots, x_n$ для данных x, y, очевидно, однозначен и потому L_n — борелевское множество согласно следствию Г.4 дополнения.

6.4.2. *Редукция действия группы $\mathbb{Z}$ к E_0*

Здесь доказывается импликация (v) $\Longrightarrow$ (i) из теоремы 6.6.

Заметим, что $\mathsf{E} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{N}})$, где $\mathsf{E}(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{N}})$ — отношение эквивалентности, индуцированное каноническим действием сдвига аддитивной группы $\mathbb{Z}$ на $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}}$. Именно, предполагая, что E — отнюшение на $2^{\mathbb{N}}$, см. теорему Б.1 дополнения, получим борелевскую редукцию E к $\mathsf{E}(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{N}})$ таким образом: $\vartheta(x) = \{j \cdot x\}_{j \in \mathbb{Z}}$, где $\cdot$ — борелевское действие $\mathbb{Z}$ на $2^{\mathbb{N}}$, которое порождает E. Остается доказать, что $\mathsf{E}(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{N}}) \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$. Изложим в несколько сокращенном виде доказательство этого утверждения по [20], теорема 7.1.

Для краткости, обозначим отношение $\mathsf{E}(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{N}})$ снова через E.

Множество $X \subseteq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}}$ назовем *множеством гладкости*, если оно E-инвариантно и отношение $\mathsf{E} \restriction X$ — гладкое. Идея доказательства состоит в том, что в несколько шагов мы отделим от $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}}$ некоторые борелевские множества гладкости, на которых E ведет себя особым образом, а оставшуюся часть $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}}$ рассмотрим отдельно.

Шаг 1. Положим $W_n = 2^{n \times n}$ для $n \in \mathbb{N}$, так что W_n состоит из всех функций, определенных на $n \times n$ со значениями в $2 = \{0, 1\}$. Как обычно, n отождествляется с $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Положим $W = \bigcup_n W_n$.

Пусть $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}}$ и $w \in W_n$. Обозначим через $A(x, w)$ множество всех чисел $a \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих $x(a+k)(i) = w(k, i)$ для любых $k, i < n$. Пусть X_1 есть множество всех $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}}$ таких, что найдется $w \in W$, для которого $A(x, w)$ непусто и ограничено в $\mathbb{Z}$, по крайней мере, с одной стороны.

Упражнение 6.9. Докажите, что X_1 — борелевское множество гладкости.

Указание. Если $x \in X_1$, то класс $[x]_{\mathsf{E}}$ содержит единственную точку y такую, что если $A(x,w)$ ограничено в $\mathbb{Z}$ снизу, то 0 — наименьший элемент в $A(x,w)$, и если $A(x,w)$ ограничено в $\mathbb{Z}$ сверху но не снизу, то 0 — наибольший элемент в $A(x,w)$, где $w = w(x)$ — наименьший, в смысле некоторого фиксированного полного упорядочения множества W, элемент W такой, что $A(x,w) \neq \emptyset$. □

Обратимся к дополнительному множеству $X = (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}} \setminus X_1$. По определению, если $x \in X$ и $w \in W$, то множество $A(x,w)$ пусто или же неограничено в $\mathbb{Z}$ ни сверху, ни снизу.

Шаг 2. Фиксируем на каждом множестве W_n порядок $<_n$ так, что выполняется следующее условие: если $u, v \in W_{n+1}$ и $u <_{n+1} v$, то $u \restriction n <_n v \restriction n$, где $u \restriction n \in W_n$ определено, естественно, так, что $(u \restriction n)(k,i) = u(k,i)$ для всех $i < n$. Для $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}}$ и каждого n через w_n^x обозначим $<_n$-наименьший элемент $w \in W_n$ такой, что $A(x,w) \neq \emptyset$. Понятно, что $w_n^x \subset w_{n+1}^x$, а потому имеется функция $\psi_x : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\{0,1\}$ такая, что для каждого n выполняется $\psi_x \restriction n = w_n^x$, т.е. $\psi_x(k,i) = w_n^x(k,i)$ для всех $k, i < n$.

Обозначим через $A(x)$ множество всех $a \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих соотношению $x(a+k)(i) = \psi_x(k,i)$ для каждой пары $k, i \in \mathbb{N}$.

Упражнение 6.10. Докажите, что множество X_2 всех точек $x \in X$ таких, что множество $A(x)$ непусто и ограничено снизу — борелевское множество гладкости. *Указание.* Если $x \in X_2$ то класс $[x]_{\mathsf{E}}$ содержит единственную точку y, для которой 0 — наименьший элемент в $A(y,w)$. □

Упражнение 6.11. Докажите, что множество X_3 всех точек $x \in X$ таких, что множество $A(x)$ непусто и неограничено снизу — борелевское множество гладкости. *Указание.* Каждый элемент $x \in X_3$ является периодическим, т.е. найдется натуральное число $d \geq 1$ такое, что $x(a+d)(i) = x(a)(i)$ для всех $a \in \mathbb{Z}$ и $i \in \mathbb{N}$. Отсюда следует что класс эквивалентности $[x]_{\mathsf{E}}$ — конечное множество. Сошлитесь на лемму 6.3(ii),(i). □

Эти результаты позволяют теперь сконцентрироваться на множестве $Y = X \smallsetminus X_2 \cup X_3$ всех $x \in X$, для которых множество $A(x)$ — пустое.

Шаг 3. Пусть $x \in Y$. Тогда $x \in X$, так что по определению множество $A(x, w_n^x)$ неограничено в $\mathbb{Z}$ в обе стороны для любого n, и при этом $A(x, w_{n+1}^x) \subseteq A(x, w_n^x)$ и $\bigcap_n A(x, w_n^x) = \emptyset$, поскольку иначе число $a \in \mathbb{Z}$, принадлежащее всем $A(x, w_n^x)$, принадлежало бы и $A(x)$. Определим последовательность чисел $a_n^x \in \mathbb{Z}$ так: $a_0^x = 0$ и далее для всех $n > 0$

$$\left.\begin{array}{lll} a_{2n+1}^x & - & \text{наименьший элемент из } A(x, w_{2n+1}^x), \\ & & \hfill\text{больший, чем } 0, \\ a_{2n+2}^x & - & \text{наибольший элемент из } A(x, w_{2n+2}^x), \\ & & \hfill\text{меньший, чем } 0 \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Выполняется $a_{2n+2}^x \le a_{2n}^x$, поскольку $A(x, w_{2n+2}^x) \subseteq A(x, w_{2n}^x)$, и аналогично $a_{2n+1}^x \le a_{2n+3}^x$. Таким образом,

$$\dots \le a_4^x \le a_2^x \le a_0^x = 0 < a_1^x \le a_3^x \le a_5^x \le \dots \tag{3}$$

Более того, в (3) справа и слева от 0 должно быть бесконечно много знаков строгого неравенства $<$, так как в противном случае $\bigcap_n A(x, w_n^x) \ne \emptyset$.

Упражнение 6.12. Докажите, что если в первой строке (2) заменить 0 на a_{2n}^x, а во второй на a_{2n+1}^x то результат не изменится. □

Сопоставим каждому $x \in Y$ функцию $\vartheta(x) \in W^{\mathbb{N}}$ следующим образом. Для любого n положим $d_n^x = |a_{n+1}^x - a_n^x|$ и $r_n^x = \langle r_{n0}^x, r_{n1}^x, \dots, r_{nm}^x \rangle$, где $m = d_n^x$ и $r_{ni}^x = x_{\min\{a_{n+1}^x, a_n^x\}+i} \restriction m$. Наконец, $\vartheta(x)(n) = r_n^x$.

Лемма 6.13. *Если $x, y \in Y$, то $x \mathsf{E} y$ эквивалентно $\vartheta(x)(n) = \vartheta(y)(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме конечного их числа.*

Доказательство. Допустим $x \mathsf{E} y$. Поскольку $\mathsf{E} = \mathsf{E}(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{N}})$, найдется число $p \in \mathbb{Z}$ такое, что $x(a + p) = y(a)$ для всех $a \in \mathbb{Z}$. В этом случае понятно, что $w_n^x = w_n^y$ и $a + p \in A(x, w_n^x) \iff a \in A(y, w_n^y)$ для всех $a \in \mathbb{Z}$ и n. Не ограничивая общности, предполагаем, что $p > 0$. Имеем $a^x_{2n_0+1} > p$ для подходящего n_0. Но тогда из эквивалентности двумя строками выше следует $a^x_{2n+1} = a^y_{2n+1} + p$ для всех $n \geq n_0$. Отсюда нетрудно вывести $d^x_n = d^y_n$ и затем $r^x_n = r^y_n$ при $n \geq n_0$, что и требовалось.

Обратно, пусть $\vartheta(x)(n) = \vartheta(y)(n)$ для всех n. Тем самым, $d^x_n = d^y_n$ и $r^x_n = r^y_n$ для всех $n \geq n_0$. Из первого равенства имеем $a^x_{2n+1} = a^y_{2n+1} + p$ для всех $n \geq n_0$, где $p \in \mathbb{Z}$ не зависит от n. Здесь нужно использовать результат упражнения 6.12. Из второго равенства выводится $x(a+p) = y(a)$ для всех $a \in \mathbb{Z}$, т.е. $x \mathsf{E} y$. □

Однако ϑ — борелевская функция из Y в $W^{\mathbb{N}}$. Значит, лемма доказывает, что $\mathsf{E} \restriction Y \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0^{(W)}$, откуда следует $\mathsf{E} \restriction Y \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$ по упражнению 2.11.

Шаг 4. Итак, предыдущие рассуждения позволили разбить пространство $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}}$ на попарно дизъюнктные борелевские множества X_1, X_2, X_3, Y, каждое из которых E-инвариантно, кроме того, первые три из них — множества гладкости, т.е. на них E борелевски сводится к равенству, например, к $\Delta_{2^{\mathbb{N}}}$, а Y удовлетворяет $\mathsf{E} \restriction Y \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$. Чтобы извлечь из всех соответствующих редукций доказательство $\mathsf{E} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$, сделаем следующее.

Разобьем $2^{\mathbb{N}}$ на множества $R_1 = \{z \in 2^{\mathbb{N}} : \forall n\, (z(2n) = 0)\}$,

$$\begin{aligned} R_2 &= \{z \in 2^{\mathbb{N}} : \forall n\, (z(4n) = 0 \wedge z(4n+2) = 1)\}, \\ R_3 &= \{z \in 2^{\mathbb{N}} : \forall n\, (z(4n) = 1 \wedge z(4n+2) = 0\} \end{aligned}$$

и $R = \{z \in 2^{\mathbb{N}} : \forall n\, (z(2n) = 1)\}$. Допустим, что $f_1 : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}} \to 2^{\mathbb{N}}$ — борелевская редукция $\mathsf{E} \restriction X_1$ к $\Delta_{2^{\mathbb{N}}}$. Положим для каждого $x \in X_1$

$$f_1'(x)(2(2^n(2k+1)-1)+1) = f_1(x)(k) \quad \text{для всех } n, k \in \mathbb{N},$$

и $f_1'(x)(2n) = 0$ для всех n. Поскольку отображение $n, k \mapsto 2^n(2k+1) - 1$ является биекцией $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$, то f_1' остается борелевской редукцией отношения $\mathsf{E} \restriction X_1$ к Δ_{R_1}, и более того (роль $n!$), к $\mathsf{E}_0 \restriction R_1$.

Таким же образом определяем борелевские редукции f_i' отношений $\mathsf{E} \restriction X_i$ к $\mathsf{E}_0 \restriction R_i$, $i = 2, 3$. Наконец, если f — борелевская редукция отношения $\mathsf{E} \restriction Y$ к E_0, то несколько проще определим $f'(x)(2k+1) = f(x)(k)$ и $f'(x)(2j) = 1$.

Остается соединить эти четыре редукции f_i', $i = 1,2,3$, и f' в одну и принять во внимание, что множества R_i и R E_0-инвариантны в их объединении, т.е. любые две точки, принадлежащие двум разным множествам из этих четырех, E_0-неэквивалентны.

6.4.3. Гиперконечность действия группы $\mathbb{Z}$

Здесь доказывается импликация (v) $\Longrightarrow$ (ii) из теоремы 6.6.

Предположим, что $\mathbb{X} = 2^{\mathbb{N}}$. Возрастающая последовательность отношений эквивалентности F_n, чье объединение равно E, определяется отдельно внутри каждого E-класса C. Если элемент $x_C \in C$ может быть выбран посредством некоторой процедуры борелевского типа, то внутри C можно определить $x \mathrel{\mathsf{F}_n} y$, если существуют числа $j, k \in \mathbb{Z}$ такие, что $|j| \le n$, $|k| \le n$, и $x = j \cdot x_C$, $y = k \cdot x_C$. Например, такой прием применим, если C конечно; в этом случае возьмем $<_{\texttt{lex}}$-наименьший элемент множества C в качестве x_C, где $<_{\texttt{lex}}$ обозначает лексикографический порядок на $2^{\mathbb{N}}$.

Допустим, что C бесконечно. Обозначим через $<_{\texttt{act}}$ частичный порядок на $2^{\mathbb{N}}$, индуцированный данным борелевским действием группы $\mathbb{Z}$, т.е. $x <_{\texttt{act}} y$, если $y = j \cdot x$, $j > 0$. Как и выше для конечного C, считаем, что ни $a = \texttt{inf}_{<_{\texttt{lex}}} C$ ни $b = \texttt{sup}_{<_{\texttt{lex}}} C$ не принадлежат C. Пусть C_n — множество всех $x \in C$, для которых $x \restriction n \ne a \restriction n$ и $x \restriction n \ne b \restriction n$. Определим $x \mathrel{\mathsf{F}_n} y$, если x, y принадлежат одному и тому же $<_{\texttt{lex}}$-интервалу в C, лежащему целиком внутри C_n, или просто $x = y$. В наших предположениях, каждое F_n имеет только конечные классы, и для любой пары $x, y \in C$ имеется такое n, что $x \mathrel{\mathsf{F}_n} y$.

Остается довольно непростая задача показать, что эти определения отношений F_n, выполненные по отдельности в каждом E-классе C, «интегрируются» в борелевские отношения F_n, определенные на всем пространстве $2^{\mathbb{N}}$. Здесь главный момент будет состоять в том, что операции, выражаемые кванторами типа $\exists y \in [x]_{\mathsf{E}}$, $\forall y \in [x]_{\mathsf{E}}$, сводятся к обычным счетным операциям с помощью данного действия группы $\mathbb{Z}$: например, $\exists y \in [x]_{\mathsf{E}}\ \varphi(x, y)$ эквивалентно $\exists a \in \mathbb{Z}\ \varphi(x, a \cdot x)$. Мы оставляем это читателю в качестве **упражнения**.

6.4.4. Цепи в классах эквивалентности

Здесь приводятся доказательства трех импликаций, общим свойством которых является наличие условия (viii) в заключении.

(vii) $\Longrightarrow$ (viii). Пусть $<$ — порядок, удовлетворяющий (vii). Если C — произвольный E-класс, то для $x, y \in C$ определим $x \to y$, когда $x < y$ и $<$-интервал между x и y не содержит других элементов C. Очевидно, так определена ориентированная цепь внутри класса C. Осталось проверить, что множество $\Gamma = \{\langle x, y\rangle : y \in [x]_{\mathsf{E}} \wedge x \to y\}$ — борелевское. Отношение E, во всяком случае, счетное, и поэтому по теореме 6.24(i) ниже имеется счетное семейство борелевских функций $g_i : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $i \in \mathbb{N}$, таких, что $[x]_{\mathsf{E}} = \{g_i(x) : i \in \mathbb{N}\}$ для всех $x \in \mathbb{X}$. Теперь

$$x \to y \quad \text{эквивалентно} \quad y \in [x]_{\mathsf{E}} \wedge x < y \wedge \forall i \neg (y < g_i(x) < z),$$

и борелевость Γ следует из борелевости $<$.

(iv) $\Longrightarrow$ (viii). Пусть множество $X \subseteq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ таково как в (iv). Для любой точки $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$ пусть $x \restriction_{>n} = x \restriction (n, \infty)$. Раз все классы E_1-эквивалентности внутри X не более чем счетны, из теоремы Г.5 и следствия Г.4 дополнения следует, что все множества вида $X \restriction_{>n} = \{x \restriction_{>n} : x \in X\}$ являются борелевскими и имеется счетное семейство борелевских функций $g_i^n : X \restriction_{>n} \to X$, $i \in \mathbb{N}$, для которых множество $X_\xi = \{x \in X : x \restriction_{>n} = \xi\}$ совпадает с $\{g_i^n(\xi) : i \in \mathbb{N}\}$ для всех $\xi \in X \restriction_{>n}$, так что $\{g_i^n(\xi)(n) : i \in \mathbb{N}\} = \{x(n) : x \in X_\xi\}$.

Положим $\varphi(x) = \{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ для каждого $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, где $\varphi_n(x)$ — наименьший номер i такой, что $x(n) = f_i^n(x)(n)$. Тогда $\varphi(x) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Положим $\varphi_n'(x) = \mathtt{max}_{k \le n} \varphi_k(x)$ и обозначим через $\mu(x)$ последовательность

$$\varphi_0(x)\,, \varphi_0'(x)\,, \varphi_1(x) + 1\,, \varphi_1'(x) + 1\,, \ldots\,, \varphi_n(x) + n\,, \varphi_n'(x) + n\,, \ldots$$

Если точки $x \ne y$ из X удовлетворяют условию $x \mathrel{\mathsf{E}_1} y$, т.е. $x \restriction_{>n} = y \restriction_{>n}$ для какого-то n, то $\varphi(x) \restriction_{>n} = \varphi(y) \restriction_{>n}$, $\mu(x) \restriction_{>m} = \mu(y) \restriction_{>m}$ для некоторого $m \ge n$, но $\varphi(x) \ne \varphi(y)$, $\mu(x) \ne \mu(y)$.

Нам понадобится анти-лексикографический частичный порядок $<_{\mathtt{alex}}$ на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, т.е. $a <_{\mathtt{alex}} b$, если найдется n такое, что

$a\restriction_{>n} = b\restriction_{>n}$ и $a(n) < b(n)$. Для $x, y \in X$ определим $x <_0 y$ когда $\mu(x) <_{\mathtt{alex}} \mu(y)$. Из сказанного следует, что $<_0$ линейно упорядочивает каждый E_1-класс $[x]_{\mathsf{E}_1} \cap X$, $x \in X$. Более того, любой $<_{\mathtt{alex}}$-интервал между $\mu(x) <_{\mathtt{alex}} \mu(y)$ содержит лишь конечно много элементов вида $\mu(z)$. (Для φ это не имело бы места.) Значит, каждый класс $[x]_{\mathsf{E}_1} \cap X$, $x{\in}X$, упорядочен отношением $<_0$ подобно подмножеству множества $\mathbb{Z}$ одного из видов: $\{0, 1, 2, \ldots n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, или $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, или $-\mathbb{N} = \{\cdots - 2, -1, 0\}$, или наконец всё $\mathbb{Z}$.

Последним шагом доказательства является рутинная проверка борелевости этого отношения $<_0$ на X, которую мы оставим читателю. Сначала проверьте борелевость функций φ и μ.

(vi) $\Longrightarrow$ (viii). Допустим, что $\mathsf{E} = \mathsf{F} \vee \mathsf{R}$, где F, R — отношения типа 2 на $2^{\mathbb{N}}$. Назовем F-парой любую упорядоченную пару $\langle a, b\rangle$ в $2^{\mathbb{N}}$, для которой $a <_{\mathtt{lex}} b$ и $a \mathrel{\mathsf{F}} b$. Назовем F-синглетом любую точку $x \in 2^{\mathbb{N}}$, которая F-эквивалентна только самой себе. Тогда каждая точка $x \in 2^{\mathbb{N}}$, не являющаяся F-синглетом, принадлежит единственной F-паре в роли первого или второго ее элемента.

Для каждой F-пары $\langle a, b\rangle$ в $\mathbb{X}$ определим $a \to b$. Если $\langle a, b\rangle$ и $\langle a', b'\rangle$ — две таких пары, и выполнено $b \mathrel{\mathsf{R}} a'$ или $b \mathrel{\mathsf{R}} b'$ (оба этих условия не могут выполняться одновременно), то определим $b \to a'$. Если же c является F-синглетом, то определим $b \to c$ в случае, когда $b \mathrel{\mathsf{R}} c$, и определим $c \to a$ в случае, когда $c \mathrel{\mathsf{R}} a$. Наконец, если $c \neq d$ оба являются F-синглетами, то определим $c \to d$, если $c \mathrel{\mathsf{R}} d$ и $c <_{\mathtt{lex}} d$. Легко видеть, что так определенный ориентированный граф на $\mathbb{X}$ доказывает (viii).

6.4.5. Разложение в комбинацию двух конечных отношений эквивалентности

Здесь доказывается импликация (v) $\Longrightarrow$ (vi) из теоремы 6.6. Короткое, но опирающееся на другие трудные теоремы о гиперконечных отношениях, доказательство этой импликации дано в [42]. Мы же приведем элементарное, но более длинное доказательство.

Допустим, что отношение эквивалентности E на $2^{\mathbb{N}}$ индуцировано борелевским действием $\mathbb{Z}$. Определим искомые отношения эквивалентности F и R на произвольном E-классе $C = [x]_{\mathsf{E}}$. Ключевой момент здесь следующий. Если можно выделить «борелевским» образом какой-то элемент $x_C \in C$, то определение F и R не вызовет затруднений. Именно, нужно положить $x_C \mathrel{\mathsf{F}} (1{\cdot}x_C)$, $(1{\cdot}x_C) \mathrel{\mathsf{R}} (2{\cdot}x_C)$, снова $(2{\cdot}x_C) \mathrel{\mathsf{F}} (3{\cdot}x_C)$, и так далее, и так же в отрицательную сторону. Если же C имеет конечное нечетное число элементов $2n+1$, то на определении $((2n-1){\cdot}x_C) \mathrel{\mathsf{R}} ((2n){\cdot}x_C)$ всё заканчивается. Это решение применимо, например, в случае, когда множество C конечно: полагаем x_C равным $<_{\mathtt{lex}}$-наименьшему элементу C.

Предположим, что множество C бесконечно. Тогда данное действие $\mathbb{Z}$ индуцирует порядок $<_{\mathtt{act}}$ на C, подобный порядку в $\mathbb{Z}$.

Пусть $W \subseteq C$. Назовем элемент $z \in W$ *лмин* (локально минимальным) в W если он $<_{\mathtt{lex}}$-меньше любого из его двух $<_{\mathtt{act}}$-соседей в множестве W. Положим $W_{\mathsf{lmin}} = \{z \in W : z$ – лмин в $W\}$.

Случай 1: $C_{\text{лмин}}$ пусто. Это означает что $<_{\mathtt{act}}$ и $<_{\mathtt{lex}}$ либо полностью совпадают либо полностью противоположны на C, тем самым, $<_{\mathtt{lex}}$ упорядочивает C подобно $\mathbb{Z}$. Понятно, что существуют такие конечные бинарные последовательности s, что $a = s^\wedge 0^\omega$, т.е. продолжение s нулями до бесконечной последовательности удовлетворяет условию: найдутся $x, y \in C$, для которых $x <_{\mathtt{lex}} a <_{\mathtt{lex}} y$. Через s_C обозначим такую s этого типа, которая имеет наименьшую возможную длину, и среди таких — наименьшую лексикографически. Тогда среди всех $x \in C$, $x < s_C$, имеется $<_{\mathtt{lex}}$-наибольший элемент x_C. Строим F и R на C как указано выше.

Случай 2: $C_{\text{лмин}}$ непусто и $<_{\mathtt{act}}$-ограничено в C хотя бы в одном направлении. Если, например, множество $C_{\text{лмин}}$ ограничено сверху, то оно имеет наибольший элемент, который и возьмем в качестве x_C, и так далее.

Случай 3: $C_{\text{лмин}}$ $<_{\mathtt{act}}$-неограничено в C в обоих направлениях. Назовем *лмин-интервалом* любой $<_{\mathtt{act}}$-полуинтервал $[x, x')$ между двумя последовательными элементами $x <_{\mathtt{act}} x'$ из $C_{\text{лмин}}$. Пусть $[x, x') = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ — такой интервал, элементы которого перенумерованы по возрастанию $<_{\mathtt{act}}$, в частности $x_0 = x$. Определим $x_{2k} \mathsf{F} x_{2k+1}$ при $2k+1 < m$. Если m нечетно, то $x_{m-1} = x'$ остается без пары. Обозначим через C^1 множество всех элементов из C, оставшихся без пары при рассмотрении всех лмин-интервалов. Рассматривая множество $C^1_{\text{лмин}}$, как и выше, продолжим F на некоторую часть множества C^1. Тогда, возможно, возникнет некоторый остаток $C^2 \subseteq C^1$, на котором F останется неопределенным. И так далее.

Итак, определяется убывающая последовательность множеств $C = C^0 \supseteq C^1 \supseteq C^2 \supseteq \ldots$, и отношение эквивалентности F на каждой разности $C^n \smallsetminus C^{n+1}$, у которого классы содержат ровно по два элемента. Заметим, что множество $C^\infty = \bigcap_n C^n$ не может содержать более одного элемента: иначе одно из множеств C^n содержало бы два $<_{\mathtt{act}}$-соседних элемента $x <_{\mathtt{act}} y$, которые переходят в C^{n+1}, что по построению невозможно.

Если $C^\infty = \{x\}$ — одноэлементное множество, то снова выбираем $x_C{=}x$ и заканчиваем построение F и R как в случаях 1 и 2.

Если же, наконец, $C^\infty = \emptyset$, то F определено на всем C и каждый F-класс содержит ровно по два элемента. Осталось определить R. Упорядочим пары $\{x, y\}$ элементов множества C в соответствии с $<_{\mathtt{act}}$-лексикографическим порядком на парах $\langle \mathtt{max}_{<_{\mathtt{act}}}\{x,y\}, \mathtt{min}_{<_{\mathtt{act}}}\{x,y\}\rangle$, этот порядок всё ещё подобен $\mathbb{Z}$. Если $\{x, y\}$ и $\{x', y'\}$ — два F-класса, причем второй непосредственно следует за первым в только что определенном смысле, и $x <_{\mathtt{act}} y$, $x' <_{\mathtt{act}} y'$, то определим $y \mathsf{R} x'$.

Проверку борелевости F и R (здесь довольно трудоемкую) оставим читателю в качестве упражнения.

□ (Теорема 6.6)

6.5. Классификация гиперконечных отношений с точностью до изоморфизма

Как мы видели (замечание 6.8), негладкие гиперконечные отношения эквивалентности образуют всего один тип с точностью до $\sim_{\mathrm{B}}$. Однако для классификации с точностью до борелевского изоморфизма $\cong_{\mathrm{B}}$ картина получается совсем иная. Сразу видно, что такие отношения этого класса, как, например, E_0 и отношение $\mathsf{E}(\mathbb{Z}, 2)$, индуцированное действием сдвига группы целых чисел $\mathbb{Z}$ на $2^{\mathbb{Z}}$, не могут быть борелевски изоморфны, поскольку второе имеет конечные классы-орбиты (именно, орбиты периодических $\mathbb{Z}$-последовательностей из $2^{\mathbb{Z}}$), в то время как все E_0-классы бесконечны. Но даже если ограничиться такими негладкими гиперконечными отношениями эквивалентности, которые имеют только бесконечные классы (такие отношения называются *непериодическими*), то всё равно останутся борелевски неизоморфные отношения!

Полная классификация негладких гиперконечных отношений эквивалентности с точностью до $\cong_{\mathsf{B}}$ дана в статье [20]. Она состоит в следующем.

Во-первых, нам потребуется еще одно отношение эквивалентности в этой группе, «хвостовое» отношение E_{t} на $2^{\mathbb{N}}$, определяемое так:

$$a \mathrel{\mathsf{E}_{\mathsf{t}}} b\,, \quad \text{если} \quad \exists m\, \exists n\, \forall k\, (a(m+k) = b(n+k))\,.$$

Предложение 6.14. *E_{t} — непериодическое гиперконечное отношение эквивалентности.*

Доказательство (набросок). Для вывода гиперконечности используется несколько видоизмененная конструкция из подраздела 6.4.2. Здесь $W_n = 2^n$ (последовательности длины n из нулей и единиц) с лексикографическим порядком $<_n$ и для $x \in 2^{\mathbb{N}}$ и $w \in W_n$ $A(x, w)$ состоит из всех чисел $j \in \mathbb{N}$ таких, что $x(j+k) = w(k)$ для каждого $k < n$. Понятно, что для любых n и $x \in 2^{\mathbb{N}}$ найдется последовательность $w \in W_n$ такая, что множество $A(x, w)$ бесконечно; пусть w_n^x обозначает $<_n$-наименьшее из них, а j_n^x — наименьшее из чисел $j \in A(x, w_n)$.

Упражнение 6.15. Докажите, что $w_n^x = w_n^y$ (но не обязательно $j_n^x = j_n^y$) всякий раз, когда $x \mathrel{\mathsf{E}_{\mathsf{t}}} y$. Кроме того, $w_n^x \subset w_{n+1}^x$. □

Из второго утверждения следует $j_n^x \le j_{n+1}^x$, так что для каждого x либо числа j_n^x неограниченно возрастают, обозначим множество всех таких x через X, либо же $j_n^x = j_{n+1}^x = j_{n+2}^x = \ldots$ для некоторого n — обозначим множество всех таких x через Y.

Упражнение 6.16. Докажите, что каждое из множеств X, Y является борелевским и E_t-инвариантным. □

Отношение $\mathsf{E}_\mathsf{t} \restriction Y$ — не просто гиперконечное, но даже гладкое, что́ обеспечивается отображением $x \mapsto \vartheta(x) = \bigcup_n w_n^x$ (справа стоит точка $2^{\mathbb{N}}$). Остается доказать гиперконечность отношения $\mathsf{E}_\mathsf{t} \restriction X$ и воспользоваться теоремой 6.4. Итак, пусть $x \in X$. Обозначим через ϑ_n^x конечную последовательность $\langle x(j_{n-1}^x), \ldots, x(j_n^x - 1)\rangle$, где $j_{-1}^x = 0$ при $n = 0$. Таким образом, $\vartheta_n^x = \Lambda$ — пустая последовательность, когда $j_n^x = j_{n-1}^x$, но по выбору x имеется бесконечно много n, для которых $j_n^x > j_{n-1}^x$. Отображение $x \mapsto \vartheta(x) = \{\vartheta_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть борелевская функция из $2^{\mathbb{N}}$ в $2^{2^{<\omega}}$.

Упражнение 6.17. Докажите, что отображение $x \mapsto \vartheta(x)$ является редукцией отношения $\mathsf{E}_\mathsf{t} \restriction X$ к $\mathsf{E}_0^{(2^{<\omega})}$. □

Однако, $\mathsf{E}_0^{(2^{<\omega})} \le_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_0$, см. упражнение 2.11.

□ (Предложение 6.14)

И последнее замечание перед теоремой классификации. Как мы уже указывали, некоторые классы эквивалентности сдвигового отношения $\mathsf{E}(\mathbb{Z}, 2)$ на $2^{\mathbb{Z}}$ конечны. Можно, однако, определить *непериодическую область*

$$D = \{x \in 2^{\mathbb{Z}} : \text{класс эквивалентности } [x]_{\mathsf{E}(\mathbb{Z},2)} \text{ бесконечен}\}.$$

Это борелевское множество, а соответствующее тоже борелевское ограниченное отношение $\mathsf{E}^*(\mathbb{Z}, 2) = \mathsf{E}(\mathbb{Z}, 2) \restriction D$ называется *непериодической частью* отношения $\mathsf{E}(\mathbb{Z}, 2)$. Следующую трудную теорему из [20] о классификации с точностью до изоморфизма $\cong_{\mathsf{B}}$ мы приводим без доказательства.

Теорема 6.18. *Каждое непериодическое гиперконечное отношение эквивалентности борелевски изоморфно одному и только одному отношению из следующего счетного списка:*

$$\mathsf{E}_\mathsf{t}\,, \quad \mathsf{E}^*(\mathbb{Z}, 2)\,, \quad \mathsf{E}_0 \times \Delta_{\{1,\ldots,n\}},\ n \ge 1\,. \qquad \square$$

$\Delta_{\{1,\ldots,n\}}$ обозначает отношение равенства на n-оэлементном множестве.

6.6. Теорема Дая

А теперь вернемся к той модификации понятий, связанных с борелевской сводимостью, которая уже была кратно рассмотрена в § 1.6. Следующая теорема эргодической теории показывает, что если в определении изоморфизма пренебречь множествами нулевой меры, то все гиперконечные отношения эквивалентности опять образуют единственный класс по изоморфизму.

Теорема 6.19 (Дай [22, 23][7]). *Предположим, что* $\langle \mathbb{X}\,; \mu\rangle$ *и* $\langle \mathbb{Y}\,; \nu\rangle$ *— польские пространства с вероятностными мерами* μ *и* ν, (см. § 1.6), *а* E *и* F *— гиперконечные отношения эквивалентности на* $\mathbb{X}$ *и* $\mathbb{Y}$, *причем*

1) E *сохраняет меру* μ *в том смысле, что для любой борелевской биекции* $f : A \xrightarrow{\text{на}} B$, *где* $A, B \subseteq \mathbb{X}$ *— борелевские множества, которая удовлетворяет* $x \mathrel{\mathsf{E}} f(x)$ *для всех* $x \in A$, *выполнено* $\mu(A) = \mu(B)$;
2) E *является* μ*-эргодическим в том смысле, что всякое* E*-инвариантное борелевское множество* $A \subseteq \mathbb{X}$ *имеет меру либо* 0 *либо* 1 ;

и соответственно отношение F *сохраняет меру* ν *и является* ν*-эргодическим в том же смысле.*

Тогда E *и* F *изоморфны почти всюду, т. е. существует сохраняющая меру (переводящая* μ *в* ν*) борелевская биекция* $\vartheta : \mathbb{X} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{Y}$ *такая, что эквивалентность* $x \mathrel{\mathsf{E}} x' \iff \vartheta(x) \mathrel{\mathsf{F}} \vartheta(x')$ *выполнена для всех* x, x' *из некоторого борелевского* E*-инвариантного множества* $A \subseteq \mathbb{X}$ *меры* $\mu(A) = 1$. □

Итак, для любой пары борелевских гиперконечных отношений эквивалентности вопрос о возможности их борелевской эквивалентности почти всюду сводится к вопросу существования вероятностных мер, делающих эти отношения эргодическими и сохраняющими меру. В некоторых случаях существование такой меры есть достаточно простой факт.

Упражнение 6.20. Докажите, что отношение E_0 сохраняет обычную однородную вероятностную меру λ на $2^{\mathbb{N}}$ в смысле

[7] Более современное доказательство см. в книге [58] или в статье Вершика [3].

условия 1) и является λ-эргодическим в смысле условия 2). Постройте подобные вероятностные меры для отношений вида $\mathsf{E}_0 \times \Delta_{\{1,\dots,n\}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Докажите, что однородная вероятностная мера на $2^{\mathbb{Z}}$ удовлетворяет 1) и 2) по отношению к эквивалентности $\mathsf{E}^*(\mathbb{Z}, 2)$. В этом случае, в отличие от E_0, мера с такими свойствами не единственна. Фактически, имеется континуум подходящих вероятностных мер, поскольку для каждого экземпляра двоеточия в произведении $2^{\mathbb{Z}}$ можно выбрать свое число p, $0 < p < 1$, и определить для него $\mu(0) = p$ и $\mu(1) = 1 - p$. □

Очевидно, что в основе первого результата 6.20 лежит существование однородной вероятностной меры на каждом конечном множестве: в самом деле, сопоставим каждой точке меру $\frac{1}{n}$, где n — число элементов данного множества. Для счетного множества такой меры не существует, а потому не видно, как получить результат 6.20, например, для отношения $\mathsf{E}_0^{(\mathbb{N})}$ — аналога E_0 для пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а также для E_t. Оказывается, искомых мер для $\mathsf{E}_0^{(\mathbb{N})}$ и E_t и не существует. Такого рода отрицательные результаты можно получать на основе еще одного понятия.

Определение 6.21. Отношение эквивалентности E на пространстве $\mathbb{X}$ назовем *сжимаемым*, если найдется такая борелевская биекция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, что $x \mathrel{\mathsf{E}} f(x)$ для всех X и разность $D = \mathbb{X} \setminus \operatorname{ran} f$ (т. е. все точки X, не имеющие вида $f(x)$, $x \in \mathbb{X}$) есть E-*полное* множество в том смысле, что D пересекает любой класс E-эквивалентности в $\mathbb{X}$. □

В этом случае сам f- образ $\operatorname{ran} f = \{f(x) : x \in \mathbb{X}\}$ пространства $\mathbb{X}$ — также, очевидно, E-полное множество, а потому отображение f можно рассматривать как сжатие пространства $\mathbb{X}$, которое отображает каждый E-класс на свое собственное подмножество.

Теорема 6.22 (Надкарни [63]). *Пусть E является счетным отношением эквивалентности на польском пространстве $\mathbb{X}$. Тогда вероятностная мера μ, удовлетворяющая условиям 1) и 2) теоремы 6.19, существует в том и только в том случае, когда отношение E несжимаемо.* □

Отношение $\mathsf{E}_0^{(\mathbb{N})}$, например, сжимаемо: определим $f(x) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для каждой точки $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ так, что $f(x)(0) = 2x(0)$ и $f(x)(n) = x(n)$ для всех n. Также сжимаемо отношение E_{t} : определим $f(x) \in 2^{\mathbb{Z}}$ для каждой точки $x \in 2^{\mathbb{Z}}$ так, что $f(x)(0) = 0$, $f(x)(n+1) = x(n)$ для всех $n \geq 0$ и $f(x)(-n) = x(-n)$ для $n > 0$. Значит, отношения E_{t} и $\mathsf{E}_0^{(\mathbb{N})}$, в отличие от отношений $\mathsf{E}^*(\mathbb{Z}, 2)$, E_0, и $\mathsf{E}_0 \times \Delta_{\{1,\ldots,n\}}$, $n \in \mathbb{N}$, не находятся в области действия теоремы 6.19. А для этих последних мы получаем:

Следствие 6.23. *Если* E, F *— два отношения из списка теоремы 6.18, кроме* E_{t}, *на пространствах, соответственно,* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *(равных* $2^{\mathbb{N}}$ *или* $2^{\mathbb{Z}}$*). Тогда* E, F *изоморфны почти всюду в смысле мер, даваемых для них результатом 6.20.* □

Итак, имеется счетная совокупность попарно борелевски неизоморфных но изоморфных почти всюду (в смысле теоремы 6.19) гиперконечных непериодических отношений эквивалентности.

Теорема 6.19 относится к гиперконечным отношениям эквивалентности, т.е. тем, которые индуцированы борелевскими действиями группы целых чисел $\mathbb{Z}$ по теореме 6.6. Результат остается справедливым и для более широкого класса *аменабельных* групп, об этом см. в книге [58]. В то же время обобщение на все вообще счетные группы не проходит. В сущности, недавно Хьёрт [38] доказал, что теорема 6.19 в варианте, где предполагается, что отношения E и F индуцированы действиями некоторой польской группы $\mathbb{G}$, верна, с некоторыми уточняющими предположениями, *только* для аменабельных групп $\mathbb{G}$.

6.7. Счетные отношения эквивалентности

Напомним, что *счетным* называется отношение эквивалентности, у которого каждый класс эквивалентности не более чем счетен. Это чрезвычайно интересный тип, для которого лишь недавно удалось получить ответы на ряд важных вопросов. Мы дадим здесь доказательство одной теоремы из [28], раскрывающей важные свойства счетных борелевских отношений эквивалентности. Отметим работы [16, 31, 42, 58] как серьезные источники по этой теме.

В пункте (iii) этой теоремы речь идет о счетном отношении эквивалентности $\mathsf{E}_\infty = \mathsf{E}(F_2, 2)$, индуцированном действием сдвига свободной группы F_2 с двумя образующими на пространстве 2^{F_2}, см. пример 3.8. Таким образом, утверждается, что E_∞ — максимальное среди всех борелевских счетных отношений эквивалентности. По этой причине E_∞ часто называется *универсальным* борелевским счетным отношением эквивалентности.

Теорема 6.24. *Предположим, что* E *является борелевским счетным отношением эквивалентности на польском пространстве* $\mathbb{X}$. *Тогда:*

(i) *найдется семейство* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *борелевских функций из* $\mathbb{X}$ *в* $\mathbb{X}$ *такое, что* $[x]_\mathsf{E} = \{f_i(x) : i \in \mathbb{N}\}$ *для всех* $x \in \mathbb{X}$;

(ii) E *индуцировано польским действием какой-то счетной группы* $\mathbb{G}$;

(iii) *выполнено соотношение* $\mathsf{E} \le_\mathsf{B} \mathsf{E}_\infty$.

Доказательство. (i) Достаточно применить теорему Г.5 дополнения.

(ii) Не ограничивая общности предполагаем, что $\mathbb{X} = 2^\mathbb{N}$. Фиксируем систему $\{f_n\}_{ni\in\mathbb{N}}$ борелевских функций $f_n : 2^\mathbb{N} \to 2^\mathbb{N}$, определенных условием (i). Положим $\Gamma'_n = \{\langle a, f_n(a)\rangle : a \in \mathbb{N}\}$ — график f_n, и $\Gamma_n = \Gamma'_n \smallsetminus \bigcup_{k<n} \Gamma'_k$. Множества $P_{nk} = \Gamma_n \cap {\Gamma_k}^{-1}$ образуют разбиение E как множества пар на счетное число (графиков) частичных функций $2^\mathbb{N} \to 2^\mathbb{N}$. Положим $\Delta = \{\langle a, a\rangle : a \in 2^\mathbb{N}\}$ и фиксируем перечисление $\{D_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ всех непустых множеств вида $P_{nk} \smallsetminus \Delta$. Пересекая множества D_m с прямоугольниками вида

$$R_s = \{\langle a, b\rangle \in 2^\mathbb{N} \times 2^\mathbb{N} : s^\wedge 0 \subset a \wedge s^\wedge 1 \subset b\} \quad \text{и} \quad {R_s}^{-1},$$

сводим общий случай к случаю, когда $\operatorname{dom} D_m \cap \operatorname{ran} D_m = \emptyset \, \forall m$.

Теперь для любого m положим $h_m(a) = b$, если $\langle a, b\rangle \in D_m$ или $\langle a, b\rangle \in {D_m}^{-1}$, или $a = b \notin \operatorname{dom} D_m \cup \operatorname{ran} D_m$. Понятно, что h_m — борелевская биекция $2^\mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} 2^\mathbb{N}$. Итак, $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — семейство борелевских автоморфизмов пространства $2^\mathbb{N}$, причем $[a]_\mathsf{E} = \{h_m(a) : m \in \mathbb{N}\}$. Присоединив всевозможные суперпозиции этих функций h_m, получим борелевское действие

$\langle g, a\rangle \mapsto g\cdot a$ группы F_ω (т.е. свободной группы с $\aleph_0$ образующими) на $2^{\mathbb{N}}$, которое индуцирует E.

(iii) Отображение $\vartheta(a) = \{g^{-1}\cdot a\}_{g\in F_\omega}$, $a \in 2^{\mathbb{N}}$, очевидно, является борелевской редукцией отношения E к отношению $\mathsf{E}(F_\omega, 2^{\mathbb{N}})$, индуцированному каноническим действием сдвига F_ω на $(2^{\mathbb{N}})^{F_\omega}$. Заметим теперь, что F_ω гомеоморфно вкладывается в F_2. В самом деле, пусть $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ — список образующих группы F_ω, а x, y — образующие группы F_2. Отображение $h(x_k) = x^k y^k$ индуцирует изоморфизм между F_ω и подгруппой группы F_2, порожденной элементами вида $x^k y^k$. Поэтому $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}(F_2, 2^{\mathbb{N}})$ дается результатом упражнения 3.7.

Остается свести отношение $\mathsf{E}(F_2, 2^{\mathbb{N}})$ к $\mathsf{E}(F_2, 2)$. Ясно, что $\mathsf{E}(F_2, 2^{\mathbb{N}}) \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}(F_2, 2^{\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}})$. Неравенство $\mathsf{E}(F_2, 2^{\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}}) \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}(F_2\times \times\mathbb{Z}, 3)$ доказывается отображением каждого элемента $\{a_g\}_{g\in F_2}$, где $a_g \in \in 2^{\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}}$, в $\{b_{gj}\}_{g\in F_2,\, j\in\mathbb{Z}}$, где $b_{gj} = a_g(j)$ при $j \ne 0$ и $b_{g0} = 2$. Для любой группы G, выполняется $\mathsf{E}(G, 3) \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}(G \times \mathbb{Z}_2, 2)$ с помощью отображения каждого элемента $\{a_g\}_{g\in G}{\in}3^G$ $(a_g = 0, 1, 2)$ в элемент $\{b_{gi}\}_{g\in G,\, i\in\mathbb{Z}_2}$, где

$$b_{gi} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a_g = 0 \quad \text{или} \quad (a_g = 1 \text{ и } i = 0), \\ 1, & \text{если} \quad a_g = 2 \quad \text{или} \quad (a_g = 1 \text{ и } i = 1). \end{cases}$$

Итак, $\mathsf{E}(F_2, 2^{\mathbb{N}}) \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}(F_2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, 2)$. Однако $\mathbb{Z}_2$ — гомоморфный образ $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}$, в свою очередь, вкладывается в F_2. Произведение же $F_2 \times F_2 \times F_2$ вкладывается в F_ω и опять-таки в F_2. Применяя к этой цепочке результат упражнения 3.7, получим окончательно $\mathsf{E}(F_2, 2^{\mathbb{N}}) \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}(F_2, 2)$. □

В следующем разделе мы установим, что выполняется строгое неравенство $\mathsf{E}_0 <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_\infty$. Что происходит в интервале между E_0 и E_∞? Долгое время вопрос оставался открытым; и были известны лишь еще два $\sim_{\mathrm{B}}$-типа негиперконечных счетных отношений. Методы, связанные с теорией меры, позволили Адамсу и Кехрису [16] доказать, что на самом деле таких типов бесконечно и континуально много и они имеют весьма сложную $<_{\mathrm{B}}$-структуру. Это сложные результаты. Несмотря на этот прогресс, многие совершенно элементарные вопросы остаются нерешенными. Упомянем два из них.

Проблема 6.25. Введем *мультипликативный аналог* M отношения эквивалентности Витали на множестве $\mathbb{R}^+$ всех положительных вещественных чисел: $x\,\mathsf{M}\,y$, когда дробь $\frac{x}{y}$ рациональна. Это, очевидно, счетное борелевское отношение. Является ли оно гиперконечным? □

Проблема 6.26. *Отношение эквивалентности по Тьюрингу* t определено на множестве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ так: $x\,\mathsf{t}\,y$, если последовательности x, y сводятся друг к другу по Тьюрингу. Это счетное борелевское отношение, и известно, что оно не гиперконечно. Верно ли, что $\mathsf{t} \sim_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_\infty$? □

6.8. Негиперконечные счетные отношения

Напомним, что гиперконечными называются отношения эквивалентности, которые допускают представление в виде объединения $\subseteq$-возрастающих последовательностей борелевских конечных (т.е. с конечными классами) отношений. Соответственно, все гиперконечные отношения эквивалентности — борелевские и счетные. Более того, согласно теореме 6.6(i), гиперконечные отношения эквивалентности образуют начальный сегмент в $\leq_{\mathsf{B}}$-структуре счетных борелевских отношений.

Теорема 6.27. *Существует негиперконечное счетное борелевское отношение эквивалентности.*

Изложим первоначальное доказательство этого результата в [69]. Другие известные доказательства, например, приведенные в [20, 58], в тех или иных аспектах выходят за рамки элементарной дескриптивной теории множеств.

Доказательство. Искомое отношение будет индуцироваться польским действием группы F_2 на $2^{\mathbb{N}}$ с помощью отображений особого вида.

Липшицевым гомеоморфизмом $2^{\mathbb{N}}$ называется любой гомеоморфизм $f : 2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} 2^{\mathbb{N}}$, обладающий тем свойством, что для любых n и любых $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$, $x \restriction n = y \restriction n$ эквивалентно $\Longleftrightarrow$

$f(x) \restriction n = f(y) \restriction n$. В этом случае действие f очевидным образом продолжается на каждое множество $2^n = \{s \in 2^{<\omega} : \mathtt{lh}\, s = n\}$, так что $f(x) \restriction n = f(x \restriction n)$ для любых n и $x \in 2^{\mathbb{N}}$.

Имея пару биекций $f, g : 2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} 2^{\mathbb{N}}$, можно определить с их помощью действие свободной группы F_2 с двумя образующими a, b на $2^{\mathbb{N}}$, полагая $a{\cdot}x = f(x)$, $b{\cdot}x = g(x)$, и вообще $w{\cdot}x = h_w(x)$ для любого слова $w = a_1 a_2 \dots a_n$ из F_2, где $h_w(x) = h_{a_1}(h_{a_2}(\dots h_{a_n}(x)\dots))$ и, конечно, $h_a = f$, $h_{a^{-1}} = f^{-1}$, $h_b = g$, $h_{b^{-1}} = g^{-1}$. Отдельно определяется h_Λ (где Λ — пустое слово) как тождественное отображение, т.е. $h_\Lambda(x) = x$. Биекции f, g называются *независимыми*, если это действие группы F_2 на $2^{\mathbb{N}}$ является свободным, т.е. $h_w(x) \neq x$ для любого $x \in 2^{\mathbb{N}}$ и любого слова $w \neq \Lambda$.

Лемма 6.28. *Существует независимая пара липшицевых гомеоморфизмов* $f, g : 2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} 2^{\mathbb{N}}$.

Доказательство. Определим действия $f \restriction 2^n$ и $g \restriction 2^n$ на диадических последовательностях длины n индукцией по n. Естественно, будем следить за тем, чтобы $\mathtt{lh}\, f(s) = \mathtt{lh}\, g(s) = \mathtt{lh}\, s$ и

$$f(s) \subset f(s^\wedge i) \text{ и } g(s) \subset g(s^\wedge i) \text{ для всех } s \in 2^{<\omega},\ i = 0, 1. \tag{1}$$

Заранее упорядочим по типу ω все пары $\langle w, s\rangle$ такие, что w — (несократимое) слово из F_2, отличное от Λ, и $s \in 2^{<\omega}$.

Для начала, положим $f(\Lambda) = g(\Lambda) = \Lambda$ (для $n = 0$) и $f(\langle 0\rangle) = g(\langle 0\rangle) = \langle 1\rangle$, $f(\langle 1\rangle) = g(\langle 1\rangle) = \langle 0\rangle$. Теперь выполним индуктивный переход $n \to n+1$. Предположим, что $f(s), g(s)$, и тогда $h_w(s)$ для любого слова w, определены для всех $s \in 2^{<\omega}$ с $\mathtt{lh}\, s \le n$. Целью же является определение значений $f(t^\wedge i)$ и $g(t^\wedge i)$ для $t \in 2^n$, $i = 0, 1$; при этом должно выполняться (1).

Пусть $\langle w, s\rangle$ — наименьшая в смысле указанного упорядочения пара, удовлетворяющая таким условиям: $k = \mathtt{lh}\, s \le n$, найдется $t \in 2^n$ такое, что $s \subseteq t$ и $h_w(t) = t$, и $h_u(s) \neq h_v(s)$ для любых начальных подслов[8] $u \neq v$ слова w — кроме случая, когда $u = \Lambda$ и $v = w$ или наоборот. Такие пары обязательно найдутся, хотя бы потому, что для любого $s \in 2^n$ имеется $w \in F_2$,

[8] Пустое слово и само w считаются начальными подсловами любого слова w.

удовлетворяющее $h_w(s) = s$ — из-за конечности множества 2^n. Эту пару $\langle w, s\rangle$ назовем *критической* для шага n.

Положим $T_s = \{t \in 2^n : s \subseteq t \wedge h_w(t) = t\}$ и для $t \in T_s$

$$C_t = \{h_u(t) : u \text{ — начальное подслово слова } w\}.$$

Множества C_t попарно дизъюнктны. В самом деле, если $h_u(t_1) = h_v(t_2) = t'$, где u, v — начальные подслова w, то сразу $u \neq v$, поскольку иначе $t_1 = h_{u^{-1}}(t') = h_{v^{-1}}(t') = t_2$. Но тогда $h_u(s) = h_v(s)$, так как t_1 и t_2 продолжают s. Противоречие с выбором s.

Рассмотрим произвольное $t \in T_s$. Пусть w — слово $a_0 a_1 \dots a_{m-1}$, в котором каждое a_l принадлежит $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$. Тогда $C_t = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, где $t_0 = t$ и по индукции $t_{l+1} = h_{a_l}(t_l)$. Понятно, что $t_m = h_w(t) = t = t_0$, и в остальном все t_l попарно различны по той же причине, что и для дизъюнктности множеств C_t выше. Переходя на уровень $n+1$, определим $h_{a_0}(t_0{}^\wedge i) = t_1{}^\wedge(1-i)$ для $i = 0, 1$ и $h_{a_l}(t_l{}^\wedge i) = t_{l+1}{}^\wedge i$ при $1 \le l < m$. Сразу заметим: $h_w(t^\wedge i) = t^\wedge(1-i) \neq t^\wedge i$.

Это определение в понятном смысле непротиворечиво.[9] Следовательно, из-за попарной дизъюнктности «циклов» C_t, оно остается непротиворечивым и на объединении всех C_t, $t \in T_s$. Это означает, что можно продолжить действия f и g на множество 2^{n+1} так, что выполняется (1), а полученные внутри каждого C_t значения $h_{a_l}(t_l{}^\wedge i)$ совпадут с указанными выше. А тогда $h_w(t^\wedge i) \neq t^\wedge i$ для всех $t \in T_s$, $i = 0, 1$. Отсюда следует, что пара $\langle w, s\rangle$ не может быть критической ни на каком последующем шаге $n' > n$.

Это построение приносит пару липшицевых гомеоморфизмов $f, g : 2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} 2^{\mathbb{N}}$. Остается проверить независимость. Пусть напротив, $x \in 2^{\mathbb{N}}$ и слово $w \in F_2$, $w \neq \Lambda$, удовлетворяют $h_w(x) = x$. Можно считать, что w — самое короткое такое слово для всех таких x. Найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что $s = x \restriction k$ удовлетворяет $h_u(s) \neq h_v(s)$ для всех начальных подслов $u \neq v$ слова w, кроме случая $u = \Lambda$ и $v = w$ или наоборот. Согласно

[9] Противоречие могло бы возникнуть только в случае $a_{m-1}^{-1} = a_0$. Именно, по построению, $h_{a_0}(t_0{}^\wedge i) = t_1{}^\wedge(1-i)$, но $h_{a_{m-1}^{-1}}(t_m{}^\wedge i) = t_{m-1}{}^\wedge i$, а $t_0 = t_m$. Однако $a_{m-1}^{-1} \neq a_0$, так как иначе имели бы $h_{a_0}(s) = h_{a_0 \dots a_{m-2}}(s)$, что противоречит выбору s.

сказанному выше, на некотором шаге $n \geq k$ пара $\langle w, s\rangle$ будет ключевой, и соответствующее множество T_s будет содержать элемент $t = x \restriction n$. Пусть $i = x(n)$. По построению $h_w(t^\wedge i) = h_w(t)^\wedge(1-i) = t^\wedge(1-i) \neq t^\wedge i$, противоречие с предположением $h_w(x) = x$. □ (лемма)

Возвращаясь к доказательству теоремы 6.27, фиксируем независимую пару липшицевых гомеоморфизмов $f, g : 2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} 2^{\mathbb{N}}$ и определим h_w для каждого слова $w \in F_2$, как указано выше. Это польское действие группы F_2 на $2^{\mathbb{N}}$ индуцирует отношение эквивалентности: $x \mathsf{E} y$, если $\exists w \in F_2 (y = h_w(x))$. Это отношение счетно вместе с F_2. Покажем, что оно не гиперконечное.

Пусть, напротив, $\mathsf{E} = \bigcup_n \mathsf{F}_n$, где $\{\mathsf{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является $\subseteq$-возрастающей последовательностью конечных борелевских отношений эквивалентности. Для каждого x обозначим n_x наименьшее число n, для которого множество $\{f(x), g(x), f^{-1}(x), g^{-1}(x)\}$ включено в $[x]_{\mathsf{F}_n}$. Существуют число n и замкнутое множество $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ такие, что $n_x \leq n$ для всех $x \in X$ и $\mu(X) \geq 3/4$, где μ — однородная вероятностная мера на $2^{\mathbb{N}}$. Положим $T = \{x \restriction m : x \in X \wedge m \in \mathbb{N}\}$ — поддерево дерева $2^{<\omega}$.

Рассмотрим множество U всех пар вида $\langle w, s\rangle$, где w — слово из F_2, $s \in 2^{<\omega}$, длины слов w и s совпадают, и $h_u(s) \in T$ для любого начального подслова u слова w, включая Λ и w. Понятно, что U — дерево с конечными ветвлениями, а потому, если оно бесконечно, то имеет бесконечную ветвь, т.е. такое бесконечное (несократимое) слово w из символов a, b, a^{-1}, b^{-1} и такое $x \in 2^{\mathbb{N}}$, что $\langle w \restriction m, x \restriction m\rangle \in U$ для всех m. Отсюда по определению U без труда получаем, что $h_{w\restriction m}(x) \in X$ для всех m, а потому, индукцией по m, выполнено $x \, \mathsf{F}_n \, h_{w\restriction m}(x)$ по выбору n, X. Наконец, $h_{w\restriction m}(x) \neq h_{w\restriction m'}(x)$ при $m \neq m'$ из-за независимости f, g. Итак, класс эквивалентности $[x]_{\mathsf{F}_n}$ содержит бесконечно много элементов. Противоречие.

Осталось доказать бесконечность U. Фиксируем $\ell \in \mathbb{N}$ и найдем пару $\langle w, s\rangle \in U$, для которой $\mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, w \geq \ell$. Из независимости f, g следует, что для каждого однобуквенного слова $w \in W = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ выполнено $h_w(x) \neq x$ для всех $x \in 2^{\mathbb{N}}$, и, кроме того, $h_w(x) \neq h_{w'}(x)$ для любой пары $w \neq w'$ из W. Поэтому по лемме Кёнига найдется число $m \ge \ell$ такое, что $h_w(s) \ne s$ и $h_w(s) \ne h_{w'}(s)$ для всех $w \ne w'$ из W и всех $s \in 2^m$.

Рассмотрим граф $\Gamma = \{\{s,t\} : s,t \in 2^m \wedge \exists\, w \in W\,(h_w(s) = t)\}$ на множестве 2^m. По выбору m для каждого $s \in 2^m$ имеется ровно 4 разных $t \in 2^m$ таких, что $\{s,t\} \in \Gamma$. Значит, Γ содержит ровно $2 \cdot 2^m$ (неупорядоченных) ребер, поскольку каждая пара $\{s,t\}$ считается дважды.

Теперь рассмотрим подграф $G = \Gamma{\restriction}T = \{\{s,t\} \in \Gamma : s,t \in T\}$. Напомним, что X — множество меры $\ge 3/4$, а потому пересечение $T \cap 2^m$ содержит по меньшей мере $\frac{3}{4}\cdot 2^m$ элементов, а разность $2^m \smallsetminus T$ — соответственно не более $\frac{1}{4}\cdot 2^m$ элементов. Это значит, что при переходе от Γ к G потеряются не более $4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2^m = 2^m$ ребер, так что граф G с не более чем 2^m вершинами сохраняет не менее $2 \cdot 2^m - 2^m = 2^m$ ребер.

Теперь нам потребуется один простой результат из области комбинаторики конечных графов, который мы оставим в качестве упражнения.

Упражнение 6.29. Докажите, что неориентированный граф G на конечном множестве Y, имеющий не меньше ребер чем вершин, содержит цикл, т.е. найдутся элементы $y_0, y_1, \ldots, y_k \in Y$, $k \ge 3$, попарно различные кроме того, что $y_k = y_0$, и удовлетворяющие $\langle y_i, y_{i+1}\rangle \in G$ для каждого $i < k$. (*Указание*. Иначе найдется концевой элемент $y \in Y$, т.е. $\langle y, y'\rangle \in G$ выполняется лишь для одного $y' \in Y$. Это позволяет провести индукцию.) $\square$

Применив этот результат, находим цикл $s_0, s_1, \ldots, s_k \in 2^m$ в графе G. Это означает, что $k \ge 3$, каждое s_k принадлежит $T \cap 2^m$, $s_k = s_0$, и в остальном s_i попарно различны, и по определению Γ для каждого $i < k$ найдется однобуквенное слово $a_i \in W$ такое, что $h_{a_i}(s_i) = s_{i+1}$. Слово $u = a_0 a_1 \ldots a_{k-1}$ несократимо, поскольку иначе мы имели бы $s_{i-1} = s_{i+1}$ для некоторого i, $0 < i < k$. Далее, слово uu (конкатенация двух слов u) также несократимо, ибо иначе было бы $s_1 = s_{k-1}$. Поэтому слово u^m (конкатенация m слов u) также несократимо. Берем $w = u^m{\restriction}m$ — первые m символов в u^m, и это также несократимое слово. Нетрудно убедиться, что $\langle w, s_0\rangle \in U$, что и требовалось.

$\square$ (теорема 6.27)

6.9. Два следствия

В этом параграфе доказываются два следствия теоремы 6.27, важных для изучения $\le_B$-структуры борелевских отношений эквивалентности.

Следствие 6.30. *Отношение эквивалентности* E_∞, *т. е. максимальное счетное борелевское отношение эквивалентности, не является гиперконечным и удовлетворяет* $\mathsf{E}_0 <_B \mathsf{E}_\infty$.

Доказательство. Нестрогое неравенство $\mathsf{E}_0 \le_B \mathsf{E}_\infty$ следует из теоремы 6.24(iii). По теореме 6.27 найдется негиперконечное борелевское счетное отношение эквивалентности E. По теореме 6.24 выполнено $\mathsf{E} \le_B \mathsf{E}_\infty$. Согласно эквивалентности (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) из теоремы 6.6 гиперконечные отношения образуют начальный сегмент в смысле $\le_B$ среди всех борелевских счетных отношений эквивалентности. Поэтому, если бы E_∞ было гиперконечным, то таким было бы и E. $\square$

Выведем еще одно следствие теоремы 6.27, а именно, соотношение $\mathsf{E}_\infty \not\le_B \mathsf{E}_1$, ранее уже доказанное со ссылкой на третью дихотомическую теорему, см. следствие 4.17. Сначала получим следующий простой результат:

Лемма 6.31. *Борелевское отношение эквивалентности* E *является гипергладким, если и только если* $\mathsf{E} \le_B \mathsf{E}_1$.

Доказательство. Допустим, что отношение эквивалентности E на области $\mathbb{X}$ является гипергладким. Тогда $\mathsf{E} = \bigcup_n \mathsf{F}_n$, где каждое отношение F_n — гладкое и $\mathsf{F}_n \subseteq \mathsf{F}_{n+1}$, $\forall n$. По определению гладкости найдутся такие борелевские отображения $\vartheta_n : \mathbb{X} \to 2^{\mathbb{N}}$, что $x \mathrel{\mathsf{F}_n} y$ эквивалентно $\vartheta_n(x) = \vartheta_n(y)$ для всех x, $y \in \mathbb{X}$ и любого n. Отображение $\vartheta(x) = \{\vartheta_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $\mathbb{X}$ в $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ дает нам $\mathsf{E} \le_B \mathsf{E}_1$. Обратно, если $\vartheta : \mathbb{X} \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ — борелевская редукция отношения E к E_1, то последовательность отношений F_n, определенных так, что $x \mathrel{\mathsf{F}_n} y$ когда $\vartheta(x) \restriction_{\ge n} = \vartheta(y) \restriction_{\ge n}$, обеспечивает гипергладкость E. Здесь $z \restriction_{\ge n}$ обозначает подпоследовательность $z \restriction [n, \infty)$ для $z \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Таким образом, E_1 — *универсальное* гипергладкое отношение.

Следствие 6.32. $\mathsf{E}_\infty \not\leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$.

Доказательство. Иначе E_∞ становится гипергладким по 6.31 счетным отношением эквивалентности, т.е. $\mathsf{E}_\infty \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$ по теореме 6.6. Это противоречит следствию 6.30. $\square$

7. НЕПОЛИЗИРУЕМАЯ ОБЛАСТЬ, ИДЕАЛ $\mathscr{I}_1$, ОТНОШЕНИЕ E_1

Одна из наиболее фундаментальных разграничивающих линий в структуре борелевских отношений эквивалентности отделяет *полизируемые* отношения, т.е. такие, которые могут быть индуцированы польским действием (польской группы), от неполизируемых. Это разделение находится в центре внимания интересной серии исследований, восходящих к началу 1990-х годов. В них было установлено, что идеал

$$\mathscr{I}_1 = \{x \subseteq \mathbb{N}^2 : \text{множество } \{k : (x)_k \neq \emptyset\} \text{ конечно}\},$$

где $(x)_k = \{n : \langle k, n\rangle \in x\}$, и порождаемое им отношение $\mathsf{E}_1 = \mathsf{E}_{\mathscr{I}_1}$ отделяют полизируемую область от неполизируемой в том, что являются минимальными во второй из них в некоторых аспектах, связанных с борелевской сводимостью. Полная минимальность остается открытой проблемой. Мы изложим в этой главе несколько центральных результатов в этом направлении.

Начнем с исследования отношений эквивалентности вида $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$, борелевски сводимых к отношению E_1, для которых установлено деление на два типа, один из них — это изоморфный класс самого идеала $\mathscr{I}_1$, а второй характеризуется определенной связью с идеалом Fin, более слабой, чем изоморфизм, но более сильной, чем борелевская би-сводимость $\sim_{\mathrm{B}}$. Затем изложим несколько результатов, связывающих полизируемые идеалы с субмерами и идеалом $\mathscr{I}_1$. В частности, доказывается замечательная теорема Солецкого об эквивалентности условия полизируемости и соотношения $\mathscr{I}_1 \not\leq_{\mathrm{RB}} \mathscr{I}$ для борелевских идеалов $\mathscr{I}$ над $\mathbb{N}$. В одну сторону эта эквивалентность усиливается в последних параграфах главы до теорем о том, что отношение E_1 борелевски не сводится ни к одному счетному борелевскому отношению эквивалентности (теорема 7.20) и даже ни к одному отношению эквивалентности, индуцированному польским действием какой-то польской группы (теорема 7.26).

7.1. Структура идеалов, сводимых к идеалу $\mathscr{I}_1$

Из теоремы 2.9 следует, что не существует нетривиальных борелевских идеалов на $\mathbb{N}$, строго $<_{\mathrm{B}}$-меньших, чем идеал конечных множеств $\mathtt{Fin}$. Следующая теорема 7.3 Кехриса [53] показывает, что область идеалов, $\leq_{\mathrm{B}}$-меньших, чем $\mathscr{I}_1$, также устроена весьма просто. Напомним, что идеалы $\mathscr{I}$ и $\mathscr{J}$ на множествах, соответственно, A и B *изоморфны*, символически $\mathscr{I} \cong \mathscr{J}$, если существует биекция между A и B, переводящая один идеал в другой.

Определение 7.1. Идеал $\mathscr{I}$ на счетном множестве A называется *тривиальной вариацией* идеала $\mathscr{J}$ если найдется такое бесконечное множество $D \subsetneq A$, что $\mathscr{I} \cap \mathscr{P}(D) \cong \mathscr{J}$ и $\mathscr{I} \cap \mathscr{P}(A \setminus D) = \mathscr{P}(A \setminus D)$.

(Второе условие равносильно тому, что $\mathscr{I}=\{x\subseteq A: x\cap D\in\mathscr{I}\}$.) □

В терминах операции дизъюнктной суммы идеалов (см. определение 2.13), тривиальная вариация идеала $\mathscr{I}$ изоморфна идеалу $\mathscr{I} \oplus \mathscr{P}(B)$, где $B = A \setminus D$ — конечное или счетное множество, а множество-степень $\mathscr{P}(B) = \{y : y \subseteq B\}$ рассматривается как идеал. Для всех естественно возникающих идеалов $\mathscr{I}$ на бесконечных множествах, в частности, всех рассматриваемых в этой книге, имеет место $\mathscr{I} \oplus \mathscr{P}(B) \cong \mathscr{I}$ в предположении, что B конечно, так что в сущности тривиальная вариация $\mathscr{I}$ исчерпывается двумя идеалами: $\mathscr{I} \oplus \mathbb{N}$ и самим $\mathscr{I}$.

Упражнение 7.2. (1) Докажите, что для идеалов $\mathscr{I} = \mathscr{I}_1$, $\mathscr{I}_2$, $\mathscr{I}_3$, $\mathscr{Z}_0$ имеет место $\mathscr{I} \oplus \mathbb{N} \cong \mathscr{I}$, но в то же время $\mathtt{Fin} \oplus \mathbb{N} \not\cong \mathtt{Fin}$. Докажите, что тривиальная вариация $\mathtt{Fin} \oplus \mathbb{N}$ идеала $\mathtt{Fin}$ изоморфна идеалу $\mathtt{Fin}_{\mathrm{ODD}} = \{x \subseteq \mathbb{N} : x \cap 2\mathbb{N} \in \mathtt{Fin}\}$, где $2\mathbb{N}$ — множество всех четных чисел.

(2) Докажите, что хотя идеалы Fin и $\mathsf{Fin}_{\mathsf{ODD}}$ не изоморфны, соответствующие отношения эквивалентности $\mathsf{E}_0 = \mathsf{E}_{\mathsf{Fin}}$ и $\mathsf{E}_0^{\mathsf{ODD}} = \mathsf{E}_{\mathsf{Fin}_{\mathsf{ODD}}}$ удовлетворяют соотношению $\mathsf{E}_0 \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0^{\mathsf{ODD}}$.

(3) Докажите, что $\mathscr{I}_1$ **не** является тривиальной вариацией Fin. □

Теорема 7.3. *Если $\mathscr{I}$ — нетривиальный борелевский идеал на $\mathbb{N}$ и $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$, то либо $\mathscr{I} \cong \mathscr{I}_1$, либо $\mathscr{I}$ — тривиальная вариация идеала Fin.*

Таким образом, с точностью до изоморфизма $\cong$ имеется всего три типа идеалов $\mathscr{I}$ таких, что $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$: это Fin, $\mathsf{Fin} \oplus \mathbb{N}$, и сам идеал $\mathscr{I}_1$. Соответственно, в этом случае имеет место одно из двух: $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$ или $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$. На самом деле, по теореме 4.15, которая здесь не доказывается, все борелевские отношения эквивалентности $\mathsf{E} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$, не обязательно вида $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$, допускают подобное описание, но с несколько более широким набором возможностей, включающим еще и равенства на конечных, счетных, и континуальных борелевских множествах.

Доказательство. Тот простой факт, что $\mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_1 \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$ через изоморфизм соответствующих идеалов, позволяет применить теорему 2.12, которая выводит из предположения $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$ существование *непрерывной* редукции $\vartheta : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ отношения $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ к E_1. Значит, $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ совпадает с объединением $\bigcup_m \mathsf{R}_m$ некоторой возрастающей последовательности компактных[1] отношений эквивалентности $\mathsf{R}_m \subseteq \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ по той причине, что E_1 имеет вид такого же объединения.

Фиксируем последовательность компактных множеств $B_k \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$, содержащую все множества вида $B_l^m = \{x \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) : \forall s \subseteq [0, l)\ x\ \mathsf{R}_m\ (x \,\Delta\, s)\}$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 2.10, нетрудно построить последовательность натуральных чисел $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ и множеств $s_k \subseteq [n_k, n_{k+1})$ таких, что

(1) если $k' \geq k$ и $u \subseteq [0, n_{k'})$, то $u \cup s_{k'}$ «решает» B_k в том смысле, что либо каждое множество $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ с условием $x \cap [0, n_{k'+1}) = u \cup s_{k'}$ принадлежит B_k, либо каждое

[1] Т.е. топологически замкнутых в $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Напомним, что топология в $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ гомеоморфна польской компактной топологии степени $2^{\mathbb{N}}$ при отождествлении подмножеств $\mathbb{N}$ с их характеристическими функциями.

$x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ с $x \cap [0, n_{k'+1}) = u \cup s_{k'}$ принадлежит $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \smallsetminus B_k$.

Положим $D_0 = \{x \cup S_1 : x \subseteq Z_0\}$ и $D_1 = \{x \cup S_0 : x \subseteq Z_1\}$, где

$$S_0 = \textstyle\bigcup_k s_{2k} \subseteq Z_0 = \bigcup_k [n_{2k}, n_{2k+1}),$$
$$S_1 = \bigcup_k s_{2k+1} \subseteq Z_1 = \bigcup_k [n_{2k+1}, n_{2k+2}).$$

Из (1) следует, что каждое множество B_k открыто-замкнуто на D_0 и на D_1, т.е. пересечения $B_k \cap D_i$ открыто-замкнуты в этих множествах D_i, $i = 0, 1$. Поэтому и из-за компактности множеств D_i для любого l имеется число $m(l) \geq l$ такое, что

(2) $\forall x \in D_0 \cup D_1 \, \forall s \subseteq [0, l) \, \big(x \mathrel{\mathsf{R}_{m(l)}} (x \,\Delta\, s)\big)$.

Возвращаясь к доказательству, заметим, что достаточно построить последовательность $x_0 \subseteq x_1 \subseteq x_2 \subseteq \ldots$ множеств $x_k \in \mathscr{I}$ такую, что $\mathscr{I} = \bigcup_n \mathscr{P}(x_n)$. То, что в этом случае идеал $\mathscr{I}$ относится к одному из двух указанных в условии теоремы типов идеалов, остается читателю в качестве **упражнения**. Заметим, что любой компактный в топологии $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ идеал $\mathscr{I}$ на $\mathbb{N}$ (не обязательно нетривиальный) совпадает с $\mathscr{P}(x)$, где $x = \{n : \{n\} \in \mathscr{I}\} \subseteq \mathbb{N}$. Тем самым, достаточно вывести, что $\mathscr{I}$ — объединение счетной последовательности замкнутых подидеалов. Это свойство можно проверить отдельно для идеалов $\mathscr{J}_0 = \mathscr{I} \cap \mathscr{P}(Z_0)$ и $\mathscr{J}_1 = \mathscr{I} \cap \mathscr{P}(Z_1)$.

Доказываем это утверждение для идеала $\mathscr{J}_0$.

Для любого $m \in \mathbb{N}$ и конечных множеств $s \subseteq u \subseteq Z_0$ положим

$$I^m_{us} = \left\{A \subseteq Z_0 : \forall x \in D_0 \, \big(x \cap u = s \Longrightarrow \big(x \cup (A \smallsetminus u)\big) \mathrel{\mathsf{R}_m} x\big)\right\}.$$

Утверждается, что каждое из множеств I^m_{us} компактно в $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, замкнуто относительно операции $\cup$ и $I^m_{us} \subseteq \mathscr{I}$.

Компактность I^m_{us} следует из компактности множеств R_m и D_0.

Пусть $A, B \in I^m_{us}$. Для доказательства $A \cup B \in I^m_{us}$ возьмем любое множество $x \in D_0$, удовлетворяющее $x \cap u = s$. Тогда $x' = x \cup (A \smallsetminus u)$ также принадлежит D_0 и также выполняется $x' \cap u = s$, поэтому имеем $\big(x' \cup (B \smallsetminus u)\big) \mathrel{\mathsf{R}_m} x'$, поскольку $B \in I^m_{us}$, другими словами, $\big(x \cup ((A \cup B) \smallsetminus u)\big) \mathrel{\mathsf{R}_m} x'$. Однако имеет место $x' \mathsf{R}_m x$, так как $A \in I^m_{us}$. Остается напомнить, что R_m — отношение эквивалентности.

Наконец, чтобы вывести, что любое $A \in I^m_{us}$ принадлежит идеалу $\mathscr{I}$, пусть $x = s \cup S_1$. Тогда по определению $x \cup (A \smallsetminus u) \mathsf{R}_m x$, поэтому $A \in \mathscr{I}$ так как u конечно и $\mathsf{R}_m \subseteq \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$.

Теперь докажем $\mathscr{J}_0 = \bigcup_{m,u,s} I^m_{us}$.

Для этого рассмотрим любое множество $A \in \mathscr{I}$, $A \subseteq Z_0$. Множества $Q_m = \{x \in \mathscr{D}_0 : \big(x \cup A\big) \mathsf{R}_m x\}$ все компактны и удовлетворяют равенству $D_0 = \bigcup_m Q_m$. Следовательно, хотя бы одно из них имеет непустую внутренность в D_0. Таким образом, имеются конечные множества $s \subseteq u \subseteq Z_0$ и число m_0 такие, что

$$\forall x \in D_0 \, (x \cap u = s \Longrightarrow \big(x \cup A\big) \mathsf{R}_{m_0} x) \, .$$

Это, конечно, не совсем то, что нам нужно. Однако согласно (2) число $m = \max\{m_0, m(\sup u)\}$ достаточно велико для вывода

$$\forall x \in D_0 : \big(x \cup A\big) \mathsf{R}_m \big(x \cup (A \smallsetminus u)\big) \, .$$

Отсюда следует $A \in I^m_{su}$, что и требовалось.

Теперь, чтобы получить искомую последовательность идеалов, обозначим через J^m_{su} $\subseteq$-замыкание множества I^m_{su}, т.е. все подмножества множеств из I^m_{su}. По доказанному выше, каждое из множеств J^m_{su} — в самом деле компактный подидеал идеала $\mathscr{J}_0$, причем $\mathscr{J}_0$ совпадает с объединением всех этих множеств. □

Следствие 7.4. *Отношения эквивалентности* E_2 *и* E_3 *борелевски не сводятся к* E_1, *т.е.* $\mathsf{E}_2 \not\leq_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_1$ *и* $\mathsf{E}_3 \not\leq_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_1$. *Тем самым, они не сводятся и к* E_0, *т.е.* $\mathsf{E}_0 <_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_2$ *и* $\mathsf{E}_0 <_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_3$.

Доказательство. По очевидным соображениям E_2 и E_3 не относятся к тем двум типам, которые указаны в теореме 7.3 для идеалов, $\leq_{\mathsf{B}}$-сводимых к E_1. Соотношения $\mathsf{E}_0 \leq_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_i$, $i = 1, 2, 3$, элементарны, см. упражнение 2.7. □

Строгая борелевская сводимость $\mathsf{E}_0 <_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_1$ и даже несводимость $\mathsf{E}_1 \not\leq_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_\infty$ будут установлены в теореме 7.20.

7.2. P-идеалы, субмеры, полизируемость

Начнем со следующего важного определения.

Идеал $\mathscr{I}$ на $\mathbb{N}$ называется P-*идеалом*, если для любой последовательности множеств $x_n \in \mathscr{I}$ существует такое множество $x \in \mathscr{I}$, что $x_n \subseteq^* x$, т.е. разность $x_n \setminus x$ конечна, для каждого n.

Упражнение 7.5. Докажите, что из идеалов, определенных в §2.2, Fin, $\mathscr{I}_2$, $\mathscr{I}_3$, $\mathscr{Z}_0$ (но не $\mathscr{I}_1$!) являются P-идеалами. Например, для идеала $\mathscr{I}_3$, если $x_0 \subseteq x_1 \subseteq x_2 \subseteq \ldots$ — последовательность множеств $x_n \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ из $\mathscr{I}_3$, то достаточно определить $x \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ соотношением $(x)_k = \bigcup_{n \le k}(x_n)_k$ для каждого k, где, напомним, $(x)_k = \{j : \langle k, j\rangle \in x\}$. □

Как мы увидим ниже (теорема 7.12), класс P-идеалов допускает несколько независимых характеризаций, в частности, связанных с полизируемостью и с понятием субмеры, и также со сводимостью идеала $\mathscr{I}_1$. Чтобы сформулировать это теорему, введем определения, связанные с субмерами и полизируемостью.

Определение 7.6. *Субмерой* на множестве A называется любое отображение $\varphi : \mathscr{P}(A) \to [0, +\infty]$, удовлетворяющее условиям $\varphi(\emptyset) = 0$, $\varphi(\{a\}) < +\infty$ для всех $a \in A$, и $\varphi(x) \le \varphi(x \cup y) \le \le \varphi(x) + \varphi(y)$.

Субмера φ на $\mathbb{N}$ *полунепрерывна снизу*, для краткости l.s.c. (lower semicontinuous), если $\varphi(x) = \sup_n \varphi(x \cap [0, n))$ для всех $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. □

Таким образом, чтобы быть обычной конечно аддитивной *мерой*, субмере φ не хватает свойства аддитивности, т.е. $\varphi(x \cup y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для всех дизъюнктных множеств x, y из ее области определения. При этом любая σ-аддитивная мера является l.s.c. субмерой.

Допустим, что φ — субмера на $\mathbb{N}$. Определим *хвостовую субмеру* $\varphi_\infty(x) = ||x||_\varphi = \mathtt{inf}_n(\varphi(x \cap [n, \infty)))$. С ней связаны следующие идеалы на $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathtt{Fin}_\varphi &= \{x \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) : \varphi(x) < +\infty\}, \\ \mathtt{Null}_\varphi &= \{x \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) : \varphi(x) = 0\}, \\ \mathtt{Exh}_\varphi &= \{x \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) : \varphi_\infty(x) = 0\} \quad = \quad \mathtt{Null}_{\varphi_\infty}. \end{aligned}$$

Упражнение 7.7. Докажите, что $\mathrm{Fin} = \mathrm{Exh}_\varphi = \mathtt{Null}_\varphi$, где $\varphi(x)=1$ для всех $x \neq \emptyset$, и кроме того $\mathscr{I}_3 = \mathrm{Exh}_\psi$, где $\psi(x) = \sum_k 2^{-k}\varphi(\{l : \langle k,l\rangle \in x\})$ является l.s.c. субмерой. $\square$

Теперь о полизируемых идеалах. Обозначим через T стандартную польскую топологию произведения на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ — т.е. топологию, которая соответствует топологии произведения в $2^{\mathbb{N}}$. Понятно, что $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ становится польской группой в смысле T с симметрической разностью $x \,\Delta\, y = (x \smallsetminus y) \cup (y \smallsetminus x)$ в качестве групповой операции, и любой идеал $\mathscr{I}$ на $\mathbb{N}$ — подгруппа этой группы. Следующее определение является, таким образом, вариантом определения полизируемости из определения 3.1.

Определение 7.8. Идеал $\mathscr{I}$ на $\mathbb{N}$ *полизируем*, если существует топология польской группы τ на $\mathscr{I}$, которая порождает в точности те же борелевские подмножества $\mathscr{I}$, что и $T \upharpoonright \mathscr{I}$. $\square$

Лемма 7.9. *Допустим, что идеал $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ полизируем.*

Тогда существует единственная топология польской группы τ на $\mathscr{I}$. Эта топология сильнее $T \upharpoonright \mathscr{I}$ и метризуется Δ-инвариантной метрикой. Если $Z \in \mathscr{I}$, то $\tau \upharpoonright \mathscr{P}(Z)$ совпадает с $T \upharpoonright \mathscr{P}(Z)$. Наконец, сам идеал $\mathscr{I}$ является T- борелевским множеством.

Кроме того, Δ-действие $\mathscr{I}$ на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ (см. §3.3) *непрерывно в смысле топологии τ на $\mathscr{I}$ и обычной польской топологии на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.*

Доказательство. Пусть τ — топология, соответствующая полизируемости идеала $\mathscr{I}$. Отображение $f(x) = x\ :\ \langle \mathscr{I}\,;\tau\rangle \to \langle \mathscr{P}(\mathbb{N})\,;T\rangle$ является Δ-гомоморфизмом. Оно также является борелевским отображением, т.е. его график — борелевское множество в $\tau \times (T \upharpoonright \mathscr{I})$, поскольку все $(T \upharpoonright \mathscr{I})$-открытые множества относятся к τ-борелевским. Из теоремы Петти (см., например, Кехрис [52]) следует непрерывность f. Отсюда вытекает, что все $(T \upharpoonright \mathscr{I})$-открытые подмножества $\mathscr{I}$ являются и τ-открытыми, а сам идеал $\mathscr{I}$ есть T-борелевское множество в $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ согласно следствию Г.4 дополнения. (Которое применимо, поскольку функция f взаимно однозначна.)

Аналогичное рассуждение позволяет легко вывести единственность топологии τ: заменим $T \upharpoonright I$ на какую-нибудь топологию τ'.

Однако любая топология польской группы метризуется метрикой, инвариантной слева (см. Кехрис [52]), которая в данном случае инвариантна и справа, поскольку операция Δ коммутативна.

Наконец, пусть $Z \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Множество $\mathscr{P}(Z)$, очевидно, T-замкнуто, поэтому и τ-замкнуто согласно вышедоказанному, и является подгруппой Δ-группы $\mathscr{I}$, так что $\tau \restriction \mathscr{P}(Z)$ — топология польской группы на $\mathscr{P}(Z)$). Однако $T \restriction \mathscr{P}(Z)$ — другая топология польской группы на $\mathscr{P}(Z)$ с теми же борелевскими множествами. Отсюда, как и выше, следует, что T и τ совпадают на $\mathscr{P}(Z)$.

Что касается непрерывности Δ-действия, достаточно заметить, что оно по очевидным соображениям непрерывно в смысле той польской топологии $T \restriction \mathscr{I}$ на $\mathscr{I}$, которая наследуется из польской топологии T на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, а затем воспользоваться тем, что топология τ сильнее, чем $T \restriction \mathscr{I}$. □

Пример 7.10. Идеал $\mathscr{I}_1$ не является полизируемым. В самом деле, $\mathscr{I}_1 = \bigcup_n W_n$, где $W_n = \{x : x \subseteq \{0, 1, ..., n\} \times \mathbb{N}\}$. Пусть напротив, τ — топология польской группы на $\mathscr{I}_1$. Тогда по лемме топология τ и стандартная польская топология T совпадают на каждом из множеств W_n. Следовательно, каждое из множеств W_n остается τ-нигде не плотным в W_{n+1}, следовательно, и в $\mathscr{I}_1$, что противоречит теореме Бэра о категории (теорема B.1 из дополнения) для топологии τ. □

7.3. Характеризация полизируемых идеалов

Здесь доказывается следующая важная теорема, из которой, в частности, следует тождественность борелевских P-идеалов, полизируемых идеалов, Exh-идеалов l. s. c. субмер, и идеалов, к которым не сводится идеал $\mathscr{I}_1$.

Определение 7.11. Для произвольного идеала $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$, множество $X \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ называется *$\mathscr{I}$-малым*, если существует такое $A \in \mathscr{I}$, что множество $X \restriction A = \{x \cap A : x \in X\} \subseteq \mathscr{P}(A)$ является тощим в смысле польской топологии $\mathscr{P}(A)$. □

Заметим, что сам идеал $\mathscr{I}$ не может быть $\mathscr{I}$-малым множеством: в самом деле, если $A \in \mathscr{I}$, то $\mathscr{I} \restriction A = \mathscr{P}(A)$.

Теорема 7.12. *Пусть $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ — идеал. Тогда следующие шесть условий эквивалентны:*

(i) *$\mathscr{I}$ — идеал вида $\mathbf{Exh}_\varphi$, где φ является l.s.c. субмерой на $\mathbb{N}$,*

(ii) *$\mathscr{I}$ — полизируемый идеал,*

(iii) *$\mathscr{I}$ — борелевский P-идеал,*

(iv) *$\mathscr{I}$ — борелевский идеал, обладающий тем свойством, что все счетные объединения $\mathscr{I}$-малых множеств сами являются $\mathscr{I}$-малыми,*

(v) *$\mathscr{I}$ — борелевский идеал, для которого $\mathscr{I}_1 \not\leq_{\mathrm{RB}} \mathscr{I}$,*

(vi) *$\mathscr{I}$ — борелевский идеал, для которого $\mathsf{E}_1 \not\leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$.*

Эквивалентность пяти первых условий установлена Солецким [70, 71]. Шестое условие присоединяется сюда результатами Кехриса и Луво [57].

Следствие 7.13. *Соотношения $\mathscr{I}_1 \leq_{\mathrm{RB}} \mathscr{I}$ между идеалами и $\mathsf{E}_1 \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ между соответствующими отношениями эквивалентности равносильны для любого борелевского идеала $\mathscr{I}_1$.* □

Следствие 7.14. *Если $\mathscr{J}$ является борелевским P-идеалом, то любой борелевский идеал $\mathscr{I}$, удовлетворяющий $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{J}}$, относится к тому же семейству.*

Доказательство. Достаточно проверить условие (vi) из теоремы 7.12, и тогда заключение следствия вполне очевидно. □

Доказательство (теорема 7.12). Схема доказательства состоит в том, что устанавливается эквивалентность (i) $\Longleftrightarrow$ (ii), циклическая импликация (iii) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (iii), импликация (i) $\Longrightarrow$ (iii), и довольно сложная импликация (iv) $\Longrightarrow$ (i) в § 7.4. Этим будет доказана эквивалентность пяти первых условий. Условие (vi) присоединяется к этой эквивалентности в конце главы, после доказательства нескольких трудных результатов.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Если $\varphi(\{n\}) > 0$ для всех n, то искомую метрику на $\mathscr{I} = \mathbf{Exh}_\varphi$ можно определить как $d_\varphi(x, y) = \varphi(x \,\Delta\, y)$.

Тогда любое множество $U \subseteq \mathscr{I}$ открытое в смысле стандартной польской топологии T, наследственной из $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, является d_φ-открытым, и наоборот каждое d_φ-открытое множество является T-борелевским. В общем случае получим искомую метрику, соединяя метрики d_φ на области $\mathscr{P}(\{n : \varphi(\{n\}) > 0\})$ и стандартную польскую метрику $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ на дополнении этой области.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Пусть τ — топология польской группы на $\mathscr{I}$, порожденная Δ-инвариантной метрикой d. Тогда $\varphi(x) = \sup_{y \in \mathscr{I},\, y \subseteq x} d(\emptyset, x)$ — искомая l.s.c. субмера, удовлетворяющая условию $\mathscr{I} = \mathrm{Exh}_\varphi$. Доказательство этого факта оставим читателю в качестве **упражнения**, в котором ключевой факт состоит в том, что при любом $x \in \mathscr{I}$ последовательность $\{x \cap [0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ d-сходится к x благодаря последнему утверждению леммы 7.9. Отсюда следует l.s.c. свойство φ (поскольку супремум в указанной формуле для φ может быть ограничен конечными множествами y), так и равенство $\mathscr{I} = \mathrm{Exh}_\varphi$, в котором доказательство обратного включения $\supseteq$ использует тот же аргумент с тождественным отображением, что и в доказательстве леммы 7.9.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) Если $x_1, x_2, x_3, \ldots \in \mathscr{I} = \mathrm{Exh}_\varphi$, то определим возрастающую последовательность чисел $n_i \in x_i$, удовлетворяющих неравенствам $\varphi(x_i \cap [n_i, \infty)) \le 2^{-n}$, и положим $x = \bigcup_i (x_i \cap [n_i, \infty))$. Легко видеть, что все разности $x \smallsetminus x_i$ конечны.

(iii) $\Longrightarrow$ (v) Требуется доказать, что никакой идеал $\mathscr{I}$, удовлетворяющий условию $\mathscr{I}_1 \le_{\mathrm{RB}} \mathscr{I}$, не может быть P-идеалом. Предполагая, что $\mathscr{I}$ — идеал на $\mathbb{N}$, рассмотрим какое-нибудь семейство $\{w_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ непустых попарно дизъюнктных конечных множеств $w_{ij} \subseteq \mathbb{N}$ такое, что $\bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} w_{ij} = \mathbb{N}$ и эквивалентность $x \in \mathscr{I}_1 \Longleftrightarrow w_x = \bigcup_{\langle i,j \rangle \in x} w_{ij} \in \mathscr{I}$ выполнена для всех $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Рассмотрим какую-нибудь возрастающую последовательность множеств $x_n \in \mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, нарушающую P-свойство для $\mathscr{I}_1$, например, $x_n = \{\langle i, j \rangle : i \le n\}$, и последовательность соответствующих множеств $y_n = w_{x_n} \subseteq \mathbb{N}$. Тогда $y_n \in \mathscr{I}$ и, если $\mathscr{I}$ является P-идеалом, то найдется множество $y \in \mathscr{I}$ для которого все разности $y_n \smallsetminus y$ конечные. Заключаем, что $x = \{\langle i,j\rangle : w_{ij} \subseteq y\}$ принадлежит идеалу $\mathscr{I}_1$, причем каждая разность $x_n \setminus x = \{\langle i,j\rangle \in x_n : w_{i,j} \cap (y_n \setminus y) \neq \emptyset\}$ конечная.

(v) $\Longrightarrow$ (iv) Рассмотрим последовательность $\mathscr{I}$-малых множеств $X_n \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$, поэтому для подходящих $A_n \in \mathscr{I}$ множества $X_n \cap \mathscr{P}(A_n)$ — тощие в $\mathscr{P}(A_n)$, но объединение $X = \bigcup_n X_n$ не является $\mathscr{I}$-малым. Докажем $\mathscr{I}_1 \leq_{\text{RB}} \mathscr{I}$. Рассуждая как в доказательстве теоремы 2.9 и используя гипотезу о «тощести», строим для всякого n последовательность попарно дизъюнктных (т.е. $w_k^n \cap w_l^n = \emptyset$ при $k \neq l$) непустых конечных множеств $w_k^n \subseteq A_n$, $k \in \mathbb{N}$ и таких их подмножеств $u_k^n \subseteq w_k^n$, что

(a) если $x \subseteq \mathbb{N}$ и $x \cap w_k^n = u_k^n$ для бесконечно многих n, то $x \notin X_n$.

Выбросив некоторые из множеств w_k^n в ходе очевидной рекурсивной процедуры, и переименовав оставшиеся, мы получим $w_k^n \cap w_l^m = \emptyset$, кроме случая $n = m$ и $k = l$.

Полагаем $w_{ij}^n = w_{2^i(2j+1)-1}^n$. Множества $\overline{w}_{ij} = \bigcup_{n \leq i} w_{ij}^n$ все еще попарно дизъюнктны и удовлетворяют двум условиям:

(b) $\bigcup_j \overline{w}_{ij} \subseteq A_0 \cup \ldots \cup A_i$, следовательно $\bigcup_j \overline{w}_{ij} \in \mathscr{I}$ для каждого i;

(c) если множество $z \in \mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ не принадлежит $\mathscr{I}_1$, то при любом n имеем $w_k^n \subseteq \overline{w}_z$, где $\overline{w}_z = \bigcup_{\langle i,j\rangle \in z} \overline{w}_{ij}$, для бесконечно многих индексов k (в сущности для всех $k = 2^i(2j+1) - 1$ таких, что $n \leq i$).

Отображение $\langle i,j\rangle \mapsto \overline{w}_{ij}$ доказывает $\mathscr{I}_1 \leq_{\text{RB}}^{+} \mathscr{I}$. (После этого уже нетрудно вывести $\mathscr{I}_1 \leq_{\text{RB}} \mathscr{I}$ (см. доказательство теоремы 2.9).)

В самом деле, если множество $z \in \mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ принадлежит $\mathscr{I}_1$, то из (b) следует $\overline{w}_z \in \mathscr{I}$. Допустим $z \notin \mathscr{I}_1$. Для доказательства $\overline{w}_z \notin \mathscr{I}$ достаточно проверить, что для любого n множество $X_n \cap \mathscr{P}(\overline{w}_z)$ — тощее в $\mathscr{P}(\overline{w}_z)$. (Действительно, в этом случае и $X = \bigcup_n X_n$ является тощим в $\mathscr{P}(\overline{w}_z)$ по теореме Бэра, и поэтому, если $\overline{w}_z \in \mathscr{I}$, то X является $\mathscr{I}$-малым; противоречие.) Заметим, что множество $K = \{k : w_k^n \subseteq \overline{w}_z\}$ бесконечное согласно (c), а на самом деле $\overline{w}_z \cap A_n = \bigcup_{k \in K} w_k^n$. Поэтому, если $x \subseteq \overline{w}_z$ удовлетворяет $x \cap w_k^n = u_k^n$ для бесконечно многих $k \in K$, то $x \notin X_n$ согласно (a). Теперь ясно, что множество $X_n \cap \mathscr{P}(\overline{w}_z)$ тощее в $\mathscr{P}(\overline{w}_z)$.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) Если последовательность множеств $z_n \in \mathscr{I}$ опровергает Р-свойство идеала $\mathscr{I}$, то объединение $\mathscr{I}$-малых множеств $\mathscr{P}(Z_n)$ не может быть $\mathscr{I}$-малым.

7.4. Наиболее сложная импликация

Вывод импликации (iv) $\Longrightarrow$ (i) в теореме 7.12 излагается без некоторых достаточно существенных деталей, которые оставлены читателю. Их можно найти в статье [71]. Начнем с нескольких определений. Множество $K \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ называется *наследственным*, если оно $\subseteq$-замкнуто, т. е. $y \subseteq x \in K$ влечет $y \in K$.

Определение 7.15. Для всякого идеала $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ обозначим через $C(\mathscr{I})$ семейство всех наследственных и компактных (в польской топологии $\mathscr{P}(\mathbb{N})$) множеств $K \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$, не являющихся $\mathscr{I}$-малыми. □

Упражнение 7.16. Докажите, что $C(\mathscr{I})$ — фильтр в семействе всех наследственных и компактых множеств $K \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ и

(i) если $K \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ наследственное и компактное, то $K \in C(\mathscr{I})$, если и только если для любого $A \in \mathscr{I}$ имеется натуральное число n такое, что $A \cap [n, \infty) \in K$;

(ii) если $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, то $x \in \mathscr{I}$, если и только если для всякого $K \in C(\mathscr{I})$ существует n такое, что $x \cap [n, \infty) \in K$. □

Определение 7.17. Положим $X + Y = \{x \cup y : x \in X \wedge y \in Y\}$ для любых множеств $X, Y \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$. □

Лемма 7.18. *Если борелевский идеал $\mathscr{I}$ удовлетворяет условию* (iv) *теоремы 7.12, то существует последовательность множеств $K_m \in C(\mathscr{I})$ такая, что для любого $K \in C(\mathscr{I})$ найдутся индексы m, n, для которых выполняется $K_m + K_n \subseteq K$.*

Доказательство. По теореме Б.1 найдется непрерывная функция $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} \mathscr{I}$. Напомним, что $\mathbb{N}^{<\omega}$ — множество всех конечных последовательностей натуральных чисел. Для $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ определим множество

$$N_s = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset a\} \text{ — базисная окрестность в топологии } \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

и $B_s = f[N_s]$. Рассмотрим множество T всех $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ таких, что B_s **не** является $\mathscr{I}$-малым множеством. Например, пустая последовательность Λ принадлежит T, поскольку $B_\Lambda = \mathscr{I}$ не может быть $\mathscr{I}$-малым. Из предположения (iv) теоремы 7.12 нетрудно вывести, что дерево T не имеет концевых вершин и изолированных ветвей, так что

$$P = \{a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \forall n\, (a \restriction n \in T)\}$$

— совершенное множество в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Кроме того, если $s \in T$, то множество $F_s = f[P \cap N_s]$ является $\mathscr{I}$-большим, т. е. не $\mathscr{I}$-малым, поскольку разность $B_s \smallsetminus F_s$ — счетное объединение $\mathscr{I}$-малых множеств.

Рассмотрим произвольное множество $K \in C(\mathscr{I})$. По определению, если $x, y \in \mathscr{I}$, то $z = x \cup y \in \mathscr{I}$, так что $K \restriction z$ не является тощим в $\mathscr{P}(z)$. Раз множество K, а тогда и $K \restriction z$ компактны, то множество $K \restriction z$ включает некоторую базисную окрестность топологии $\mathscr{P}(z)$ (которая, напомним, соответствует польской топологии произведения 2^z) по теореме Бэра. А поскольку K еще и наследственное, то имеется номер n, для которого $z \cap [n, \infty) \in K$. Отсюда $P^2 = \bigcup_n Q_n$, где каждое множество

$$Q_n = \{\langle a, b\rangle \in P^2 : (f(a) \cup f(b)) \cap [n, \infty) \in K\}$$

замкнутое в P, поскольку K компактное, а f непрерывная. Снова по крайней мере одно из множеств Q_n целиком включает одну из базисных окрестностей, так что можно подобрать s, $t \in T$ такие, что $P^2 \cap (N_s \times N_t) \subseteq Q_n$, или, другими словами, $(F_s + F_t) \restriction [n, \infty) \subseteq K$. Отсюда следует $(\widehat{F_s} + \widehat{F_t}) \restriction [n, \infty) \subseteq K$, где $\widehat{F}$ — топологическое замыкание наследственной оболочки $\{x : \exists y \in F\ (x \subseteq y)\}$ множества $F \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Таким образом, в качестве множеств $\{K_m\}$ можно взять все множества вида $K_{sn} = \widehat{F_s} \restriction n$, расположенные любым образом в виде бесконечной последовательности. □ (лемма)

Используя то обстоятельство, что $C(\mathscr{I})$ — фильтр (упражнение 7.16), можно преобразовать последовательность множеств K_m так, чтобы в дополнение к условиям из леммы 7.18 преобразованная последовательность была $\subseteq$-убывающей и удовлетворяла $K_{n+1} + K_{n+1} \subseteq K_n$ для всех n. Тогда получим:

(1) для любого множества $K \in C(\mathscr{I})$ существует n такое, что $K_n \subseteq K$.

Наконец, выбросив, например, все нечетные члены последовательности множеств K_n и перенумеровав оставшиеся, усилим условие $K_{n+1} + K_{n+1} \subseteq K_n$ (где $+$ обозначает множество соответствующих объединений, см. определение 7.17) до условия

(2) $(K_{n+1} + K_{n+1} + K_{n+1}) \subseteq K_n$ для любого n.

Последовательность множеств $K_n \in C(\mathscr{I})$, удовлетворяющая (1) и (2), является отправной точкой построения l.s.c. субмеры φ такой, что $\mathscr{I} = \mathtt{Exh}_\varphi$. Предполагая дополнительно, что $K_0 = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, для каждого множества $x \in \mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{N})$ положим

$$\varphi_1(x) = \mathtt{inf}\,\{\, 2^{-n} : x \in K_n \,\}, \quad \text{и}$$

$$\varphi_2(x) = \mathtt{inf}\,\Big\{\, \textstyle\sum_{i=1}^m \varphi_1(x_i) : m \geq 1 \wedge x_i \in \mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{N}) \wedge \wedge\, x \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^m x_i \Big\}.$$

Затем определим $\varphi(x) = \mathtt{sup}_n\, \varphi_2(x \cap [0, n))$ для каждого $x \subseteq \mathbb{N}$.

Упражнение 7.19 (Солецкий [71]). Докажите, что так определенная функция φ является субмерой и выполняется $\mathscr{I} = \mathtt{Exh}_\varphi$. Для проверки того, что любое множество $x \in \mathtt{Exh}_\varphi$ принадлежит идеалу $\mathscr{I}$, можно воспользоваться результатом упражнения 7.16(ii). □

□ (теорема 7.12 без пункта (vi))

В следствии 7.28 ниже условие (vi) будет добавлено к эквивалентности в теореме 7.12.

7.5. Отношение E_1 : несчетность

Напомним, что гипергладкие отношения эквивалентности — это объединения счетных $\subseteq$-возрастающих последовательностей гладких отношений. Лемма 6.31 показывает, что отношение E_1 — универсальное в этом классе. В этом параграфе рассмотрим пространство $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ — всех бесконечных последовательностей элементов $2^{\mathbb{N}}$ и определим E_1 как отношение эквивалентности на этом пространстве так: $x \mathrel{\mathsf{E}_1} y$, если $x(n) = y(n)$ для всех кроме конечного числа значений n.

Следующая теорема дана в [57] со ссылкой на более ранние работы. Ниже приводится намного более сильный результат о том, что E_1 не сводится к польским действиям, теорема 7.26, но с более сложным доказательством.

Теорема 7.20. *Отношение* E_1 *не является неявно счетным, т. е. нет такого счетного* (с не более чем счетными классами эквивалентности) *борелевского отношения эквивалентности* F, *для которого* $\mathsf{E}_1 \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, *т. е.* $\mathsf{E}_0 <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$ *или, другими словами,* $\mathsf{Fin} <_{\mathrm{B}} \mathscr{I}_1$.

Итак, E_1 является гипергладким, но не является неявно счетным (тем более не является счетным) отношением эквивалентности. Напомним, что гипергладкость вместе со счетностью характеризуют класс гиперконечных отношений эквивалентности по теореме 6.3.

Доказательство. Допустим, что F — борелевское счетное отношение эквивалентности на польском пространстве $\mathbb{X}$, а $\vartheta : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to \mathbb{X}$ — борелевское отображение, удовлетворяющее условию $x \mathrel{\mathsf{E}_1} y \Longrightarrow \vartheta(x) \mathrel{\mathsf{F}} \vartheta(y)$ $(x, y \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}})$. Функция ϑ непрерывна на некотором плотном $\mathbf{G}_\delta$-множестве $D \subseteq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$.

Дальше используется метод вынуждения Коэна, см. раздел Д дополнения. Фиксируем некоторую счетную транзитивную модель $\mathfrak{M}$ теории $\mathbf{ZFC}^-$, содержащую коды пространства $\mathbb{X}$, плотного $\mathbf{G}_\delta$-множества $D \subseteq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, и функции $\vartheta \restriction D$ — в смысле определения Д.2. Мы хотим определить для каждого $k \in \mathbb{N}$ пару точек $a_k \neq b_k \in 2^{\mathbb{N}}$, натуральное число $\ell(k)$ и конечную последовательность $\tau_k \in (2^{\mathbb{N}})^{\ell(k)}$ так, что

(1) точки $x = \langle a_0\rangle^\wedge\tau_0{}^\wedge\langle a_1\rangle^\wedge\tau_1{}^\wedge\ldots$ и $y = \langle b_0\rangle^\wedge\tau_0{}^\wedge\langle b_1\rangle^\wedge\tau_1{}^\wedge\ldots$ пространства $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ являются генерическими[2] по Коэну над $\mathfrak{M}$;

[2] Таким образом, x получается как бесконечная последовательность, начинающаяся с члена a_0, за которым следуют все члены (их конечное число) последовательности τ_0 с их порядком в τ_0, затем член a_1, и т.д..

(2) для каждого k конечная последовательность

$$\zeta_k = \langle a_0, b_0\rangle^\wedge\tau_0{}^\wedge\langle a_1, b_1\rangle^\wedge\tau_1{}^\wedge\ldots{}^\wedge\langle a_k, b_k\rangle^\wedge\tau_k$$

из элементов $2^{\mathbb{N}}$ является генерической над $\mathfrak{M}$ точкой пространства $(2^{\mathbb{N}})^m$ для соответствующего конечного m. Следовательно, «генерическими» являются и ее подпоследовательности $\xi_k = \langle a_0\rangle^\wedge\tau_0{}^\wedge\ldots{}^\wedge\langle a_k\rangle^\wedge\tau_k$ и $\eta_k = \langle b_0\rangle^\wedge\tau_0{}^\wedge\ldots$ $\ldots{}^\wedge\langle b_k\rangle^\wedge\tau_k$;

(3) для любого k и любого $z \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ такого, что $\zeta_k{}^\wedge z$ — генерическая над $\mathfrak{M}$ точка из $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, выполняется $\vartheta(\xi_k{}^\wedge z) = \vartheta(\eta_k{}^\wedge z)$.

Допустим, что такое построение выполнено. Для любого k пусть точка $z_k \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ — генерическая по Коэну над $\mathfrak{M}[\zeta_k]$. Пару $\langle\zeta_k, z_k\rangle$ отождествим с конкатенацией $\zeta_k{}^\wedge z_k$, а потому последняя становится точкой в $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, генерической по Коэну над $\mathfrak{M}[\zeta_k]$ по теореме Д.7. Согласно (3) имеем $\vartheta(x_k) = \vartheta(y_k)$, где $x_k = \xi_k{}^\wedge z_k$ и $y_k = \eta_k{}^\wedge z_k$. Однако последовательности $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходятся соответственно к точкам x и y в $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, а с другой стороны, все x_k, x, y_k, y принадлежат множеству D, поскольку являются генерическими. Отсюда $\vartheta(x) = \vartheta(y)$, так как ϑ непрерывна на D. Однако очевидно $\neg\ (x\ \mathsf{E}_1\ y)$, так что ϑ не является редукцией, что и требовалось.

Перейдем к индуктивному построению a_k, b_k, τ_k.

Для определения a_0, b_0, τ_0 доказывается

Лемма 7.21. *Существуют совершенное множество $P \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ и точка $z \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ такие, что для любых двух $a \neq b$ из P пара $\langle a, b\rangle$ является генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$ в пространстве $(2^{\mathbb{N}})^2$, а точка z — генерической по Коэну над $\mathfrak{M}[a, b]$.*

Доказательство. В основе этого результата лежит следующий факт. Если A — счетное множество и множества $B, C \subseteq A$ бесконечные, но их пересечение $B \cap C$ конечно, а точка $x \in 2^A$ — генерическая над $\mathfrak{M}$, то пара $\langle x \restriction B, x \restriction C\rangle$ — также генерическая по Коэну над $\mathfrak{M}$ в пространстве $2^B \times 2^C$, а потому по теореме Д.7 точка $x \restriction B$ является генерической над $\mathfrak{M}$ и точка $x \restriction C$ — генерической над $\mathfrak{M}[x]$. (Проверку оставим читателю в качестве **упражнения**.)

Теперь для доказательства леммы возьмем генерическую по Коэну над $\mathfrak{M}$ точку $\langle w, z\rangle$ пространства $2^{2^{<\omega}} \times (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ и определим $P = \{w_a : a \in 2^{\mathbb{N}}\}$, где $w_a \in 2^{\mathbb{N}}$ задается равенством $w_a(k) = w(a \restriction k)$ для всех k. □ (Лемма)

Фиксируем P и z такие, как указано в лемме. Тогда все точки вида $\langle a\rangle^\wedge z$, $a \in P$, — также генерические по Коэну над $\mathfrak{M}$ по теореме Д.7, в частности, они принадлежат D. Но все они, очевидно, E_1-эквивалентны друг другу, а потому все значения $\vartheta(a^\wedge z)$, $a \in P$, принадлежат одному и тому же F-классу. Последний представляет собой не более чем счетное множество по выбору F. Поэтому имеется пара точек $a \neq b \in P$ таких, что $\vartheta(\langle a\rangle^\wedge z) = \vartheta(\langle b\rangle^\wedge z)$. Это равенство можно понимать как свойство генерической точки $\langle a, b\rangle^\wedge z$, формулируемое при помощи единственного параметра — любого кода функции $\vartheta \restriction D$, который по построению можно выбрать в $\mathfrak{M}$. Значит, по теореме Д.6, это свойство вынуждается, откуда следует, что найдется число ℓ такое, что равенство $\vartheta(\langle a\rangle^\wedge \hat{z}) = \vartheta(\langle b\rangle^\wedge \hat{z})$ выполнено всякий раз, когда $\hat{z} \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, $\langle a, b\rangle^\wedge \hat{z}$ является точкой генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$, и $\hat{z} \restriction \ell = z \restriction \ell$. Остается положить $a_0 = a$, $b_0 = b$, $\tau_0 = z \restriction \ell$.

Теперь укажем, как определяются a_1, b_1, τ_1 — отсюда будет ясно, как выполняется индуктивный шаг. По тем же соображениям, что и для шага 0, найдутся точки $a' \neq b' \in 2^{\mathbb{N}}$ и $z' \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ такие, что точка $\langle a', b'\rangle^\wedge z'$ является генерической по Коэну над моделью $\mathfrak{M}[a_0, b_0, z]$, и, кроме того, $\vartheta(\langle a_0\rangle^\wedge \tau_0{}^\wedge \langle a'\rangle^\wedge z') = \vartheta(\langle a_0\rangle^\wedge \tau_0{}^\wedge \langle b'\rangle^\wedge z')$. Однако согласно выбору ℓ (берем $\hat{z} = \tau_0{}^\wedge \langle b'\rangle^\wedge z'$) выполнено $\vartheta(\langle a_0\rangle^\wedge \tau_0{}^\wedge \langle b'\rangle^\wedge z') = \vartheta(\langle b_0\rangle^\wedge \tau_0{}^\wedge \langle b'\rangle^\wedge z')$, так что $\vartheta(\langle a_0\rangle^\wedge \tau_0{}^\wedge \langle a'\rangle^\wedge z') = \vartheta(\langle b_0\rangle^\wedge \tau_0{}^\wedge \langle b'\rangle^\wedge z')$.

Общая же конкатенация $\langle a_0, b_0\rangle^\wedge \tau_0{}^\wedge \langle a', b'\rangle^\wedge z'$ является точкой $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$, по теореме Д.7. Поэтому, как и для шага 0, найдется число ℓ' такое, что равенство $\vartheta(\langle a_0\rangle^\wedge \tau_0{}^\wedge \langle a'\rangle^\wedge \hat{z}) = \vartheta(\langle b_0\rangle^\wedge \tau_0{}^\wedge \langle b'\rangle^\wedge \hat{z})$ выполнено всякий раз, когда $\hat{z} \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, $\langle a_0, b_0\rangle^\wedge \tau_0{}^\wedge \langle a', b'\rangle^\wedge \hat{z}$ — точка, генерическая по Коэну над $\mathfrak{M}$, и $\hat{z} \restriction \ell' = z' \restriction \ell'$. Остается положить $a_1 = a'$, $b_1 = b'$, $\tau_1 = z' \restriction \ell'$.

Для доказательства второго утверждения теоремы заметим, что соотношение $\mathsf{E}_0 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$ доказывается редукцией $\vartheta(a) = x_a$, где $x_a \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию $x_a(0) = a$ и $x_a(k)(n) = 0$ для всех $k \ge 1$ и всех n.

□ (Теорема 7.20)

7.6. Неполизируемая область

Вернемся к той задаче, которая была намечена сразу после формулировки теоремы 7.12. Поскольку соотношение $\mathscr{I} \le_{\mathrm{RB}} \mathscr{J}$ влечет $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{J}}$ (см. упражнение 2.5), требуется вывести, что отношение $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ не индуцируется польским действием при условии, что $\mathscr{I}$ — борелевский идеал, удовлетворяющий $\mathsf{E}_1 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$. В теореме 7.26) доказывается, что это утверждение справедливо для всех борелевских отношений эквивалентности E, не обязательно вида $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$. Придется начать с одной вспомогательной теоремы об отношениях эквивалентности, к которым сводится E_1.

Следующая теорема Кехриса и Луво [57] показывает, что борелевская сводимость отношения E_1 к другому отношению эквивалентности может быть приведена к определенным специальным формам непрерывного вложения и инвариантного вложения. См. определения в конце § 1.4.

Теорема 7.22. *Предположим, что* $\mathsf{E}_1 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, *где* F — *борелевское отношение эквивалентности на польском пространстве* $\mathbb{Y}$. *Тогда выполняется* $\mathsf{E}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{C}} \mathsf{F}$ *и* $\mathsf{E}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{B}}^{\mathrm{i}} \mathsf{F}$.

В ходе доказательства теоремы также покажем, что F не может быть счетным отношением эквивалентности, т. е. дадим альтернативное доказательство теоремы 7.20. Оно выглядит более простым, чем первое, но опирается на предложение 7.24, принимаемое здесь без доказательства.

Доказательство. Для вывода первого утверждения, обозначим $\preccurlyeq$ обратный порядок натуральных чисел, т. е. $m \preccurlyeq n$ равносильно $n \le m$.

Определение 7.23. Пусть $\mathfrak{P}$ — семейство всех множеств $P \subseteq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, для которых найдется непрерывная биекция $h : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} P$, удовлетворяющая

$$x \restriction_{\preccurlyeq n} = y \restriction_{\preccurlyeq n} \iff h(x) \restriction_{\preccurlyeq n} = h(y) \restriction_{\preccurlyeq n} \qquad (*)$$

для всех n и всех $x, y \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, где $x \restriction_{\preccurlyeq n} = \{x(i)\}_{i \preccurlyeq n}$ для любой точки $x = \{x_i\} \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. Понятно, что любое такое отображение является непрерывным вложением E_1 в себя в смысле § 1.4.[3] □

Следующий результат [46, следствие 22] (доказательство здесь не приводится) показывает, что борелевские функции, определенные на множествах из $\mathfrak{P}$, допускают определенную *конфинальную классификацию.*

Предложение 7.24. *Если* $\mathbb{Y}$ *— польское пространство,* $P' \in \mathfrak{P}$, *а* $\vartheta : P' \to \mathbb{Y}$ *является борелевской функцией, то существует множество* $P \in \mathfrak{P}$, $P \subseteq P'$, *на котором* ϑ *непрерывна и либо является константой, либо найдется* n *такое, что* ϑ *взаимно однозначна на* $P \restriction_{\preccurlyeq n}$ *в смысле:*

$$x \restriction_{\preccurlyeq n} = y \restriction_{\preccurlyeq n} \iff \vartheta(x) = \vartheta(y) \quad \textit{для всех } x, y \in P. \qquad (\dagger)$$

Применим результат 7.24 при $P' = (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ к тому борелевскому отображению $\vartheta : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Y}$, которое сводит отношение E_1 к F. Находим множество $P \in \mathfrak{P}$, удовлетворяющее (†). Пусть непрерывная биекция $h : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} P$ выполняет (∗). Легко видеть, что h — непрерывное и инвариантное вложение отношения эквивалентности E_1 в ограниченное отношение $\mathsf{E}_1 \restriction P$, что́ позволяет выводить свойства последнего из свойств первого.

В частности, раз $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ содержит попарно E_1-неэквивалентные точки, такие точки имеет и P. Поэтому ϑ не может быть константой на P. Следовательно, условие (†) выполнено для некоторого n. Другими словами, имеется непрерывная взаимно однозначная функция $f : P \restriction_{\preccurlyeq n} \to \mathbb{Y}$, где $P \restriction_{\preccurlyeq n} = \{x \restriction_{\preccurlyeq n} : x \in P\}$, такая, что $\vartheta(x) = f(x \restriction_{\preccurlyeq n})$ для всех $x \in P$.

[3] Класс множеств, к которому принадлежит $\mathfrak{P}$, был введен в [46] для построения генерических расширений с определенной структурой степеней конструктивности, зависящей от выбора некоторого частично-упорядоченного множества ζ. Рассмотренный здесь случай соответствует выбору $\mathbb{N}$ с обратным порядком $\preccurlyeq$ в качестве ζ.

Однако каждый класс E_1-эквивалентности $[x]_{\mathsf{E}_1} \cap P$ точки $x \in P$ в P несчетен вследствие аналогичного очевидного свойства $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. Значит, для любого $x \in P$ F-класс $[\vartheta(x)]_{\mathsf{F}}$ несчетен, так что F не может быть счетным отношением эквивалентности.

Для вывода $\mathsf{E}_1 \sqsubseteq_{\mathsf{C}} \mathsf{F}$ пусть $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. Определим $g(x) = z \in \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ так, что $z(i) = \emptyset$ при $i < n$ и $z(n+i) = x(i)$ для всех i. Нетрудно проверить, что отображение $\vartheta'(x) = f(h(g(x)) \restriction_{\preccurlyeq n})$ является непрерывным вложением отношения E_1 в F.

Остается доказать $\mathsf{E}_1 \sqsubseteq^{\mathsf{i}}_{\mathsf{B}} \mathsf{F}$. Предположим для простоты, что $\mathbb{Y} = 2^{\mathbb{N}}$ (по теореме Б.1) и что (по доказанному) $\vartheta : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ уже является непрерывным вложением E_1 в F. Положим $Y = \operatorname{ran}\vartheta$ и $Z = [Y]_{\mathsf{F}}$. Обычно так определенные множества Y, Z являются аналитическими (не обязательно борелевскими). Однако в рассматриваемом случае множество Z является проекцией борелевского множества $P = \{\langle z, x\rangle : z \,\mathsf{F}\, \vartheta(x)\}$ в $2^{\mathbb{N}} \times (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, все сечения которого являются классами E_1-эквивалентности, т.е. σ-компактными множествами. В этом случае Z является борелевским множеством по следствию Г.4, более того, по теореме Г.6 найдется борелевская функция $f : Z \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ такая, что $f(z)\,\mathsf{E}_1\, x$ всякий раз, когда $z\,\mathsf{F}\,\vartheta(x)$; другими словами, f является редукцией отношения F к E_1.

Можно преобразовать f во взаимно однозначную функцию $g : Z \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ с теми же свойствами, полагая $g(z)(n) = f(z)(n)$ при $n \geq 1$, но $g(z)(0) = z$. Понятно, что g является (борелевским) *вложением* F в E_1. Итак, $f : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to Z$ и $g : Z \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ являются борелевскими взаимно однозначными отображениями (ϑ даже непрерывно, что, однако, здесь не важно), и для любой точки $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, вложение ϑ отображает $[x]_{\mathsf{E}_1}$ в $[\vartheta(x)]_{\mathsf{F}} \subseteq Z$ и g отображает $[\vartheta(x)]_{\mathsf{F}}$ обратно в $[x]_{\mathsf{E}_1}$.

Упражнение 7.25. Используя конструкцию из доказательства теоремы Кантора–Бендиксона о сравнении мощностей, постройте, начиная с f и g, отображение, осуществляющее изоморфизм отношений E_1 и $\mathsf{F} \restriction Z$. Докажите, что этот изоморфизм является борелевским, поскольку все возникающие в ходе указанной конструкции множества являются борелевскими, как образы борелевских множеств при взаимно однозначных борелевских отображениях по следствию Г.4). □

Другими словами, имеется борелевское вложение E_1 в F, образ которого совпадает с Z, т. е. инвариантное вложение.

□ (теорема)

7.7. Несводимость к польским действиям

Следующая теорема Кехриса и Луво [57] показывает, что E_1 борелевски не сводится ни к одному отношению эквивалентности, индуцированному борелевским действием польской группы.

Теорема 7.26. *Допустим, что* $\mathbb{G}$ — *польская группа, и* $\mathbb{X}$ — *борелевское* $\mathbb{G}$*-пространство. Тогда* $\mathsf{E}_1 \not\leq_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$.

Доказательство. Опять рассматриваем E_1 как отношение эквивалентности на $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, определенное так, что $x \mathrel{\mathsf{E}_1} y$, когда $x(n) = y(n)$ для всех, кроме конечного числа, значений n. Предположим противное и рассмотрим произвольную борелевскую редукцию $\vartheta : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to \mathbb{X}$ отношения E_1 к E. Согласно теореме 7.22 можно предположить, что ϑ на самом деле является инвариантным вложением, т. е. взаимно однозначным отображением, у которого образ $Y = \operatorname{ran}\vartheta$ является E-инвариантным множеством. Положим $g \cdot x = = \vartheta^{-1}(g \cdot \vartheta(x))$ для любой пары из $g \in \mathbb{G}$ и $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. Этим определено борелевское действие группы $\mathbb{G}$ на $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ такое, что индуцированное отношение $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}}$ тождественно E_1. Заметим, что именно здесь используется предположение о том, что ϑ — инвариантное вложение. Дальнейший ход доказательства основан на том, что E_1-классы представляют собой счетные объединения компактных множеств, каждое из которых нигде не плотное в следующем слагаемом объединения, что́ противоречит выбору $\mathbb{G}$ как польской группы.

Фиксируем для дальнейшего анализа точку $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$.

Рассмотрим любую E_1-эквивалентную ей точку $y \in [x]_{\mathsf{E}_1}$. Тогда выполняется $[x]_{\mathsf{E}_1} = \bigcup_n C_n(y)$, где каждое из множеств

$$C_n(y) = \{y' \in \mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}} : \forall m \geq n\ (y(n) = y'(n))\}$$

является борелевским (даже компактным) подмножеством E_1-класса $[x]_{\mathsf{E}_1}$. Отсюда получим равенство $\mathbb{G} = \bigcup_n G_n(y)$, где каждое множество $G_n^x(y) = \{g \in \mathbb{G} : g(x) \in C_n(y)\}$ — снова борелевское. Раз $\mathbb{G}$ — польская группа, то по теореме Бэра найдется индекс n такой, что множество $G_n^x(y)$ **не** является тощим в $\mathbb{G}$. Тогда, конечно, это будет верно и для всех $n' \geq n$. Наименьший из таких индексов n обозначим $n(y)$.

Утверждается, что для любого n множество

$$Y_n(x) = \{y \restriction [n, \infty) : y \in [x]_{\mathsf{E}_1} \wedge n(y) = n\}$$

не более чем счетно. В самом деле, пусть какое-то из множеств $Y_n(x)$ несчетно. Если ограничения $y_i \restriction [n, \infty)$ каких-нибудь двух точек y_1 и y_2 в $[x]_{\mathsf{E}_1}$ не совпадают, то множества $C_n(y_1)$ и $C_n(y_2)$ не имеют общих точек, так что и множества $G_n^x(y_1)$, $G_n^x(y_2)$ дизъюнктны. Таким образом, беря точки $y \in Y_n(x)$ с попарно различными значениями $y_i \restriction [n, \infty)$, получим несчетно много попарно непересекающихся не тощих борелевских множеств в $\mathbb{G}$, противоречие. Итак, каждое из множеств $Y_n(x)$ в самом деле не более чем счетно. Поэтому и множество $Y(x) = \bigcup_n \{\bar{u} : u \in \in Y_n(x)\}$ также не более чем счетно, где для каждого $u \in (2^{\mathbb{N}})^{[n,\infty)}$ точка $\bar{u} \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ задана условиями $\bar{u} \restriction [n, \infty) = u$ и $\bar{u}(k)(j) = 0$ для $k < n$ и любого $j \in \mathbb{N}$. При этом $Y(x) \subseteq [x]_{\mathsf{E}_1}$.

Отметим следующий важный момент: определение множества $Y_n(x)$ зависит скорее от класса эквивалентности $[x]_{\mathsf{E}_1}$, чем от самой точки x. Точнее, если $x' \in [x]_{\mathsf{E}_1}$, то $Y_n(x) = Y_n(x')$. Это имеет место по той простой причине, что множества

$$G_n^{x'}(y) = \{g \in \mathbb{G} : g(x') \in C_n(y)\} \quad \text{и}$$
$$G_n^x(y) = \{g \in \mathbb{G} : g(x) \in C_n(y)\}$$

являются сдвигами друг друга внутри группы $\mathbb{G}$, так что, если одно из них не является тощим, то таково же и второе. Заключаем, что множество $Y = \bigcup_{x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}} Y(x)$ обладает тем свойством, что пересечение $Y \cap [x]_{\mathsf{E}_1} = Y(x)$ непусто и не более чем счетно для каждого $x \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$.

Для оценки типа множества Y, заметим, что множество

$$P = \{\langle x, y\rangle : x, y \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \wedge y \in Y(x)\}$$

является борелевским в пространстве $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \times (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ по теореме В.3. (Квантор Воота «для почти всех в смысле категории Бэра» участвует в определении $n(y)$. Здесь, конечно, много работы по составлению конкретного определения $n(y)$, допускающего применение теоремы Воота, которую мы оставим читателю в качестве **упражнения.**)

Все вертикальные сечения $P_x = \{y : \langle x, y\rangle \in P\} = Y(x)$ — не более чем счетные множества по доказанному. Следовательно, во-первых, множество $\mathrm{dom}\, P = Y$ — также борелевское по теореме Г.3, а, во-вторых, по униформизационной теореме Г.6 имеется борелевская функция f, определенная на $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ и удовлетворяющая $f(x) \in Y(x)$ для каждой точки x. Отсюда по определению следует $\mathsf{E}_1 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1 \restriction Y$. С другой стороны, $\mathsf{E}_1 \restriction Y$ является счетным (борелевским) отношением эквивалентности: его классы $Y \cap [x]_{\mathsf{E}_1} = Y(x)$ не более чем счетны. Но это противоречит теореме 7.20. □

Следствие 7.27. *Отношение эквивалентности* E_1 *борелевски не сводится ни к одному из отношений* E_2, E_3, E_∞, Z_0, T_2, *и также не сводится ни к одному из отношений* ℓ^p, $1 \le p < \infty$.

Доказательство. По доказанной теореме достаточно показать, что все указанные отношения эквивалентности индуцируются польскими действиями. Отношения E_2, E_3, Z_0 порождаются идеалами $\mathscr{I}_2$, $\mathscr{I}_3$, $\mathscr{Z}_0$, которые относятся к P-идеалам (упражнение 7.5), а потому полизируемы по теореме 7.12. Следовательно, сами отношения E_2, E_3, Z_0 индуцируются польскими действиями по лемме 7.9. Действие сдвига счетной группы F_2, индуцирующее E_∞, является, очевидно, польским. Отношение T_2 $\sim_{\mathrm{B}}$-эквивалентно отношению эквивалентности, индуцированному польским действием, согласно предложению 3.18. Что касается отношений ℓ^p, см. упражнение 3.14. □

Следствие 7.28. *Если* $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ *полизируемый идеал, то* $\mathsf{E}_1 \not\le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$.

Доказательство. Напомним, что отношение $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ индуцируется непрерывным (по лемме 7.9) действием польской Δ-группы идеала $\mathscr{I}$ на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Затем используем теорему 7.26. □

Это следствие позволяет завершить доказательство теоремы 7.12, присоединив к уже установленной эквивалентности ее пяти первых условий последнее условие (vi): в сущности, достаточно заметить, что соотношение $\le_{\mathrm{RB}}$ влечет $\le_{\mathrm{B}}$ (см. упражнение 2.5), и воспользоваться уже доказанной частью теоремы 7.12.

8. ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ ПЕРЕСТАНОВОК

В этом разделе рассмотрим отношения эквивалентности, индуцированные действиями группы S_∞ всех перестановок натурального ряда $\mathbb{N}$, т.е. всех биекций $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}$ с суперпозицией в качестве групповой операции.

Легко проверить, что множество S_∞ является $\mathbf{G}_\delta$-множеством в пространстве $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. По метризационной теореме Александрова–Хаусдорфа $\mathbf{G}_\delta$-множества X в польских пространствах сами метризуются полной метрикой. Другими словами, на таком X задается полная метрика с той же топологией, что и индуцированная из пространства $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Поэтому S_∞ является польской группой. Полную метрику на S_∞, согласованную с индуцированной топологией, можно определить равенством $D(x, y) = d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1})$, где d — обычная метрика на $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, определенная через $d(x, y) = 2^{-m-1}$, где m — наименьшее число, для которого $x(m) \neq y(m)$. Однако S_∞ не имеет согласованных с индуцированной топологией и инвариантных слева или справа полных метрик, см. [17, 1.5].

Среди отношений эквивалентности, индуцированных действием группы S_∞, отметим отношения изоморфизма разных типов счетных структур. Здесь возникают связи и с другими важными вопросами. После доказательства теоремы Лопеса–Эскобара об инвариантных борелевских множествах определяется понятие отношения эквивалентности, классифицируемого счетными структурами — это значит, что данное отношение борелевски сводится к отношению изоморфизма на некотором классе счетных структур, которое в свою очередь индуцируется естественным действием группы S_∞. Затем устанавливается, что любое отношение изоморфизма сводится к изоморфизму ориентированных графов на $\mathbb{N}$. Отношения эквивалентности T_ξ, построенные по трансфинитной индукции в § 4.2, также классифицируются счетными структурами, причем в § 8.4 при помощи метода Скотта доказывается, что они образуют конфинальное семейство среди всех *борелевских* отношений эквивалентности, которые индуцируется естественным действием группы S_∞.

В этой главе желательно хотя бы минимальное знакомство читателя с основами теории моделей.

8.1. Борелевские инвариантные множества

Этот параграф посвящен техническим вопросам теории моделей в связи с инфинитарными языками. Рассмотрим счетный реляционный язык $\mathscr{L} = \{R_i\}_{i \in I}$ первого порядка. Это значит: I — непустое и не более чем счетное индексное множество, и каждое R_i — m_i-арный символ некоторого отношения.[1] Рассмотрим пространство[2] $\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}} = \prod_{i \in I} \mathscr{P}(\mathbb{N}^{m_i})$ всех *$\mathscr{L}$-структур* с областью $\mathbb{N}$. Точнее, каждая точка $x \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ является $\mathscr{L}$-структурой с универсумом $\mathbb{N}$ в том смысле, что любой член $x(i)$ последовательности x — это m_i-арное отношение на $\mathbb{N}$, которое выбрано в качестве интерпретации для символа R_i.

Логическое действие $j_{\mathscr{L}}$ группы S_∞ на $\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ определяется так: если $x \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ и $h \in S_\infty$, то $y = j_{\mathscr{L}}(h, x) = h \cdot x \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$, где члены y_i определены эквивалентностями

$$\langle k_1, \ldots, k_{m_i} \rangle \in x(i) \iff \langle h(k_1), \ldots, h(k_{m_i}) \rangle \in y(i)$$

для всех $i \in I$ и $\langle k_1, \ldots, k_{m_i} \rangle \in \mathbb{N}^{m_i}$. Легко видеть, что это действие — польское, и $\langle \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}\,;\, j_{\mathscr{L}} \rangle$ — польское S_∞-пространство, а $j_{\mathscr{L}}$-орбиты в $\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ — это в точности классы изоморфизма $\mathscr{L}$-

[1] Определение «реляционный» как раз и подчеркивает, что данный язык содержит только символы отношений, но не содержит символов функций.

[2] Обозначение $X_{\mathscr{L}}$ часто используется вместо обозначения $\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$. Для простоты, мы ограничиваемся реляционными языками, не содержащими функциональных символов. Это упрощение по существу не ограничивает общности, но с другой стороны хорошим упражнением для читателя будет понять, как изменятся основные определения, например, определение $\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$, если разрешить употреблять функциональные символы.

структур на $\mathbb{N}$. Поэтому индуцированное отношение эквивалентности $\mathsf{E}_{j_{\mathscr{L}}}^{\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}}$ обозначают $\cong_{\mathscr{L}}$ — оно является аналитическим (не обязательно борелевским) отношеним эквивалентности.

Если G — подгруппа в группе S_∞, то действие $j_{\mathscr{L}}$, ограниченное подгруппой G, является польским действием G на $\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$, и индуцированное им отношение эквивалентности обозначается через $\cong^G_{\mathscr{L}}$, т.е. $x \cong^G_{\mathscr{L}} y$, если $\exists g \in G\,(g \cdot x = y)$.

Как обычно, множество $M \subseteq \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ называется *инвариантным*, если $[M]_{\cong_{\mathscr{L}}} = M$. Известна удобная и часто применяемая характеризация *борелевских* инвариантных множеств в терминах языка $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$, который определяется как *инфинитарное* расширение исходного языка $\mathscr{L} = \{R_i\}_{i\in I}$, т.е. расширение за счет возможности образовывать счетные конъюнкции и дизъюнкции.[3] Точнее, язык $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ строится так.

1) Каждый символ отношения $R_i(v_1, \ldots, v_{m_i})$ — атомарная формула языка $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$. Все v_i — переменные с областью пробегания $\mathbb{N}$, и m_i обозначает «арность» R_i. Пропозициональные связки и кванторы $\exists$, $\forall$ употребляются как обычно;

2) если φ_i, $i \in \mathbb{N}$ — формулы языка $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$, у которых свободные переменные входят в некоторый общий конечный список $v_1, \ldots, v_n$, то $\bigvee_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i$ и $\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i$ также считаются формулами языка $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$.

Для любой $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-формулы $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$, если $x \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ и $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$, то запись $x \models \varphi(i_1, \ldots, i_n)$ означает, что формула $\varphi(i_1, \ldots, i_n)$ истинна (выполняется) на x в обычном смысле. Формальное определение отношения истинности требует здесь трансфинитной индукции по (счетному или конечному) ординалу, равному «глубине» построения формулы φ из элементарных формул, см., например, [52, 16.C]. Следующая теорема Лопеса–Эскобара [52, 16.8] использует инфинитарный язык и истинность формул для характеризации инвариантных борелевских множеств.

[3] Именно разрешение употреблять бесконечные конъюнкции и дизъюнкции характеризует инфинитарные языки.

Теорема 8.1. *Множество $M \subseteq \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ является борелевским и инвариантным, если и только если найдется замкнутая $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-формула φ, для которой $M = \{x \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}} : x \models \varphi\}$.*

Доказательство. Все множества вида $M{=}\{x \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}} : x{\models}\varphi\}$ являются инвариантными и борелевскими: доказательство этого факта проводится трансфинитной индукцией по построению φ из элементарных формул и оставляется читателю в качестве **упражнения**.

Для доказательства импликации в обратную сторону рассмотрим какое-то борелевское инвариантное множество $M{\subseteq}\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$. Обозначим через $\mathbb{N}^{<\omega}$ множество всех конечных последовательностей натуральных чисел. Если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ — инъективная последовательность, т.е. $s_i \neq s_j$ при $i \neq j$, то положим $B_s = \{g \in S_\infty : s \subset g\}$. Ясно, что множества B_s открыто-замкнутые в S_∞, т.е. в польской топологии S_∞, наследственной к топологии в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Если $A \subseteq S_\infty$, то запись $s \Vdash A(\mathbf{g})$ обозначает: «множество $B_s \cap A$ является ко-тощим в B_s», т.е. $g \in A$ выполняется для почти всех (в смысле категории) $g \in S_\infty$ таких, что $s \subset g$. Здесь $\mathbf{g}$ рассматривается как специальный символ, не связанный с какой-либо конкретной перестановкой g.

Доказательство включает следующие два утверждения:

(I) Равенство $M = \{x \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}} : \Lambda \Vdash \mathbf{g}^{-1}{\cdot}x \in M\}$ выполнено для любого инвариантного борелевского множества $M{\subseteq}\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$.

(II) Для любого борелевского множества $M \subseteq \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ и любого n имеется такая $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-формула $\varphi^n_M(v_0, \dots, v_{n-1})$, что для каждого $x \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ и каждой инъективной последовательности $s{=}\langle u_0, \dots, u_{n-1}\rangle$ из $\mathbb{N}^n$, соотношение $s \Vdash \mathbf{g}^{-1}{\cdot}x{\in}M$ эквивалентно $x \models \varphi^n_M(u_0, \dots, u_{n-1})$.

Заметим, что по определению соотношение $s \Vdash \mathbf{g}^{-1}{\cdot}x \in M$ означает, что выполнено $s \Vdash A(\mathbf{g})$, где $A{=}\{g \in S_\infty : g^{-1}{\cdot}x{\in}M\}$, и действие $h{\cdot}x = j_{\mathscr{L}}(h, x)$ определено выше для всех перестановок $h \in S_\infty$.

Искомый результат следует из (I), (II): просто возьмем $s = \Lambda$, т.е. пустую последовательность, в (II).

Утверждение (I) несложно: раз множество M инвариантно, то $g^{-1}{\cdot}x \in M$ для всех $x \in M$ и $g \in S_\infty$. С другой стороны, если $g^{-1}{\cdot}x \in M$ для хотя бы одного $g \in S_\infty$ то $x \in M$.

Доказательство утверждения (II) проводим индукцией по длине трансфинитного борелевского построения множества M при помощи операций дополнения и счетного пересечения. Предположим, для простоты, что $\mathscr{L}$ содержит всего один бинарный символ отношения $R_0 = R(\cdot,\cdot)$. В этом случае индексное множество $I = \{0\}$ содержит всего один индекс. Тогда пространство $\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ отождествляется с $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ и для любого $x \subseteq \mathbb{N}^2$ соотношение $x \models R(k,l)$ означает, что $\langle k,l\rangle \in x$. Начало индукции составляют множества вида $M = \{x \subseteq \mathbb{N}^2 : \langle k,l\rangle \notin x\}$, где $k,l \in \mathbb{N}$. Для каждого такого множества M берем формулу

$$\forall u_0 \dots \forall u_m \left(\bigwedge\nolimits_{i<j\le m}(u_i \ne u_j) \wedge \bigwedge\nolimits_{i<n}(u_i = v_i) \implies \neg R(u_k,u_l)\right),$$

где $m = \mathtt{max}\{l,k,n\}$, в роли $\varphi^n_M(v_0,\dots,v_{n-1})$. Далее, для индуктивного шага для операции дополнения берем формулу

$$\begin{aligned}&\bigwedge\nolimits_{k\ge n} \forall u_0 \dots \forall u_{k-1} \ \bigvee\nolimits_{m\ge k} \exists w_0 \dots \exists w_{m-1} \left(\bigwedge\nolimits_{i<j<k}(u_i \ne u_j) \wedge \right.\\ &\quad \wedge \bigwedge_{i<n}(u_i = v_i) \implies \bigwedge_{i<j<m}(w_i \ne w_j) \wedge \bigwedge_{i<k}(w_i = v_i) \wedge \\ &\quad \left. \wedge\, \varphi^m_M(w_0,\dots,w_{m-1})\right)\end{aligned}$$

в роли $\varphi^n_{\neg M}(v_0,\dots,v_{n-1})$. Наконец, для индуктивного шага для операции счетного объединения, если $M = \bigcap_j M_j$, то формулу $\bigwedge_j \varphi^n_{M_j}(v_0,\dots,v_{n-1})$ можно взять в качестве $\varphi^n_M(v_0,\dots,v_{n-1})$. Довольно сложное **упражнение**: убедиться в том, что эти формулы дают искомый результат. □

8.2. Классифицируемость счетными структурами

Классифицируемость отношения эквивалентности E счетными структурами означает, что каждой точке x некоторого борелевского множества $X = \mathtt{dom}\,\mathsf{E}$ в заданном польском пространстве $\mathbb{X}$ борелевским образом сопоставлена счетная структура, скажем, $\vartheta(x)$ так что $x \mathrel{\mathsf{E}} y$ эквивалентно тому, что структуры $\vartheta(x)$ и $\vartheta(y)$ изоморфны.

Определение 8.2. Отношение эквивалентности E *классифицируется счетными структурами*, если найдется счетный реляционный язык $\mathscr{L}$, для которого $\mathsf{E} \le_{\mathsf{B}} (\cong_{\mathscr{L}})$. □

Любое отношение эквивалентности, классифицируемое счетными структурами, является подобно отношениям изоморфизма $\cong_{\mathscr{L}}$ аналитическим, а часто даже и борелевским.

По определению отношения эквивалентности, классифицируемые счетными структурами, борелевски сводятся к отношениям вида $\cong_{\mathscr{L}}$, которые, напомним, индуцируются логическими действиями, т. е. некоторыми специальными польскими действиями группы S_∞. Следующая теорема Беккера и Кехриса [17] показывает, что наоборот: отношения, индуцированные польскими действиями группы S_∞ и даже действиями её замкнутых подгрупп, допускают классификацию счетными структурами.

Теорема 8.3. *Любое отношение эквивалентности* $\mathsf{E} = \mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{S_\infty}$, *индуцированное польским действием группы* S_∞ *или её замкнутой подгруппы на польском пространстве* $\mathbb{X}$, *классифицируемо счетными структурами.*

Доказательство (набросок). Сначала получим результат этот для действий самой группы S_∞, следуя упрощенному рассуждению Хъерта [37, 6.19]. Фиксируем счетную базу топологии $\{U_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ исходного пространства $\mathbb{X}$. В качестве $\mathscr{L}$ рассмотрим язык с символами R_{lk} отношений арности k, где $k, l \in \mathbb{N}$. Для каждой точки $x \in \mathbb{X}$ нетрудно определить $\vartheta(x) \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ таким образом, что $\vartheta(x) \models R_{lk}(s_0, \ldots, s_{k-1})$, если одновременно выполняется: $s_i \ne s_j$ для всех $i < j < k$ и $\forall g \in B_s\ (g^{-1}{\cdot}x \in U_l)$, где $B_s = \{g \in S_\infty : s \subset g\}$ и $s = \langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle \in \mathbb{N}^k$. Оставляем читателю в качестве **упражнения** проверку того, что ϑ есть борелевская редукция E к $\cong_{\mathscr{L}}$.

Чтобы закончить доказательство теоремы, остается использовать следующий факт (прямое следствие теоремы 2.3.5b в книге [17]):

Предложение 8.4. *Если* $\mathbb{G}$ *— замкнутая подгруппа польской группы* $\mathbb{H}$, *а* $\mathbb{X}$ *— польское* $\mathbb{G}$*-пространство, то существует польское* $\mathbb{H}$*-пространство* $\mathbb{Y}$ *такое, что* $\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}} \le_{\mathsf{B}} \mathsf{E}^{\mathbb{Y}}_{\mathbb{H}}$.

Доказательство (набросок, детали в [37, 7.18]). Пусть $Y = = \mathbb{X} \times \mathbb{H}$. Определим $\langle x, h\rangle \approx \langle x', h'\rangle$, если $x' = g{\cdot}x$ и $h' = gh$ для какого-то $g \in \mathbb{G}$. Рассмотрим факторпространство $\mathbb{Y} = Y/{\approx}$ с фактортопологией, индуцированной польской топологией на Y.

На этом факторпространстве $\mathbb{Y}$ определим действие группы $\mathbb{H}$ равенством $h'{\cdot}[\langle x, h\rangle]_{\approx} = [\langle x, hh'^{-1}\rangle]_{\approx}$. Легко проверить, что отображение $x \mapsto [\langle x, 1\rangle]_{\approx}$ сводит отношение $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ к $\mathsf{E}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{Y}}$. Остается убедиться, что $\mathbb{Y}$ является польским $\mathbb{H}$-пространством. Это не так просто; мы отсылаем читателя к книгам [37, 7.18] или [17, 2.3.5b]. □ (Предложение)

Чтобы обойти довольно сложное предложение 8.4 в доказательстве теоремы 8.3, можно воспользоваться следующей характеризацией замкнутых подгрупп группы S_∞ из книги [17, 1.5]. Для каждого $x \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$, где $\mathscr{L}$ — произвольный счетный реляционный язык, положим

$$\mathtt{Aut}_x = \{g \in S_\infty : g{\cdot}x = x\}.$$

Понятно, что $\mathtt{Aut}_x$ — замкнутая подгруппа S_∞, которую можно понимать как группу всех автоморфизмов структуры x.

Предложение 8.5. *Подгруппа $G \subseteq S_\infty$ является замкнутой в S_∞, если и только если существуют счетный реляционный язык $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}$-структура $x \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$, для которых $G = \mathtt{Aut}_x$.*

Доказательство. В нетривиальную сторону, пусть G — замкнутая подгруппа группы S_∞. Для любого $n \geq 1$ обозначим через I_n множество всех G-орбит в $\mathbb{N}^n$, т.е. всех классов эквивалентности отношения: $s \sim t$, если $\exists g \in G(t = g \circ s)$, где$g \circ \langle k_1, \ldots, k_n\rangle = = \langle g(k_1), \ldots, g(k_n)\rangle$. Тем самым, коль скоро орбиты попарно дизъюнктны, I_n есть разбиение множества $\mathbb{N}^n$ на не более чем счетное число частей. Положим $I = \bigcup_n I_n$, и для каждого $i \in I_n$ пусть R_i является n-арным символом отношения. Рассмотрим язык $\mathscr{L} = \{R_i\}_{i \in I}$. Определим $x \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ так: если $i \in I_n$, то $x \models R_i(k_0, \ldots, k_{n-1})$, когда $\langle k_0, \ldots, k_{n-1}\rangle \in i$. Нетрудно проверить, что $G = \mathtt{Aut}_x$. На самом деле, даже если подгруппа G не была бы замкнутой, то $\mathtt{Aut}_x$ совпадает с замыканием G в S_∞.

□ (предложение)

Вернемся к доказательству теоремы 8.3. То же самое рассуждение, что и в начале доказательства, показывает, что любое отношение эквивалентности, индуцированное польским действием замкнутой подгруппы G группы S_∞, борелевски сводится к изоморфизму $\cong^G_{\mathscr{L}}$ для подходящего счетного языка $\mathscr{L}$. Согласно 8.5 имеем $G = \mathtt{Aut}_{y_0}$, где $y_0 \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}'}$, и $\mathscr{L}'$ — счетный язык, не имеющий общих элементов с $\mathscr{L}$. Отображение $x \longmapsto \langle x, y_0 \rangle$ обеспечивает искомый результат: $(\cong^G_{\mathscr{L}}) \le_{\mathsf{B}} \cong_{(\mathscr{L} \cup \mathscr{L}')}$.

□ (теорема 8.3)

Упражнение 8.6. Докажите, что отношения T_2, E_3, а также все счетные борелевские отношения эквивалентности классифицируются счетными структурами. *Указание*: E_3 и счетные отношения борелевски сводятся к T_2, см. §5.2, а результат для T_2 содержится в предложении 3.18. □

8.3. Редукция к счетным графам

Можно было бы ожидать, что чем сложнее исходный язык $\mathscr{L}$, тем сложнее в смысле $\le_{\mathsf{B}}$ соответствующее отношение $\cong_{\mathscr{L}}$ изоморфизма $\mathscr{L}$-структур. Но это не так. Обозначим через $\mathscr{G}$ язык (ориентированных бинарных) графов, т.е. $\mathscr{G}$ содержит единственный бинарный символ отношения $R(\cdot,\cdot)$.

Теорема 8.7. *Если $\mathscr{L}$ — счетный реляционный язык, то $(\cong_{\mathscr{L}}) \le_{\mathsf{B}} (\cong_{\mathscr{G}})$. Следовательно, для классифицируемости отношения эквивалентности E счетными структурами необходимо и достаточно, чтобы $\mathsf{E} \le_{\mathsf{B}} (\cong_{\mathscr{G}})$.*

Другими словами, бинарные отношения позволяют кодировать структуры любого счетного реляционного языка. Беккер и Кехрис [17, 6.1.4] дают доказательство этого результата, основанное на кодировании с помощью решеток. Здесь предлагается элементарное доказательство.

Доказательство. Фиксируем произвольное множество $\mathbb{A}=\{a_k : k\in\mathbb{N}\}$ попарно различных точек $a_k \in 2^{\mathbb{N}}$. Обозначим $\mathrm{HF}(\mathbb{A})$ множество всех наследственно конечных множеств над $\mathbb{A}$. Другими словами, $\mathrm{HF}(\mathbb{A})$ — наименьшее множество, содержащее все точки a_k и удовлетворяющее условию: если $\eta \subseteq \mathrm{HF}(\mathbb{A})$ — конечное множество, то $\eta \in \mathrm{HF}(\mathbb{A})$. Множество $H \subseteq \mathrm{HF}(\mathbb{A})$ называется *транзитивным над* $\mathbb{A}$, если каждое $\eta \in \mathrm{HF}(\mathbb{A}) \smallsetminus \mathbb{A}$ удовлетворяет условию $\eta \subseteq \mathrm{HF}(\mathbb{A})$.

Пусть $\simeq_{\mathrm{HF}(\mathbb{A})}$ — отношение изоморфизма упорядоченных графов на $\mathrm{HF}(\mathbb{A})$. Точнее, если $P, Q \subseteq \mathrm{HF}(\mathbb{A})^2$, то $P \simeq_{\mathrm{HF}(\mathbb{A})} Q$ означает, что имеется биекция b множества $\mathrm{HF}(\mathbb{A})$ на себя такая, что $Q = b \cdot P = \{\langle b(s), b(t)\rangle : \langle s,t\rangle \in P\}$. Понятно, что $(\cong_{\mathscr{G}}) \sim_{\mathrm{B}} (\simeq_{\mathrm{HF}(\mathbb{A})})$. В сущности, любая биекция $\mathbb{N}$ на $\mathrm{HF}(\mathbb{A})$ индуцирует борелевский изоморфизм между $\langle \mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}); \cong_{\mathscr{G}}\rangle$ и $\langle \mathscr{P}(\mathrm{HF}(\mathbb{A}) \times \mathrm{HF}(\mathbb{A})); \simeq_{\mathrm{HF}(\mathbb{A})}\rangle$. Итак, остается доказать, что $(\cong_{\mathscr{L}}) \leq_{\mathrm{B}} (\simeq_{\mathrm{HF}(\mathbb{A})})$ для каждого языка $\mathscr{L}$.

Действие группы S_∞ на $\mathrm{HF}(\mathbb{A})$ определим так: если $g \in S_\infty$, то $g \circ a_n = a_{g(n)}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и затем, индукцией по рангу над $\mathbb{A}$ положим $g \circ \{\eta_1, \ldots, \eta_n\} = \{g \circ \eta_1, \ldots, g \circ \eta_n\}$ для всех $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathrm{HF}(\mathbb{A})$. Отображение $\eta \mapsto g \circ \eta$ является $\in$-изоморфизмом множества $\mathrm{HF}(\mathbb{A})$ при любом $g \in S_\infty$.

Лемма 8.8. *Допустим, что множества $S, T \subseteq \mathrm{HF}(\mathbb{A})$ транзитивны над $\mathbb{A}$, разности $\mathbb{A} \smallsetminus S$ и $\mathbb{A} \smallsetminus T$ равны по мощности и $(\in \restriction S) \simeq_{\mathrm{HF}(\mathbb{A})} (\in \restriction T)$. Тогда существует $f \in S_\infty$ такое, что $T = f \circ S = \{f \circ \eta : \eta \in S\}$.*

Доказательство. Предположение $(\in \restriction S) \simeq_{\mathrm{HF}(\mathbb{A})} (\in \restriction T)$ означает, что имеется $\in$-изоморфизм $\pi : S \xrightarrow{\text{на}} T$. По транзитивности ограниченное отображение $\rho = \pi \restriction (S \cap \mathbb{A})$ — биекция множества $S_0 = S \cap \mathbb{A}$ на $T_0 = T \cap \mathbb{A}$. Из равномощности разностей $\mathbb{A} \smallsetminus S$ и $\mathbb{A} \smallsetminus T$ следует, что существует перестановка $f \in S_\infty$ такая, что $\rho(a_k) = a_{f(k)}$ для всех $a_k \in S_0$. Теперь нетрудно, индукцией по рангу $\eta \in \mathrm{HF}(\mathbb{A})$ над $\mathbb{A}$ доказать, что $f \circ \eta = \pi(\eta)$ для каждого $\eta \in S$. □ (лемма)

Вернемся к доказательству теоремы 8.7. Сначала несколько упрощающих предположений. Если список символов отношений языка $\mathscr{L}'$ расширяет аналогичный список языка $\mathscr{L}$, то $(\cong_{\mathscr{L}}) \leq_{\mathrm{B}} (\cong_{\mathscr{L}'})$ по достаточно очевидным соображениям. Если символы отношений языка $\mathscr{L}'$ имеют арность не ниже соответствующих символов языка $\mathscr{L}$, то также $(\cong_{\mathscr{L}}) \leq_{\mathrm{B}} (\cong_{\mathscr{L}'})$. Например, если $\mathscr{L}$ содержит бинарный символ R и $\mathscr{L}$ — тернарный символ R', то отображение $\vartheta(x) = \{\langle 0,k,l\rangle : \langle k,l\rangle \in x\}$ из $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ в $\mathscr{P}(\mathbb{N}^3)$ выполняет борелевскую редукцию $\cong_{\mathscr{L}}$ к $\cong_{\mathscr{L}'}$. Поэтому можно, не ограничивая общности, предположить, что исходный язык имеет вид $\mathscr{L} = \{R_n\}_{2\le n\in\mathbb{N}}$, где каждый символ R_n, $n \ge 2$, имеет арность равную в точности n.

Соответственно $\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}} = \prod_{n\ge 2}\mathscr{P}(\mathbb{N}^n)$. Теперь для доказательства теоремы 8.7 остается доказать соотношение $(\cong_{\mathscr{L}}) \le_{\mathrm{B}} (\simeq_{\mathrm{HF}(\mathbb{A})})$.

Для каждого $x \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ положим $\Theta(x) = \mathbb{A} \cup \bigcup_{n\ge 2,\ s\in x(n)} T_s$, где для $s = \langle k_1,\ldots,k_n\rangle \in \mathbb{N}^n$ множество $T_s \subseteq \mathrm{HF}(\mathbb{A})$ является наименьшим множеством, содержащим множество $\tau_s = \{\langle a_{2k_1},\ldots,a_{2k_n}\rangle, a_{2n-3}\}$ (как элемент) и транзитивным над $\mathbb{A}$. Например, если $s = \langle k,l\rangle \in \mathbb{N}^2$, то T_s содержит элементы:

$$a_{2k},\ a_{2l},\ \{a_{2k}\},\ \{a_{2k},a_{2l}\},\ \langle a_{2k},a_{2l}\rangle = \{\{a_{2k}\},\{a_{2k},a_{2l}\}\},\ a_1\,,$$

где $1 = 2\cdot 2 - 3$, и, наконец, само $\tau_s = \{\langle a_{2k},a_{2l}\rangle, 1\}$. Утверждается, что Θ — непрерывная редукция отношения $\cong_{\mathscr{L}}$ к $\simeq_{\mathrm{HF}(\mathbb{A})}$.

Предположим, что $x,y \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ и $x \cong_{\mathscr{L}} y$, т.е. $y = g\cdot x$ для подходящей перестановки $g \in S_\infty$, где $\cdot$ обозначает логическое действие S_∞ на $\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$. Определим $f \in S_\infty$ так, что $f(2n+1) = 2n+1$ и $f(2n) = 2g(n)$ для всех n, поэтому нечетные числа не сдвигаются. Нетрудно проверить, что $\Theta(y) = f\circ\Theta(x)$, откуда очевидно $\Theta(x) \simeq_{\mathrm{HF}(\mathbb{A})} \Theta(y)$.

Наоборот, допустим, что $x,y \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ и $\Theta(x) \simeq_{\mathrm{HF}(\mathbb{A})} \Theta(y)$. По определению $\mathbb{A} \subseteq \Theta(x)\cap\Theta(y)$, и согласно лемме 8.8 найдется перестановка $f \in S_\infty$ такая, что $\Theta(y) = f\circ\Theta(x)$. Легко видеть, что при $n \ge 2$ элемент вида $\eta = \{\langle a_{l_1},\ldots,a_{l_n}\rangle, a_m\}$ принадлежит $\Theta(x)$, если и только если $n \ge 2$, $m = 2n-3$ и все индексы l_i — четные числа, скажем $l_i = 2k_i$, так что $\eta = \tau_s = \{\langle a_{2k_1},\ldots,a_{2k_n}\rangle, a_{2n-3}\}$, где $s = \langle k_1,\ldots,k_n\rangle \in \mathbb{N}^n$, причем $f\circ t = \{\langle a_{f(l_1)},\ldots,a_{f(l_n)}\rangle, a_{f(m)}\}$. То же верно и в отношении утверждения $t \in \Theta(y)$. Отсюда следует, что $f(a_m) = a_m$ для всех нечетных m, поскольку длина s не меняется. Значит, найдется такая перестановка $g \in S_\infty$, что $f(2n) = 2g(n)$ для всех n.

Доказываем $y = g\cdot x$. Достаточно проверить, что $\Theta(y) = \Theta(g\cdot x)$. Каждому числу $n \ge 2$ и каждому элементу $s = \langle k_1,\ldots,k_n\rangle \in x(n)$ по определению соответствуют элемент $t = \langle g(k_1),\ldots,g(k_n)\rangle \in y(n)$ и соответственно элемент $\zeta = \tau_t =$

$= \{\langle a_{2g(k_1)}, \ldots, a_{2g(k_n)}\rangle, a_{2n-3}\} \in \Theta(y)$. Тому же элементу s соответствует элемент $\eta = \tau_s = \{\langle a_{2k_1}, \ldots, a_{2k_n}\rangle, a_{2n-3}\}$ в $\Theta(x)$ и, следовательно, элемент $\eta' = \{\langle a_{f(2k_1)}, \ldots, a_{f(2k_n)}\rangle, a_{2n-3}\}$ в множестве $f \circ \Theta(x) = \Theta(y)$. Однако $f(2k) = 2g(k)$, откуда очевидно, что $\eta' = \zeta$, что и требовалось. □ (теорема 8.7)

8.4. Редукция к отношениям Фридмана–Стенли

Напомним, что отношения эквивалентности Фридмана–Стенли T_ξ были введены в §4.2, определение 4.4, трансфинитной индукцией по $\xi < \omega_1$, начиная с $\mathsf{T}_0 = \Delta_{\mathbb{N}}$, и с использованием операции счетной степени **o4** для перехода $\xi \to \xi + 1$ и операции дизъюнктного объединения **o5** на предельных шагах. Отдельное определение T_2 в §3.5 не создает трудности по лемме 4.7. Эти отношения создают удобный инструмент калибровки тех борелевских отношений эквивалентности, которые допускают классификацию счетными структурами. Прежде всего, доказывается

Предложение 8.9. *Каждое отношение эквивалентности* T_ξ *допускает классификацию счетными структурами.*

Доказательство. Трансфинитной индукцией по ξ. По теореме 8.3 достаточно доказать, что каждое T_ξ удовлетворяет условию $(*)$ быть борелевски сводимым к отношению, индуцированному польским действием замкнутой подгруппы группы S_∞.

Отношение T_0, т.е. равенство на $\mathbb{N}$, само индуцировано тривиальным действием группы S_∞ на $\mathbb{N}$ как $g \cdot x = x$ для всех $g \in S_\infty$ и $x \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим операцию **o4** счетной степени. Допустим, что отношение эквивалентности E на польском пространстве $\mathbb{X}$ удовлетворяет условию $\mathsf{E} \le_{\mathsf{B}} \mathsf{F}$, где F — отношение эквивалентности на польском пространстве $\mathbb{Y}$, индуцированное польским действием $\cdot$ некоторой замкнутой подгруппы $G \subseteq S_\infty$ на $\mathbb{Y}$. Обозначим через D множество всех точек $x \in \mathbb{X}^{\mathbb{N}}$ таких, что выполнено одно из двух: $x(k) \not\mathsf{E}\, x(l)$ для всех $k \ne l$, или имеется число m (равное максимальному числу попарно E-неэквивалентных $x(k)$) такое, что $x(k) \mathrel{\mathsf{E}} x(l)$, если и только если m делит $|k-l|$. Нетрудно определить борелевскую функцию $\vartheta : \mathbb{X}^{\mathbb{N}} \to D$, для которой $x \mathrel{\mathsf{E}^+} \vartheta(x)$ для всех x. Другими словами, ϑ сводит отношение E^+ к $\mathsf{E}^+ \restriction D$.

С другой стороны, имеем $(\mathsf{E}^+ \restriction D) \le_{\mathsf{B}} \mathsf{R}$, где для $y, y' \in \mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ условие $y \mathrel{\mathsf{R}} y'$ означает, что имеется перестановка $f \in S_\infty$ такая, что $y(k) \mathrel{\mathsf{F}} y'(f(k))$ для всех k. Наконец, R, очевидно, индуцируется польским действием группы $S_\infty \times G^{\mathbb{N}}$. Последняя может быть реализована как замкнутая подгруппа группы S_∞, что и требовалось.

Предельный шаг индукции. Допустим, что λ — предельный ординал и для каждого $\xi<\lambda$ имеется борелевская редукция $\vartheta : D_\xi \to \mathbb{Y}_\xi$ отношения T_ξ к отношению эквивалентности F_ξ, индуцированного польским действием $\cdot$ некоторой замкнутой подгруппы $G_\xi \subseteq S_\infty$ на польском пространстве $\mathbb{Y}_\xi$; напомним, что D_ξ — это область отношения T_ξ, которая является польским пространством, см. упражнение 4.5. По определению, отношение $\mathsf{T}_\lambda = \bigvee_{\xi<\lambda} \mathsf{T}_\xi$ — отношение эквивалентности на множестве $D_\lambda = \{\langle \xi, x\rangle : \xi < \lambda \wedge x \in D_\xi\}$, причем $\langle \xi, x\rangle \mathrel{\mathsf{T}_\lambda} \langle \eta, y\rangle$, если $\xi = \eta$ и $x \mathrel{\mathsf{T}_\xi} y$.

Отображение $\vartheta(\xi, x) = \langle \xi, \vartheta_\xi(x)\rangle$ — борелевская редукция отношения T_λ к определенному тем же способом отношению $\mathsf{F} = \bigvee_{\xi<\lambda} \mathsf{F}_\xi$ на пространстве $\mathbb{Y} = \{\langle \xi, y\rangle : \xi < \lambda \wedge y \in \mathbb{Y}_\xi\}$. Рассмотрим польскую группу $G = \prod_{\xi<\lambda} G_\xi$, действующую на $\mathbb{Y}$ так, что $g \cdot \langle \xi, y\rangle = \langle \xi, g(\xi) \cdot y\rangle$. Понятно, что это действие — польское, и индуцируемое им отношение эквивалентности тождественно отношению F.

Остается вложить G в S_∞. Для этого рассмотрим произвольное разбиение $\mathbb{N} = \bigcup_{\xi<\lambda} U_\xi$ натурального ряда на λ бесконечных (дизъюнктных) частей с биекциями $b_\xi : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} U_\xi$. Множество H всех перестановок $h \in S_\infty$, отображающих каждое из множеств U_ξ на себя, является замкнутой подгруппой группы S_∞. Рассмотрим отображение, сопоставляющее каждой перестановке $h \in H$ такой элемент $g \in G$, что $g(\xi)(n) = b_\xi^{-1}(h(b_\xi(n)))$ для всех $\xi < \lambda$ и n. Это отображение — топологический гомеоморфизм и алгебраическим гомоморфизмом группы H на G. $\square$

Известны модификации отношений T_ξ, см., например, [41, § 1], где результаты, подобные предложению 8.9, получены в значительно более общей форме.

Теорема 8.10. *Если борелевское отношение эквивалентности* E *классифицируется счетными структурами, то* $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{T}_\xi$ *для некоторого* $\xi < \omega_1$.

Доказательство. Следующий вариант доказательства, взятый из [30], основан на методе, известном как анализ Скотта. Определим индукцией по $\alpha < \omega_1$ семейство борелевских отношений эквивалентности $\equiv^\alpha$ на $\mathbb{N}^{<\omega} \times \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$. Примем, что

* $A \equiv^\alpha_{st} B$ сокращенная запись соотношения $\langle s, A\rangle \equiv^\alpha \langle t, B\rangle$.

Таким образом, все $\equiv^\alpha_{st}$, где $s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, — бинарные отношения на $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$, и среди них все отношения $\equiv^\alpha_{ss}$ будут отношениями эквивалентности. Определение проходит трансфинитной индукцией по α:

- $A \equiv^0_{st} B$, если $A(s_i, s_j) \Longleftrightarrow B(t_i, t_j)$ для всех $i, j < \mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, t$;
- $A \equiv^{\alpha+1}_{st} B$, если $\forall k \exists l (A \equiv^\alpha_{s^\wedge k, t^\wedge l} B)$ и $\forall l \exists k (A \equiv^\alpha_{s^\wedge k, t^\wedge l} B)$;
- если $\lambda < \omega_1$ — предельный ординал, то $A \equiv^\lambda_{st} B$, когда $A \equiv^\alpha_{st} B$ для всех $\alpha < \lambda$.

Легко видеть, что $(\equiv^\beta) \subseteq (\equiv^\alpha)$ при $\alpha < \beta$.

Напомним, что для $A, B \subseteq \mathbb{N}^2$ запись $A \cong_{\mathscr{G}} B$ означает, что имеется такая перестановка $f \in S_\infty$, что $A(k, l) \Longleftrightarrow B(f(k), f(l))$ для всех k, l. Отсюда индукцией по α следует включение $(\cong_{\mathscr{G}}) \subseteq (\bigcap_{\alpha<\omega_1} (\equiv^\alpha_{\Lambda\Lambda}))$, где Λ, как обычно, пустая последовательность. (И даже с равенством $=$ вместо $\subseteq$, см. ниже.) Назовем множество $P \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ *неограниченным*, если $(P \cap (\equiv^\alpha_{\Lambda\Lambda})) \ne \emptyset$ для всех $\alpha < \omega_1$.

Лемма 8.11. *Любое неограниченное аналитическое множество* P *содержит пару вида* $\langle A, B\rangle$, *для которой* $A \cong_{\mathscr{G}} B$.

Доказательство. Раз P — аналитическое множество, существует непрерывное отображение $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} P$. Для каждого $u \in \mathbb{N}^{<\omega}$ определим $P_u = \{F(a) : u \subset a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Найдется индекс n_0, для которого множество $P_{\langle n_0 \rangle}$ — всё ещё неограниченное. Положим $k_0 = 0$. Простое рассуждение о конфинальностях приносит число l_0 такое, что множество $P_{\langle n_0 \rangle}$ — всё ещё неограниченное *над* $\langle k_0 \rangle, \langle l_0 \rangle$ в том смысле, что нет ни одного ординала $\alpha<\omega_1$, удовлетворяющего условию $(P_{\langle i_0 \rangle} \cap (\equiv^{\alpha}_{\langle k_0 \rangle \langle l_0 \rangle})) = \emptyset$. Следуя этому плану, получим бесконечные последовательности чисел n_m, k_m, l_m такие, что последовательности $\{k_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ и $\{l_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ являются перестановками $\mathbb{N}$ и для каждого m множество $P_{\langle n_0, \ldots, n_m \rangle}$ неограничено над $\langle k_0, \ldots, k_m \rangle$, $\langle l_0, \ldots, l_m \rangle$ в том же самом смысле. Заметим, что последовательность $a=\{n_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ принадлежит $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, так что $F(a) \in P$, а потому $F(a) = \langle A, B \rangle$, где A и B являются подмножествами в $\mathbb{N}^2$.

Докажем, что функция $f(k_m) = l_m$ обеспечивает $A \cong_{\mathscr{G}} B$, т.е. $A(k_j, k_i)$ эквивалентно $B(l_j, l_i)$ для всех j, i. Возьмем число $m > \max\{j, i\}$ достаточно большое для следующего: если $\langle A', B' \rangle \in P_{\langle i_0, \ldots, i_m \rangle}$, то $A(k_j, k_i)$ эквивалентно $A'(k_j, k_i)$ и аналогично, $B(l_j, l_i)$ эквивалентно $B'(l_j, l_i)$. По построению существует пара $\langle A', B' \rangle \in P_{\langle i_0, \ldots, i_m \rangle}$, удовлетворяющая условию $A' \equiv^{0}_{\langle k_0, \ldots, k_m \rangle \langle l_0, \ldots, l_m \rangle} B'$, в частности, $A'(k_j, k_i)$ эквивалентно $B'(l_j, l_i)$, что и требовалось. □ (лемма)

Следствие 8.12. *Если $A, B \subseteq \mathbb{N}^2$, то для выполнения $A \cong_{\mathscr{G}} B$ необходимо и достаточно, чтобы $A \equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda} B$ для всех $\alpha < \omega_1$.*

Доказательство. В нетривиальную сторону, чтобы вывести $A \cong_{\mathscr{G}} B$ из предположения $\forall \alpha \, (A \equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda} B)$, примените только что доказанную лемму к множеству $P = \{\langle A, B \rangle\}$. □

Следствие 8.13. *Если E — борелевское отношение эквивалентности, борелевски сводимое к изоморфизму графов $\cong_{\mathscr{G}}$, то оно борелевски сводится и к отношению $\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda}$ для некоторого $\alpha < \omega_1$.*

Заметим, что отсюда не следует, что само отношение $\cong_{\mathscr{G}}$ удовлетворяет $(\cong_{\mathscr{G}}) \leq_{\mathrm{B}} (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$ для некоторого $\alpha < \omega_1$: следствие неприменимо, поскольку на самом деле $\cong_{\mathscr{G}}$ не является борелевским отношением.

Доказательство. Пусть ϑ — борелевская редукция отношения E к $\cong_{\mathscr{G}}$. Тогда множество $\{\langle\vartheta(x),\vartheta(y)\rangle : x \not\mathsf{E}\, y\}$ является аналитическим подмножеством в произведении $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)\times\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ и не пересекает $\cong_{\mathscr{G}}$. Значит, оно ограничено по лемме 8.11. Возьмем ординал $\alpha<\omega_1$, который обеспечивает ограниченность. □

Если E — борелевское отношение эквивалентности, классифицируемое счетными структурами, то $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} (\cong_{\mathscr{G}})$ по теореме 8.7. Следовательно, для доказательства теоремы 8.10 достаточно получить:

Предложение 8.14. *Каждое отношение вида $\equiv^\alpha$ борелевски сводится к какому-то из отношений T_ξ.*

Доказательство. Имеем $(\equiv^0) \le_{\mathrm{B}} \mathsf{T}_0$, поскольку у отношения $\equiv^0$ счетно много классов эквивалентности. Чтобы выполнить шаг $\alpha\mapsto\alpha+1$ заметим, что отображение $\langle s,A\rangle \mapsto \{\langle s^\wedge k, A\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ — борелевская редукция отношения $\equiv^{\alpha+1}$ к $(\equiv^\alpha)^+$. Чтобы провести предельный шаг рассмотрим предельный ординал $\lambda<\omega_1$. Фиксируем нумерацию $\lambda = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ всех меньших ординалов и положим $\mathsf{R} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}}(\equiv^{\alpha_n})$, т.е. R — отношение эквивалентности на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^{<\omega}\times\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$, определенное так, что $\langle m,s,A\rangle \;\mathsf{R}\; \langle n,t,B\rangle$ если $m=n$ и $A \equiv^{\alpha_m}_{st} B$. Отображение $\langle s,A\rangle\mapsto\{\langle m,s,A\rangle\}_{m\in\mathbb{N}}$ — борелевская редукция $\equiv^\lambda$ к R^+.

□ (предложение)

□ (теорема 8.10)

9. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ

Здесь мы рассмотрим отношения эквивалентности, индуцированные действиями совсем иных групп, чем группа перестановок S_∞. В первую очередь, это — действия аддитивных групп банаховых пространств, рассмотренные в §3.4, а также Δ-действия некоторых идеалов вроде суммируемого идеала $\mathscr{I}_2 = \mathscr{S}_{\{\frac{1}{n+1}\}}$ или идеала $\mathscr{Z}_0$ множеств нулевой плотности. Главный результат здесь состоит в том, что такие отношения эквивалентности не классифицируются счетными структурами, т. е. не сводятся к действиям группы S_∞ и её замкнутых подгрупп.

Исследования в этом направлении были начаты Фридманом и Стенли [29], см. также [30], установившими, что идеал нулевой плотности не классифицируется счетными структурами. Более поздние работы Хъерта [35, 37] и Кехриса [56] показали, что в основе этого результата лежит определенное топологическое свойство польских действий, называемое (генерической) турбулентностью, о котором пойдет речь в этой главе.

В качестве следствия будет доказано, что среди борелевских отношений эквивалентности, классифицируемых счетными структурами, нет таких, которые порождались бы идеалами, кроме очень короткого списка исключений, вроде связанных с идеалами Fin и E_3.

В этой главе по необходимости предполагается некоторое знакомство с методом вынуждения Коэна (форсингом), и некоторые доказательства даны в виде набросков.

9.1. Локальные орбиты и турбулентность

Предположим, что группа $\mathbb{G}$ действует на пространстве $\mathbb{X}$. Если $G \subseteq \mathbb{G}$ и $X \subseteq \mathbb{X}$, то определяется *граф локального действия*

$$\mathsf{R}_G^X = \{\langle x, y\rangle \in X^2 : \exists g \in G\,(x = g \cdot y)\}\,.$$

Обозначим $\sim_G^X$ замыкание этого отношения R_G^X, т.е. наименьшее по включению отношение эквивалентности на X такое, что $x\,\mathsf{R}_G^X\,y \Longrightarrow x \sim_G^X y$. Иными словами, $x \sim_G^X y$, если x, y принадлежат X и найдется такая цепочка $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ точек $x_i \in X$, что для любого $i < n$ выполняется $x_i\,\mathsf{R}_G^X\,x_{i+1}$ или $x_{i+1}\,\mathsf{R}_G^X\,x_i$, или же просто $x = y$ при $n = 0$. В частности, $(\sim_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}) = \mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$, но вообще говоря $(\sim_G^X) \subsetneqq (\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}} \restriction X)$.

Определим $\mathscr{O}(x, X, G) = [x]_{\sim_G^X} = \{y \in X : x \sim_G^X y\}$ для $x \in X$ — это множество называется *локальной орбитой* точки x. В частности, $[x]_{\mathbb{G}} = [x]_{\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}} = \mathscr{O}(x, \mathbb{X}, \mathbb{G})$ — это полная $\mathbb{G}$-орбита точки $x \in \mathbb{X}$. Следующее ключевое определение предложено Кехрисом [56, § 8].

Определение 9.1. Рассмотрим польское (т.е. непрерывное) действие польской группы $\mathbb{G}$ на польском пространстве $\mathbb{X}$.

(t1) Точка $x \in \mathbb{X}$ называется *турбулентной*, если для любого открытого непустого множества $X \subseteq \mathbb{X}$, содержащего x, и любой окрестности $G \subseteq \mathbb{G}$ (не обязательно подгруппы) нейтрального элемента $1_{\mathbb{G}}$ локальная орбита $\mathscr{O}(x, X, G)$ где-то плотная (т.е. не является нигде не плотным множеством) в $\mathbb{X}$.

(t2) Орбита $[x]_{\mathbb{G}}$ называется *турбулентной*, если точка x турбулентна.

(t3) Действие (группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{X}$) называется *генерически*[1] или сокращенно *ген. турбулентным*, а пространство $\mathbb{X}$ — *ген. турбулентным* польским $\mathbb{G}$-пространством, если объединение всех всюду плотных, турбулентных и тощих орбит $[x]_{\mathbb{G}}$ является ко-тощим множеством. □

[1] В этой главе, слово «генерический» означает, что некоторое рассматриваемое свойство выполнено не на всем пространстве, а на ко-тощем множестве, т.е. на дополнении тощего множества.

Упражнение 9.2. Используя тот факт, что данное действие — польское, докажите, что две точки, принадлежащие одной и той же орбите (но не обязательно одной и той же локальной орбите) — турбулентные или не турбулентные одновременно. Это доказывает корректность пункта (t2) определения. □

Упражнение 9.3. Докажите: если $x \in \mathbb{X}$ — турбулентная точка, а множество $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{G}$ открыто (но не обязательно содержит нейтральный элемент $\mathbb{G}$), то множество $U \cdot x = \{g \cdot x : x \in U\}$ где-то плотно.

Указание. $U \cdot x = g \cdot (G \cdot x)$, где $g \in U$ произвольно, $G = g^{-1}U$ в группе $\mathbb{G}$ и $G \cdot x$ совпадает с локальной орбитой $\mathscr{O}(x, \mathbb{X}, G)$. □

Таким образом, турбулентность означает, что почти все в смысле категории орбиты имеют довольно хаотическую структуру, т.е. являются плотными и тощими, а локальные орбиты тоже где-то плотны. В частности, не может быть не тощих орбит.

Известны совершенно элементарные примеры нетурбулентных действий.

Лемма 9.4. *Действие сдвига аддитивной группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$, которое индуцирует отношение эквивалентности Витали, не турбулентно.*

Напомним, что $\mathbb{Q}$, как и любая не более чем счетная группа, рассматривается в нашем контексте как группа с дискретной топологией — иначе она не является польской группой.

Доказательство. Одноэлементное множество $\{0\}$ является открытым множеством в дискретной топологии $\mathbb{Q}$, а потому имеются нигде не плотные, в сущности, одноточечные локальные орбиты. □

Мы увидим, что никакое польское действие группы S_∞ всех перестановок натурального ряда $\mathbb{N}$ не может быть турбулентным. Хьерт [35] дает другие примеры. С другой стороны, Δ-действия суммируемых идеалов являются турбулентными.

9.2. Действие суммируемых идеалов турбулентно

Напомним, что для любой последовательности вещественных чисел $r_n \geq 0$ *суммируемый идеал* $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ состоит из всех множеств $x \subseteq \mathbb{N}$ таких, что $\sum_{n \in x} r_n < +\infty$. Такой идеал порождает отношение эквивалентности $\mathsf{S}_{\{r_n\}} = \mathsf{E}_{\mathscr{S}_{\{r_n\}}}$ на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, определенное так, что $x \, \mathsf{S}_{\{r_n\}} \, y$, если множество $x \,\Delta\, y$ принадлежит $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$. В следующей теореме условие $\{r_n\} \to 0$ гарантирует, что идеал $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ содержит и бесконечные множества, а условие $\sum_n r_n = +\infty$ означает, что идеал $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ не содержит ко-конечных множеств.

Теорема 9.5. *Если $r_n > 0$, $\{r_n\} \to 0$ и $\sum_n r_n = +\infty$, то Δ-действие идеала $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ является польским и ген. турбулентным.*

Доказательство. Убедимся, что $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ — польская группа (с операцией симметрической разности Δ) в метрике $d_{\{r_n\}}(a,b)=\varphi_{\{r_n\}}(a \,\Delta\, b)$, где

$$\varphi_{\{r_n\}}(x) = \sum_{n \in x} r_n \text{ для } x \in \mathscr{P}(\mathbb{N}),$$

так что $\mathscr{S}_{\{r_n\}} = \{x : \varphi_{\{r_n\}}(x) < +\infty\}$. Ключевым требованием является непрерывность групповой операции. Пусть $x, y \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Зададимся числом $\delta > 0$, и пусть $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$. Если точки x', y' принадлежат ε-окрестностям точек x, y в пространстве $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ с метрикой $d_{\{r_n\}}$, то выполняется $(x' \,\Delta\, y') \,\Delta\, (x \,\Delta\, y) \subseteq (x \,\Delta\, x') \cup (y \,\Delta\, y')$, так что имеем $d_{\{r_n\}}(x' \,\Delta\, y', x \,\Delta\, y) \leq d_{\{r_n\}}(x,x') + d_{\{r_n\}}(y,y') = \delta$.

Теперь проверим непрерывность Δ-действия группы $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, определенного для $g \in \mathscr{S}_{\{r_n\}}$ и $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ равенством $g \cdot x = g \,\Delta\, x$. Непрерывность понимается в смысле $d_{\{r_n\}}$-топологии на $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ и обычной польской топологии на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Фиксируем $g \in \mathscr{S}_{\{r_n\}}$ и $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ и зададимся польской окрестностью

$$V = \{y \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) : y \cap n = (g \cdot x) \cap n\}$$

точки $g \cdot x$ в $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, где $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим соответствующую окрестность $U = \{x' \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) : x' \cap n = x \cap n\}$ точки x, и пусть ε

— наименьшее из чисел r_k, $k < n$. Понятно, что любой элемент $g' \in \mathscr{S}_{\{r_n\}}$ из ε-окрестности g в $d_{\{r_n\}}$-топологии удовлетворяет соотношению $g \,\Delta\, g' \subseteq [n, \infty)$, так что $g' \,\Delta\, x' \in V$ при условии, что $x' \in U$ для всякого такого g'.

Остается установить турбулентность этого действия.

Фиксируем произвольную точку $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Оставим читателю в качестве несложного **упражнения** проверить, что орбита $[x]_{\mathscr{S}_{\{r_n\}}} = \mathscr{S}_{\{r_n\}} \,\Delta\, x$ — плотное и тощее множество. Осталось доказать турбулентность самой точки x для этого действия. Рассмотрим любое открытое множество $X \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$, содержащее x, и произвольную $d_{\{r_n\}}$-окрестность в G элемента $\emptyset$, т.е. нейтрального элемента группы $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$. Можно предполагать, что, для некоторого k выполняется $X = \{y \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) : y \cap [0, k) = u\}$, где $u = x \cap [0, k)$, и $G = \{g \in \mathscr{S}_{\{r_n\}} : \varphi(g) < \varepsilon\}$ для какого-то $\varepsilon > 0$. Докажем, что локальная орбита $\mathscr{O}(x, X, G)$ где-то плотна в X.

Возьмем число $l \geq k$ достаточно большое для того, чтобы $r_n < \varepsilon$ для всех $n \geq l$. Определим $v = x \cap [0, l)$ и докажем, что орбита $\mathscr{O}(x, X, G)$ плотна в $Y = \{y \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) : y \cap [0, l) = v\}$. Для этого рассмотрим открытое множество $Z = \{z \in Y : z \cap [l, j) = w\}$, где $j \geq l$, $w \subseteq [l, j)$. Обозначим через z единственный элемент множества Z, для которого $z \cap [j, +\infty) = x \cap [j, +\infty)$. Тем самым, $x \,\Delta\, z = \{l_1, \ldots, l_m\} \subseteq [l, j)$. Каждое $g_i = \{l_i\}$ принадлежит G по выбору l : действительно, $l_i \geq l$. Кроме того, понятно, что точка $x_i = g_i \,\Delta\, g_{i-1} \,\Delta \ldots \Delta\, g_1 \,\Delta\, x = \{l_1, \ldots, l_i\} \,\Delta\, x$ принадлежит X, каковы бы ни были $i = 1, \ldots, m$. В то же время $x_m = z$. Значит, $z \in \mathscr{O}(x, X, G)$, что и требовалось. □

Упражнение 9.6. Докажите, что Δ-действие идеала $\mathscr{Z}_0$ множеств нулевой плотности на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ также является польским и ген. турбулентным. □

9.3. Действия группы перестановок не турбулентны

Следующая важная теорема Хъёрта [37] показывает, что турбулентность орбит несовместима с польским действием группы S_∞ и условием классифицируемости счетными структурами.

Теорема 9.7. *Допустим, что* $\mathbb{G}$ *— польская группа и* $\mathbb{X}$ *— генерически турбулентное польское* $\mathbb{G}$*-пространство. Тогда отношение эквивалентности* $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ *не сводится борелевской, или даже измеримой по Бэру функцией*[2] *ни к какому отношению эквивалентности, индуцированному польским действием группы* S_∞. *Следовательно* $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ *не классифицируется счетными структурами.*

Наше доказательство основано на идеях и технических конструкциях из [37, § 3.2], [56, § 12], [30], но построено так, что используются только достаточно общие средства топологии и дескриптивной теории множеств, включающие и некоторые элементы форсинга. Мы покажем, что на самом деле «турбулентные» отношения эквивалентности не сводятся даже к отношениям из много более широкого семейства отношений эквивалентности чем те, которые индуцируются польскими действиями S_∞.

Начнем с пары простых технических результатов, которые будут использованы ниже в доказательстве теоремы 9.7.

Лемма 9.8. *В условиях теоремы, если* $X \subseteq \mathbb{X}$ *и* $U, U' \subseteq X$ *— непустые открытые множества,* $G \subseteq \mathbb{G}$ *— открытая окрестность элемента* $1_{\mathbb{G}}$, *орбиты* $\mathscr{O}(x, X, G)$ *плотны в* X *для* X*-ко-тощего множества точек* $x \in X$, *и множество* $D \subseteq X$ *является ко-тощим в* X, *то найдутся точки* $x \in D \cap U$ *и* $x' \in D \cap U'$ *такие, что* $x \sim_G^X x'$.

---

[2] *Измеримой по Бэру функцией* называется такое отображение одного пространства в другое, при котором все прообразы открытых множеств имеют свойство Бэра. Борелевские функции измеримы по Бэру, но обратное неверно. Многие рассмотренные в этой книге результаты о борелевской несводимости остаются в силе и для несводимости с помощью отображений, измеримых по Бэру. Мы не обращали на это внимание, поскольку такое усиление обычно требует более или менее существенной переделки доказательств. Здесь же переход к измеримым по Бэру отображениям очень прост и вытекает из сути аргументов, см. доказательство леммы 9.12.

Доказательство (набросок). В этих предположениях можно подобрать точки $x_0 \in U$ и $x'_0 \in U'$ такие, что $(x_0) \sim_G^X (x'_0)$, т.е. имеются элементы $g_1, \ldots, g_n \in G \cup G^{-1}$, удовлетворяющие $x'_0 = g_n g_{n-1} \cdots g_1 \cdot x_0$ и $g_k \cdots g_1 \cdot x_0 \in X$ для всех $k \leq n$. По непрерывности действия найдется окрестность $U_0 \subseteq U$ точки x_0 такая, что $g_k \cdots g_1 \cdot x \in X$ для всех k и $g_n g_{n-1} \cdots g_1 \cdot x \in U'$ для всех $x \in U_0$. Раз множество D ко-тощее, можно найти точку $x \in U_0 \cap D$, для которой $x' = g_n g_{n-1} \cdots g_1 \cdot x \in U' \cap D$. □

Лемма 9.9. *В условиях теоремы для каждой пары открытых непустых множеств $U \subseteq \mathbb{X}$ и $G \subseteq \mathbb{G}$ с $1_{\mathbb{G}} \in G$ существует открытая непустая окрестность $U' \subseteq U$ такая, что локальная орбита $\mathscr{O}(x, U', G)$ плотна в U' для U'-ко-тощего множества точек $x \in U'$.*

Доказательство (набросок). Через $\mathrm{Int}\,\overline{X}$ обозначается внутренность замыкания X. Если $x \in U$ и орбита $\mathscr{O}(x, U, G)$ где-то плотна (в U) то множество $U_x = U \cap \mathrm{Int}\,\overline{\mathscr{O}(x, U, G)} \subseteq U$ открыто и $\sim_G^U$-инвариантно. (Чтобы доказать инвариантность нужна некоторая работа. См., например, [56, доказательство 8.4].) Кроме того, $\mathscr{O}(x, U, G) \subseteq U_x$, поэтому $\mathscr{O}(x, U, G) = \mathscr{O}(x, U_x, G)$. Из указанного свойства инвариантности следует, что множества U_x попарно дизъюнктны. По турбулентности объединение их всех плотно в U. Возьмем одно из непустых множеств вида U_x в качестве U'. □

9.4. Эргодичность

Несводимость в теореме 9.7 будет доказана в специальной более сильной форме. Здесь нам потребуются дополнительные определения. Предположим, что E и F — отношения эквивалентности на польских пространствах, соответственно, $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$. Отображение $\vartheta : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ называется

- $(\mathsf{E} \to \mathsf{F})$-*инвариантним,* если $x \,\mathsf{E}\, y \Longrightarrow \vartheta(x) \,\mathsf{F}\, \vartheta(y)$ для всех x, $y \in \mathbb{X}$;

- *ген.* $(\mathsf{E} \to \mathsf{F})$-*инвариантным*, если импликация $x \mathsf{E} y \implies \vartheta(x) \mathsf{F} \vartheta(y)$ выполняется для всех x, y из некоторого ко-тощего множества $C \subseteq \mathbb{X}$;
- *ген. редукцией* E *к* F, если эквивалентность $x \mathsf{E} y \iff \vartheta(x) \mathsf{F} \vartheta(y)$ выполняется для всех x, y из некоторого ко-тощего множества $C \subseteq \mathbb{X}$;
- *ген.* F-*константой*, если соотношение $\vartheta(x) \mathsf{F} \vartheta(y)$ выполняется для всех x, y из некоторого ко-тощего множества $C \subseteq \mathbb{X}$.

Определение 9.10 (Хъёрт, Кехрис). Отношение эквивалентности E называется *ген.* F-*эргодическим*, если каждое борелевское ген. $(\mathsf{E} \to \mathsf{F})$-инвариантное отображение является ген. F-константой. □

Эргодичность согласована с отношением $\leq_{\mathsf{B}}$ следующим образом:

Лемма 9.11. *Если* $\mathsf{E}, \mathsf{F}, \mathsf{F}'$ *— борелевские отношения,* E *является ген.* F*-эргодическим, и* $\mathsf{F}' \leq_{\mathsf{B}} \mathsf{F}$*, то* E *— также и ген.* F'*-эргодическое отношение.*

Доказательство. Фиксируем борелевскую редукцию ϑ отношения F' к F. Рассмотрим произвольное борелевское ген. $(\mathsf{E} \to \mathsf{F}')$-инвариантное отображение f. Тогда $f'(x) = \vartheta(f(x))$ является, очевидно, ген. $(\mathsf{E} \to \mathsf{F})$-инвариантным отображением, так что оно должно быть ген. F-константой. Следовательно, и ген. F'-константой, так как ϑ — редукция. □

Монотонность в смысле левого отношения (т. е. эргодичность E' следует из эргодичности E при $\mathsf{E} \leq_{\mathsf{B}} \mathsf{E}'$) вывести к сожалению не удается.

Следующая лемма относится к числу главных инструментов вывода борелевской несводимости. Она будет использована и в доказательстве теоремы 9.7.

Лемма 9.12. *Если отношение эквивалентности* E *является ген.* F*-эргодическим и не имеет ко-тощих классов эквивалентности, то* E *не допускает борелевской ген. редукции к отношению* F*. Кроме того,* E *не сводится к* F *измеримой по Бэру редукцией.*

Доказательство. Пусть напротив, борелевское отображение $\vartheta : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ (где $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — области отношений E, F) является ген. редукцией E к F, т.е. найдется ко-тощее множество $C \subseteq \mathbb{X}$, на котором ϑ — настоящая редукция $\mathsf{E} \restriction C$ к F. По эргодичности, ϑ должно быть ген. F-константой, т.е. найдется другое ко-тощее множество $C' \subseteq \mathbb{X}$ такое, что эквивалентность $\vartheta(x) \mathrel{\mathsf{F}} \vartheta(x')$ выполняется для всех $x, x' \in C'$. Множество $D = C \cap C'$ также ко-тощее, так что по условию найдутся точки $x, x' \in D$, для которых $x \mathrel{\not\mathsf{E}} x'$. Тогда выполняется и $\vartheta(x) \mathrel{\not\mathsf{F}} \vartheta(x')$, поскольку ϑ — редукция на C, следовательно, и на множестве $D \subseteq C$. С другой стороны, мы видели, что $\vartheta(x) \mathrel{\mathsf{F}} \vartheta(x')$; противоречие.

Что касается отсутствия измеримой по Бэру редукции, то достаточно воспользоваться тем фактом, что измеримая по Бэру функция непрерывна на некотором ко-тощем $\mathbf{G}_\delta$-множестве по теореме B.4. □

Доказательство теоремы 9.7 состоит из двух частей — из следующих двух лемм. Первая из них умышленно содержит в посылке более слабое, чем борелевская сводимость, требование, см. сноску 2 выше.

Лемма 9.13. *Если $\mathbb{G}$ — польская группа, $\mathbb{X}$ — ген. турбулентное польское $\mathbb{G}$-пространство, и отношение $\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}$ сводится с помощью измеримой по Бэру редукции к польскому действию S_∞, то имеется борелевская ген. редукция отношения $\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}$ к одному из отношений эквивалентности вида T_ξ.*

Другими словами, любое «турбулентное» отношение эквивалентности, сводимое при помощи измеримой по Бэру редукции к польскому действию группы S_∞, также «генерически», т.е. будучи ограниченным на котощее множество, борелевски сводимо к одному из T_ξ. Заметим, что каждое отношение эквивалентности, борелевски (но не в ген. смысле) сводимое к одному из T_ξ, само является борелевским, но это неприменимо к $\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}$ в условиях леммы, поскольку там речь идет о ген. редукции.

Вторая лемма выводит эргодичность из турбулентности.

Лемма 9.14. *Каждое отношение эквивалентности, индуцированное ген. турбулентным польским действием, является ген. T_ξ-эргодическим для каждого ξ.*

Доказательство теоремы 9.7 из лемм 9.13 и 9.14. Если в условиях теоремы отношение $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ сводимо измеримой по Бэру редукцией к польскому действию S_∞, то для $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ найдется борелевская ген. редукция к одному из отношений T_ξ по лемме 9.13. В то же время $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ является ген. T_ξ-эргодическим по лемме 9.14. Значит, $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ имеет ко-тощий класс эквивалентности по лемме 9.12. Но это противоречит ген. турбулентности из условия теоремы 9.7.

□ (теорема 9.7 из лемм 9.13 и 9.14)

Сами леммы доказываются в следующих разделах этого параграфа.

Известны и другие варианты доказательства теоремы 9.7. Например, Хъёрт прямо доказывает в [37, 3.18] с помощью иной схемы что каждое ген. турбулентное борелевское отношение эквивалентности является ген. эргодическим по отношению к любому польскому действию S_∞. Кехрис [56, § 12] доказывает, что каждое ген. T_2-эргодическое борелевское отношение эквивалентности является и ген. эргодическим по отношению к любому польскому действию S_∞, и в то же время каждое турбулентное борелевское отношение является ген. T_2-эргодическим.

9.5. Генерическая редукция к отношениям Фридмана–Стенли

Здесь доказывается лемма 9.13. Предположим, что $\mathbb{G}$ — польская группа, $\mathbb{X}$ является ген. турбулентным польским $\mathbb{G}$-пространством, а индуцированное отношение эквивалентности $\mathsf{E} = \mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ сводится к польскому действию группы S_∞ отображением, измеримым по Бэру.

Напомним, что любое польское действие группы S_∞ борелевски сводится к изоморфизму $\cong_{\mathscr{G}}$ бинарных отношений на $\mathbb{N}$ по теоремам 8.3 и 8.7. Значит, и $\mathsf{E} = \mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ сводится к $\cong_{\mathscr{G}}$ некоторой измеримой по Бэру редукцией $\rho : \mathbb{X} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$. К сожалению, здесь нельзя сразу применить результаты 8.13 и 8.14 для доказательства леммы 9.13, поскольку нет оснований считать E борелевским отношением. Это заставляет искать обходной путь.

Далее в этом разделе будут использованы некоторые обозначения из доказательства теоремы 8.10.

По теореме В.4 существует плотное $\mathbf{G}_\delta$-множество $D_0 \subseteq \mathbb{X}$, на котором ограниченная функция $\vartheta = \rho \restriction D_0$ непрерывна. По определению выполняются условия

$$x \mathsf{E} y \Longrightarrow \vartheta(x) \cong_{\mathscr{G}} \vartheta(y) \quad \text{и} \quad x \not\mathsf{E} y \Longrightarrow \vartheta(x) \not\cong_{\mathscr{G}} \vartheta(y) \tag{1}$$

для всех $x, y \in D_0$. Работая со второй импликацией, мы найдем такое плотное $\mathbf{G}_\delta$-множество $D \subseteq D_0$ и такой не зависящий от x, y ординал $\alpha < \omega_1$, для которых имеет место более сильное условие

$$x \not\mathsf{E} y \Longrightarrow \vartheta(x) \not\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda} \vartheta(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in D \tag{2}$$

(Согласно следствию 8.12 такой ординал $\alpha = \alpha_{xy}$ существует для любой пары x, y, так что здесь мы хотим снять зависимость от x, y ценой ограничения на ко-тощее подмножество.). Соединяя (2) с первой импликацией из (1) и следствием 8.12, мы получим $(\mathsf{E} \restriction D) \leq_{\mathrm{B}} (\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda})$, а потому и $(\mathsf{E} \restriction D) \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{T}_{\xi}$ по следствию 8.14. Что и доказывает лемму 9.13.

Чтобы найти D и такой ординал α, мы применим метод, включающий форсинг Коэна — о нем см. раздел Д дополнения, обозначения и результаты которого используются ниже. В частности, мы будем говорить о моделях теории $\mathbf{ZFC}^-$, введенной определением Д.1. Это удобная подтеория обычной аксиоматической теории множеств Цермело–Френкеля **ZFC**.

Определение 9.15. Фиксируем для дальнейшего счетную транзитивную модель $\mathfrak{M}$ теории $\mathbf{ZFC}^-$.

Предполагается, что пространство $\mathbb{X}$, группа $\mathbb{G}$ (групповая операция и метрика), ее рассматриваемое действие на $\mathbb{X}$, плотное $\mathbf{G}_\delta$-множество $D_0 \subseteq \mathbb{X}$, определенное выше, и ограниченная функция $\vartheta = \rho \restriction D_0$ кодируются в $\mathfrak{M}$ в смысле определения Д.2, причем для группы $\mathbb{G}$ выбранное счетное плотное подмножество $D_{\mathbb{G}}$ должно быть подгруппой, что легко обеспечить.

Вследствие ген. турбулентности действия множество всех точек $x \in \mathbb{X}$, у которых $\mathbb{G}$-орбиты турбулентны, является котощим в $\mathbb{X}$. Следовательно, оно включает некоторое плотное $\mathbf{G}_\delta$-подмножество W. Предположим, что $\mathfrak{M}$ содержит некоторый код и этого множества W. □

Из счетности модели $\mathfrak{M}$ следует, что множество $\mathtt{Gen}_{\mathbb{X}}^{\mathfrak{M}}$ всех генерических по Коэну над $\mathfrak{M}$ точек $x \in \mathbb{X}$ является плотным $\mathbf{G}_\delta$-множеством в $\mathbb{X}$. Кроме того, выполняется $\mathtt{Gen}_{\mathbb{X}}^{\mathfrak{M}} \subseteq D_0$, поскольку в наших предположениях $\mathbf{G}_\delta$-множество D_0 кодируется в $\mathfrak{M}$.

Форсинг Коэна $\mathbf{C}_{\mathbb{G}\times}$ для пространства $\mathbb{G} \times \mathbb{X}$ можно взять из определения Д.4, но проще рассмотреть совокупность всех произведений вида $G \times X$, где $G \in \mathbf{C}_{\mathbb{G}}$ а $X \in \mathbf{C}$. Аналогичным образом удобно определить и форсинг $\mathbf{C}_\times$ для пространства $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$. Все эти форсинги — счетные множества вследствие счетности самой модели $\mathfrak{M}$.

Докажем, что множество $D = \mathtt{Gen}_{\mathbb{X}}^{\mathfrak{M}}$ удовлетворяет соотношению (2) для некоторого счетного ординала α.

Предположим, что $x, y \in D$ и пара $\langle x, y\rangle$ является генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$ в пространстве $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$, причем $x \mathsf{E} y$ не имеет места. Тогда выполняется $\vartheta(x) \not\cong_{\mathscr{G}} \vartheta(y)$ согласно (1). Более того, соотношение $\vartheta(x) \not\cong_{\mathscr{G}} \vartheta(y)$ выполняется и в расширенной модели $\mathfrak{M}[x, y]$ согласно теореме абсолютности Мостовского.[3] Поэтому, применяя следствие 8.12 в модели $\mathfrak{M}[x, y]$, где по-прежнему выполняются аксиомы $\mathbf{ZFC}^-$, мы находим счетный в $\mathfrak{M}$ ординал $\alpha \in \mathtt{Ord}^{\mathfrak{M}} = \mathtt{Ord}^{\mathfrak{M}[x,y]}$ такой, что $\vartheta(x) \not\equiv_{\Lambda\Lambda}^{\alpha} \vartheta(y)$. Отсюда вследствие генеричности пары $\langle x, y\rangle$ получим по теореме Д.6 существование такого множества вида $U \times V$, что U и V принадлежат $\mathbf{C}$, $x \in U$, $y \in V$, и соотношение $\vartheta(x') \not\equiv_{\Lambda\Lambda}^{\alpha} \vartheta(y')$ выполняется для

[3] Эта теорема утверждает, что если $\mathfrak{M}$ — транзитивное множество, удовлетворяющее некоторым условиям (в частности, любое транзитивное множество, являющееся моделью теории $\mathbf{ZFC}^-$, которая здесь рассматривается), а φ — замкнутая формула класса Π^1_1 с параметрами из $\mathfrak{M}$, то φ одновременно истинна или одновременно ложна в $\mathfrak{M}$ и в универсуме всех множеств. См. об этом в [8, п. 2Г] с соответствующими ссылками, а краткое доказательство на русском языке в [4, с. 142].

Под Π^1_1-формулой здесь можно понимать (чтобы не углубляться в детальные определения) любую формулу вида $\forall z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \varphi(z)$, где формула φ составлена из элементарных формул вида $\alpha(m) = k$ при помощи логических связок и кванторов с областью пробегания $\mathbb{N}$, и где предполагается, что $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $m, k \in \mathbb{N}$. В рассматриваемом случае формула $\Phi(x, y)$, выражающая тот факт, что $\vartheta(x) \not\cong_{\mathscr{G}} \vartheta(y)$, как раз принадлежит к этому классу формул: внешний квантор $\forall z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ выражает **отсутствие** таких функций $z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, которые в суперпозиции с какой-нибудь рекурсивной биекцией $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^2$ приносят изоморфизм графов $\vartheta(x)$ и $\vartheta(y)$.

любой генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$ пары $\langle x', y'\rangle$ из множества $U \times V$.

Это последнее утверждение как свойство множества $U \times V$ уже не зависит от самих точек x, y, так что можно обозначить через α_{UV} наименьший ординал α, для которого это свойство имеет место. А поскольку $\mathbf{C}_{\mathbb{X}}$ — счетное множество, то $\alpha = \sup_{U,V\in\mathbf{C}_{\mathbb{X}}} \alpha_{UV}$ — снова счетный ординал. (На самом деле $\alpha < \omega_1^{\mathfrak{M}[x,y]}$, но это здесь не существенно.) Итак, по построению, условие $\vartheta(x) \not\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda} \vartheta(y)$ выполняется для **каждой** генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$ пары $\langle x, y\rangle \in D^2$ такой, что $x \not\mathsf{E}\, y$.

Отсюда докажем, что $\vartheta(x) \not\equiv^{\alpha}_{\Lambda\Lambda} \vartheta(y)$ выполняется всякий раз, когда точки $x, y \in D$ удовлетворяют $x \not\mathsf{E}\, y$ (но не обязательно образуют генерическую по Коэну пару над $\mathfrak{M}$). И тогда получится искомое соотношение (2).

Нам потребуется

Лемма 9.16. *Если $\mathfrak{N}$ — счетная транзитивная модель* $\mathbf{ZFC}^-$, *включающая $\mathfrak{M}$, точка $x \in \mathbb{X} \cap \mathfrak{N}$ — генерическая по Коэну над $\mathfrak{M}$, а элемент $g \in \mathbb{G}$ — генерический по Коэну над $\mathfrak{N}$, то точка $x' = g \cdot x$ — также генерическая по Коэну над $\mathfrak{N}$.*

Доказательство. Отметим, что в силу генеричности точка x принадлежит упомянутому в определении 9.15 множеству W, так что ее $\mathbb{G}$-орбита $C_x = \{g' \cdot x : g' \in G\}$ турбулентна.

Теперь рассмотрим произвольное плотное открытое множество $X \subseteq \mathbb{X}$, имеющее код в $\mathfrak{N}$ в смысле определения 9.15. Тогда множество $H = \{g' \in \mathbb{G} : g' \cdot x \in X\}$ также открыто и имеет код в $\mathfrak{N}$ (поскольку действие непрерывно и $x \in \mathfrak{N}$), и даже плотно в $\mathbb{G}$, что легко следует из упражнения 9.3. Поэтому $g \in H$, и далее $g \cdot x \in X$, что и требовалось. □

Чтобы применить лемму, рассмотрим произвольную счетную транзитивную модель $\mathfrak{N}$ теории $\mathbf{ZFC}^-$, содержащую x, y, и все множества из $\mathfrak{M}$. Эта модель может содержать больше ординалов, чем $\mathfrak{M}$, поскольку $\langle x, y\rangle$ не обязательно является генерической парой над $\mathfrak{M}$ в любом смысле, однако понятно, что $\mathfrak{M}[y] \subseteq \mathfrak{N}$ и, конечно, $\mathfrak{M}[x] \subseteq \mathfrak{N}$. Далее, рассмотрим произвольный элемент $g \in \mathbb{G}$, генерический по Коэну над $\mathfrak{N}$.

По лемме точка $x' = g{\cdot}x$ — генерическая по Коэну над $\mathfrak{N}$, следовательно, и над меньшей моделью $\mathfrak{M}[y]$. Более того, имеем $x \mathsf{E} x'$ поскольку $\mathsf{E} = \mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$. Значит $x' \not\mathsf{E}\, y$. Однако точка y — генерическая по Коэну над $\mathfrak{M}$, а x' — над $\mathfrak{M}[y]$. Поэтому пара $\langle x', y\rangle$ является генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$ по теореме произведения форсингов (теорема Д.7). Значит $\vartheta(x') \not\equiv_{\Lambda\Lambda}^{\alpha} \vartheta(y)$ по выбору ординала α. Но, с другой стороны, из $x' \mathsf{E}\, x$ следует $x \cong_{\mathscr{G}} x'$ согласно (1) и далее $\vartheta(x) \equiv_{\Lambda\Lambda}^{\alpha} \vartheta(x')$ согласно следствию 8.12. Окончательно имеем $\vartheta(x') \not\equiv_{\Lambda\Lambda}^{\alpha} \vartheta(y)$, что и требовалось.

□ (лемма 9.13)

9.6. Эргодичность турбулентных действий

Здесь мы начинаем доказательство леммы 9.14. На самом деле, будет доказано некоторое более сильное свойство, чем ген. эргодичность из § 9.4. В следующем определении предполагается, что F — отношение эквивалентности на польском пространстве $\mathbb{X}$.

Определение 9.17. Польское действие (польской) группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{X}$, и индуцированное им отношение $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ называются *локально генерически* (*лок. ген.* для краткости) F-эргодическими, если отношение эквивалентности $\sim_G^X$ (локальные G-орбиты на X) является генерически F-эргодическим всякий раз, когда $X \subseteq \mathbb{X}$ и $G \subseteq \mathbb{G}$ — непустые открытые множества, G содержит нейтральный элемент $1_{\mathbb{G}}$, и локальная орбита $\mathscr{O}(x, X, G)$ плотна в X для ко-тощего (в X) множества точек $x \in X$. □

Если выполняется дополнительное условие о том, что для исходного действия $\mathbb{G}$ на $\mathbb{X}$ объединение плотных в $\mathbb{X}$ полных орбит $[x]_{\mathbb{G}} = \mathscr{O}(x, \mathbb{X}, \mathbb{G})$ — ко-тощее множество, то отношение $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ является, очевидно, ген. F-эргодическим. Указанное дополнительное условие входит в определение ген. турбулентности, так что наследственная ген. эргодичность ген. турбулентных действий влечет обычную ген. эргодичность.

Упражнение 9.18. Используя лемму 9.11, докажите, что если отношение E является лок. ген. F-эргодическим и $\mathsf{F}' \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, то E будет и лок. ген. F'-эргодическим. □

Теорема 9.20 также усиливает лемму 9.14 в том отношении, что совокупность тех отношений эквивалентности, эргодичность по отношению к которым утверждается, будет шире. Напомним, что отношения T_ξ, о которых идет речь в лемме 9.14, построены трансфинитной индукцией с помощью операций счетной степени и дизъюнктного объединения. Поэтому все они принадлежат следующему семейству $\mathscr{F}_0$:

Определение 9.19. Через $\mathscr{F}_0$ обозначим наименьшее семейство отношений эквивалентности, содержащее $\Delta_{\mathbb{N}}$ (равенство на $\mathbb{N}$) и замкнутое относительно операций **o1–o4** из §4.1. □

Таким образом, лемма 9.14 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 9.20. *Если* $\mathsf{F} \in \mathscr{F}_0$, $\mathbb{G}$ *— польская группа, а* $\mathbb{X}$ *— ген. турбулентное польское* $\mathbb{G}$*-пространство, то отношение* $\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}$ *является лок. ген.* F*-эргодическим. Поэтому оно является ген.* F*-эргодическим, и тогда борелевски несводимым к* F *по лемме 9.12.*

Замечание 9.21. Благодаря тому, что в список операций **o1–o4** входит произведение Фубини, семейство $\mathscr{F}_0$ включает борелевские отношения эквивалентности, которые имеют мало общего с отношениями вида T_ξ. Среди них имеются и отношения, не допускающие классификацию конечными структурами, в частности, все отношения эквивалентности вида $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$, где $\mathscr{I}$ — один из идеалов Фреше, или неразложимых идеалов, или идеалов Вейсса. Мы не будем углубляться в рассмотрение этих идеалов, о них см., например, [13] или [25]. Отметим лишь, что из теоремы 9.20 следует, что *никакое ген. турбулентное отношение эквивалентности не сводится борелевски ни к одному из идеалов Фреше или неразложимых идеалов, или идеалов Вейсса.* □

Доказательство теоремы 9.20 проводится трансфинитной индукцией по построению отношения F с помощью базовых операций **o1–o4** из §4.1. Это займет несколько следующих разделов.

9.6.1. База индукции

Докажем, что в предположениях теоремы отношение $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ является лок. ген. $\Delta_{\mathbb{N}}$-эргодическим. Рассмотрим пару открытых непустых множеств $X \subseteq \mathbb{X}$ и $G \subseteq \mathbb{G}$, $1_{\mathbb{G}} \in G$. Допустим, что локальная орбита $\mathscr{O}(x, X, G)$ плотна в X для ко-тощего в X множества точек $x \in X$. Нужно доказать, что $\sim_G^X$ — генерически $\Delta_{\mathbb{N}}$-эргодическое отношение.

Рассмотрим борелевскую ген. $(\sim_G^X \to \Delta_{\mathbb{N}})$-инвариантную функцию $\vartheta : X \to \mathbb{N}$. Предположим, что напротив, ϑ не является ген. $\Delta_{\mathbb{N}}$-константой. Напомним, что любая борелевская функция непрерывна на ко-тощем множестве по теореме B.4. Поэтому существуют непустые открытые множества $U_1, U_2 \subseteq X$, натуральные числа $\ell_1 \neq \ell_2$ и ко-тощее множество $D \subseteq X$ такие, что $\vartheta(x) = \ell_1$ для всех $x \in D \cap U_1$, $\vartheta(x) = \ell_2$ для всех $x \in D \cap U_2$ и ограниченная функция $\vartheta \restriction D$ является (строго, т.е. не генерически) $(\sim_G^X \to \Delta_{\mathbb{N}})$-инвариантной. Лемма 9.8 приносит нам пару точек $x_1 \in U_1 \cap D$ и $x_2 \in U_2 \cap D$ таких, что $x_1 \sim_G^X x_2$. Противоречие с инвариантностью функции ϑ на D.

9.6.2. Индуктивный шаг счетной степени

Чтобы выполнить этот шаг в доказательстве теоремы 9.20, допустим, что

- $\mathbb{X}$ — ген. турбулентное польское $\mathbb{G}$-пространство, F — борелевское отношение эквивалентности на польском пространстве $\mathbb{Y}$ и действие $\mathbb{G}$ на $\mathbb{X}$ является лок. ген. F-эргодическим.

Докажем, что тогда исходное действие будет и лок. ген. F^+-эргодическим.

Фиксируем непустое открытое множество $X_0 \subseteq \mathbb{X}$ и непустую окрестность G_0 элемента $1_{\mathbb{G}}$ в $\mathbb{G}$, такие, что локальная орбита $\mathscr{O}(x, X_0, G_0)$ плотна в X_0 для ко-тощего в X_0 множества точек $x \in X_0$. Рассмотрим борелевскую функцию $\vartheta : X_0 \to \mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$

непрерывную и $(\sim^{X_0}_{G_0} \to \mathsf{F}^+)$-инвариантную на плотном $\mathbf{G}_\delta$-множестве $D_0 \subseteq X_0$. По определению имеем

$$x \sim^{X_0}_{G_0} x' \implies \forall\, k\; \exists l\; \big(\vartheta_k(x)\; \mathsf{F}\; \vartheta_l(x')\big) \qquad \text{для всех } \; x, x' \in D_0\,,$$

где $\vartheta_k(x) = \vartheta(x)(k)$, $\vartheta_k : X_0 \to \mathbb{Y}$. Сверх того, в соответствии с выбором X_0 и G_0 можно считать, что локальная орбита $\mathscr{O}(x, X_0, G_0)$ плотна в X_0 для всех точек $x \in D_0$.

Нужно доказать, что ϑ является ген. F^+-константой.

Здесь нам опять будут нужны форсинг Коэна для пространства $\mathbb{X}$ и форсинг Коэна для группы $\mathbb{G}$. Фиксируем счетную транзитивную модель $\mathfrak{M}$ теории $\mathbf{ZFC}^-$, которая содержит все рассматриваемые объекты или их коды, в частности, коды польских метрик $\mathbb{X}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{Y}$, борелевского отображения ϑ, борелевского отношения эквивалентности F и плотного $\mathbf{G}_\delta$-множества D_0, на котором функция ϑ непрерывна и $(\sim^{X_0}_{G_0} \to \mathsf{F}^+)$-инвариантна — аналогично тому, как это сделано в § 9.5. Раз множество D_0 кодируется в $\mathfrak{M}$, любая генерическая над $\mathfrak{M}$ точка X_0 принадлежит D_0. Поэтому во-первых, функция ϑ инвариантна на генерических точках $x \in X_0$, и во-вторых, локальная орбита $\mathscr{O}(x, X_0, G_0)$ плотна в X_0, какова бы ни была генерическая по Коэну над $\mathfrak{M}$ точка $x \in X_0$.

Лемма 9.22. *Если $k \in \mathbb{N}$ и $U_0 \subseteq X_0$ — открытое непустое множество, то найдутся число l и непустые открытые множества $U \subseteq U_0$ и $H \subseteq G_0$ такие, что для любой генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$ пары $\langle g, x\rangle \in H \times U$ выполняется $g \cdot x \in X_0$ и $\vartheta_k(x)\; \mathsf{F}\; \vartheta_l(g \cdot x)$.*

Доказательство. Для начала возьмем любую генерическую по Коэну над $\mathfrak{M}$ точку $x_0 \in U_0$. Поскольку $1_{\mathbb{G}} \cdot x_0 = x_0 \in X_0$, а действие непрерывно, найдется окрестность $U_1 \subseteq U_0$ точки x_0 и окрестность $G_1 \subseteq G_0$ элемента $1_{\mathbb{G}}$ такие, что $G_1 \cdot U_1 \subseteq U_0$, т.е. $g \cdot x \in X_0$ для всех $g \in G_1$ и $x \in U_1$.

Теперь возьмем произвольную генерическую по Коэну над $\mathfrak{M}$ пару $\langle g, x\rangle$ из $G_1 \times U_1$. Тогда $g \cdot x \in U_0$. По теореме о произведении форсингов, точка x — также генерическая над $\mathfrak{M}$, а элемент g становится генерическим по Коэну над $\mathfrak{M}[x]$. Отсюда следует, что точка $g \cdot x$ является генерической по Коэну над $\mathfrak{M}[x]$, тем более, над $\mathfrak{M}$ по лемме 9.16.

Очевидно $x \sim^{X_0}_{G_0} g \cdot x$, и поэтому вследствие инвариантности отображения ϑ на генерических точках, имеет место $\vartheta(x) \mathsf{F}^+ \vartheta(g \cdot x)$. Значит найдется индекс l такой, что выполняется $\vartheta_k(x) \mathsf{F} \vartheta_l(g \cdot x)$. Поэтому существуют коэновские «условия», т.е. непустые открытые множества $U \subseteq U_1$ и $H \subseteq G_1$ такие, что $x \in U$, $g \in H$, и соотношения $g \cdot x \in X_0$ и $\vartheta_k(x) \mathsf{F} \vartheta_l(g \cdot x)$ справедливы для любой генерической над $\mathfrak{M}$ точки $\langle g, x \rangle \in H \times U$. $\square$

Теперь произвольно выберем k и U_0 как в лемме и рассмотрим такие l, U, H, которые существуют по этой лемме. Раз множество H открыто в $\mathbb{G}$, найдутся элемент $h_0 \in H \cap \mathfrak{M}$ и симметрическая, т.е. $G = G^{-1}$, окрестность $G \subseteq G_1$ элемента $1_{\mathbb{G}}$, удовлетворяющие $h_0 G \subseteq H$.

Лемма 9.23 (ключевой момент!). *Если точки $x, x' \in U$ являются генерическими по Коэну над $\mathfrak{M}$ и $x \sim^{U}_{G} x'$, то $\vartheta_k(x) \mathsf{F} \vartheta_k(x')$.*

Доказательство. Используем индукцию по наименьшему числу $n = n_{xx'}$ такому, что существуют элементы $g_1, \ldots, g_n \in G$, для которых

$$x' = g_n g_{n-1} \ldots g_1 \cdot x \quad \text{и} \quad g_k \ldots g_1 \cdot x \in U' \quad \text{для всех} \quad k \leq n\,. \quad (1)$$

Предположим (база индукции), что $n_{xx'} = 1$, т.е. $x' = g \cdot x$ для какого-то элемента $g \in G$. Пусть $\mathfrak{N}$ — произвольная счетная транзитивная модель теории $\mathbf{ZFC}^-$, содержащая x, x', g и все множества из $\mathfrak{M}$. Возьмем любой элемент $h \in H$, генерический по Коэну над моделью $\mathfrak{N}$ и близкий к h_0 достаточно для того, чтобы элемент $h' = hg^{-1}$ принадлежал к H (заметим, что $h_0 g^{-1} \in H$ по выбору G). Тогда h является генерическим и над $\mathfrak{M}[x]$, и поэтому пара $\langle h, x \rangle \in H \times U$ также является генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$ по теореме о произведении форсингов. Значит, по выбору H выполняется $h \cdot x \in X_0$ и $\vartheta_k(x) \mathsf{F} \vartheta_l(h \cdot x)$.

Упражнение 9.24. Докажите, что $h' = hg^{-1}$ также является генерическим по Коэну над $\mathfrak{N}$, а тогда и над $\mathfrak{M}[x']$ элементом из $\mathbb{G}$, используя то, что g, а тогда и g^{-1} принадлежат $\mathfrak{N}$. $\square$

Кроме того, $h' \cdot x' = hg^{-1} \cdot (g \cdot x) = h \cdot x$, так что $h' \cdot x' \in U$. Значит, как и выше, выполняется $\vartheta_k(x') \mathsf{F} \vartheta_l(h' \cdot x')$, откуда следует

$\vartheta_k(x')\,\mathsf{F}\,\vartheta_l(h\cdot x)$, и наконец, $\vartheta_k(x)\,\mathsf{F}\,\vartheta_k(x')$, так как F — отношение эквивалентности.

Теперь индуктивный шаг. Докажем утверждение (1) для какого-то $n \geq 2$ при условии, что оно выполнено для $n-1$. Возьмем элемент $g_1' \in G$, снова генерический по Коэну над заранее выбранной счетной транзитивной моделью $\mathfrak{N}$ теории $\mathbf{ZFC}^-$, содержащей x, x', g_1, g_2 и все множества из $\mathfrak{M}$ и близкий к g_1 достаточно для того, чтобы элемент $g_2' = g_2\, g_1\, {g_1'}^{-1}$ всё ещё принадлежал к G, а точка $x^* = g_1' \cdot x$ — к множеству U. Заметим, что элемент g_2' является генерическим по Коэну над $\mathfrak{N}$ (ср. с упражнением 9.24), а потому точка x^* — генерическая по Коэну над $\mathfrak{M}$ по лемме 9.16. Кроме того, выполняется $n_{x^*x'} \leq n-1$, поскольку $g_2' \cdot x^* = g_2\, g_1 \cdot x$. Остается применить индуктивное предположение для вывода $\vartheta_k(x^*)\;\mathsf{F}\;\vartheta_k(x')$ и результат для $n_{xx'} = 1$ для вывода $\vartheta_k(x)\;\mathsf{F}\;\vartheta_k(x^*)$. $\square$ (лемма)

Итак, доказано, что для любого k и любого непустого открытого $U_0 \subseteq X_0$ существуют непустые открытые множества $U \subseteq U_0$ и $G \subseteq G_0$ такие, что $1_{\mathbb{G}} \in G$ и функция ϑ_k является ген. $(\sim_G^U \to \mathsf{F})$-инвариантной на U. По лемме 9.9 найдется такое непустое открытое $U' \subseteq U$, что локальная орбита $\mathscr{O}(x, U', G)$ плотна в U для ко-тощего в U множества точек $x \in U$. Тогда функция ϑ_k останется ген. $(\sim_G^{U'} \to \mathsf{F})$-инвариантной на U' : в самом деле, очевидно, $x \sim_G^{U'} x'$ влечет $x \sim_G^U x'$ при $x, x' \in U' \subseteq U$. Тогда вследствие лок. ген. F-эргодичности отображение ϑ_k оказывается ген. F-константой на U'. Поэтому существуют плотное $\mathbf{G}_\delta$-множество $D \subseteq U'$ и точка $y \in \mathbb{Y}$ такие, что имеет место $\vartheta_k(x)\;\mathsf{F}\;y$ для всех $x \in D$.

Применив это рассуждение ко всем k и всевозможным открытым $U_0 \subseteq X_0$ из некоторого счетного семейства, образующего базу топологии пространства $\mathbb{X}$, мы находим ко-тощее в X_0 множество $D \subseteq X_0$ и счетное множество $Y = \{y_j : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Y}$ такие, что для любого k и любого $x \in D$ имеется натуральное j, удовлетворяющее $\vartheta_k(x)\,\mathsf{F}\,y_j$. Положим $\eta(x) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{j : \vartheta_k(x)\,\mathsf{F}\,y_j\}$. Тогда для любых двух точек $x, x' \in D$ соотношение $\vartheta(x)\;\mathsf{F}^+\;\vartheta(x')$ эквивалентно равенству $\eta(x) = \eta(x')$. Поэтому по инвариантности функции ϑ имеем:

$$x \sim_{G_0}^{U_0} x' \implies \eta(x) = \eta(x') \qquad \text{для всех } x, x' \in D. \tag{2}$$

Остается проверить, что η — константа на ко-тощем подмножестве в D.

Действительно, в противном случае существует пара непустых открытых множеств U_1, $U_2 \subseteq X_0$, число $j \in \mathbb{N}$, и ко-тощее множество $D' \subseteq D$ такие, что $j \in \eta(x_1)$ и $j \notin \eta(x_2)$ для всех $x_1 \in D \cap U_1$ и $x_2 \in D \cap U_2$. В этой ситуации лемма 9.8 влечет противоречие с (2) как и в конце п. 9.6.1.

□ (индуктивный шаг счетной степени в теореме 9.20)

9.6.3. Индуктивный шаг произведения Фубини

Чтобы выполнить этот шаг в доказательстве теоремы 9.20, допустим, что

- $\mathbb{X}$ — ген. генерически турбулентное польское $\mathbb{G}$-пространство, для каждого k, отношение F_k — борелевское отношение эквивалентности на польском пространстве $\mathbb{Y}_k$, и польское действие (польской) группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{X}$ является лок. ген. F_k-эргодическим при любом k.

Докажем, что исходное действие лок. ген. F-эргодично, где $\mathsf{F} = \prod_k \mathsf{F}_k \,/\, \mathtt{Fin}$ — соответственно, борелевское отношение эквивалентности на $\mathbb{Y} = \prod_k \mathbb{Y}_k$.

Снова рассматривается непустое открытое множество $X_0 \subseteq \mathbb{X}$, его плотное $\mathbf{G}_\delta$-подмножество $D_0 \subseteq\in X_0$, окрестность G_0 элемента $1_{\mathbb{G}}$ в $\mathbb{G}$, и борелевская функция $\vartheta : U_0 \to \mathbb{Y}$ такие, что орбита $\mathscr{O}(x, X_0, G_0)$ плотна в X_0 для всех $x \in D_0$, и функция ϑ непрерывна на D_0 и $(\sim_{G_0}^{X_0} \to \mathsf{F})$-инвариантна на D_0, так что

$$x \sim_{G_0}^{X_0} y \implies \exists k_0 \, \forall k \geq k_0 \left(\vartheta_k(x) \, \mathsf{F}_k \, \vartheta_k(y)\right) \quad \text{для всех} \quad x, y \in D_0\,,$$

где опять $\vartheta_k(x) = \vartheta(x)(k)$. Докажем, что ϑ является ген. F-константой.

Для этого фиксируем счетную транзитивную модель $\mathfrak{M}$ теории $\mathbf{ZFC}^-$ со свойствами, аналогичными указанным выше в п. 9.6.2.

Рассмотрим какое-нибудь непустое открытое $U_0 \subseteq X_0$. То же рассуждение, использующее результат 9.16 и инвариантность отображения ϑ, что и в п. 9.6.2, приносит нам непустые открытые множества $U \subseteq U_0$ и $H \subseteq G_0$ и число k_0 такие, что условия $g \cdot x \in X_0$ и $\vartheta_k(x) \mathsf{F}_k \vartheta_k(g \cdot x)$ выполнены для всех $k \geq k_0$ и для каждой генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$ точки $\langle g, x\rangle \in U \times H$. Раз H открыто, найдутся элемент $h_0 \in H \cap \mathfrak{M}$ и симметрическая окрестность $G \subseteq G_0$ элемента $1_{\mathbb{G}}$ такие, что $h_0 G \subseteq H$.

Следующая ключевая лемма аналогична лемме 9.23, и её доказательство оставлено читателю в качестве **упражнения**.

Лемма 9.25. *Если $k \geq k_0$, точки $x, y \in U$ — генерические по Коэну над $\mathfrak{M}$ и выполняется $x \sim_G^U y$, то $\vartheta_k(x) \mathsf{F}_k \vartheta_k(y)$.* □

Таким образом, для любого непустого открытого $U_0 \subseteq X_0$ существуют число k_0, открытое непустое $U \subseteq U_0$ и окрестность $G \subseteq G_0$ элемента $1_{\mathbb{G}}$ в $\mathbb{G}$ такие, что каждая функция ϑ_k при $k \geq k_0$ является ген. $(\sim_G^U \to \mathsf{F}_k)$-инвариантной на U. По лемме 9.9 можно предполагать, что орбиты $\mathscr{O}(x, U, G)$ — плотные для ко-тощего в U множества точек $x \in U$. Теперь вследствие лок. ген. F_k-эргодичности каждое отображение ϑ_k с $k \geq k_0$ есть ген. F_k-константа на таком множестве U. Поэтому и само ϑ есть ген. F-константа на U, поскольку $\mathsf{F} = \prod_k \mathsf{F}_k / \mathsf{Fin}$. Остается показать, что эти функции-константы F-эквивалентны друг другу.

Пусть напротив, существует пара непустых открытых множеств $U_1, U_2 \subseteq X_0$ и пара точек y, y' в $\mathbb{Y}$ такие, что $y \not\mathsf{F} y'$ и условия $\vartheta(x) \mathsf{F} y$ и $\vartheta(x') \mathsf{F} y'$ выполняются для ко-тощего множества точек $x \in U_1$ и $x' \in U_2$. Отсюда выводится противоречие так же, как и в конце раздела 9.6.2 о шаге счетной степени.

□ (индуктивный шаг произведения Фубини в теореме 9.20)

9.6.4. Два оставшихся индуктивных шага

Чтобы закончить доказательство теоремы 9.20, наметим выполнение индуктивных шагов, соответствующих операциям **o1** и **o2** из §4.1, оставив подробные выкладки читателю в качестве **упражнения**.

Счетное объединение. Предположим, что $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \mathsf{F}_3, \ldots$ — борелевские отношения эквивалентности на польском пространстве $\mathbb{Y}$ и $\mathsf{F} = \bigcup_k \mathsf{F}_k$ — отношение эквивалентности, а польское ген. турбулентное действие группы $\mathbb{G}$ на пространстве $\mathbb{X}$ является лок. ген. F_k-эргодическим для каждого k. Докажем, что это действие будет и лок. ген. F-эргодическим.

Рассмотрим непустое открытое множество $X_0 \subseteq \mathbb{X}$ и окрестность G_0 элемента $1_{\mathbb{G}}$ в $\mathbb{G}$ такие, что орбита $\mathscr{O}(x, X_0, G_0)$ плотна в X_0 для всех x из некоторого $\mathbf{G}_\delta$-множества $D_0 \subseteq X_0$, ко-тощего в X_0, а $\vartheta : X_0 \to \mathbb{Y}$ — борелевское отображение, непрерывное и $(\sim_{G_0}^{X_0} \to \mathsf{F})$-инвариантное на D_0. Из инвариантности следует, что для любого открытого непустого $U_0 \subseteq X_0$ существуют число k и открытые непустые $U \subseteq U_0$ и $H \subseteq G_0$ такие, что $g \cdot x \in X_0$ и $\vartheta(x) \mathrel{\mathsf{F}_k} \vartheta(g \cdot x)$ имеет место для каждой генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$ пары $\langle g, x \rangle \in H \times U$, где счетная транзитивная модель $\mathfrak{M}$ теории $\mathbf{ZFC}^-$ выбрана так, как это сделано для индуктивных шагов счетной степени и произведения Фубини.

Как и выше, можно найти элемент $h_0 \in H \cap \mathfrak{M}$ и симметрическую окрестность $G \subseteq G_0$ элемента $1_{\mathbb{G}}$ такие, что $h_0 G \subseteq H$. Аналогично леммам 9.23 и 9.25 мы имеем $\vartheta(x) \mathrel{\mathsf{F}_k} \vartheta(x')$ для любой пары генерических по Коэну над моделью $\mathfrak{M}$ точек x, $x' \in U$, удовлетворяющих $x \sim_G^U x'$. Тогда по эргодичности отображение ϑ является F_k-константой, следовательно, и F-константой на котощем подмножестве U. Остается показать, что эти F-константы F-эквивалентны друг другу, что устанавливается тем же способом, что и в конце п. 9.6.2.

Счетное произведение. Предположим, что F_k — борелевские отношения эквивалентности на польских пространствах $\mathbb{Y}_k$. Тогда $\mathsf{F} = \prod_k \mathsf{F}_k$ есть отношение эквивалентности на пространстве $\mathbb{Y} = \prod_k \mathbb{Y}_k$. Для любого отображения $\vartheta : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ необходимым и достаточным условием ген. $(\mathsf{E} \to \mathsf{F})$-инвариантности, где E — какое-то отношение эквивалентности на $\mathbb{X}$, является то, что каждое координатное отображение $\vartheta_k(x) = \vartheta(x)(k)$ ген. $(\mathsf{E} \to \mathsf{F}_k)$-инвариантно. Используя это, нетрудно выполнить и этот индуктивный шаг.

$\square$ (теорема 9.20, лемма 9.14, теорема 9.7)

9.7. Приложение к идеалам

Мы хотим применить результаты этого раздела для доказательства того, что отношения эквивалентности, порожденные многими борелевскими идеалами (например, почти всеми полизируемыми идеалами) борелевски не сводятся к действиям группы перестановок S_∞, т.е. не классифицируются счетными структурами. По счастью, трудную задачу проверки турбулентности идеалов с целью воспользоваться теоремой 9.7 можно обойти с помощью теоремы 9.20 и ссылки на уже установленную турбулентность суммируемых идеалов.

Назовем *специальным* любой идеал $\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ такой, что найдется последовательность вещественных чисел $r_n > 0$ с $\{r_n\} \to 0$, удовлетворяющая условию $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \subseteq \mathscr{Z}$. Напомним, что идеал на $\mathbb{N}$ называется нетривиальным, если он содержит все конечные подмножества $\mathbb{N}$, но не содержит само $\mathbb{N}$. Тогда он не содержит ни одного ко-конечного множества.

Упражнение 9.26. Докажите, что для идеалов вида $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ нетривиальность означает, что $\sum_n r_n = +\infty$. □

Напомним, что индуктивное семейство отношений эквивалентности $\mathscr{F}_0$ введено определением 9.19.

Теорема 9.27. *Допустим, что $\mathscr{Z}$ — нетривиальный специальный борелевский идеал на $\mathbb{N}$, и отношение F принадлежит семейству $\mathscr{F}_0$. Тогда отношение $\mathsf{E}_{\mathscr{Z}}$ является ген. F-эргодическим, следовательно, оно борелевски несводимо к F по лемме 9.12.*

Доказательство. Второе утверждение следует по той причине, что все $\mathsf{E}_{\mathscr{Z}}$-классы эквивалентности являются тощими подмножествами $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ вследствие нетривиальности $\mathscr{Z}$.

По определению найдется последовательность $\{r_k\} \to 0$ положительных вещественных чисел r_n такая, что $\sum_n r_n = +\infty$ и $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \subseteq \mathscr{Z}$. В этой ситуации достаточно доказать ген. F-эргодичность отношения эквивалентности $\mathsf{S}_{\{r_n\}} = \mathsf{E}_{\mathscr{S}_{\{r_n\}}}$. В самом деле, из включения $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \subseteq \mathscr{Z}$ следует, что $\mathsf{S}_{\{r_n\}} \subseteq \mathsf{E}_{\mathscr{Z}}$, т.е. $x \,\mathsf{S}_{\{r_n\}}\, y$ влечет $x \mathsf{E}_{\mathscr{Z}} y$, а потому любая ген. $(\mathsf{E}_{\mathscr{Z}} \to \mathsf{F})$-инвариантная функция является и ген. $(\mathsf{S}_{\{r_n\}} \to \mathsf{F})$-инвариантной (причем на том же ко-тощем множестве). С другой стороны, свойство «быть ген. F-константой» вообще не зависит от выбора между $\mathsf{S}_{\{r_n\}}$ и $\mathsf{E}_{\mathscr{Z}}$.

Однако, согласно теореме 9.5 Δ-действие идеала $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, т.е. то, которое индуцирует отношение $\mathsf{S}_{\{r_n\}}$, является польским и ген. турбулентным. Теперь теорема 9.20 приносит искомую F-эргодичность отношения $\mathsf{S}_{\{r_n\}}$, а тогда и $\mathsf{E}_{\mathscr{Z}}$ согласно вышесказанному. □

Следующий результат возвращает нас к обсуждению в конце §5.2.

Следствие 9.28. *Отношения эквивалентности* c_0 *и* E_2 *борелевски несводимы ни к какому отношению* F *из* $\mathscr{F}_0$, *в частности, к отношению* T_2.

Доказательство. По леммам 5.10 и 5.11 и теореме 9.27 достаточно убедиться, что идеалы $\mathscr{Z}_0$ (идеал плотности 0) и $\mathscr{S}_{\{\frac{1}{n+1}\}}$ – специальные. Второй из них специален прямо по определению. Что касается первого, то это следует из упражнения 2.6. □

Докажем теперь теорему, согласно которой среди идеалов, $\le_{\mathsf{B}}$-мажорируемых отношениями из $\mathscr{F}_0$, очень мало полизируемых — в сущности, всего три идеала с точностью до изоморфизма, а именно, Fin, $\mathrm{Fin} \oplus \mathscr{P}(\mathbb{N})$ и сам идеал $\mathscr{I}_3$. Вообще семейство $\mathscr{F}_0$ содержит много отношений эквивалентности $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$, порожденных *неполизируемыми* борелевскими идеалами $\mathscr{I}$, например, идеалами Фреше из §2.5. Аналогичный результат был получен Кехрисом в [53], но для случая, когда вместо сводимости к отношению из $\mathscr{F}_0$ посылка содержала сводимость к борелевскому действию группы S_∞.

Напомним, что для идеалов $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ на множествах A, B изоморфизм $\mathscr{I} \cong \mathscr{J}$ означает существование биекции A на B, переводящей $\mathscr{I}$ в $\mathscr{J}$. О понятии тривиальной вариации см. определение 7.1.

Теорема 9.29. *Если* $\mathscr{I}$ *— нетривиальный борелевский полизируемый идеал на* $\mathbb{N}$ *и* $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \le_{\mathsf{B}} \mathsf{F}$ *для некоторого отношения* F *из семейства* $\mathscr{F}_0$, *то* $\mathscr{I}$ *изоморфен либо* $\mathscr{I}_3$, *либо тривиальной вариации идеала* Fin.

В каждом из трех указанных случаев имеет место $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$.

Доказательство. По теореме 7.12 имеем $\mathscr{I} = \mathtt{Exh}_\varphi$ для подходящей l.s.c. субмеры φ на $\mathbb{N}$. Можно не ограничивая общности предполагать, что $\varphi(x) \leq 1$ для всех $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Иначе полагаем $\varphi'(x) = \mathtt{min}\{1, \varphi(x)\}$.

Рассмотрим множества $U_n = \{k : \varphi(\{k\}) \leq \frac{1}{n}\}$ и $U_\infty = \{k : \varphi(\{k\}) = 0\}$. Тогда $U_{n+1} \subseteq U_n$ для всех n. Из определения l.s.c. субмеры следует, что $\varphi(U_\infty) = 0$, откуда $\varphi(x) = \varphi(x \smallsetminus U_\infty)$ для всех $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Утверждается, что $\mathtt{lim}_{n\to\infty} \varphi(U_n) = 0$.

Предположим противное. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\varphi(U_n) > \varepsilon$ для всех n. По определению множеств U_n для всякого m существует индекс $n \geq m$ такой, что $U_n \subseteq [m, \infty) \cup U_\infty$, и тогда всё ещё $\varphi(U_n \smallsetminus m) > \varepsilon$. Значит, раз φ является l.s.c. субмерой, то для такого n найдется значение $n' \geq n$, удовлетворяющее $\varphi(U_n \cap [m, n')) > \varepsilon$. Это позволяет подобрать последовательность $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ и для всякого l конечное множество $w_j \subseteq U_{n_j} \smallsetminus U_{n_{j+1}}$ так, что $\varphi(w_j) > \varepsilon$. Тогда множества w_j попарно дизъюнктны. Следовательно, их объединение $W = \bigcup_j w_j$ обладает тем свойством, что любой его «хвост» $W \cap [n, \infty)$ целиком включает одно (на самом деле все кроме конечного числа) из множеств w_j. Тем самым, $W \notin \mathscr{I} = \mathtt{Exh}_\varphi$. По этой причине идеал $\mathscr{J} = \mathscr{I} \cap \mathscr{P}(W)$ на W нетривиален. Также по построению (поскольку при любом n все, кроме конечного числа, множества w_l удовлетворяют $w_l \subseteq W$) выполняется $\{\varphi(\{k\})\}_{k\in W} \to 0$ и $\sum_k \varphi(\{k\}) = +\infty$.

Понятно, что для любых множеств $x, y \subseteq W$ имеет место эквивалентность $x \,\Delta\, y \in \mathscr{I} \iff x \,\Delta\, y \in \mathscr{J}$. Это означает, что имеет место $\mathsf{E}_{\mathscr{J}} \leq_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ с помощью тождественного отображения.

Заметим, что неравенство $\varphi(y) \leq \sum_{k\in y} \varphi(\{k\})$ справедливо для любого $y \subseteq \mathbb{N}$, поскольку φ — l.s.c. субмера. Отсюда легко следует, что любое множество $x \subseteq W$ такое, что $\sum_{k\in x} \varphi(\{k\}) < +\infty$, принадлежит идеалу $\mathscr{I}$, или, что равносильно, идеалу $\mathscr{J}$. Значит, последний изоморфен специальному идеалу через сохраняющую порядок биекцию W на $\mathbb{N}$. Поэтому отношение $\mathsf{E}_{\mathscr{J}}$ борелевски несводимо ни к одному отношению эквивалентности из семейства $\mathscr{F}_0$ по теореме 9.27. То же верно и для $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$, так как $\mathsf{E}_{\mathscr{J}} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$, см. выше. Имеем противоречие с условием теоремы.

Итак, в самом деле $\varphi(U_n) \to 0$. Но тогда любое множество $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ принадлежит идеалу $\mathscr{I}$ если и только если пересечение $x \cap (U_n \smallsetminus U_{n+1})$ конечно для любого m. Отсюда легко следует, что $\mathscr{I}$ в самом деле относится к одному из трех указанных типов идеалов. Причем изоморфность с $\mathscr{I}_3$ выводится в случае, если среди множеств $U_n \smallsetminus U_{n+1}$ имеется бесконечно много бесконечных, изоморфность с Fin выводится в случае, когда число бесконечных разностей $U_n \smallsetminus U_{n+1}$ конечно (и не равно 0), а их объединение ко-конечно в $\mathbb{N}$, и наконец, изоморфность с $\mathsf{Fin} \oplus \mathscr{P}(\mathbb{N})$ (тривиальная вариация Fin) имеет место, когда число бесконечных разностей $U_n \smallsetminus U_{n+1}$ конечно (и не равно 0), но их объединение имеет бесконечное дополнение в $\mathbb{N}$.

Заметим, что оставшийся случай, т.е. когда все разности $U_n \smallsetminus U_{n+1}$ конечны, не может иметь места, поскольку тогда $\mathbb{N} \in \mathscr{I}$, так что идеал $\mathscr{I}$ тривиален, чего не может быть. □

Теперь получим такой результат:

Следствие 9.30. *Не существует борелевских идеалов $\mathscr{I}$ таких, что $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{T}_2$.*

Доказательство. Допустим, что борелевский идеал $\mathscr{I}$ удовлетворяет условию $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{T}_2$. Тогда $\mathscr{I}$ — полизируемый идеал. В самом деле, иначе было бы $\mathsf{E}_1 \le_{\mathrm{B}} \mathscr{I}$ по теореме 7.12, так что мы получили бы $\mathsf{E}_1 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{T}_2$, что́ противоречит теореме 7.26, поскольку отношение T_2 борелевски сводится к польскому действию по результату 3.18. Следовательно, имеет место $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$ по теореме 9.29. В то же время $\mathsf{T}_2 \not\le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$ по теореме 4.9. Так как идеал $\mathscr{I}_3$ является P-идеалом, см. упражнение 7.5, а потому полизируемым идеалом по теореме 7.12, и, конечно, его Δ-группа абелева. Значит, $\mathsf{T}_2 \not\le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$, что и требовалось. □

Еще одним приложением теоремы 9.27 является анализ структуры идеалов, борелевски сводимых к отношению эквивалентности E_3, здесь получается результат, аналогичный теореме 7.3, но совершенно иным методом. Начнем со следующего простого утверждения:

Лемма 9.31. $\mathsf{E}_0 <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$. *Отношения* E_3 *и* E_1 *являются* $\le_{\mathrm{B}}$-*несравнимыми.*

Доказательство. Мы уже видели, что $\mathsf{E}_0 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$ (упражнение 2.7). Далее, $\mathsf{E}_3 \not\le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$ по следствию 7.4. Отсюда следует, что $\mathsf{E}_0 <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$ строго, поскольку мы знаем, что $\mathsf{E}_0 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$ (опять упражнение 2.7). Чтобы вывести $\mathsf{E}_1 \not\le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$, напомним, что идеал $\mathscr{I}_3$ является полизируемым (см. выше), после чего остается применить теорему 7.12. □

Упражнение 9.32. Докажите тем же методом, что отношения E_2 и E_1 также $\le_{\mathrm{B}}$-несравнимы. □

Следствие 9.33. *Если* $\mathscr{I}$ *— нетривиальный борелевский идеал на* $\mathbb{N}$ *и* $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$, *то либо* $\mathscr{I} \cong \mathscr{I}_3$, *либо* $\mathscr{I}$ *— тривиальная вариация* Fin.

Доказательство. По лемме 9.31, имеем $\mathsf{E}_1 \not\le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathscr{I}}$. Отсюда по теореме 7.12 получаем: $\mathscr{I}$ — полизируемый идеал. Значит, можно применить теорему 9.29. □

10. ОДНО СЕМЕЙСТВО ПОПАРНО НЕСРАВНИМЫХ ОТНОШЕНИЙ

Мы видели выше, что имеются $\le_B$-несравнимые друг с другом борелевские отношения эквивалентности. Например, отношения E_1, E_2, E_3, E_∞ попарно несравнимы; кроме того, E_2 несравнимо с c_0 (об этом см. § 5.4). Одна из задач этой главы состоит в построении континуального семейства из попарно $\le_B$-несравнимых борелевских отношений эквивлентности. Это семейство будет выбрано среди отношений эквивалентности, называемых c_0-равенствами.

Напомним, что отношение эквивалентности c_0 определено на множестве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ всех бесконечных вещественных последовательностей таким образом, что $x \, \mathsf{c}_0 \, y$, если $x(n) - y(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Это определение допускает следующее очевидное обобщение.

Определение 10.1 (Фарах [27]). Предположим, что K — непустое множество и $\langle X_k\,; d_k\rangle$ — метрические пространства при любом $k \in K$. Отношение эквивалентности[1] $\mathsf{D}{=}\mathsf{D}(\langle X_k; d_k\rangle_{k\in K})$ на декартовом произведении $X{=}\prod_k X_k$ определяется так, что $x \, \mathsf{D} \, y$, если $\mathtt{lim}\; d_n(x(n), y(n)) = 0$, где предел берется по идеалу конечных подмножеств в K.[2]

Если $K = \mathbb{N}$ (что, как правило, выполняется ниже), то для простоты будем писать $\mathsf{D}(X_k; d_k)$ вместо $\mathsf{D}(\langle X_k; d_k\rangle_{k\in\mathbb{N}})$.

Наиболее исследованным является случай, когда

---

[1] Буква D в этом контексте использовалась Фарахом [27], и мы придерживаемся этого обозначения, игнорируя ассоциацию D с «диагональю», т. е. с отношением буквального равенства.

[2] Таким образом, $\mathtt{lim}\; d_n(x(n), y(n)) = 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ имеется лишь конечное число индексов $k \in K$ таких, что $d_n(x(n), y(n)) > \varepsilon$.

(∗) пространства X_k являются борелевскими множествами в польских пространствах $\mathbb{X}_k$, а функции расстояния (метрики) d_k являются борелевскими отображениями $X_k \times X_k \to \mathbb{R}^+$, не обязательно совпадающими с польскими метриками пространств $\mathbb{X}_k$.

В этом случае $\mathsf{D}(X_k\,;d_k)$ очевидно является борелевским отношением эквивалентности на борелевском же множестве $X = \prod_k X_k$.

Отношение эквивалентности $\mathsf{D}(X_k\,;d_k)$ называется *нетривиальным*, если $\mathtt{limsup}_{k\to\infty}\mathtt{diam}(X_k) > 0$. В противном случае $\mathsf{D}(X_k\,;d_k)$ делает все элементы X эквивалентными.

Наконец, c_0*-равенством* называется любое отношение эквивалентности вида $\mathsf{D}{=}\mathsf{D}(\langle X_k\,;d_k\rangle_{k\in\mathbb{N}})$, для которого все множества X_k конечны. Область $\mathbb{X} = \prod_k X_k$ такого отношения D рассматривается здесь с польской топологией произведения, а топология на каждом (здесь конечном) множестве X_k дискретна. □

Любое c_0-равенство является, очевидно, борелевским отношением эквивалентности, более точно, отношением класса $\mathbf{\Pi}^0_3$. Заметим, что само $\mathbf{c}_0$ — в сущности, простейший нетривиальный пример c_0-равенства (см. ниже) — это объясняет выбор названия для данного класса отношений.

Свойства отношений вида $\mathsf{D}(X_k\,;d_k)$ в общей $\le_{\mathtt{B}}$-структуре борелевских отношений эквивалентности пока известны недостаточно, за исключением случая σ-компактных пространств $\langle X_k\,;d_k\rangle$, который легко сводится к случаю конечных множеств X_k, т.е. к c_0-равенствам. Последний случай и рассматривается в настоящей главе. Мы доказываем, что борелевская сводимость одного c_0-равенства к другому влечет более сильную аддитивную сводимость подходящего c_0-подравенства (теорема 10.6), демонстрируем $\le_{\mathtt{B}}$-максимальность $\mathbf{c}_0$ в классе c_0-равенств (теорема 10.8), доказываем теорему 10.12, согласно которой все нетривиальные c_0-равенства турбулентны, кроме тех, которые $\sim_{\mathtt{B}}$-эквивалентны E_0 или E_3, и, наконец, устанавливаем, что $\le_{\mathtt{B}}$-структура c_0-равенств включает подструктуру, подобную $\langle \mathscr{P}(\mathbb{N})\,;\subseteq^*\rangle$ (теорема 10.15), где $\subseteq^*$ обозначает включение с точностью до конечного числа элементов.

10.1. Примеры и простые факты

Следующие примеры показывают, что некоторые типичные отношения эквивалентности допускают представление в форме c_0-равенств.

Пример 10.2. (i) Пусть $X_k = \{0,1\}$ и $d_k(0,1) = 1$ для всех k. Легко видеть, что в этом случае отношение $\mathsf{D}(X_k; d_k)$ на $2^{\mathbb{N}} = \prod_k \{0,1\}$ в точности совпадает с E_0.

(ii) Пусть $X_{kl} = \{0,1\}$ и $d_{kl}(0,1) = k^{-1}$ для всех $k,l \in \mathbb{N}$. Тогда отношение $\mathsf{D}(\langle X_{kl}; d_{kl}\rangle_{k,l\in\mathbb{N}})$ на $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = \prod_{k,l}\{0,1\}$ в точности совпадает с E_3.

(iii) Вообще, если $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ и φ_i — субмера на $[n_i, n_{i+1})$ для каждого i, то положим $X_i = \mathscr{P}([n_i, n_{i+1}))$ и $d_i(u,v) = \varphi_i(u \,\Delta\, v)$ для $u, v \subseteq [n_i, n_{i+1})$. Тогда отношение $\mathsf{D}(X_i; d_i)$ изоморфно $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$, где

$$\mathscr{I} = \operatorname{Exh}(\varphi) = \{x \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \varphi(x \cap [n,\infty)) = 0\}$$

и $\varphi(x) = \sup_i \varphi_i(x \cap [n_i, n_{i+1}))$.

(iv) Положим $X_k = \mathbb{R}$ для каждого k, а d_k — обычное расстояние на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тогда отношение $\mathsf{D}(\langle X_k; d_k\rangle_{k\in\mathbb{N}})$ на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ в точности равно c_0. □

Лемма 10.3 (Фарах [27] со ссылкой на Хъёрта). *Каждое c_0-равенство $\mathsf{D} = \mathsf{D}(X_k; d_k)$ индуцировано непрерывным действием польской группы.*

Доказательство (эскиз). Для любого k обозначим S_k (конечную) группу всех перестановок X_k, на которой определим расстояние $\rho_k(s,t) = \max_{x\in X_k} d_k(s(x), t(x))$. Тогда

$$\mathbb{G} = \{g \in \textstyle\prod_k S_k : \lim_{k\to\infty} \rho_k(g_k, e_k) = 0\},$$

где $e_k \in S_k$ — тождественная перестановка, является, очевидно, подгруппой в $\prod_k S_k$. Более того, метрика $d(g,h) = \sup_k \rho_k(g_k, h_k)$ превращает $\mathbb{G}$ в польскую группу, естественное действие которой на $\mathbb{X}$, т.е. $(g\cdot x)_k = g_k(x_k)$ $\forall\, k$, непрерывно и индуцирует D. **Упражнение**: заполнить детали в этом рассуждении. □

Покажем, наконец, что случай σ-компактных пространств X_k сводится к случаю c_0-равенств, т. е. к случаю конечных пространств.

Лемма 10.4. *Допустим, что в предположениях 10.1(∗) пространства* $\langle X_k\,; d_k\rangle$ *все σ-компактны. Тогда отношение* $\mathsf{D}(X_k; d_k)$ $\sim_{\mathsf{B}}$*-эквивалентно некоторому* c_0*-равенству.*

Доказательство. Пусть сначала все пространства $\langle X_k\,; d_k\rangle$ даже компактны. Тогда для любого k имеется конечная $\frac{1}{k}$-сеть $X'_k \subseteq X_k$. Каждой точке $x \in X = \prod_k X_k$ сопоставим точку $\vartheta(x) \in X' = \prod_k X'_k$, определенную так, что $\vartheta(x)(k)$ — d_k-ближайший к $x(k)$ элемент из X'_k (или первый в смысле фиксированного порядка на X'_k из таких ближайших элементов, если их два и больше) для любого k. Так отображение ϑ является борелевской, даже непрерывной редукцией отношения $\mathsf{D}(X_k; d_k)$ к c_0-равенству $\mathsf{D}(X'_k; d_k)$.

Общий σ-компактный случай сводится к уже рассмотренному тем же приемом, что и в начале доказательства леммы 5.9. □

10.2. c_0-равенства и аддитивная сводимость

Свойства c_0-равенств оказываются связанными с особой формой непрерывной сводимости для отношений на областях вида $\prod_k X_k$, представляющей собой обобщение сводимости идеалов по Рудин–Блассу из §2.1.

Допустим, что $X = \prod_{k\in\mathbb{N}} X_k$ и $Y = \prod_{k\in\mathbb{N}} Y_k$, где все множества X_i, Y_i конечны, и далее $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ и $H_i : X_i \to \prod_{n_i\le k<n_{i+1}} Y_k$ для каждого i. Определим

$$\Psi(x) = H_0(x(0)) \cup H_1(x(1)) \cup H_2(x(2)) \cup \ldots \in Y$$

для $x \in X$. Отображения Ψ такого вида называются *аддитивными* (Фарах [27]). Они все являются непрерывными функциями из X в Y в польской топологии произведения; напомним, что множества X_i, Y_i конечны.

Пусть теперь E и F — отношения эквивалентности на наших множествах, соответственно, X и Y.

Аддитивная сводимость: $\mathsf{E} \le_{\mathrm{A}} \mathsf{F}$, если имеется аддитивная редукция E к F. Как обычно, $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{A}} \mathsf{F}$ означает, что одновременно $\mathsf{E} \le_{\mathrm{A}} \mathsf{F}$ и $\mathsf{F} \le_{\mathrm{A}} \mathsf{E}$, а $\mathsf{E} <_{\mathrm{A}} \mathsf{F}$ означает, что $\mathsf{E} \le_{\mathrm{A}} \mathsf{F}$, но не $\mathsf{F} \le_{\mathrm{A}} \mathsf{E}$.

Упражнение 10.5. (1) Докажите, что $\mathsf{E} \le_{\mathrm{A}} \mathsf{F}$ влечет $\mathsf{E} \le_{\mathrm{C}} \mathsf{F}$.

(2) (Farah [27]) Пусть $\mathscr{I}$ и $\mathscr{J}$ — борелевские идеалы на $\mathbb{N}$. Докажите: $\mathscr{I} \le_{\mathrm{RB}}^{++} \mathscr{J}$ эквивалентно $\mathsf{E}_{\mathscr{I}} \le_{\mathrm{A}} \mathsf{E}_{\mathscr{J}}$. Таким образом, аддитивная сводимость совпадает со сводимостью $\le_{\mathrm{RB}}^{++}$ по Рудин–Блассу (см. §2.1) в области борелевских идеалов. □

В самом общем случае вряд ли из борелевской сводимости $\mathsf{D} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{D}'$ двух c_0-равенств следует их аддитивная сводимость $\mathsf{D} \le_{\mathrm{A}} \mathsf{D}'$. Следующая теорема Фараха содержит несколько более слабое утверждение, которое будет полезно ниже.

Теорема 10.6. *Если* $\mathsf{D} = \mathsf{D}(\langle X_k ; d_k\rangle_{k\in\mathbb{N}})$ *и* $\mathsf{D}' = \mathsf{D}(\langle X'_k ; d'_k\rangle_{k\in\mathbb{N}})$ *— c_0-равенства и* $\mathsf{D} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{D}'$, *то найдется бесконечное множество* $A \subseteq \mathbb{N}$ *такое, что c_0-равенство* $\mathsf{D}_A = \mathsf{D}(\langle X_k ; d_k\rangle_{k\in A})$ *удовлетворяет* $\mathsf{D}_A \le_{\mathrm{A}} \mathsf{D}'$.

Доказательство. Положим $X_C = \prod_{k\in C} X_k$ и $X'_C = \prod_{k\in C} X'_k$ для любого множества $C \subseteq \mathbb{N}$. В частности, пусть $X = X_{\mathbb{N}}$ и $X' = X'_{\mathbb{N}}$ (области отношений D и D'). Дополнительно определим $d'_C(x,y) = \sup_{k\in C} d'_k(x(k), y(k))$ для $x, y \in X'$. Допустим, что $\vartheta : X \to X'$ является борелевской редукцией отношения D к D'.

Упражнение 10.7. Рассуждая, как в доказательстве второго утверждения теоремы 2.12, покажите, что найдется бесконечное множество $B \subseteq \mathbb{N}$ такое, что $\mathsf{D}(\langle X_k ; d_k\rangle_{k\in B}) \le_{\mathrm{C}} \mathsf{D}'$ (посредством непрерывной редукции). □

Отсюда следует, что с самого начала можно считать, что исходная редукция $\vartheta : X \to X'$ непрерывна. В этом предположении, чтобы получить искомую аддитивную редукцию, используем вариант рассуждения из доказательства теоремы 5.12.

Положим $[s] = \{x \in X : x \restriction u = s\}$ для $u \subseteq \mathbb{N}$ и $s \in X_u$. Рассмотрим замкнутое множество $W = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [s_i]$ всех точек $x \in X$ таких, что $x \restriction (n_i, n_{i+1}) = s_i$ для всех i. Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 5.12, построим возрастающую последовательность $0 = k_0 = n_0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2 < \ldots$ натуральных чисел и элементы $s_i \in X_{(n_i, n_{i+1})}$ так, чтобы для каждой пары конечных последовательностей $u, v \in X_{[0,n_i]}$ и каждой пары $x, y \in X_{[n_{i+1}, \infty)}$ таких, что $x \restriction (n_j, n_{j+1}) = y \restriction (n_j, n_{j+1}) = s_j$ для всех $j > i$ и $u \restriction (n_j, n_{j+1}) = v \restriction (n_j, n_{j+1}) = s_j$ для всех $j < i$, выполнены соотношения:[3]

(a) $\vartheta(u \cup s_i \cup x) \restriction [0, k_{i+1}) = \vartheta(u \cup s_i \cup y) \restriction [0, k_{i+1})$, и

(b) $d_{[k_{i+1}, \infty)}(\vartheta(u \cup s_i \cup x), \vartheta(v \cup s_i \cup x)) < \frac{1}{i}$.

Положим $A = \{n_i : i \in \mathbb{N}\}$. Фиксируем любую точку $z \in X_A$. Если $i \in \mathbb{N}$ и $\xi \in X_{n_i}$, то определим $z^{i\xi} \in W$ так, что $z^{i\xi}(n_i) = \xi$, $z^{i\xi}(n_j) = z(n_j)$ для всех $j \neq i$ и $z^{i\xi} \restriction (n_j, n_{j+1}) = s_j$ для всех j. Если $x \in X_A$, то определим точку $H(x) \in X'$ соотношениями:

$$H(x) \restriction [k_i, k_{i+1}) = \vartheta(z^{i, x(n_i)}) \restriction [k_i, k_{i+1}) \quad \text{для всех} \quad i \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Понятно, что H — непрерывное отображение из X_A в X' (в смысле польских топологий произведения). Более того, каково бы ни было i, значение $H(x) \restriction [k_i, k_{i+1})$ зависит только от $x(n_i)$. Таким образом, для доказательства теоремы остается проверить, что H — редукция отношения D_A к D'.

Для этого сопоставим $f(x) \in W$ каждой точке $x \in X_A$ так, что $f(x) \restriction A = x$ и $f(x) \restriction (n_j, n_{j+1}) = s_j$ для всех j. Понятно, что f — редукция отношения D_A к D. Поэтому достаточно доказать, что эквивалентность $\vartheta(f(x)) \,\mathsf{D}'\, H(x)$ выполнена для любого $x \in X_A$. Для этого, в свою очередь, достаточно вывести неравенство

$$d'_{[k_i, k_{i+1})}(\vartheta(f(x)), H(x)) \leq 1/i \quad (2)$$

для произвольного индекса $i \geq 1$.

Ключевым фактом здесь является то, что по построению точки $a = f(x)$ и $b = z^{i, x(n_i)}$ из множества W удовлетворяют

[3] Заметим, что в этих предположениях точки $u \cup s_i \cup x$, $u \cup s_i \cup y$, $v \cup s_i \cup x$, определенные в (a) и (b), принадлежат W.

$a \restriction (n_j, n_{j+1}) = b \restriction (n_j, n_{j+1}) = s_j$ для всех j, и кроме того, $a(n_i) = b(n_i) = x(n_i)$. Определим вспомогательную точку $c \in W$ соотношениями

$$c \restriction [0, n_i] = a \restriction [0, n_i] \quad \text{и} \quad c \restriction [n_{i+1}, \infty) = b \restriction [n_{i+1}, \infty).$$

Тогда $d'_{[k_i, k_{i+1})}(\vartheta(b), \vartheta(c)) \le \frac{1}{i}$ согласно (b) и $\vartheta(a) \restriction [k_i, k_{i+1}) = \vartheta(c) \restriction [k_i, k_{i+1})$ согласно (a). (Уместно заметить, что (b) применяется здесь для значения индекса $i-1$, а не i.) Таким образом, $d'_{[k_i, k_{i+1})}(\vartheta(a), \vartheta(b)) \le \frac{1}{i}$. Однако равенство $H(x) \restriction [k_i, k_{i+1}) = \vartheta(b) \restriction [k_i, k_{i+1})$ выполнено согласно (1). Отсюда следует искомое соотношение (2). □

10.3. Максимальное c_0-равенство

Здесь рассматривается c_0-равенство $\mathsf{D}_{\mathtt{max}} = \mathsf{D}(X_k; d_k)$, где для каждого k обозначено d_k обычное расстояние на вещественной прямой, ограниченное на конечное множество $X_k = \{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, 1\}$.

Теорема 10.8 (Фарах [27]). (i) $\mathsf{D}_{\mathtt{max}} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{c}_0$;

(ii) *для любого c_0-равенства D выполнено $\mathsf{D} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{D}_{\mathtt{max}}$.*

Таким образом, $\mathsf{D}_{\mathtt{max}}$ является $\le_{\mathrm{B}}$-наибольшим среди всех c_0-равенств. Кстати, доказательство покажет, что на самом деле $\mathsf{D} \le_{\mathrm{A}} \mathsf{D}_{\mathtt{max}}$ в (ii) (в смысле аддитивной сводимости из §10.2).

Из (i) и леммы 5.10 следует, что $\mathsf{D}_{\mathtt{max}} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{Z}_0$.

Доказательство. (i) Понятно, что отношение $\mathsf{D}_{\mathtt{max}}$ тождественно $\mathsf{c}_0 \restriction \mathbb{X}$, где $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ определено как в доказательстве леммы 5.10, где также доказано, что $\mathsf{c}_0 \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{c}_0 \restriction \mathbb{X}$.

(ii) Для вывода $\mathsf{D} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{D}_{\mathtt{max}}$ будет достаточным по (i) доказать, что $\mathsf{D} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{c}_0$. Доказательство основано на следующем комбинаторном утверждении:

Утверждение 10.9. *Любое конечное n-элементное метрическое пространство $\langle X; d \rangle$ изометрично n-элементному подмножеству пространства $\langle \mathbb{R}^n; \rho_n \rangle$ с метрикой $\rho_n(x, y) = \mathtt{max}_{i<n} |x(i) - y(i)|$.*

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Достаточно показать, что для любых $k \neq l$ имеется множество $\{r_1, \ldots, r_n\} \subseteq \mathbb{R}$ такое, что $|r_k - r_l| = d(x_k, x_l)$, а также

$$(*)\quad |r_i - r_j| \leq d_{ij} = d(x_i, x_j) \text{ для всех } i, j.$$

Предположим для простоты, что $k = 1$ и $l = n$, и следовательно нам нужно дополнительно к $(*)$ обеспечить $|r_n - r_0| = d_{1n}$.

Шаг 1. Возьмем наименьшее число $h_1 \geq 0$ такое, что соотношение $(*)$ выполнено для набора чисел $\{r_i\} = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ раз}}, h_1\}$. Хотя бы для одного индекса κ, $1 \leq \kappa < n$, имеет место точное равенство $h_1 - 0 = d_{\kappa n}$. Предположим, что $\kappa \neq 1$; тогда можно для определенности принять, что $\kappa = n - 1$.

Шаг 2. Аналогично возьмем наименьшее число $h_2 \geq 0$ такое, что соотношение $(*)$ выполнено для набора чисел $\{r_i\} = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-2 \text{ раз}}, h_2, h_1 + h_2\}$. Например, $h_2 = 0$ в случае, когда на шаге 1 имеется еще один индекс $\kappa' \neq \kappa$ такой, что $h_1 = d_{\kappa' n}$. Тогда найдутся индексы κ, ν в областях $1 \leq \kappa < n - 1 \leq \nu \leq n$ такие, что выполнено точное равенство $h_2 - 0 = d_{\kappa\nu}$. Опять предположим, что $k \neq 1$; для определенности можно принять $\kappa = n - 2$.

Шаг 3. Снова возьмем наименьшее число $h_3 \geq 0$ такое, что соотношение $(*)$ выполнено для набора чисел $\{r_i\} = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-3 \text{ раз}}, h_3, h_2 + h_3, h_1 + h_2 + h_3\}$. Снова найдутся индексы κ, ν в областях $1 \leq \kappa < n - 2 \leq \nu \leq n$ такие, что выполнено точное равенство $h_3 - 0 = d_{\kappa\nu}$. Предполагая $\kappa \neq 1$, для определенности, можно принять, что $\kappa = n - 3$. И т.д.

Эта конструкция заканчивается после некоторого числа m, $m<n$, шагов таким образом, что тот индекс κ, который получается на последнем шаге, равен 1. Тогда соотношение $(*)$ выполнено для набора чисел $\{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-m \text{ раз}}, r_{n-m+1}, r_{n-m+1}, \ldots, r_n\}$, где $r_{n-m+j} = h_m + h_{m-1} + \cdots + h_{m-j+1}$ для всех $j = 1, \ldots, m$. Более того, из построения следует существование такой убывающей последовательности $n = \kappa_0 > \kappa_1 > \kappa_2 > \cdots > \kappa_\mu = 1$ $(\mu \leq m)$, что точное равенство $r_{\kappa_i} - r_{\kappa_{i+1}} = d_{\kappa_{i+1},\kappa_i}$ выполнено для всех i. Тогда $d_{1n} \le \sum_i r_{\kappa_i} - r_{\kappa_{i+1}}$ согласно неравенству треугольника. Но правая сторона последнего неравенства представляет собой часть суммы $r_n = h_1 + \cdots + h_m$, откуда следует, что $r_n \ge d_{1n}$. С другой стороны, $r_n \le d_{1n}$ согласно $(*)$. Значит, $r_n = d_{1n}$, что и требовалось. □ (Утверждение)

Возвращаемся к доказательству утверждения (ii), т.е. $\mathsf{D} \le_{\mathsf{B}} \mathsf{c}_0$ для любого c_0-равенства $\mathsf{D} = \mathsf{D}(X_k; d_k)$ на $\mathbb{X} = \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k$, где каждое $\langle X_k ; d_k \rangle$ является конечным метрическим пространством. Обозначим n_k число элементов множества X_k. Согласно предыдущему для каждого k имеется изометрическое вложение $\eta_k : X_k \to \mathbb{R}^{n_k}$ пространства $\langle X_k ; d_k \rangle$ в $\langle \mathbb{R}^{n_k} ; \rho_{n_k} \rangle$. Тогда отображение $\vartheta(x) = \eta_0(x_0)^\wedge \eta_1(x_1)^\wedge \eta_2(x_2)^\wedge \ldots$ (из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) — редукция D к c_0. □ (теорема 10.8)

10.4. Классификация c_0-равенств

Мы видели (пример 10.2, теорема 10.8), что среди c_0-равенств имеются такие различные отношения эквивалентности, как E_0, E_3, само c_0. Понятно, что классификация данного c_0-равенства $\mathsf{D} = \mathsf{D}(X_k; d_k)$ в терминах $\le_{\mathsf{B}}$ зависит от метрических свойств пространств $\langle X_k ; d_k \rangle$. Главный результат здесь состоит в том, что всего два условия со1 и со2 позволяют получить приемлемую классификацию c_0-равенств.

Определение 10.10. Пусть задано метрическое пространство $\langle A ; d \rangle$. *Галактикой* $\mathtt{Gal}^q_A(a)$ точки $a \in A$ (где $q > 0$) называется множество всех таких точек $b \in A$, которые могут быть связаны с a конечной цепочкой $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ с $d(a_i, a_{i+1}) < q$ для всех i. Положим, для $r > 0$,

$$\delta(r, A) = \mathtt{inf}\, \{q \in \mathbb{Q}^+ : \exists a \in A\, (\mathtt{diam}\, (\mathtt{Gal}^q_A(a)) \ge r)\}$$

(с пониманием того, что $\mathtt{inf}\,\emptyset = +\infty$), и $\Delta(A) = \{d(a,b) : a \ne b \in A\}$, так что $\mathtt{diam}\, A = \mathtt{sup}(\Delta(A) \cup \{0\})$. □

Предположим теперь, что $\mathsf{D} = \mathsf{D}(X_k\,; d_k)$ являются c_0-равенствами на $\mathbb{X} = \prod_{k\in\mathbb{N}} X_k$. Следующая теорема Фараха [27] показывает, что место данного c_0-равенства $\mathsf{D} = \mathsf{D}(X_k\,; d_k)$ в $\le_{\mathsf{B}}$-структуре борелевских отношений эквивалентности в значительной мере определяется такими двумя условиями:

(co1) найдется $r > 0$ такое, что $\liminf_{k\to\infty} \delta(r, X_k) = 0$;

(co2) $\forall \varepsilon > 0\, \exists \varepsilon' \in (0, \varepsilon)\, \exists^\infty k\, \big(\Delta(X_k) \cap [\varepsilon', \varepsilon) \ne \emptyset\big)$.

Первое условие выражает существование числа $q > 0$ такого, что пространства $\langle X_k\,; d_k\rangle$ содержат сколь угодно мелкошаговые галактики диаметра $\ge q$. Второе условие означает, что метрические спектры этих пространств не стягиваются к 0 при $k \to \infty$.

Упражнение 10.11. Докажите, что co1 влечет co2, а co2 влечет нетривиальность c_0-равенства $\mathsf{D}(X_k\,; d_k)$. □

Теперь доказывается теорема классификации.

Теорема 10.12. *Допустим, что* $\mathsf{D} = \mathsf{D}(\langle X_k\,; d_k\rangle_{k\in\mathbb{N}})$ — *нетривиальное* c_0*-равенство. Тогда*:

(i) *если co2 ложно* (тогда и co1 ложно), *то* $\mathsf{D} \sim_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_0$;

(ii) *если co1 ложно, но co2 истинно, то* $\mathsf{D} \sim_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_3$;

(iii) *если co1 истинно* (тогда и co2 истинно), *то существует «турбулентное»*[4] c_0*-равенство* D' *такое, что* $\mathsf{E}_0 <_{\mathsf{B}} \mathsf{D}'$ *и* $\mathsf{D}' \le_{\mathsf{B}} \mathsf{D}$.

Таким образом, любое c_0-равенство D $\le_{\mathsf{B}}$-включает «турбулентное» c_0-равенство D' с $\mathsf{E}_3 <_{\mathsf{B}} \mathsf{D}'$ кроме случая, когда D $\sim_{\mathsf{B}}$-эквивалентно одному из отношений E_0, E_3. Условие co1 достаточно для «турбулентности» самого D и необходимо для существования «турбулентного» c_0-равенства $\mathsf{D}' \le_{\mathsf{B}} \mathsf{D}$.

Доказательство. (i) Для вывода $\mathsf{E}_0 \le_{\mathsf{B}} \mathsf{D}$ заметим, что благодаря нетривиальности D существуют: число $p > 0$, возрастающая последовательность $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ и для каждого i пара элементов $x_{n_i}, y_{n_i} \in X_{n_i}$ такие, что $d_{n_i}(x_{n_i}, y_{n_i}) \ge p$. Для каждого индекса n, не имеющего вида n_i, фиксируем произвольное $z_n \in X_n$. Если $a \in 2^{\mathbb{N}}$, то определим точку $\vartheta(a) \in \prod_k X_k$

[4] Т.е. оно индуцируется ген. турбулентным, в смысле определения 9.1, действием некоторой польской группы.

так, что $\vartheta(a)(n) = z_n$ для индексов n, не имеющих вида n_i, но для каждого i выполнено $\vartheta(a)(n_i)$ равно x_{n_i} или равно y_{n_i} при условии соответственно $a_i = 0$ или $a_i = 1$. Это отображение ϑ обеспечивает $\mathsf{E}_0 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{D}$.

Теперь докажем, что наоборот $\mathsf{D} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$. Раз co2 ложно, то имеется число $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого ε' с $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ имеется только конечно много индексов k со свойством: $\varepsilon' \le$ $\le d_k(\xi, \eta) < \varepsilon$ для каких-то элементов $\xi, \eta \in X_k$. Обозначим G_k (конечное) множество всех $\frac{\varepsilon}{2}$-галактик в X_k, и определим $\vartheta : \mathbb{X} = \prod_k X_k \to G = \prod_k G_k$ следующим образом: для каждого k положим $\vartheta(x)(k)$ — галактика в G_k, которая содержит $x(k)$. Определим отношение эквивалентности E как G-вариант отношения E_0, т.е. для любых $g, h \in G$ соотношение $g \,\mathsf{E}\, h$ эквивалентно $g(k) = h(k)$ для всех кроме конечного числа значений k. Используя теорему 6.6, нетрудно проверить $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$. Остается доказать, что ϑ — редукция D к E.

Для доказательства рассмотрим произвольную пару точек $x, y \in \mathbb{X}$. Предполагая $\vartheta(x) \,\mathsf{E}\, \vartheta(y)$, докажем $x \,\mathsf{D}\, y$ (в нетривиальную сторону). Пусть напротив $x \not\mathsf{D}\, y$, так что имеется число $p > 0$ такое, что $d_k(x(k), y(k)) > p$ для бесконечно многих индексов k. Можно предположить, что $p < \frac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, раз $\vartheta(x) \,\mathsf{E}\, \vartheta(y)$, то найдется k_0 такое, что $x(k)$ и $y(k)$ принадлежат к одной и той же $\frac{\varepsilon}{2}$-галактике в каждом из пространств X_k, $k > k_0$. Тогда для любого $k > k_0$ такого, что $d_k(x(k), y(k)) > p$ (и следовательно, для бесконечно многих k), существует элемент $z_k \in X_k$ в той же самой галактике, удовлетворяющий $p < d_k(x(k), z_k) < \varepsilon$. Отсюда вытекает противоречие с выбором ε : в самом деле, возьмем $\varepsilon' = p$.

(ii) Сначала докажем, что co2 влечет $\mathsf{E}_3 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{D}$. Приняв co2, получим бесконечную последовательность $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots > 0$ и для каждого i бесконечное множество $J_i \subsetneq \mathbb{N}$, а для любого $j \in J_i$ — пару элементов $x_{ij}, y_{ij} \in X_j$ таких, что $d_j(x_{ij}, y_{ij}) \in$ $\in [\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_i)$. Можно предположить, что множества J_i попарно дизъюнктны (иначе соответственно уменьшим их, оставляя бесконечными). Тогда $\mathbf{c}_0$-равенство $\mathsf{D}' = \mathsf{D}(\langle\{x_{ij}, y_{ij}\}; d_j\rangle_{i \in \mathbb{N},\, j \in J_i})$ удовлетворяет соотношениям $\mathsf{D}' \le_{\mathrm{B}} \mathsf{D}$ и $\mathsf{D}' \cong \mathsf{E}_3$ (изоморфизм посредством биекции между базовыми множествами $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $\{\langle i, j\rangle : i \in \mathbb{N} \wedge j \in J_i\}$).

Теперь приняв, что co1 ложно, выведем $\mathsf{D} \le_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_3$. Для любой пары $k, n \in \mathbb{N}$ обозначим G_{kn} (конечное) множество всех $\frac{1}{n}$-галактик в X_k, а если $x \in \mathbb{X} = \prod_i X_i$, то пусть $\vartheta(x) \in G = \prod_{k,n} G_{kn}$ определено так, что $\vartheta(x)(k,n)$ — та $\frac{1}{n}$-галактика в G_{kn}, которая содержит $x(k)$, для всех k, n. Теперь отношение эквивалентности E на G, определенное так, что

$$g \,\mathsf{E}\, h, \qquad \text{если} \qquad \forall n\, \forall^\infty k\, (g(k,n) = h(k,n)), \qquad g, h \in G,$$

очевидно удовлетворяет $\mathsf{E} \le_{\mathsf{B}} \mathsf{E}_3$, так что остается вывести, что ϑ — редукция D к E. Предположим, что $x, y \in \mathbb{X}$ и $\vartheta(x) \,\mathsf{E}\, \vartheta(y)$ и выведем $x \,\mathsf{D}\, y$ (в нетривиальную сторону). Действительно, в противном случае имеется число $r > 0$ такое, что $d_k(x(k), y(k)) > r$ для бесконечно многих индексов k. Но co1 ложно для этого (и любого) r, так что существует индекс n достаточно большой для того, чтобы неравенство $\delta(r, X_k) > \frac{1}{n}$ выполнялось для почти всех k. Тогда, по выбору r, имеем $\vartheta(x)(k,n) \ne \vartheta(y)(k,n)$ для бесконечно многих k, так что $\vartheta(x) \not\mathsf{E}\, \vartheta(y)$, противоречие.

(iii) Возьмем $r > 0$ такое, что $\mathtt{liminf}_{k\to\infty} \delta(r, X_k) = 0$. Понятно, что для любой возрастающей последовательности $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ имеет место $\mathsf{D}(\langle X_{n_k}; d_{n_k}\rangle_{k\in\mathbb{N}}) \le_{\mathsf{B}} \mathsf{D}$. Поэтому можно предположить, что вообще $\mathtt{lim}_k\, \delta(r, X_k) = 0$, и далее что $\delta(r, X_k) < \frac{1}{k}$ для всех k. (Иначе выбираем подходящую подпоследовательность.) Тогда каждое из множеств X_k содержит $\frac{1}{k}$-галактику $Y_k \subseteq X_k$ с диаметром $\mathtt{diam}\, Y_k \ge r$. Легко видеть, что $\mathsf{D}(Y_k; d_k) \le_{\mathsf{B}} \mathsf{D}$. Поэтому следующая лемма влечет (iii).

Лемма 10.13. *Предположим, что $r > 0$, каждое X_k является $\frac{1}{k}$-галактикой и $\mathtt{diam}(X_k) \ge r$. Тогда c_0-равенство $\mathsf{D} = \mathsf{D}(\langle X_k; d_k\rangle_{k\in\mathbb{N}})$ «турбулентно» и удовлетворяет $\mathsf{E}_3 \le_{\mathsf{B}} \mathsf{D}$.*

Доказательство. Мы знаем из приведенного выше доказательства (iii), что $\mathsf{E}_3 \le_{\mathsf{B}} \mathsf{D}$. Теперь доказывается, что определенное в доказательстве леммы 10.3 действие определенной там польской группы $\mathbb{G}$ (оно индуцирует D) ген. турбулентно в условиях леммы.

То, что каждый D-класс есть плотное множество в пространстве $\mathbb{X} = \prod_k X_k$ (с польской топологией произведения $\mathbb{X}$), является простым **упражнением**. Покажем, что каждый D-класс $[x]_{\mathsf{D}}$,

$x \in \mathbb{X}$, является также и тощим подмножеством в $\mathbb{X}$. В самом деле, в условиях леммы каждое из множеств X_k содержит пару элементов x'_k, x''_k, удовлетворяющих $d_k(x'_k, x''_k) \geq r$. Обозначим y_k тот из двух элементов x'_k, x''_k, который находится на d_k-расстоянии $\geq \frac{r}{2}$ от x_k. Множество $Z = \{z \in \mathbb{X} : \exists^\infty k \ (z(k) = y_k)\}$ является ко-тощим в $\mathbb{X}$ и не пересекает $[x]_{\mathsf{D}}$.

Остается доказать, что каждая локальная орбита где-то плотна. Рассмотрим открытую окрестность G нейтрального элемента группы $\mathbb{G}$ (т.е. последовательности тождественных перестановок) и непустое открытое множество $X \subseteq \mathbb{X}$. Можно считать, что для некоторого n множество G является $\frac{1}{n}$-шаром вокруг нейтрального элемента группы $\mathbb{G}$, а

$$X = \{x \in \mathbb{X} : \forall k < n, \ (x(k) = \xi_k)\},$$

где $\xi_k \in X_k$, $k < n$ — некоторые фиксированные элементы. Покажем, что на самом деле все локальные орбиты, т.е. классы эквивалентности отношения $\sim^G_X$, являются плотными множествами в X. Для этого рассмотрим открытое множество $Y = \{y \in \mathbb{X} : \forall k < m \ (y(k) = \xi_k)\} \subseteq X$, где в дополнение к вышесказанному $m > n$ и элементы $\xi_k \in X_k$, $n \leq k < m$ фиксированы.

Пусть $x \in X$. Тогда $x(k) = \xi_k$ для всех $k < n$. Если же $n \leq \leq k < m$, то элементы ξ_k и $x(k)$ принадлежат к $\frac{1}{k}$-галактике X_k, вследствие чего существует конечная цепь в X_k, соединяющая $x(k)$ с ξ_k, и имеющая d_k-длину каждого звена меньше, чем $\frac{1}{k}$. Обозначим $\ell(k)$ длину этой цепи. Существует перестановка g_k множества X_k такая, что $g_k^{\ell(k)}(x(k)) = \xi_k$, $g_k(\xi_k) = x(k)$, и $d_k(\xi, g_k(\xi)) < \frac{1}{k}$ для всех $\xi \in X_k$.

В областях же $k < n$ и $k \geq m$, возьмем в качестве g_k тождественную перестановку множества X_k. Это позволяет определить $g \in \mathbb{G}$ как $g(k) = g_k$ для каждого k. Понятно, что $g \in G$. Более того, множество X g-инвариантно и $g^\ell(x) \in U$, где $\ell = \prod_{k=n}^{m-1} \ell(k)$. Отсюда следует $x \sim^G_X g(x)$, что и требовалось.

□ (лемма)

□ (теорема 10.12)

10.5. LV-равенства

Следуя Фараху, LV-*равенством* назовем такое c_0-равенство $\mathsf{D} = \mathsf{D}(\langle X_k\,;d_k\rangle_{k\in\mathbb{N}})$, для которого выполнено условие

$$\forall m\,\forall\,\varepsilon{>}0\,\forall^\infty k\,\forall x_0,\ldots,x_m{\in}X_k$$

$$\bigl(d_k(x_0,x_m){\le}\varepsilon{+}\max_{j<m}d_k(x_j,x_{j+1})\bigr). \qquad (*)$$

Другими словами, требуется, чтобы метрики исходных конечных пространств асимптотически сходились к ультраметрике. Этот класс c_0-равенств был введен (хотя и в несколько иной форме) Луво и Величковичем [60], откуда и происходит данное название.

Упражнение 10.14. Положим $X_k = \{1,2,\ldots,2^k\}$ и $d_k(m,n) = \frac{\log_2(|m-n|+1)}{k}$ для всех k и $1 \le m,n \le 2^k$. Докажите, что $\mathsf{D}(X_k\,;d_k)$ является LV-равенством, причем выполнено условие co1 из §10.4. □

Следующая теорема из [60] является, пожалуй, наиболее интересным приложением c_0-равенств. Одно из ее следствий состоит в существовании больших семейств попарно $\le_{\mathrm{B}}$-несравнимых борелевских отношений эквивалентности, см. ниже.

Теорема 10.15. *Предположим, что* $\mathsf{D} = \mathsf{D}(\langle X_k\,;d_k\rangle_{k\in\mathbb{N}})$ *является* LV-*равенством, удовлетворяющим условию co1 из §10.4. Тогда каждому множеству* $A \subseteq \mathbb{N}$ *можно сопоставить* LV-*равенство* $\mathsf{D}_A \le_{\mathrm{A}} \mathsf{D}$ *так, что для любой пары* $A, B \subseteq \mathbb{N}$ *следующие три условия равносильны:*

(i) $A \subseteq^* B$ (то есть разность $A \smallsetminus B$ конечна);

(ii) $\mathsf{D}_A \le_{\mathrm{A}} \mathsf{D}_B$ (аддитивная сводимость);

(iii) $\mathsf{D}_A \le_{\mathrm{B}} \mathsf{D}_B$.

Доказательство. Итак, нами предполагается условие co1 из §10.4. Как и в доказательстве теоремы 10.12, часть (iii), можно предполагать, что это условие принимает следующую специальную форму для некоторого фиксированного $r > 0$:

(1) Каждое из множеств X_k является $\mathtt{min}\{\frac{r}{2},\frac{1}{k+1}\}$-галактикой диаметра $\mathtt{diam}(X_k) \ge 4r$.

Преобразование к этой форме (т.е. переход к определенной бесконечной подпоследовательности пространств $\langle X_k\,; d_k\rangle$, а затем к подходящим галактикам $Y_k \subseteq X_k$), очевидно, сохраняет LV-условие $(*)$. Более того, можно предполагать, что и само $(*)$ выполнено в следующей специальной форме:

(2) $d_k(x_0, x_{\mu_k}) \le \frac{1}{k+1} + \max_{i<\mu_k} d_k(x_i, x_{i+1})$ всякий раз, когда $x_0, \ldots, x_{\mu_k} \in X_k$, где $\mu_k = 1 + \prod_{j=0}^{k-1} \#(X_j)$.

(Если это не так, то снова возьмем подходящую подпоследовательность.)

В этих не ограничивающих общность предположениях выполнена:

Лемма 10.16. *Для любого k имеется множество $Y_k \subseteq X_k$ из $\#(Y_k) = \mu_k$ элементов такое, что $d_k(x, y) \ge r$ для любой пары $x \ne y$ в Y_k.*

Доказательство. Согласно (1) имеется конечная последовательность $x_0, \ldots, x_m$ элементов $x_i \in X_k$ такая, что $d_k(x_0, x_m) \ge 4r$, но $d_k(x_i, x_{i+1}) < r$ для всех i. Предположим, что m — наименьшее возможное число, для которого такая последовательность $x_0, \ldots, x_m$ существует. Построим подпоследовательность $y_0, y_1, \ldots, y_n$ из части элементов x_i, длина которой $n \le m$ определится в ходе построения.

a) Полагаем $y_0 = x_0$.

b) Если член $y_j = x_{i(j)}$ уже определен и есть индекс $l > i(j)$, $l \le m$, такой, что $d_k(y_j, x_l) \ge r$, то $y_{j+1} = x_l$ для наименьшего такого l.

   Заметим, что в этом случае $d_k(y_j, y_{j+1}) < 2r$, поскольку иначе выполнено $d_k(y_j, x_{l-1}) > r$, так как $d_k(x_{l-1}, x_l) < r$.

c) В противном случае, т.е. если такого j нет, полагаем $n = j$ и заканчиваем построение.

По построению имеем $d_k(y_j, y_{j+1}) \ge r$ для всех $j < n$, сверх того, $d_k(y_{j'}, y_{j+1}) \ge r$ для каждого $j' < j$ согласно минимальности m. Тем самым, множество $Y_k = \{y_j : j \le n\}$ удовлетворяет $d_k(x, y) \ge r$ для всех пар $x \ne y$ из Y_k. Остается проверить, что $n \ge \mu_k$. Предположим противное. Присоединим

$y_{n+1} = x_m$ как дополнительный член к подпоследовательности $\{y_j\}$. Тогда $d_k(x_0, x_m) = d_k(y_0, y_{n+1}) \leq 3r$ согласно (2) поскольку $d_k(y_j, y_{j+1}) < 2r$, см. выше. Однако мы знаем, что $d_k(x_0, x_m) \geq 4r$; противоречие. □ (лемма)

В продолжение доказательства теоремы, рассмотрим систему $\mathbf{c}_0$-равенств $\mathsf{D}_A = \mathsf{D}(\langle X_k; d_k\rangle_{k\in A})$, где $A \subseteq \mathbb{N}$. Каждое D_A является отношением эквивалентности на $\prod_{k\in A} X_k$. Направление (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) достаточно элементарно. Остается вывести (iii) $\Longrightarrow$ (i). Для этого, благодаря теореме 10.6, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 10.17. *Если $A, B \subseteq \mathbb{N}$ — бесконечные непересекающиеся множества, то соотношение $\mathsf{D}_A \leq_{\mathrm{A}} \mathsf{D}_B$ не имеет места.*

Доказательство. Предположим, что напротив, соотношение $\mathsf{D}_A \leq_{\mathrm{A}} \mathsf{D}_B$ выполнено посредством редукции Ψ, определенной (как в § 10.2) из возрастающей последовательности $\mathtt{min}\, B = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ чисел $n_k \in B$ и набора отображений $H_k : X_k \to \prod_{m\in[n_k, n_{k+1})\cap B} X_m$, $k \in A$. Положим

$$f_k(\delta) = \max_{\xi,\eta\in X_k,\, d_k(\xi,\eta)<\delta} \ \max_{m\in[n_k,n_{k+1})\cap B} d_m(H_k(\xi)(m), H_k(\eta)(m)),$$

для каждой пары $k \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$. Тогда $f(\delta) = \mathtt{sup}_{k\in A} f_k(\delta)$ является неубывающим отображением $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Мы утверждаем, что $\mathtt{lim}_{\delta\to 0} f(\delta) = 0$. В самом деле, в противном случае имеется число $\varepsilon > 0$ такое, что $f(\delta) \geq \varepsilon$ для всех δ. Тогда числа

$$s_k = \mathtt{min}_{\xi,\eta\in X_k,\, \xi\neq\eta} d_k(\xi, \eta) \quad \text{(они все} > 0)$$

должны удовлетворять $\mathtt{inf}_{k\in A} s_k = 0$. Это позволяет нам определить последовательность $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$ чисел $k_i \in A$ и для каждого k_i пару элементов $\xi_i, \eta_i \in X_{k_i}$ с $d_{k_i}(\xi_i, \eta_i) \to 0$, а также индекс $m_i \in [n_{k_i}, n_{k_i+1}) \cap B$ таким образом, что $d_{m_i}(H_{k_i}(\xi_i)(m_i), H_{k_i}(\eta_i)(m_i)) \geq \varepsilon$ для любого i. Возьмем любую пару точек $x, y \in \prod_{k\in A} X_k$, удовлетворяющих $x(k_i) = \xi_i$ и $y(k_i) = \eta_i$ для всех i и $x(k) = y(k)$ для всех индексов $k \in A$, не имеющих вида k_i. Понятно, что $x \,\mathsf{D}_A\, y$ выполнено, но $\Psi(x)\ \mathsf{D}_B\ \Psi(y)$ не имеет места, противоречие. Итак, в самом деле $\mathtt{lim}_{\delta\to 0} f(\delta) = 0$.

Для каждого индекса $k \in A$ возьмем множество $Y_k \subseteq X_k$ согласно лемме 10.16. Существуют элементы $x_k \neq y_k$ в Y_k такие, что $H_k(x_k) \restriction k = H_k(y_k) \restriction k$. Из (1) следует, что имеется конечная цепочка $x_k = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n = y_k$ из элементов $\xi_i \in X_k$, удовлетворяющая $d_k(\xi_i, \xi_{i+1}) \le \frac{1}{k+1}$ для всех $i < n$. Мы имеем $H_k(\xi_i) \in \prod_{m\in[n_k,n_{k+1})\cap B} X_m$ для каждого $i \le n$.

Теперь возьмем любой индекс $m \in [n_k, n_{k+1}) \cap B$. Элементы $y_i^m = H_k(\xi_i)(m)$, $i \le n$, удовлетворяют $d_m(y_i^m, y_{i+1}^m) \le f_k(\frac{1}{k+1})$ по определению функции f_k. Заметим, что $m \ge n_k \ge k$, причем $m = k$ не может иметь места, поскольку $k \in A$, а $m \in B$. Следовательно, $m > k$ строго. Отсюда следует $n \le \mu_m$, и далее, согласно (2),

$$(3)\quad d_m(H_k(x_k)(m), H_k(y_k)(m)) \le \tfrac{1}{m+1} + f_k(\tfrac{1}{k+1}) \le \tfrac{1}{k+1} + f(\tfrac{1}{k+1}).$$

Это выполнено для всех $m \in [n_k, n_{k+1}) \cap B$.

Однако точки $x = \{x_k\}_{k\in A}$, где $x(k) = x_k\ \forall k$, и $y = \{y_k\}_{k\in A}$ принадлежат декартову произведению $\prod_{k\in A} X_k$, а $x\ \mathsf{D}_A\ y$ не имеет места, так как $d_k(x_k, y_k) \ge r$ для всех k. С другой стороны, мы имеем $\Psi(x)\ \mathsf{D}_B\ \Psi(y)$ согласно (3), поскольку $\mathtt{lim}_{\delta\to 0} f(\delta) = 0$. Но это противоречит исходному предположению о том, что Ψ — редукция отношения D_A к D_B. □ (лемма 10.17)

□ (теорема 10.15)

10.6. О не-σ-компактном случае

Для любого метрического пространства $\mathbb{X} = \langle X\,; d\rangle$ обозначим $\mathsf{D}(\mathbb{X})$ отношение эквивалентности $\mathsf{D}(X_k; d_k)$ на $X^{\mathbb{N}}$, где $\langle X_k\,; d_k\rangle = \langle \mathbb{X}\,; d\rangle$ для всех индексов k. Например, отношение c_0 тождественно $\mathsf{D}(\mathbb{R})$. Каково место отношений вида $\mathsf{D}(\mathbb{X})$, где $\mathbb{X}$ — польское пространство, в общей $\le_{\mathsf{B}}$-структуре борелевских отношений эквивалентности?

Случай σ-компактных польских пространств здесь сводится к случаю конечных пространств, т.е. к c_0-равенствам, леммой 10.4. Таким образом, в этом случае мы имеем некоторую область отношений эквивалентности, расположенную $\le_{\mathrm{B}}$-между отношениями E_3 и c_0 согласно теоремам 10.12 и 10.8, и эта область сама по себе имеет достаточно богатую $\le_{\mathrm{B}}$-структуру по теореме 10.15.

Случай не σ-компактных пространств изучен в гораздо меньшей степени.

Пример 10.18. Рассмотрим случай, когда $\mathbb{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — пространство Бэра со стандартной метрикой[5] $d(a,b) = \frac{1}{m(a,b)+1}$, где $m(a,b)$ обозначает, для $a \ne b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, наибольшее натуральное m такое, что $a \restriction m = b \restriction m$. Если $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $n, k \in \mathbb{N}$, то $x(n) \restriction k$ — конечная последовательность из k натуральных чисел. В силу нульмерности пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для любых $x, y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ соотношение $x \,\mathsf{D}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\, y$ эквивалентно тому, что

$$\forall n\, \exists k_0\, \forall k \ge k_0\ (x(n) \restriction k = y(n) \restriction k)\,.$$

Упражнение: выведите отсюда, что $\mathsf{D}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_3$. □

Проблема 10.19. Возьмем теперь в качестве $\mathbb{X}$ (польское) пространство $C[0,1]$ всех вещественных функций, определенных и непрерывных на единичном отрезке вещественной прямой $\mathbb{R}$, с метрикой $d(f,g) = \mathtt{max}_{0 \le x \le 1} |f(x) - g(x)|$. Это, разумеется, не σ-компактное пространство. Что можно сказать о месте отношения $\mathsf{D}(C[0,1])$ и о его $\le_{\mathrm{B}}$-связях с более изученными отношениями эквивалентности вроде E_i, $i = 0,1,2,3$, или ℓ^p, c_0? □

Этот открытый вопрос (он приведен, например, в статье Су Гао [33]) связан с c_0-равенствами, точнее, с самим c_0, еще и с другой стороны. Рассмотрим следующий «континуальный» аналог C_0 отношения c_0 : если f, g — непрерывные вещественные функции на полупрямой $[0, +\infty)$, то $x \,\mathsf{C}_0\, y$, если $\mathtt{lim}_{x \to +\infty} |f(x) - g(x)| = 0$.

[5] Заметим, что отношение $\mathsf{D}(\mathbb{X})$ зависит не от топологической, а от метрической структуры пространства $\mathbb{X}$, так что выбор метрики, порождающей данную топологию, представляется, вообще говоря, существенным.

Понятно, что каждую непрерывную функцию $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ можно отождествить с последовательностью ее ограничений на целые интервалы вида $[n_n, n_{n+1})$, т.е. с точкой польского пространства-степени $C[0,1]^{\mathbb{N}}$. При таком отождествлении область определения отношения C_0 становится борелевским множеством в $C[0,1]^{\mathbb{N}}$, а само C_0 — борелевским отношением эквивалентности, которое на этом множестве, очевидно, совпадает с $\mathsf{D}(C[0,1])$. (Вообще же область отношения $\mathsf{D}(C[0,1])$ — все пространство $C[0,1]^{\mathbb{N}}$.)

Проблема 10.20. Что можно сказать о $\le_{\mathrm{B}}$-связях отношения C_0 с более изученными борелевскими отношениями эквивалентности? □

Су Гао доказал в [33], что отношение эквивалентности C_0 (обозначенное в этой статье E_K) удовлетворяет $\mathsf{C}_0 \le_{\mathrm{B}} \mathsf{u}_0^*$, где отношение u_0^* определено на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ следующим образом:

$$x \,\mathsf{u}_0^*\, y\,, \quad \text{если } \forall \varepsilon > 0\, \exists m_0\, \forall m \ge m_0\, \forall n\, (|x(m,n) - y(m,n| < \varepsilon).$$

Кроме того, в [33] определено[6] другое борелевское отношение эквивалентности u_0 на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющее $\mathsf{C}_0 \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{u}_0^*$, однако связь u_0^* и u_0 с более изученными эквивалентностями остаются невыясненными.

[6] Мы опустим здесь это достаточно сложное определение.

ДОПОЛНЕНИЕ. ОБ ОБЩЕЙ И ДЕСКРИПТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Дополнение содержит, в основном, справочный материал, который облегчит понимание некоторых разделов книги. Начинается он с нескольких слов об общей теории множеств.

Следующие три раздела сводят вместе определения и теоремы из дескриптивной теории множеств, которые существенно используются в книге. Заканчивается дополнение разделом о форсинге Коэна и списком наиболее употребительных в этой книге определений и обозначений теоретико-множественного характера.

А. Об общей теории множеств [1]

Теория множеств давно утратила тот несколько необычный, отчасти философский, характер, который она имела в годы жизни Кантора. Начиная с 20-х годов 20 века она стала обычным по задачам, методам и результатам разделом математики, не очень похожим в целом на математическую логику, с которой его часто объединяют. Это особенно характерно для дескриптивной теории множеств и ее раздела — дескриптивной динамики.

В дескриптивной теории множеств изучаются «простые» свойства «простых» множеств в полном сепарабельном метрическом пространстве и, в сущности, множеств на вещественной прямой или, что тоже самое, в таких топологических пространствах, как счетной степени двухэлементного множества или счетной степени натурального ряда чисел. Речь идет о *свойствах*: наличие биекции между двумя множествами, измеримость множества по Лебегу, наличие свойства Бэра у множества. Речь идет о *множествах*, которые получаются в обычном

[1] Дополнение А написано В. А. Любецким.

вещественном n-мерном пространстве путем двух–трех последовательных проектирований и взятий дополнения, начиная со счетных пересечений открытых множеств.[2,3] Проблемы, которые возникают при рассмотрении произвольных множеств и совокупностей, например, совокупности всех множеств или всех мощностей и т. д., остаются за пределами обычной теории множеств и, может быть, относятся скорее к философским проблемам математики. В рамках содержательных рассуждений это происходит потому, что рассматриваются только свойства и множества реально возникающие в математике, подобные упомянутым выше, но не совокупность всех множеств.

При аксиоматическом подходе принято рассматривать аксиоматику Цермело–Френкеля, обозначаемую **ZFC**. В ней аксиомы исключают объекты, подобные совокупности всех множеств. Правда, произвольное множество, удовлетворяющее этой аксиоматике, — тоже весьма абстрактный объект, например, оно может иметь произвольно большую мощность. Это обстоятельство исключается в дескриптивной теории множеств, как это видно из ее описания, приведенного выше. Поэтому парадоксы теории множеств, которые когда-то рассматривались как чуть ли не центральное место в теории множеств, исключены аксиоматикой **ZFC** и, тем более, невозможны в дескриптивной теории множеств. Их сменил *парадокс* принципиально нового типа: некоторые очень естественные математические утверждения оказываются в принципе не истинными и не ложными. Существование таких утверждений было предсказано Лузиным и доказано в работах Геделя, П. Новикова, Коэна. Например, таково утверждение об измеримости по Лебегу простого и явно описанного множества вещественных чисел.

С другой стороны, теория множеств имеет ряд черт, исключительно выделяющих ее среди других разделов математики. Во-первых, вся работающая в естествознании математика и практически вся математика записывается формулами язы-

---

[2] В случае n-мерного бэровского пространства вместо таких $\mathbf{G}_\delta$-множеств можно начинать непосредственно с открытых множеств. В дескриптивной теории множеств n-мерные вещественное и бэровское пространства не различаются.

[3] Множества, которые возникают таким образом, при любом конечном числе проектирований и дополнений называются *проективными*. Допуская вольность, к проективным множествам относят и аналогичным образом определяемые множества в пространствах натуральных и рациональных чисел.

ка теории множеств, языка **ZFC**. В то время, как этот язык кажется очень простым: в нем ровно одно исходное отношение «множество x принадлежит множеству y». Даже отношение равенства выражается через это отношение: множества равны, если они содержат одни и те же элементы. Языки элементарной планиметрии или элементарной арифметики выглядят гораздо сложнее. Во-вторых, не кажется, чтобы аксиоматика **ZFC** отличалась какой-то особой сложностью по сравнению с аксиоматиками элементарных геометрии или арифметики. И в тоже время не вызывает сомнения, что, используя аксиомы **ZFC**, можно доказать любое истинное математическое утверждение так же, как проводятся доказательства в элементарной геометрии. По крайней мере, неясно, в чем заключалась бы особенная сложность языка и аксиоматики теории множеств.

Занимавшиеся теорией множеств отмечали удивительное сочетание в ней геометричности (наглядности) и чисто логических (формальных) рассуждений, иногда граничащих с вычислениями. Например, как пишет академик Крылов[4], Борель и Лебег, характеризуя Лузина и его труды по теории множеств, всегда подчеркивали — «великий геометр». В-третьих, теория множеств обладает эффективностью, несмотря на всю ее абстрактность. Одно из проявлений этой эффективности состоит в том, что ядро в совокупности всех множеств — борелевские и проективные множества строятся и изучаются в рамках единой теории рекурсивности и обладают общими чертами эффективных объектов.[5] На этой общей основе свои, более специальные понятия эффективности разработаны в разных областях теории множеств. Это, в частности, такие концепции, как конструктивность по Гёделю и ее современные обобщения в рамках теории больших кардиналов, а также разнообразные трансфинитные рекурсивные схемы.

Другое проявление эффективности состоит в следующем. Если получено доказательство из аксиом **ZFC*** любого утверждения вида $\forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$, то по этому доказательству можно алгоритмически построить явное выражение (терм) $f(x)$, для которого $\forall x\, \varphi(x, f(x))$. Здесь аксиоматика **ZFC*** получается из **ZFC** удалением важной, но все-таки не теоретико-множествен-

[4] А. Н. Крылов, *Записки об ученых трудах действительных членов РАН*, Изд-во АН СССР, Москва, 1930.

[5] Тема книги не позволяет развернуть этот тезис.

ной аксиомы $\psi \vee \neg \psi$ для всех формул ψ («закона исключенного третьего»). Конечно, закон исключенного третьего широко используется в математике, но нередко его аккуратное применение не препятствует построению упомянутого терма, например, в теории приближения функций или в вычислительной математике; так что дело здесь не в исключении упомянутого закона как таковом. Хорошо известно выражение «конструктивизация доказательства», под которым имеется в виду как раз построение этого терма — явное описание объекта-множества. И такая конструктивизация нередко возможна.

Особо можно отметить недавние работы в рамках теоретико-множественного нестандартного анализа [12], [48], [50], в которых получили решение задачи, во многом параллельные тем, которыми занимается дескриптивная динамика. Общий обзор состояния этого перспективного направления приводится в статье [11].

К сожалению, курс теории множеств отсутствует на технических и естественных факультетах и даже на математических факультетах. Иногда теория множеств включается в курс математической логики, и тогда она предстает просто одной из многих (или даже одной из произвольных) аксиоматик и изучается в рамках обычных формализаций, свойственных математической логике; для сравнения представим себе изучение комплексного анализа в рамках такого формализованного изложения. Кажется, что небольшой курс теории множеств мог бы читаться студентам на обычном наглядном уровне изложения, например, так, как читается начальный курс геометрии. Курс теории множеств мог бы включать общие свойства множеств и ординалов, основы теории вещественных чисел, свойства борелевских и проективных множеств, представление о конструктивных и случайных числах.

Б. Дескриптивная теория: множества и функции

Этот и два последующих раздела дополнения содержат некоторые сведения из дескриптивной теории множеств, полезные для понимания многих моментов в основной части книги.

Конечно, список определений и теорем, который приводится здесь, не является изложением дескриптивной теории множеств. Поэтому предполагается знакомство читателя с основными понятиями и некоторыми методами дескриптивной теории множеств, в частности, теми, которые относятся к началам теории борелевских и аналитических множеств.

Здесь не приводятся ссылки по отдельным определениям и результатам, читатель может обратиться к монографиям Куратовского [14] и Кехриса [52]. Из работ на русском языке отметим статьи [2, 5, 6, 7, 8, 15] — хотя в целом они посвящены более продвинутым разделам дескриптивной теории множеств.

Рассматриваются множества в польских, т.е. в полных сепарабельных метрических, пространствах. Когда конкретный выбор метрики этого типа роли не играет, говорят просто о сепарабельных топологических пространствах, метризуемых полной метрикой. Примерами польских пространств являются вещественная прямая $\mathbb{R}$, *канторов дисконтинуум* $2^{\mathbb{N}}$, *бэровское пространство* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (с топологиями произведения) и вообще пространства вида $X^{\mathbb{N}}$, где X — не более чем счетное множество, содержащее по крайней мере два элемента. Понятно, что пространство $X^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно $2^{\mathbb{N}}$ или $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, если X соответственно конечное и бесконечное множество.

Каждое множество вида $\mathscr{P}(X) = \{x : x \subseteq X\}$, где X не более чем счетно, наследует польскую топологию из 2^X через отождествление множества $x \subseteq X$ и его характеристической функции. В частности, это относится, вк пространству $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, отождествляемому с дисконтинуумом $2^{\mathbb{N}}$. В качестве тривиального примера дискретного польского пространства отметим натуральный ряд $\mathbb{N}$ с расстоянием как для вещественных чисел.

Напомним, что **борелевские** множества определяются как наименьшая σ-алгебра множеств в данном пространстве, которая замкнута относительно взятия дополнительного множества, а также относительно счетных объединений и счетных пересечений. Следующая теорема показывает совпадение структуры борелевских множеств для различных несчетных польских пространств, и даже для пространств, являющихся несчетными борелевскими множествами в польских пространствах.

Теорема Б.1. (i) *Любое несчетное польское пространство* $\mathbb{X}$ *является непрерывным взаимно однозначным образом бэровского пространства* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. *Всякое борелевское множество в поль-*

ском пространстве является непрерывным взаимно однозначным образом замкнутого подмножества $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(ii) *Любые два несчетных польских пространства* $\mathbb{X}$ *и* $\mathbb{Y}$ *борелевски изоморфны, т. е. найдется борелевская биекция* $\beta : \mathbb{X} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{Y}$.

(iii) *Если* X *— борелевское множество польского пространства* $\mathbb{X}$, *то существует польская топология на* $\mathbb{X}$, *более сильная, чем исходная топология, в которой множество* X *открыто и все открытые в этой более сильной топологии множества — борелевские в исходной топологии.* □

Более широкий класс множеств, чем борелевские множества в польских пространствах, образуют **аналитические** множества в польских пространствах — т. е. непрерывные образы борелевских множеств этих пространств. Это эквивалентно тому, чтобы рассматривать непрерывные образы только замкнутых множеств бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Эти множества также называются еще *суслинскими* множествами и *A-множествами*, их можно определить из борелевских множеств с помощью операции проектирования или A-операции.

Дополнение аналитического множества до объемлющего польского пространства называется **коаналитическим** множеством — а также *аналитическим дополнением*, *косуслинским* множеством, или *CA-множеством*. Замечательный результат, теорема Суслина (следствие Г.2 ниже), характеризует борелевские множества как те, которые являются одновременно аналитическими и коаналитическими. Приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}^1_1 &= \text{совокупность всех аналитических множеств,} \\ \boldsymbol{\Pi}^1_1 &= \text{совокупность всех коаналитических множеств} \end{aligned}$$

и также $\boldsymbol{\Delta}^1_1 = \boldsymbol{\Sigma}^1_1 \cap \boldsymbol{\Pi}^1_1$ как обозначение всех борелевских множеств в данном пространстве.

Напомним, что **борелевской** функцией[6] (борелевским отображением) называется любое отображение f множества X, рас-

[6] Эти функции также называются *B-измеримыми*, или *функциями классификации Бэра*.

положенного в одном польском пространстве $\mathbb{X}$, в другое польское пространство $\mathbb{Y}$, которое удовлетворяет одному из следующих двух эквивалентных (для случая польских пространств) условий:

1) f-прообразами открытых (а тогда и борелевских) множеств в $\mathbb{Y}$ являются борелевские множества в $\mathbb{X}$;
2) график отображения является борелевским множеством в $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$.

Более широкий класс образуют *аналитические* функции, т.е. такие, графики которых — аналитические множества.

B. Свойство Бэра

Не более чем счетные объединения нигде не плотных множеств данного топологического пространства называются *тощими* множествами. Их также называют множествами 1-й категории. Дополнения тощих множеств называются *котощими* или множествами 2-й категории. Понятно, что счетные объединения тощих множеств и счетные пересечения ко-тощих множеств сами являются, соответственно, тощими и котощими.

Теорема B.1 (теорема Бэра о категории). *Пусть $\mathbb{X}$ — полное метрическое пространство. Тогда $\mathbb{X}$ не является тощим в себе, т.е. другими словами не является объединением некоторого счетного семейства своих нигде не плотных подмножеств.*

Если X, Y — множества одного пространства, то X называется *тощим на* Y, если пересечение $X \cap Y$ — тощее множество в наследственной топологии в X. Наконец, Y называется *котощим на* X, если разность $X \setminus Y$ — тощее множество в наследственной топологии в X.

Если Y — котощее подмножество пространства $\mathbb{X}$, то найдется котощее $\mathbf{G}_\delta$-множество Y', для которого $Y' \subseteq Y$. Это утверждение двойственно по отношению к простому замечанию: любое тощее множество содержится в тощем $\mathbf{F}_\sigma$-множестве. Отметим также, что $\mathbf{G}_\delta$-множество является котощим в $\mathbb{X}$, если и только если оно всюду плотно в $\mathbb{X}$.

Множество X имеет *свойство Бэра*, если найдется открытое множество U такое, что симметрическая разность $X \,\Delta\, U$ — тощее множество. Открытые множества, разумеется, имеют свойство Бэра. Нетрудно доказать трансфинитной индукцией по построению борелевского множества из открытых множеств с помощью борелевских операций, что все борелевские множества имеют свойство Бэра. Более трудный результат состоит в том, что и все аналитические и все коаналитические множества имеют свойство Бэра.

Для свойства Бэра выполняется аналог теоремы Фубини:

Теорема В.2 (Улам–Куратовский). *Если $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — польские пространства и множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ обладает свойством Бэра в $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, то для того, чтобы P было тощим, необходимо и достаточно следующее: множество всех точек $x \in \mathbb{X}$, для которых сечение $P_x = \{y : \langle x, y\rangle \in P\}$ — не тощее в $\mathbb{Y}$, является тощим множеством в $\mathbb{X}$.* □

Следующую теорему Воота иногда называют теоремой о кванторе «для почти всех в смысле свойства Бэра», она важна в ряде приложений. Аналогичная теорема выполняется и для меры, но она не используется в книге.

Теорема В.3 (Воот). *Если пространства $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ таковы, как в предыдущей теореме, и $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ — борелевское множество, то множество*

$$X = \{x \in \mathbb{X} : \text{сечение } P_x \text{ не тощее в } \mathbb{Y}\}$$

— также борелевское. □

Функция (отображение одного топологического пространства в другое) f называется *измеримой по Бэру*, если f-прообразами открытых (а тогда и борелевских) множеств являются множества со свойством Бэра. По следующей теореме измеримые по Бэру функции — это в точности те, которые непрерывны с точностью до тощего подмножества в области их определения.

Теорема В.4. *Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — польские пространства. Функция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ измерима по Бэру в том и только в том случае, когда найдется такое котощее $\mathbf{G}_\delta$-множество $C \subseteq \mathbb{X}$, что f непрерывна на C.*

Доказательство. Допустим, что f измерима по Бэру. Пространство $\mathbb{Y}$ имеет счетную базу топологии, пусть это $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для каждого n найдутся открытое множество $U_n \subseteq \mathbb{X}$ и тощее множество $Q_n \subseteq \mathbb{X}$, для которых выполняется $U_n \,\Delta\, f^{-1}(Y_n) \subseteq Q_n$. Легко видеть, что множество $Q = \bigcup_n Q_n$ также тощее, следовательно, $D = \mathbb{X} \smallsetminus Q$ является котощим, а с другой стороны, f непрерывна на D. Доказательство в обратную сторону и вовсе элементарно. □

Г. Несколько теорем из дескриптивной теории множеств

Кроме простых утверждений о топологических пространствах, в этой книге используются только следующие теоремы дескриптивной теории множеств.

Теорема Г.1 (Редукция и отделимость Отделимость). *Если X и Y — коаналитические множества в польском пространстве $\mathbb{X}$, то найдутся* **дизъюнктные** *(т. е. непересекающиеся) коаналитические множества $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, для которых $X' \cup Y' = X \cup Y$.*

Если X, Y — дизъюнктные аналитические множества, то найдется борелевское множество Z такое, что $X \subseteq Z$ и $Y \cap Z = \emptyset$. □

Отсюда сразу вытекает

Следствие Г.2 (теорема Суслина). *Для того, чтобы множество X польского пространства было борелевским, необходимо и достаточно, чтобы оно и его дополнение были аналитическими множествами. Другими словами,* **борелевские множества** $= \mathbf{\Delta}^1_1$.

Следующие теоремы относятся, главным образом, к отображениям борелевских множеств, в частности, к их проектированию. Напомним, что σ-компактными называются счетные объединения компактных множеств.

Теорема Г.3 (σ-компактная проекция). *Если P — борелевское множество в произведении $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ двух польских пространств и для любой точки $x \in \mathbb{X}$ сечение $P_x = \{y : \langle x, y\rangle \in P\}$ σ-компактно, то $\operatorname{dom} P$ — борелевское множество в $\mathbb{X}$.* □

В рассматриваемой ситуации $\operatorname{dom} P$ есть образ множества $P \subseteq \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ при отображении *проекции* $\langle x, y\rangle \mapsto x$, которое является непрерывным отображением из P в $\mathbb{X}$. Условие σ-компактности сечений P_x означает, что прообраз каждой точки $x \in \mathbb{X}$ σ-компактен — и в этом случае утверждается борелевость множества $\operatorname{dom} P = \{x : \langle x, y\rangle \in P\}$.

Следствие Г.4. *Образы борелевских множеств при борелевских отображениях с условием σ-компактности прообраза каждой точки, в частности, при однозначных борелевских отображениях, — борелевские множества.*

Напомним, что образы борелевских множеств при борелевских, и даже непрерывных отображениях — вообще говоря, произвольные аналитические, т.е. возможно неборелевские, множества.

Доказательство. Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — польские пространства, $Y \subseteq \mathbb{Y}$ — борелевское множество, а $f : Y \to \mathbb{X}$ — борелевская функция с условием σ-компактности прообраза каждой точки. Тогда ее обращенный график $P = \{\langle f(y), y\rangle : y \in Y\}$ является борелевским множеством в $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, причем из выбора f следует σ-компактность каждого сечения P_x. Теперь борелевость множества $f[Y] = \operatorname{dom} P = \{f(x) : x \in X\}$ следует из теоремы Г.3. □

Теорема Г.5 (Счетно-формное перечисление). *Если $P, \mathbb{X}, \mathbb{Y}$ таковы, как в теореме Г.3, и сверх того, каждое сечение P_x не более чем счетно, то существует последовательность борелевских функций $f_n : \operatorname{dom} P \to \mathbb{Y}$ такая, что $P_x = \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ для всех $x \in \operatorname{dom} P$.* □

Теорема Г.6 (σ-компактная униформизация). *Если $P, \mathbb{X}, \mathbb{Y}$ таковы, как в теореме Г.3, то P допускает борелевскую униформизацию, т.е. найдется борелевская функция $g : \operatorname{dom} P \to \mathbb{Y}$ такая, что $\langle x, f(x)\rangle \in P$ для всех $x \in \operatorname{dom} P$.* □

В то же время известно, что существует борелевское и даже замкнутое множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, не допускающее борелевской униформизации. У такого множества по крайней мере некоторые сечения P_x не σ-компактны.

Теорема Г.7 (Теорема продолжения). *Если $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ таковы, как выше, $X \subseteq \mathbb{X}$ — аналитическое множество, а $f : X \to \mathbb{Y}$ — аналитическая функция, то найдется борелевская функция $f' : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, продолжающая f.* □

Из этой теоремы вытекает, в частности, следующее: *если в этих условиях множество $X = \mathtt{dom}\, f$ — борелевское, то и функция f является борелевской.* Просто потому, что ограничение борелевской функции f' на любое борелевское $X \subseteq \mathtt{dom}\, f'$ является снова борелевским множеством. Это можно доказать и прямым рассуждением.

Д. Метод вынуждения Коэна

Метод вынуждения или форсинг раньше ассоциировался с доказательствами непротиворечивости и совместимости различных теоретико-множественных гипотез в теории множеств, см., например, книги [2, гл. 4] и [4]. Однако теперь он широко используется и в доказательствах обычных математических теорем. В частности, это касается *форсинга Коэна*, связанного со свойством Бэра в польских пространствах. Здесь форсинг облегчает работу с *генерическими* точками — точками данного пространства, принадлежащими всем плотным $\mathbf{G}_\delta$-множествам из данного их счетного семейства. С помощью форсинга Коэна удается избежать детального определения тех плотных $\mathbf{G}_\delta$-множеств, которые относятся к рассматриваемой задаче, заменив такое определение условием кодируемости в некоторой подходящей модели теории множеств, см. ниже об этом.

Для этой части изложения предполагается некоторое знакомство читателя с форсингом, напомним некоторые детали. Форсинг — это особый метод расширения транзитивных[7] моделей

[7] Множество y *транзитивно*, если любой его элемент z удовлетворяет условию $z \subseteq y$. Каждая модель является множеством.

аксиоматики Цермело–Френкеля **ZFC** до моделей той же теории, обладающих дополнительными свойствами. Если форсинг используется для доказательств непротиворечивости, то в расширении должна выполняться гипотеза, совместимость которой мы хотим доказать. Если форсинг применяется для решения обычных математических задач, как это и делается в данной книге, то нет необходимости предполагать, что исходная и расширенная модели удовлетворяют всем аксиомам **ZFC**, тем более что в этом случае возникает проблема существования моделей теории **ZFC**. Можно ограничиться частью этих аксиом.

Определение Д.1. Аксиоматическая теория $\mathbf{ZFC}^-$ включает все аксиомы Цермело–Френкеля **ZFC**, включая аксиому выбора, кроме аксиомы степени, которая заменяется на следующую ослабленную форму: «для каждого множества X существует множество $\mathscr{P}_{\mathtt{ctbl}}(X)$, состоящее из всех не более чем счетных множеств $Y \subseteq X$». $\square$

Теория $\mathbf{ZFC}^-$ имеет модели, например, ее естественной моделью служит множество $\mathrm{H}_{\mathfrak{c}^+}$ всех множеств x, чье *транзитивное замыкание*[8] имеет мощность $\le \mathfrak{c}$. Поэтому она имеет и счетные транзитивные модели. В то же время $\mathbf{ZFC}^-$ достаточно сильна, чтобы доказать существование таких множеств, как декартовы произведения вида X^Y, где Y не более чем счетно, и таких польских пространств как $\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ и им подобных, и даже множества HC всех *наследственно счетных* множеств, т.е. таких множеств, транзитивные замыкания которых не более чем счетны. Отметим, что все точки пространств типа упомянутых $\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ принадлежат этому множеству HC.

Теория $\mathbf{ZFC}^-$ также позволяет адекватно работать с борелевскими множествами и топологиями польских пространств.

Фиксируем счетную транзитивную модель $\mathfrak{M}$ теории $\mathbf{ZFC}^-$.

Определение Д.2. (i) Обычно предполагается, что те или иные объекты, важные для поставленной задачи, входят в $\mathfrak{M}$. Для объектов x типа точек из $2^{\mathbb{N}}$ или $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или множеств $x \subseteq \mathbb{N}$

[8] Т.е. наименьшее транзитивное множество y, включающее x как подмножество.

— вообще, для всех $x \in \mathbf{HC}$ — это легко обеспечить: просто требуем, чтобы $x \in \mathfrak{M}$.

Другое дело, когда речь идет о точечных множествах, например, о борелевских множествах X в пространствах $2^{\mathbb{N}}$ или $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Здесь нельзя требовать, чтобы $X \in \mathfrak{M}$, поскольку счетная транзитивная модель $\mathfrak{M}$ не может содержать несчетных множеств. Приходится использовать подходящую кодировку борелевских множеств и вводить в $\mathfrak{M}$ коды борелевских множеств вместо самих множеств.

(ii) Кодом польского пространства $\mathbb{X}$ можно считать пару, состоящую из фиксированного плотного счетного множества $D_{\mathbb{X}} \subseteq \mathbb{X}$ и метрики, ограниченной на $D_{\mathbb{X}}$, т.е. $d_{\mathbb{X}} \restriction D_{\mathbb{X}}$. Можно рассматривать только такие польские пространства $\mathbb{X}$, которые удовлетворяют $\mathbb{X} \subseteq \mathbf{HC}$, так как любое польское пространство изометрично такому пространству. (Заметим, что условие $\mathbb{X} \subseteq \mathbf{HC}$ выполнено для пространств $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$.) В этом случае $D_{\mathbb{X}}$ и $d_{\mathbb{X}} \restriction D_{\mathbb{X}}$ — множества из $\mathbf{HC}$. Скажем, что пространство $\mathbb{X}$ *кодируется* в $\mathfrak{M}$, если $D_{\mathbb{X}}$ и $d_{\mathbb{X}} \restriction D_{\mathbb{X}}$ принадлежат $\mathfrak{M}$ и множество $D_{\mathbb{X}}$ остается счетным в $\mathfrak{M}$ в том смысле, что существует функция $f \in \mathfrak{M}$ из $\mathbb{N}$ на $D_{\mathbb{X}}$.

(iii) Скажем, что открытое множество $U \subseteq \mathbb{X}$ *кодируется в* $\mathfrak{M}$, если найдется множество $c \in \mathfrak{M}$, $c \subseteq D_{\mathbb{X}} \times \mathbb{Q}^+$ такое, что $U = \bigcup_{\langle x,r\rangle \in c} U_r^{\mathbb{X}}(x)$, где $U_r^{\mathbb{X}}(x) = \{y \in \mathbb{X} : d_{\mathbb{X}}(x,y) < r\}$ (базовый открытый шар в $\mathbb{X}$). Такое множество c называется *кодом* множества U. Скажем, что $\mathbf{G}_\delta$-множество $W \subseteq \mathbb{X}$ *кодируется в* $\mathfrak{M}$, если оно допускает представление в виде $W = \bigcap_n U_n$, где каждое $U_n \subseteq \mathbb{X}$ открыто и найдется последовательность $c = \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}$ такая, что каждое c_n является кодом U_n. Такая последовательность c называется *кодом* множества W.

(iv) Предположим, что польские пространства $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ кодируются в $\mathfrak{M}$, а $\vartheta : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ — борелевская функция, которую мы также хотели бы кодировать. Существует метод кодировки борелевских множеств, см., например, [4, 8, 6, 9]), но он довольно сложен. Кроме того, нам нужно кодирование функции только в случае, когда она непрерывна на некотором $\mathbf{G}_\delta$-множестве $X \subseteq \mathbb{X}$, которое уже имеет код в $\mathfrak{M}$ в смысле (iii), и для нас важно кодировать лишь $\vartheta \restriction X$, а не всю функцию ϑ. Здесь поступим так. Для любых $y \in D_{\mathbb{Y}}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$ множество $X_{yr} = \{x \in X :$

$d_{\mathbb{Y}}(y, \vartheta(x)) < r\}$ открыто в X, а потому существует открытое уже в $\mathbb{X}$ множество $U_{yr} \subseteq \mathbb{X}$, для которого $X_{yr} = X \cap U_{yr}$. Кодом функции $\vartheta \restriction X$ будем считать любое индексированное множество $c = \{c_{yr}\}_{y \in D_{\mathbb{Y}},\, r \in \mathbb{Q}^+}$, элементы c_{yr} которого являются кодами соответствующих множеств U_{yr}. Наконец, $\vartheta \restriction X$ кодируется в $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}$ содержит код $\vartheta \restriction X$ и также код самого X как $\mathbf{G}_\delta$-множества. □

Определим понятие генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$ точки данного польского пространства $\mathbb{X}$, кодированного в $\mathfrak{M}$.

Определение Д.3. Точка $x \in \mathbb{X}$ называется *генерической по Коэну* над моделью $\mathfrak{M}$, если она принадлежит любому плотному в $\mathbb{X}$ открытому (а тогда и любому плотному $\mathbf{G}_\delta$) множеству $U \subseteq \mathbb{X}$, кодированному в $\mathfrak{M}$ в смысле определения Д.2. Множество всех генерических по Коэну над $\mathfrak{M}$ точек $x \in \mathbb{X}$ обозначается $\mathtt{Gen}^{\mathfrak{M}}_{\mathbb{X}}$. □

Из счетности модели $\mathfrak{M}$ следует, что $\mathtt{Gen}^{\mathfrak{M}}_{\mathbb{X}}$ — плотное $\mathbf{G}_\delta$-множество в $\mathbb{X}$. Кроме того, выполняется $\mathtt{Gen}^{\mathfrak{M}}_{\mathbb{X}} \subseteq D_0$, поскольку в наших предположениях $\mathbf{G}_\delta$-множество D_0 кодируется в $\mathfrak{M}$.

Определение Д.4. *Форсинг Коэна* $\mathbf{C}_{\mathbb{X}}$ для польского пространства $\mathbb{X}$ определяется как совокупность всех открытых шаров рациональных радиусов с центрами в том заранее фиксированном счетном плотном подмножестве $D_{\mathbb{X}}$ пространства $\mathbb{X}$, которое принадлежит $\mathfrak{M}$. Понятно, что $\mathbf{C}_{\mathbb{X}}$ — счетное множество, причем имеется функция из $\mathbb{N}$ на $\mathbf{C}_{\mathbb{X}}$, которую можно кодировать в $\mathfrak{M}$, так что в этом смысле $\mathbf{C}_{\mathbb{X}}$ счетно и в $\mathfrak{M}$. □

Элементы множеств вида $\mathbf{C}_{\mathbb{X}}$ принято называть *вынуждающими условиями*. Меньшие по включению множества называются *более сильными* вынуждающими условиями.

Замечание Д.5. Если польское пространство $\mathbb{X}$ кодируется в $\mathfrak{M}$ в смысле Д.2, а точка $x \in \mathbb{X}$ является генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$, то найдется наименьшая счетная транзитивная модель $\mathfrak{M}[x]$ для той же теории $\mathbf{ZFC}^-$, содержащая x и все множества из $\mathfrak{M}$. Эта модель $\mathfrak{M}[x]$ называется *генерическим расширением модели* $\mathfrak{M}$ *с помощью точки* x.

В выводе этого результата важную роль играет счетность множества $\mathbf{C}_{\mathbb{X}}$ в $\mathfrak{M}$. □

Следующая теорема выражает ключевое свойство генерических точек.

Теорема Д.6. *Пусть $\varphi(v)$ — формула языка теории множеств со свободной переменной v и параметрами — множествами из некоторой счетной транзитивной модели $\mathfrak{M}$ теории* $\mathbf{ZFC}^-$, *а $\mathbb{X}$ — польское пространство, кодируемое в $\mathfrak{M}$.*

Если $x \in \mathtt{Gen}_{\mathbb{X}}^{\mathfrak{M}}$ и формула $\varphi(x)$ истинна в $\mathfrak{M}[x]$, то эта формула «вынуждается» в том смысле, что найдется открытое множество $U \subseteq \mathbb{X}$, которое можно считать условием из $\mathbf{C}_{\mathbb{X}}$, содержащее x и такое, что $\varphi(x')$ истинно в $\mathfrak{M}[x']$ для каждой точки $x' \in U \cap \mathtt{Gen}_{\mathbb{X}}^{\mathfrak{M}}$. □

Следующий результат, известный как теорема о произведении в теории форсинга, часто используется в книге.

Теорема Д.7. *Пусть модель $\mathfrak{M}$ такова, как указано в Д.1, польские пространства $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ кодируются в $\mathfrak{M}$ и $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$. Для того, чтобы точка x являлась генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$, а точка y — генерической по Коэну над $\mathfrak{M}[x]$, необходимо и достаточно, чтобы $\langle x, y\rangle$ как точка пространства $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ была генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$.* □

Более подробно на русском языке о форсинге Коэна и генерических по Коэну точках рассказано в статье [8].

E. Теоретико-множественные обозначения

- $\mathscr{P}(A) = \{x : x \subseteq A\}$ — *множество-степень* множества A.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ — натуральные числа. $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- $2 = \{0, 1\}$, вообще $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, т.е. каждое натуральное число равно множеству всех меньших натуральных чисел.
- $X^Y = \{f : f$ есть функция из Y в $X\}$.

  $\mathtt{dom}\, f$ есть область определения, а $\mathtt{ran}\, f$ — область всех значений функции f.

- В частности, X^n есть множество всех функций s из множества $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ в X, т.е. всех последовательностей длины n из элементов множества X.

  Полагаем $X^{<\omega} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$, множество всех конечных (произвольной длины) последовательностей из элементов множества X.

  $\mathrm{lh}\, s$ есть *длина* конечной последовательности s.

- $f[X] = \{f(x) : x \in X \cap \mathtt{dom}\, f\}$ — *f-образ* множества X.

- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — *бэровское пространство*. Если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ — конечная последовательность натуральных чисел, то $\mathscr{O}_s(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset x\}$ — базовая окрестность в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (бэровский интервал).

- $X \subseteq^* Y$ означает, что разность $X \smallsetminus Y$ конечна.

- Если множество A фиксировано, то $\complement X = X^{\complement} = A \smallsetminus X$ для всех $X \subseteq A$.

- $A \times B = \{\langle a, b\rangle : a \in A \text{ и } b \in B\}$ — *декартово произведение*.

- Если $X \subseteq A \times B$ и $a \in A$ то $(X)_a = \{b : \langle a, b\rangle \in X\}$ — *сечение*.

- $\#X = \#(X)$ — число элементов конечного множества X.

- $X \,\Delta\, Y = (X \smallsetminus Y) \cup (Y \smallsetminus X)$ — *симметрическая разность* множеств X и Y. Отождествляя множества $X \subseteq \mathbb{N}$ с их характеристическими функциями, т.е. элементами множества $2^{\mathbb{N}}$, пореносим определение Δ на последние: $a \,\Delta\, b = \{n \in \mathbb{N} : a(n) \neq b(n)\}$ для $a, b \in 2^{\mathbb{N}}$.

- «почти все» означает «все кроме конечного числа».

- $\exists^\infty x \ldots$ означает: «существует бесконечно много x таких, что ...»,

  $\forall^\infty x \ldots$ означает: «для всех кроме конечного числа x, выполнено ...».

- *Идеалом* на множестве A называется любое множество $\emptyset \neq \mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(A)$, замкнутое относительно операции $\cup$ и удовлетворяющее условию $x \in \mathscr{I} \implies y \in \mathscr{I}$ при $y \subseteq x \subseteq A$.

Рассматриваются обычно *нетривиальные* идеалы, т.е. те, которые содержат все одноэлементные множества $\{a\} \subseteq A$ и не содержат само A.

- Если $\mathscr{I}$ — идеал на множестве A то $\mathsf{E}_{\mathscr{I}}$ есть отношение эквивалентности на $\mathscr{P}(A)$, определяемое так: $X \mathrel{\mathsf{E}_{\mathscr{I}}} Y$, если $X \mathbin{\Delta} Y \in \mathscr{I}$.

- Пусть E — отношение эквивалентности (ОЭ) на множестве X. Тогда

  $[y]_{\mathsf{E}} = \{x \in X : y \mathrel{\mathsf{E}} x\}$ есть E-*класс* элемента $y \in X$.

  $[Y]_{\mathsf{E}} = \bigcup_{y \in Y} [y]_{\mathsf{E}}$ есть E-*насыщение* множества $Y \subseteq X$.

  Множество $Y \subseteq X$ называется E-*инвариантным* (или E-*насыщенным*), если $[Y]_{\mathsf{E}} = Y$.

  Множество $Y \subseteq X$ *попарно* E-*эквивалентно* (соответственно, *попарно* E-*неэквивалентно*), если выполняется $x \mathrel{\mathsf{E}} y$ (соответственно, $x \not\mathrel{\mathsf{E}} y$) для всех $x \neq y$ из Y.

  Трансверсаль отношения E — это любое попарно E-неэквивалентное множество, имеющее с каждым E-классом $[x]_{\mathsf{E}}$, $x \in X$, ровно один общий элемент.[9]

- Если X, Y — любые множества, а E — бинарное отношение, то $X \mathrel{\mathsf{E}} Y$ означает, что выполнено $\forall x \in X\, \exists y \in Y\, (x \mathrel{\mathsf{E}} y)$ и $\forall y \in Y\, \exists x \in X\, (x \mathrel{\mathsf{E}} y)$.

[9] В литературе трансверсали иногда называются сечениями, что́ в настоящей книге неудобно, так как термин «сечение» имеет здесь другой смысл.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию М.: Наука, 1977. 368 с.
2. *Баруайз К. Дж. (ред.).* Справочная книга по математической логике. Ч. 2. Теория множеств / Пер. с англ. В. Г. Кановея; Под ред. и с предисл. В. Н. Гришина; С добавлением В. Г. Кановея. М.: Наука, 1982. 376 с.
3. *Вершик А. М.* Траекторная теория // Ред. Я. Г. Синай. Динамические системы Ц 2. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 89–105. (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления; Т. 2).
4. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга/ Пер. с англ. В. И. Фуксона; Под ред. В. М. Гришина. М.: Мир, 1973. 152 с.
5. *Кановей В. Г.* Добавление. Проективная иерархия Лузина: современное состояние теории // Справочная книга по математической логике. М.: Наука, 1982. Ч.2. С. 273–364.
6. *Кановей В. Г.* Развитие дескриптивной теории множеств под влиянием работ Н. Н. Лузина // УМН. 1985. Т. 40, вып. 3. С. 117–155.
7. *Кановей В. Г.* Топологии, порожденные эффективно суслинскими множествами и их приложения в дескриптивной теории множеств // УМН. 196. Т. 51, вып. 3. С. 17–52.
8. *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств // УМН. 2003. Т. 58, вып. 5(353) С. 3–88.
9. *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* О множестве конструктивных вещественных чисел // Труды МИАН. 2004. Т. 247 С. 95–128.
10. *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* Конфинальное семейство отношений эквивалентности и порождающих их борелевских идеалов // Там же. 2006. Т. 252. С. 1–24.
11. *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* Проблемы теоретико-множественного нестандартного анализа // УМН. 2007. Т. 62, вып. 1. С. 51–122.
12. *Кановей В. Г., Любецкий В. А., Реекен М.* О сводимости монадических отношений эквивалентности // Мат. заметки. 2007. Т. 81, вып. 6. С. 842–854.

13. *Кановей В. Г., Реекен М.* Некоторые новые результаты о борелевской несводимости отношений эквивалентности // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67 № 1. С. 59–82.

14. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. / Пер. с англ. М. Я. Антоновского; С предисл. П. С. Александрова. М.: Мир, 1966. 594 с.

15. *Успенский В. А.* Вклад Н. Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания // УМН. 1985. Т. 40, вып. 3. С. 85–116.

16. *Adams S., Kechris A. S.* Linear algebraic groups and countable Borel equivalence relations. // J. Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 13, N 4. P. 909–943. Electronic.

17. *Becker H., Kechris A. S.* The descriptive set theory of Polish group actions. Cambridge: Cambridge Univ. press, 1996. xii+136 p.

18. *Calbrix J.* Classes de Baire et espaces d'applications continues // C. r. Acad. Sci. A. 1985. Vol. 301, N 16. P. 759–762.

19. *Clemens J. D.* E_0 is generated by a homeomorphism. Preprint, July 22, 2004, `http://www.math.psu.edu/clemens/publications.html`.

20. *Dougherty R., Jackson S., Kechris A. S.* The structure of hyperfinite Borel equivalence relations // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 341, N 1. P. 193–225.

21. *Dougherty R. Hjorth G.* Reducibility and nonreducibility between l^p equivalence relations // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 351, N 5. P. 1835–1844.

22. *Dye H.A.* On groups of measure preserving transformations. I // Amer. J. Math. 1959. Vol. 81. P. 119–159.

23. *Dye H.A.* On groups of measure preserving transformations. II // Ibid. 1963. Vol. 85. P. 551–576.

24. *Farah I.* Ideals induced by Tsirelson submeasures // Fund. Math. 1999. Vol. 159, N 3. P. 243–258.

25. *Farah I.* Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 148(702). xvi+177 p.

26. *Farah I.* Basis problem for turbulent actions. I. Tsirelson submeasures // Ann. Pure Appl. Logic. 2001. Vol. 108, N 1/3. P. 189–203.

27. *Farah I.* Basis problem for turbulent actions. II. c_0-equalities // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 2001. Vol. 82, N 1. P. 1–30.

28. *Feldman J., Moore C. C.* Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 234, N 2. P. 289–324.

29. *Friedman H. Stanley L.* A Borel reducibility theory for classes of countable structures // J. Symbolic Logic. 1989. Vol. 54, N 3. P. 894–914.

30. *Friedman H. M.* Borel and Baire reducibility // Fund. Math. 2000. Vol. 164, N 1. P. 61–69.

31. *Gaboriau D.* Coût des relations d'équivalence et des groupes // Invent. Math. 2000. Vol. 139, N 1. P. 41–98.

32. *Gao Su.* The isomorphism relation between countable models: PhD thesis / Univ. of Calif. Los Angeles, 1998. ix+76 p.

33. *Gao Su.* Equivalence relations and classical Banach spaces // Mathematical Logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian Logic Conf., Novosibirsk, Russia, 16–19 August, 2005. Singapore: World Scientific, 2006. P. 70–89.

34. *Harrington L. A., Kechris A. S., Louveau A.* A Glimm-Effros dichotomy for Borel equivalence relations // J. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 3, N 4. P. 903–928.

35. *Hjorth G.* Actions by the classical Banach spaces // J. Symbolic Logic. 2000. Vol. 65, N 1. P. 392–420,

36. *Hjorth G.* Orbit cardinals: on the effective cardinalities arising as quotient spaces of the form X/G where G acts on a Polish space X // Isr. J. Math. 1999. Vol. 111. P. 221–261.

37. *Hjorth G.* Classification and orbit equivalence relations. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2000. xviii+195 p.

38. *Hjorth G.* A converse to Dye's theorem // Trans. Amer. Math. Soc. 2005. Vol. 357, N 8. P. 3083–3103.

39. *Hjorth G., Kechris A. S.* New dichotomies for Borel equivalence relations // Bull. Symbolic Logic. 1997. Vol. 3, N 3. P. 329–346.

40. *Hjorth G., Kechris A. S.* Recent developments in the theory of Borel reducibility // Fund. Math. 2001. Vol. 170, N 1/2. P. 21–52.

41. *Hjorth G., Kechris A. S., Louveau A.* Borel equivalence relations induced by actions of the symmetric group // Ann. Pure Appl. Logic. 1998. Vol. 92, N 1. P. 63–112.

42. *Jackson S., Kechris A. S., Louveau A.* Countable Borel equivalence relations // J. Math. Log. 2002. Vol. 2, N 1. P. 1–80.

43. *Jalali-Naini S.-A.* The monotone subsets of Cantor space, filters, and descriptive set theory: PhD thesis. Oxford, 1976. vii+73 p.

44. *Just W.* More mutually irreducible ideals. Preprint, 20.07.1990. 4 p.

45. *Just W.* Mutually irreducible ideals. Preprint, 27.04.1990. 6 p.

46. *Kanovei V.* On non-wellfounded iterations of the perfect set forcing // J. Symbolic Logic. 1999. Vol. 64, N 2. P. 551–574.

47. *Kanovei V.* Varia: Ideals and equivalence relations // `http://arxiv.org/abs/math/0610988`. 2006. xii+181 p.

48. *Kanovei V., Reeken M.* Borel and countably determined reducibility in nonstandard domain // Monatsh. Math. 2003. Vol. 140, N 3. P. 197–231.

49. *Kanovei V., Reeken M.* Borel irreducibility between two large families of Borel equivalence relations // Logic Colloquium '99. Urbana (IL): Assoc. Symbol. Logic, 2004. P. 100–110. (Lect. Notes Logic; Vol. 17).

50. *Kanovei V., Reeken M.* Effective cardinals in the nonstandard universe // Mathematical Logic in Asia: Proc. of the 9th Asian logic conf. Novosibirsk, Russia, 16–19 August, 2005. Singapore: World Scientific, 2006. P. 113–144.
51. *Kechris A. S.* The structure of Borel equivalence relations in Polish spaces // Set theory of the continuum (Berkeley, CA, 1989). P. 89–102. N. Y.: Springer, 1992. (Math. Sci. Res. Inst. Publ.; Vol. 26).
52. *Kechris A. S.* Classical descriptive set theory. N. Y.: Springer, 1995. xviii+402 p.
53. *Kechris A. S.* Rigidity properties of Borel ideals on the integers// Topology Appl. 1998. Vol. 85. N 1/3 : 8th Prague topological Symp. on general topology and its relations to modern analysis and algebra (1996). P. 195–205.
54. *Kechris A. S.* New directions in descriptive set theory // Bull. Symbolic Logic. 1999. Vol. 5, N 2. P. 161–174.
55. *Kechris A. S.* Descriptive dynamics // Descriptive set theory and dynamical systems. Cambridge: Cambridge Univ. press, 2000. P. 231–259. (London Math. Soc. Lect Note Ser.; Vol. 277).
56. *Kechris A. S.* Actions of Polish groups and classification problems // Analysis and logic (Mons, 1997) Cambridge: Cambridge Univ. press, 2002. P. 115–187. (London Math. Soc. Lect Note Ser.; Vol. 262).
57. *Kechris A. S., Louveau A.* The classification of hypersmooth Borel equivalence relations // J. Amer. Math. Soc. 1997. Vol. 10, N 1. P. 215–242.
58. *Kechris A. S., Miller B. D.* Topics in orbit equivalence. B.: Springer, 2004. (Lect. Notes in Math.; Vol. 1852). x+134 p.
59. *Louveau A.* On the reducibility order between Borel equivalence relations // Logic, methodology and philosophy of science, IX (Uppsala, 1991). Amsterdam: North-Holland, 1994. P. 151–155. (Stud. Logic Found. Math.; Vol. 134).
60. *Louveau A., Veličković B.* A note on Borel equivalence relations // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 120, N 1. P. 255–259.
61. *Lusin N.* Sur les ensembles analytiques // Fund. Math. 1927. Vol. 10. P. 1–95.
62. *Mathias A. R. D.* A remark on rare filters // Infinite and finite sets: (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdös on his 60th birthday). Amsterdam: North-Holland, 1975. Vol. 3. P. 1095–1097. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai; Vol. 10).
63. *Nadkarni M.G.* On the existence of a finite invariant measure // Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 1990. Vol. 100, N 3. P. 203–220.
64. *Oliver M. R.* An inquiry into the number of isomorphism classes of Boolean algebras and the Borel cardinality of certain Borel equivalence relations: PhD thesis / Univ. of Calif., Los Angeles, 2003. xi+48 p.

65. *Rosendal Ch.* Cofinal families of Borel equivalence relations and quasiorders // J. Symbolic Logic. 2005. Vol. 70, N 4. P. 1325–1340.

66. *Scott D.* Invariant Borel sets // Fund. Math. 1964. Vol. 56. P. 117–128,

67. *Sierpiński W.* L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse // Bull. Acad. Sci. Cracovie. 1918. P. 97–152.

68. *Silver J. H.* Counting the number of equivalence classes of Borel and coanalytic equivalence relations // Ann. Math. Logic. 1980. Vol. 18, N 1. P. 1–28.

69. *SlamanT.,Steel J.* Definable functions on degrees // Cabal Seminar 81 – 85. B.: Springer, 1988. P. 37–55. (Lect. Notes in Math.; Vol. 1333).

70. *Solecki S.* Analytic ideals // Bull. Symbolic Logic. 1996. Vol. 2, N 3. P. 339–348.

71. *Solecki S.* Analytic ideals and their applications // Ann. Pure Appl. Logic. 1999. Vol. 99, N 1/3. P. 51–72.

72. *Srivastava S. M.* Selection and representation theorems for σ-compact valued multifunctions // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. Vol. 83, N 4. P. 775–780.

73. *Talagrand M.* Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables // Studia Math. 1980. Vol. 67, N 1. P. 13–43.

74. *Veličković B.* A note on Tsirelson type ideals // Fund. Math. 1999. Vol. 159, N 3. P. 259–268.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

Кановей Владимир Григорьевич
Любецкий Василий Александрович

СОВРЕМЕННАЯ
ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ:
начала дескриптивной
динамики

Утверждено к печати
Ученым советом
Института
проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича
Российской академии наук

Зав. редакцией *Н.А. Степанова*
Редактор *В.А. Головешкин*
Художник *Ю.И. Духовская*
Художественный редактор *В.Ю. Яковлев*
Компьютерная верстка *В.А. Головешкин*

Подписано к печати 18.11.2007
Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Гарнитура Таймс
Печать офсетная
Усл.печ.л. 14,5. Усл.кр.-отт. 15,0. Уч.-изд.л. 12,5
Тип. зак. 1752

Издательство "Наука"
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
E-mail: secret@naukaran.ru
www.naukaran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9-я линия, 12