В. Г. Кановей
В. А. Любецкий

Современная теория множеств: борелевские и проективные множества

Москва
Издательство МЦНМО
2010

УДК 510.22
ББК 22.12
К19

Кановей В. Г., Любецкий В. А.

К19 Современная теория множеств: борелевские и проективные множества. — М.: МЦНМО, 2010. — 320 с.

ISBN 978-5-94057-683-9

Монография посвящена изложению базовых разделов современной дескриптивной теории множеств: борелевские и проективные множества, теория первого и второго уровней проективной иерархии, теория высших уровней проективной иерархии в предположении аксиомы проективной детерминированности, эффективная дескриптивная теория множеств.

Для математиков-студентов, аспирантов, научных работников.

ББК 22.12

Владимир Григорьевич Кановей
Василий Александрович Любецкий

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ:
БОРЕЛЕВСКИЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ МНОЖЕСТВА

Научное издание

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83.

Подписано в печать 13.09.2010. Формат $60\times90\,{}^1\!/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 20. Тираж 1500 экз. Заказ 1623.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

978-5-94057-683-9

Оглавление

Предисловие **7**

Некоторые теоретико-множественные обозначения 13

1 Польские пространства **15**

1.1 Польские пространства 16
1.2 Категория и свойство Бэра 18
1.3 Бэровское пространство и канторов дисконтинуум . . 20
1.4 Деревья и замкнутые множества 22
1.5 Расщепляющиеся системы 23
1.6 Совершенные подмножества в польских пространствах 25
1.7 Другие примеры польских пространств 28
1.8 Более сложные примеры 31

2 Борелевские множества **33**

2.1 Борелевские множества 34
2.2 Простые свойства борелевских множеств 35
2.3 Операция предела 38
2.4 Отображения польских пространств 39
2.5 Полунепрерывность и теорема Адяна 41
2.6 Борелевская изоморфность польских пространств . . 45
2.7 Теорема иерархии и универсальные множества 49

3 A-множества **51**

3.1 A-операция и A-множества 52
3.2 Простые свойства A-множеств 52
3.3 A-множества как образы и проекции 55
3.4 Теорема о совершенном ядре 57
3.5 Суперсовершенные подмножества 59
3.6 C-множества 63
3.7 Проективные множества 64

4 CA-множества и ординалы **67**

4.1 Деревья и ранги . . . 68
4.2 Вложения деревьев и сравнение рангов . . . 71
4.3 Дополнения A-множеств. Конституанты . . . 73
4.4 Принцип ограничения и его следствия . . . 76
4.5 Борелевские и B-измеримые отображения . . . 79
4.6 Решета . . . 79
4.7 Фундированные отношения . . . 82
4.8 Полные предупорядочения и нормы . . . 84

5 Дополнительные структуры в польских пространствах **87**

5.1 Меры . . . 88
5.2 Регулярность мер . . . 90
5.3 Измеримость и свойство Бэра A-множеств . . . 92
5.4 Нерегулярные множества . . . 94
5.5 Отношения эквивалентности . . . 95
5.6 О структуре борелевских мощностей . . . 97
5.7 0-1 закон . . . 102
5.8 Польские группы и их действия . . . 103
5.9 Теорема Хаусдорфа о щели . . . 107

6 Эффективная дескриптивная теория множеств **111**

6.1 Бэровские произведения . . . 112
6.2 Аналитические формулы . . . 113
6.3 Эффективная иерархия множеств . . . 115
6.4 Преобразования аналитических формул . . . 117
6.5 Класс Σ^0_1: связь с теорией рекурсии и топологией . . 121
6.6 Связь с борелевскими и проективными множествами 123
6.7 Теорема иерархии и универсальные множества . . . 124
6.8 Классификация функций . . . 129
6.9 Классификация точек . . . 131
6.10 Свойства замкнутости классов . . . 132

7 Первый уровень проективной иерархии: введение **137**

7.1 Пространства, близкие к бэровским произведениям . 138
7.2 Снова о фундированных деревьях . . . 143
7.3 Деревья и первый проективный уровень . . . 145
7.4 Связь деревьев с A-операцией и конституантами . . . 147
7.5 Принцип отражения . . . 149

8 Отделимость, редукция, униформизация и их следствия **153**

8.1 Отделимость и редукция . . . 154
8.2 Отделимость и редукция (продолжение) . . . 155
8.3 Нормы и нормированные классы . . . 157
8.4 Униформизация в классе $\mathbf{\Pi}^1_1$ . . . 160
8.5 Униформизация (продолжение) . . . 164

9 Класс Δ^1_1 и кодирование борелевских множеств **169**
9.1 Перечисление Δ^1_1-множеств . . . 170
9.2 Следствия . . . 171
9.3 Выбор по Крайзелю . . . 173
9.4 Первое кодирование борелевских множеств . . . 174
9.5 Второе кодирование борелевских множеств . . . 175
9.6 Ординалы Чёрча—Клини . . . 178
9.7 Гиперарифметические множества . . . 179

10 Топология Ганди–Харрингтона и ее приложения **185**
10.1 Пространства Шоке . . . 186
10.2 Топология Ганди–Харрингтона . . . 187
10.3 Следствия . . . 190
10.4 О счетных Σ^1_1-множествах . . . 191
10.5 О компактных Δ^1_1-множествах . . . 192
10.6 О σ-компактных Δ^1_1-множествах . . . 194
10.7 О множествах, накрываемых σ-компактными множествами . . . 197

11 Множества со специальными сечениями **201**
11.1 Счетные сечения . . . 202
11.2 Доказательства теорем . . . 204
11.3 Компактные и σ-компактные сечения . . . 206
11.4 Большие сечения (мера) . . . 208
11.5 Большие сечения (категория) . . . 214
11.6 Сечения из определенного борелевского класса . . . 218
11.7 Доказательство теоремы Луво . . . 220

12 Некоторые дихотомические теоремы **225**
12.1 Первая дихотомическая теорема . . . 226
12.2 Доказательство первой дихотомической теоремы . . . 228
12.3 Вторая дихотомическая теорема . . . 232
12.4 Случай замкнутого отношения . . . 234
12.5 Случай незамкнутого отношения . . . 235
12.6 Редукция E_0 к данному отношению . . . 238
12.7 Построение расщепляющейся системы . . . 241
12.8 О $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношениях эквивалентности . . . 243
12.9 О борелевских предпорядках . . . 246

13 Второй проективный уровень, проблемы Лузина **251**
13.1 Структура второго проективного уровня . . . 252
13.2 Проблемы регулярности по Лузину . . . 254
13.3 Анализ проблем. Неразрешимость . . . 256
13.4 О несчетных последовательностях борелевских множеств . . . 260

14 Бесконечные игры и аксиома детерминированности 263
14.1 Введение в теорию детерминированности 264
14.2 Пример: игра Банаха—Мазура 266
14.3 Теорема детерминированности открытых множеств . 268
14.4 Детерминированность в проективных классах 270
14.5 Приложение к свойствам регулярности 272
14.6 Свойство совершенного ядра 274
14.7 Свойство Бэра 276
14.8 Аксиомы детерминированности 278

15 Проективная иерархия в детерминированном универсуме 283
15.1 Первая теорема периодичности 284
15.2 Доказательство 285
15.3 Вторая теорема периодичности. Лестницы 288
15.4 Доказательство свойства лестницы 291
15.5 Третья теорема периодичности 294
15.6 Теорема о выборе выигрывающей стратегии 297
Цитированная литература 301
Предметный указатель 307

Приложение 315
Суммируемые идеалы и идеал нулевой плотности 316

Предисловие

Современную теорию множеств трудно изложить иначе чем в нескольких книгах, каждая из которых посвящена одному из ее наиболее актуальных разделов. Желательно, чтобы эти книги можно было читать независимо друг от друга и при этом от читателя не требовалась бы никакая специальная подготовка, по крайней мере в части понимания основного материала этих книг. Следуя этому плану, мы опубликовали первую книгу такой серии «Начала дескриптивной динамики» [13], посвященную одному из важных разделов современной теории множеств — дескриптивной теории множеств. Настоящая книга посвящена дескриптивной теории множеств в более широком плане, чем [13], и касается классических вопросов этой теории. Эти книги не пересекаются по содержанию и могут читаться независимо друг от друга (хотя предпочтительно начинать именно с этой книги, как посвященной более общему кругу вопросов дескриптивной теории).

С самого своего возникновения в последней трети XIX в. теория множеств содержала направление, связанное с изучением *множеств, имеющих индивидуальное определение*, на вещественной прямой, а также в евклидовых и подобных им пространствах, множеств, которые можно *конкретно определить, построить*, в противоположность множествам, которые существуют лишь в силу абстрактных (можно сказать, умозрительных) принципов вроде аксиомы выбора. Это направление получило название *дескриптивная теория множеств*, и именно его центральным наиболее классическим вопросам посвящена настоящая книга, вторая в нашей серии. Книга содержит введение в основные понятия дескриптивной теории множеств, изложение ее классических методов и результатов, а также некоторых наиболее важных современных результатов.

В **гл. 1** мы начинаем с введения в теорию *польских пространств*, т. е. сепарабельных полных метрических пространств. В дескриптивной теории изучаются множества именно в таких пространствах. К польским пространствам относятся вещественная прямая $\mathbb{R}$, бэровское пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, канторов дисконтинуум $2^{\mathbb{N}}$. Рассматриваются и более сложные польские пространства.

В **гл. 2** вводятся *борелевские множества*, т. е. такие множества, которые получаются из открытых множеств исходного пространства последовательным применением не более чем счетного числа операций разности, счетного объединения и счетного пересечения ранее полученных множеств.

В **гл. 3** рассматривается более широкий класс *A-множеств*: в польских пространствах они определяются как те, которые можно получить применением особой *A-операции* к замкнутым множествам исходного пространства. Но их можно определить и многими другими способами, например как множества значений непрерывных функций, определенных на борелевских множествах того же пространства. Здесь же вкратце рассматриваются *C-множества* и *проективные множества.*

В **гл. 4** рассматриваются множества, которые являются дополнениями к A-множествам. Они называются *CA-множествами*. CA-множества невозможно изучать без использования таких понятий, как счетные *ординалы* (трансфинитные числа), фундированные деревья, ранги. Эти понятия используются также при разложении CA-множества на борелевские *конституанты*, при доказательстве *теоремы Суслина* о том, что множество, которое является одновременно A- и CA-множеством, — борелевское множество, при изучении фундированных отношений и норм.

Глава 5 содержит обзор некоторых важных понятий дескриптивной теории множеств. Здесь мы вводим счетно-аддитивные меры и доказываем *теоремы измеримости* и *наличия свойства Бэра* у A-множеств, излагаем метод построения неизмеримых множеств по Бернштейну, даем краткое введение в теорию *борелевской сводимости* отношений эквивалентности и действий групп, и заканчиваем наброском доказательства *теоремы Хаусдорфа о щели.*

В целом главы 1 – 5 книги соответствует тому, что обычно называется «классическими» методами дескриптивной теории множеств.

Современный подход, включающий методы теории рекурсии, рассматривается в **гл. 6**, где мы вводим принятые сейчас обозначения проективных классов и устанавливаем замкнутость этих классов относительно некоторых операций. В рамках такого подхода мы развиваем теорию $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств (бывших A-множеств) и $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств (бывших CA-множеств) в **гл. 7 и 8**, доказывая, в частности, теоремы *отделимости, редукции, униформизации* и *нормированности* для первого проективного уровня.

Современная дескриптивная теория множеств не может быть развита без обращения к «эффективным» методам. Чтобы пояснить суть дела, заметим, что класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств (т. е. A-множеств) в бэровском пространстве $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ совпадает с множеством всех проекций замкнутых множеств пространства $\mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ на одну из его осей. Замкнутые множества образуют класс $\mathbf{\Pi}^1_0$. Каждое замкнутое множество $F \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ эффективно определяется некоторым множеством $u(F) \subseteq \mathbb{N}$ натуральных чисел (например, посредством перечисления номеров тех бэровских прямоугольников в $\mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$, которые не пересекаются с F). Если множество $u(F)$ рекурсивно (или, что то же самое, разрешимо), то F называется множеством класса $\varPi^1_0$, а его проекция на первую ось $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ этого пространства — множеством класса $\varSigma^1_1$. Если же для некоторого элемента $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ множество $u(F)$ рекурсивно относительно p, то F называется множеством класса $\varPi^1_0(p)$, а его проекция на первую ось $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ — множеством класса $\varSigma^1_1(p)$. Тогда $\mathbf{\Sigma}^1_1 = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}} \varSigma^1_1(p)$, однако все классы вида $\varSigma^1_1(p)$ счетны, а класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$, т. е. их объединение, несчетен. Эффективные методы в дескриптивной теории множеств позволяют рассматривать, при помощи соответствующих методов, не только обычные проективные классы, например класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$, но и эффективные классы, например $\varSigma^1_1(p)$ для различных параметров $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и, в частности, класс $\varSigma^1_1$. Последний класс соответствует случаю, когда p — любая рекурсивная функция из $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, например, тождественный нуль.

На этом пути возникают методы и задачи, не имеющие аналогов для обычных проективных классов. В частности, в **гл. 9** исследуется природа счетного множества, состоящего только из $\varDelta^1_1$-точек $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, которое само является множеством класса $\varPi^1_1$. Там же рассматриваются вопросы эффективного кодирования борелевских множеств.

Следующая **глава 10** знакомит читателя с еще одним важным методом современной «эффективной» дескриптивной теории множеств: *топологией Ганди–Харрингтона* на $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, которая порождена совокупностью всех непустых $\varSigma^1_1$-множеств $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Эта топология, очевидно, усиливает обычную польскую топологию пространства $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, но не является польской и вообще не метризуема, однако обладает *свойством Шоке*, сближающим ее с польскими топологиями в некоторых важных вопросах. Эта топология имеет многообразные применения в теории $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств. Например, с ее помощью доказывается следующая теорема, уточняющая теорему Суслина о совершенных подмножествах несчетных A-множеств: если $\varSigma^1_1$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ содержит точку **не** класса $\varDelta^1_1$, то X содержит совершенное подмножество. Таким образом, мы имеем критерий несчетности

Σ^1_1-множества: наличие в нем точки не из класса Δ^1_1. Подобные результаты получены в **гл. 10** также в отношении некоторых других свойств Σ^1_1-множеств, связанных с компактностью и σ-компактностью (вместо счетности).

Результаты гл. 9 и 10 находят применение в **гл. 11**, где изучаются борелевские множества и $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества со *специальными сечениями*. Речь идет о множествах P, лежащих, например, в пространстве $\mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ (или в произведении любых двух польских пространств) и таких, что каждое *сечение* $P_x = \{y : \langle x, y\rangle \in P\}$, $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ имеет одно определенное свойство, например является не более чем счетным или не тощим множеством, и пр. Для ряда подобных свойств удается доказать, что борелевские множества P с таким свойством сечений обязательно имеют борелевские проекции, в то время как проекции произвольных борелевских множеств могут быть и неборелевскими $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множествами. И это только один тип результатов о множествах со специальными сечениями, другие касаются свойств *униформизации, расщепления* и пр.

Глава 12 содержит доказательства двух теорем о борелевской сводимости отношений эквивалентности, которые называются первой и второй дихотомическими теоремами и играют очень важную роль в *дескриптивной динамике* — том разделе дескриптивной теории множеств, который как раз занимается вопросами борелевской сводимости. Доказательства этих теорем опираются на ряд общих результатов дескриптивной теории множеств из предшествующих глав. Эти результаты отсутствовали в нашей книге «Начала дескриптивной динамики» [13], так как там для их доказательства не хватало развитых здесь методов.

Содержание книги до гл. 12 включительно связано в основном с *первым проективным уровнем*, т. е. с классами $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Delta}^1_1$ (A-множеств, CA-множеств, борелевских множеств, соответственно), и именно для первого проективного уровня работают классические методы дескриптивной теории множеств. Уже на втором проективном уровне теоремы, полученные для первого уровня, большей частью не имеют места, а те немногие результаты, которые остаются верными, выглядят по-другому. Для множеств второго проективного уровня возникают проблемы, которые в принципе не имеют решения. Например, проблемы их измеримости и наличия у них свойства Бэра. Об этих проблемах мы говорим в **главе 13**. Их решение в очень неожиданной форме было получено много лет спустя после того, как они были сформулированы Н. Н. Лузиным в 1920х годах. А именно, было доказано, что проблема измеримости множеств второго проективного уровня и другие подобные проблемы вообще *неразрешимы*, т. е. на поставленные Лузиным вопросы нельзя дать ответ «да» или «нет» (в рамках обычной системы аксиом теории множеств[1]). Доказательство неразрешимости потребовало разработки таких важнейших теоретико-множественных методов, как конструктивность и форсинг, изложение которых не вошло в эту книгу из соображений объема. Авторы думают, что и с методической точки зрения изучение этих весьма сложных доказательств лучше начинать после изучения материала этой книги (и, возможно, книги [13]). Поэтому теоремы о неразрешимости сопровождаются здесь не полными доказательствами, а только ссылкой на нашу статью [11]. Эти доказательства могли бы войти в третью книгу нашей серии, посвященную доказательствам неразрешимости вопросов Лузина и современному состоянию метода форсинга (вынуждения).

Естественно, теоремы о неразрешимости приводят к мысли усилить аксиоматику **ZFC** какой-нибудь аксиомой, которая позволит решить вопросы Лузина. Было предложено несколько аксиом такого рода, например аксиома конструктивности, аксиома Мартина, аксиомы больших кардиналов и т. д. Однако несомненное преимущество в этом списке, как с точки зрения естественности и мотивированности самой аксиомы, так и в плане богатой картины математических следствий, имеют две аксиомы: *аксиома детерминированности* **AD** и *аксиома проективной детерминированности* **PD**. Эти аксиомы рассматриваются в заключительных **главах 14 и 15**. Всё же по тем или иным причинам ни одна из них не принята в состав обычной «содержательной» математики. И упомянутые проблемы Лузина остаются неразрешимыми (или, как иногда говорят, *абсолютно неразрешимыми*).

[1] Здесь важно, что рамках такой системы аксиом, например аксиоматики теории множеств Цермело–Френкеля **ZFC**, формулируются и доказываются все «содержательные» математические результаты (а следовательно, и результаты естественных наук, выразимые на языке математики). Таким образом, нет такой аксиомы, которая могла бы помочь в решении вопросов Лузина и при этом не изменила обычную «содержательную» математику, а являлась бы ее естественной частью. Конечно, тут мы подходим к грани некоторой философской дискуссии: что есть содержательная математика. «Практический» ответ: это есть математика, которая излагается в рамках аксиоматики **ZFC**. Правда, в эту аксиоматику не включены приемы работы с особо большими множествами (типа «множества» всех абелевых групп и т. п.; чтобы подчеркнуть отличие от обычных, «маленьких» множеств, эти особо большие множества еще называют *совокупностями* или классами, употребляя последнее слово в ином смысле, чем оно использовалось выше). Но если расширить **ZFC** средствами, которые обеспечивают работу с совокупностями, то и тогда вопросы Лузина останутся неразрешимыми. То же самое остается верным, если расширить **ZFC** возможностью работать с «совокупностями» совокупностей и т. д. Так что неразрешимость вопросов Лузина не связана с тем, сколь большие множества разрешается использовать. Она возникает на уровне уже одних только вещественных чисел.

Аксиома **AD** представляет собой утверждение о том, что каждая игра определенного вида *детерминирована*, т. е. один из игроков имеет в ней выигрывающую стратегию. Эта аксиома противоречит полной аксиоме выбора **AC**, но не противоречит тем счетным формам аксиомы **AC**, которые обычно используются в анализе, теории меры и других областях математики. Более слабая (или, лучше сказать, более умеренная) аксиома **PD** не противоречит **AC** и положительно решает проблему измеримости проективных множеств, а также ряд других проблем дескриптивной теории множеств.

В качестве приложения приведено переработанное доказательство одной теоремы нашей книги «Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики» [13], которое в первоначальном изложении [13, §5г] представило некоторые ключевые моменты без достаточных деталей.

Предлагаемая книга, не претендуя на полный охват дескриптивной теории множеств (даже вместе с [13]), задумана как введение, описывающее характер проблем, методов, результатов и приложений в этой области. Книга ориентирована на математиков (студентов, аспирантов, научных работников), знакомых с основами анализа, теории функций и топологии в объеме первых курсов университета. Для понимания изложения более сложных результатов, в частности связанных с ординалами (порядковыми числами), необходимо еще знакомство с элементарными основами теории множеств, которые также в той или форме преподаются на первых курсах университета.

Работа авторов над книгой была частично поддержана грантами: РФФИ 07-01-00445 и МНТЦ 3807.

Авторы посвящают книгу своим родителям; становясь старше, они всё чаще думают о них.

Некоторые теоретико-множественные обозначения

- $\mathscr{P}(A) = \{x : x \subseteq A\}$ — множество всех подмножеств, *множество-степень* множества A;
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
- $2 = \{0, 1\}$, и вообще $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, т. е. каждое натуральное число — множество всех меньших натуральных чисел;
- *кортеж* — конечная последовательность любого вида;
- $X^Y = \{f : f$ есть функция из Y в $X\}$;
- в частности, X^n — множество всех функций s из множества $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ в X, т. е. множество всех кортежей длины n из элементов множества X;
- при $X = 2 = \{0, 1\}$ через 2^n обозначается множество всех диадических (т. е. с членами $0, 1$) кортежей длины n; не путать с арифметической степенью;
- $X^{<\omega} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ — множество всех кортежей (произвольной длины) из элементов множества X;
- В частности, $2^{<\omega}$ — множество всех диадических кортежей, а $\mathbb{N}^{<\omega}$ — множество всех кортежей натуральных чисел;
- $\mathtt{lh}\, s$ — *длина* кортежа (конечной последовательности) s; тогда $\mathtt{lh}\, s = n$ при $s \in X^n$, и в частности, $\mathtt{lh}\, s = \mathtt{dom}\, s$;
- $\mathtt{dom}\, f$ — область определения, а $\mathtt{ran}\, f$ — область всех значений функции f;
- $f[X] = \{f(x) : x \in X \cap \mathtt{dom}\, f\}$ — f-*образ* множества X;
  $f^{-1}[X] = \{x \in \mathtt{dom}\, f : f(x) \in X\}$ — f-*прообраз* множества X;
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — *бэровское пространство*; если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ — кортеж натуральных чисел, то $[s] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset x\}$ — базовая окрестность в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (*бэровский интервал*);
- если множество A фиксировано, то $\complement X = X^{\complement} = A \setminus X$ (*дополнение* множества X) для всех $X \subseteq A$;
- $A \times B = \{\langle a, b\rangle : a \in A$ и $b \in B\}$ — *декартово произведение*;
  $X \bigtriangleup Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ — *симметрическая разность*;
- если $X \subseteq A \times B$ и $a \in A$, то $(X)_a = \{b : \langle a, b\rangle \in X\}$ — *сечение*;
- $\#X = \#(X)$ — число элементов в конечном множестве X;
- «почти все» обычно означает: «все, кроме конечного числа».

Глава 1

Польские пространства

В этой вводной главе мы рассматриваем ту категорию пространств, которая изучается дескриптивной теорией множеств. Это польские пространства. Сюда относятся вещественная прямая $\mathbb{R}$, бэровское пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, канторов дисконтинуум $2^{\mathbb{N}}$, натуральный ряд $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ как дискретное пространство и ряд более сложных пространств. Дескриптивная теория множеств изучает *точечные множества*, т. е. множества точек, в польских пространствах. В этой главе мы рассматриваем главным образом относительно простую категорию замкнутых множеств польских пространств, а также метод построения этих множеств при помощи расщепляющихся систем. Мы также коснемся вопросов, связанных со свойством Бэра.

§1.1 Польские пространства

Польским пространством называется такое топологическое пространство, которое гомеоморфно сепарабельному полному метрическому пространству, или, что, очевидно, эквивалентно, которое допускает совместимую сепарабельную полную метрику. Другими словами, требуется, чтобы на данном пространстве $\mathbb{X}$ можно было определить функцию расстояния ρ так, чтобы топология, порождаемая расстоянием ρ, совпала с исходной топологией пространства $\mathbb{X}$, а сама метрика была полной и сепарабельной, — такую метрику ρ мы будет называть *совместимой польской метрикой* для $\mathbb{X}$.

На самом деле, рассматривая какое-либо конкретное польское пространство $\mathbb{X}$, мы всегда будем иметь в наличии и какую-то конкретную «польскую» метрику для $\mathbb{X}$, и в этом смысле польские пространства — это в самом первом приближении как бы то же самое, что просто сепарабельные полные метрические пространства. Но на самом деле речь идет даже о разных *типах* математических объектов, т. е. топологических пространствах в одном случае и метрических пространствах в другом. Добавим, что наиболее важные структуры, связанные с польскими пространствами, построены на основе именно польской топологии, т. е. без непосредственного обращения к той или иной конкретной польской метрике для рассматриваемого польского пространства.

Упражнение 1.1.1. Докажите, что если P — замкнутое (непустое) множество полного метрического пространства $\mathbb{X}$, то и само P с той же метрикой — полное пространство. В частности, если $\mathbb{X}$ — польское пространство, то к этому же типу принадлежит и P.

Упражнение 1.1.2. Докажите, что если ρ — польская метрика (польского) пространства $\mathbb{X}$, то $d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ является польской же метрикой для $\mathbb{X}$, порождающей ту же топологию, что и ρ.

Таким образом, для любого польского пространства имеется польская метрика, строго ограниченная сверху числом 1.

Следующая теорема[1] существенно усиливает результат упражнения 1.1.1. Напомним, что $\mathbf{G}_\delta$-*множества* — это счетные пересечения открытых множеств. Дополнительные к ним $\mathbf{F}_\sigma$-*множества* — это, соответственно, счетные объединения замкнутых множеств.

Теорема 1.1.3. *Множество X польского пространства $\mathbb{X}$ само является польским пространством в топологии подпространства, если и только если X есть $\mathbf{G}_\delta$-множество в $\mathbb{X}$.*

---

[1] Ее доказал П. С. Александров для польских пространств, а Хаусдорф обобщил на случай множеств в произвольных полных метрических пространствах.

Доказательство (замечания)**.** Полное доказательство, достаточно нетривиальное в обе стороны, не входит в план этой книги, но может быть найдено (на русском языке) в книге [15, глава III] или в [31]. Мы же ограничимся здесь наброском доказательства «польскости» только для открытых множеств, на что будет ссылка в доказательстве другой важной теоремы.

Итак, пусть $U \subseteq \mathbb{X}$ — непустое открытое множество. Через d обозначим исходную польскую метрику на $\mathbb{X}$. Согласно результату упражнения 1.1.2 можно считать, что $d(x, y) < 1$ для всех x, y. Определим на нашем множестве U другую метрику

$$\rho(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, \mathbb{X} \smallsetminus U)} - \frac{1}{d(y, \mathbb{X} \smallsetminus U)} \right| ,$$

где, как обычно, $d(x, Y) = \mathtt{min}_{y \in Y} d(x, y)$. (Числа в знаменателях не могут обратиться в 0 из-за открытости множества U.) Ясно, что $\rho > d$, а потому любое d-открытое в U множество $Y \subseteq U$ будет и ρ-открытым. С другой стороны, если $x \in U$ и $\varepsilon > 0$, то существует такое число $\delta > 0$ (оно зависит от $d(x, \mathbb{X} \smallsetminus U)$), что ρ-окрестность точки x радиуса ε содержит d-окрестность радиуса δ, так что и обратно, любое ρ-открытое множество будет и d-открытым. Отсюда следует, что d и ρ порождают одну и ту же топологию на U. Остается проверить, что метрика ρ полна, что достаточно просто. □

С другой стороны, топология любого борелевского множества как подпространства в польском пространстве всегда может быть усилена до польской топологии, см. ниже следствие 2.6.3.

Доказательство следующей теоремы о непрерывном продолжении функций можно найти, например, в книге [15, § 35.I].

Теорема 1.1.4. *Пусть X — множество в польском пространстве $\mathbb{X}$, рассматриваемое с топологией подпространства, а $f : X \to \mathbb{Y}$ — непрерывное отображение в польское пространство $\mathbb{Y}$. Тогда найдется такое $\mathbf{G}_\delta$-множество $G \subseteq \mathbb{X}$, что $X \subseteq G$ и f продолжается до непрерывной функции $g : G \to Y$.* □

Упражнение 1.1.5. Докажите, что если $\mathbb{X}_n$ — польское пространство для каждого n, то и $\mathbb{X} = \prod_n \mathbb{X}_n$ — польское пространство.

Итак, класс польских пространств замкнут относительно счетных произведений. Следующий любопытный результат показывает, что класс польских топологий также замкнут относительно счетных объединений.

Теорема 1.1.6. *Если $\mathbb{X}$ с топологией τ — польское пространство и каждому n сопоставлена польская топология τ_n на $\mathbb{X}$, усиливающая τ, то топология T, порожденная объединением $\bigcup_n \tau_n$ тоже польская.*

Доказательство (набросок). Пусть $\mathbb{X}_n$ — пространство $\mathbb{X}$ с топологией τ_n. Тогда $\mathbb{X}_\infty = \prod_n \mathbb{X}_n$ — тоже польское пространство, отображение $x \mapsto \langle x, x, x, \dots \rangle$ — гомеоморфизм, а его образ — замкнутое множество в $\mathbb{X}_\infty$. Остается использовать результат упражнения 1.1.1. □

§1.2 Категория и свойство Бэра

Напомним, что множество X, расположенное в топологическом пространстве $\mathbb{X}$, называется

нигде не плотным в $\mathbb{X}$*,* или, если пространство $\mathbb{X}$ фиксировано, просто *нигде не плотным*, если любое непустое открытое множество $U \subseteq \mathbb{X}$ содержит такое непустое открытое подмножество $V \subseteq U$, что $X \cap V = \varnothing$;

тощим в $\mathbb{X}$*,* или же просто *тощим*, или, в более традиционной терминологии, *множеством первой категории*, если оно допускает представление в виде счетного объединения $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ нигде не плотных (в данном пространстве $\mathbb{X}$) множеств X_n;

котощим в $\mathbb{X}$*,* если его дополнение $\mathbb{X} \setminus X$ тощее;

плотным в $\mathbb{X}$*,* либо *всюду плотным*, если любое непустое открытое множество $U \subseteq \mathbb{X}$ содержит по крайней мере одну точку множества X.

Упражнение 1.2.1. Докажите, что подмножество нигде не плотного (вариант: тощего) множества само нигде не плотно (соответственно является тощим) в том же пространстве. Докажите, что конечное объединение нигде не плотных множеств нигде не плотно, а счетное объединение тощих множеств — тощее, но счетное объединение нигде не плотных множеств может и не быть нигде не плотным.

Таким образом, нигде не плотность и «тощесть» точечных множеств являются характеристиками малости: подмножество малого множества и объединение определенного числа малых множеств — снова малые множества.

Теорема 1.2.2. *Если* $\mathbb{X}$ *— польское (или вообще, полное метрическое) пространство, то оно не является тощим в себе. Значит, согласно упражнению 1.1.1, если* P *— непустое замкнутое множество в таком пространстве, то оно (с топологией подпространства) не является тощим в себе.*

Доказательство. Пусть напротив, $\mathbb{X} = \bigcup_n X_n$, где каждое множество $X_n \subseteq \mathbb{X}$ нигде не плотно в $\mathbb{X}$. Считаем, что каждое X_n еще и замкнуто, ибо замыкание нигде не плотного множества нигде не плотно. Тогда нетрудно построить такую убывающую последовательность множеств $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$, что каждое F_n есть замкнутый шар радиуса $\le 2^{-n}$, $F_n \cap X_n = \varnothing$, и при любом $n \ge 1$ открытый шар G_n с тем же центром, что и F_n, но двойного радиуса, всё еще удовлетворяет условию $G_n \subseteq F_{n-1}$. Из-за полноты пересечение $\bigcap_n F_n$ непусто; оно содержит единственную точку x. Но по построению $x \ne F_n$ для каждого n, и мы получаем противоречие. □

Следствие 1.2.3. *В любом польском пространстве* $\mathbb{X}$ *выполняются следующие утверждения*:

(i) *тощее множество не может быть одновременно ко-тощим*;

(ii) *если* $\mathbb{X}$ *дискретно, то непустых тощих множеств нет*;

(iii) *любое плотное* $\mathbf{G}_\delta$*-множество — котощее, но не тощее*;

(iv) *нет двух взаимно дополнительных плотных* $\mathbf{G}_\delta$*-множеств*;

(v) *любое счетное замкнутое множество* $X \subseteq \mathbb{X}$ *обязательно имеет хотя бы одну изолированную точку*;

(vi) *если* $X = \bigcup_n X_n \subseteq \mathbb{X}$ *замкнуто и все* X_n *тоже замкнуты, то найдутся такое* n *и такое открытое множество* $U \subseteq \mathbb{X}$, *что* $\varnothing \ne U \cap X \subseteq X_n$.

Доказательство (набросок)**.** (i) Используйте теорему 1.2.2.

(iii) Любое плотное открытое множество, очевидно, котощее. Таково же любое пересечение счетного числа котощих множеств согласно упражнению 1.2.1.

(iv) Иначе имеем противоречие с (iii) и (i).

(v) Иначе если $x \in X$, то одноэлементное множество $\{x\}$ нигде не плотно в X. Значит, X тощее в себе. Имеем противоречие с теоремой 1.2.2.

(vi) В противном случае каждое X_n нигде не плотно в X, т. е. X является тощим в себе, что противоречит теореме 1.2.2. □

Множество X пространства $\mathbb{X}$ имеет *свойство Бэра*, если существует такое открытое множество U, что *симметрическая разность* $X \bigtriangleup U = (X \smallsetminus U) \cup (U \smallsetminus X)$ является тощим множеством в $\mathbb{X}$.

Упражнение 1.2.4. Докажите, что в любом пространстве множества со свойством Бэра образуют σ-алгебру, содержащую все открытые множества. Иными словами, все открытые множества имеют свойство Бэра (что очевидно), и это свойство сохраняется при операциях дополнения, счетного объединения и счетного пересечения.

Для свойства Бэра выполняется такой аналог теоремы Фубини.

Теорема 1.2.5 (Улам—Куратовский)**.** *Если $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — польские пространства и множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ имеет свойство Бэра в $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, то для того, чтобы P было тощим, необходимо и достаточно, чтобы множество всех точек $x \in \mathbb{X}$, для которых сечение $P_x = \{y : \langle x, y\rangle \in P\}$ не тощее в $\mathbb{Y}$, было тощим в $\mathbb{X}$.* □

§1.3 Бэровское пространство и канторов дисконтинуум

Из всех польских пространств наибольшее значение для дескриптивной теории множеств имеет *бэровское пространство* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, состоящее из всех бесконечных последовательностей натуральных чисел. Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$, то $a(n)$ обозначает n-й член бесконечной последовательности a, а $a \restriction n$ обозначает кортеж (конечную подпоследовательность) $\langle a(0), a(1), \dots, a(n-1)\rangle$ из n первых членов последовательности $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Расстояние, заданное посредством равенства

$$\rho(a,b) = \frac{1}{n} \text{ при } a \neq b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \quad \text{где} \quad n = 1 + \mathtt{min}\{n : a(n) \neq b(n)\}, \quad (1)$$

превращает $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в польское пространство. В самом деле, рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ точек $a_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. По определению фундаментальности для всякого $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ найдется такой номер $k_n \in \mathbb{N}$, что соотношение $\rho(a_i, a_j) < \varepsilon$, т. е. $a_i \restriction n = a_j \restriction n$, выполнено для любых $i, j > k_n$. Это дает нам возможность определить $u_n = a_k \restriction n$ для любого n, где $k > k_n$ произвольно, так что u_n — кортеж из n натуральных чисел, удовлетворяющий условию $u_n = a_k \restriction n$ для всех $k > k_n$. По очевидным соображениям мы имеем $u_n \subset u_{n+1}$ (т. е. u_{n+1} продолжает u_n) для всех n. Следовательно, имеется одна определенная точка $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющая условию $u_n = a \restriction n$ для всех n. Для нее согласно сказанному выше выполнено равенство $a \restriction n = a_i \restriction n$, т. е. $\rho(a, a_k) < \frac{1}{n}$ для всех n и $k > k_n$. Это и означает, что в метрике (1) имеет место $a = \mathtt{lim}_{k\to\infty} a_k$, что и требовалось.

Индуцированная указанной метрикой топология совпадает с топологией степени на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, если топология на каждом сомножителе $\mathbb{N}$ этой декартовой степени выбрана дискретной.

Определение 1.3.1. Множество $\mathbb{N}^{<\omega}$ есть множество всех кортежей натуральных чисел, включающее пустую последовательность Λ, а $2^{<\omega}$ есть множество всех кортежей чисел $0, 1$.

Удобное семейство базовых открыто-замкнутых множеств топологии $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ образуют *бэровские интервалы*[2]

$$[s] = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset a\}, \quad \text{где} \quad s \in \mathbb{N}^{<\omega},$$

и, как обычно, запись $s \subset a$ означает, что бесконечная последовательность a *продолжает* кортеж (конечную последовательность) s.

Упражнение 1.3.2. Докажите, что пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно произведению $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, а также и любому произведению вида $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^m$, $m \geq 2$. Используйте гомеоморфизм $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, переводящий любую точку $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в точку $\langle (a)_0, (a)_1, (a)_2, \dots \rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, где точки $(a)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ заданы равенствами $(a)_n(k) = a(2^n(2k+1)-1)$ для всех k.

Пример 1.3.3. *Канторов дисконтинуум* $2^{\mathbb{N}}$ состоит из всех бесконечных двоичных (т. е. с членами 0 и 1) последовательностей с расстоянием, определенным тем же образом, как и для $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Канторов дисконтинуум $2^{\mathbb{N}}$ является польским пространством в точности по тем же соображениям, что и бэровское пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. С другой стороны, $2^{\mathbb{N}}$ — замкнутое подмножество пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. *Канторовы интервалы*, т. е. множества вида

$$[s] = \{a \in 2^{\mathbb{N}} : s \subset a\}, \quad \text{где} \quad s \in 2^{<\omega},$$

являются базовыми открыто-замкнутыми множествами в $2^{\mathbb{N}}$.

Упражнение 1.3.4. Докажите следующее:

(1) $2^{\mathbb{N}}$ — непрерывный образ пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ при отображении $a \mapsto a'$, где $a'(n) = \mathtt{min}\{1, a(n)\}$ для всех n;

(2) вообще любое непустое замкнутое множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является непрерывным образом пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;

(3) любое непустое замкнутое $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ содержит (замкнутое) подмножество, гомеоморфное $2^{\mathbb{N}}$ (см. теорему 3.4.1, в которой получен более сильный результ).

Упражнение 1.3.5. (1) Докажите, что множество E всех таких точек $a \in 2^{\mathbb{N}}$, что $a(n) = 1$ для почти всех (кроме конечного числа) номеров n, счетно и плотно в $2^{\mathbb{N}}$, а дополнительное множество $X = 2^{\mathbb{N}} \setminus E$ гомеоморфно бэровскому пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и является $\mathbf{G}_\delta$-множеством в $2^{\mathbb{N}}$. (Например, сопоставьте каждому $a \in X$

[2] Понимание обозначения $[s]$ будет, вообще говоря, зависеть от контекста, т. е. от того, какое из пространств $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или $2^{\mathbb{N}}$ рассматривается, ср. ниже пример 1.3.3.

последовательность $f(a) = \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, где n_k — разность между номерами $(k+1)$-й и k-й единицы в a.)

(2) Докажите, что, более того, если E' — *любое* счетное плотное множество в $2^{\mathbb{N}}$, то $2^{\mathbb{N}} \smallsetminus E'$ гомеоморфно пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. (Идея: постройте гомеоморфизм $h\colon 2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} 2^{\mathbb{N}}$, для которого $h[E] = E'$.)

Множество X пространства $\mathbb{X}$ называется *совершенным*, если оно замкнуто в $\mathbb{X}$ и не имеет изолированных точек. Соответственно, само пространство $\mathbb{X}$ совершенно, если в нем нет изолированных точек.

Упражнение 1.3.6. Докажите, что $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $2^{\mathbb{N}}$ — совершенные пространства. Тем самым, любое замкнутое множество X в польском пространстве, гомеоморфное одному из пространств $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $2^{\mathbb{N}}$ или хотя бы являющееся непрерывным взаимно однозначным образом одного из них, является совершенным множеством.

§1.4 Деревья и замкнутые множества

Как мы видели, каждое открытое множество $U \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является объединением бэровских интервалов, т. е. имеет вид $U = \bigcup_{s\in S}[s]$, где $S \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$. Соответственно, замкнутые множества представимы как дополнения таких объединений. Имеется, однако, более удобный способ представления замкнутых множеств пространств $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $2^{\mathbb{N}}$, связанный с деревьями.

Напомним, что $\mathbb{N}^{<\omega}$ — множество всех кортежей натуральных чисел. Через $\mathtt{lh}\, s$ обозначается *длина* (число членов) кортежа s (причем $\mathtt{lh}\,\Lambda = 0$). Определяется $\mathbb{N}^m = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \mathtt{lh}\, s = m\}$ — все кортежи длины ровно m. Соответственно, $2^m = \{s \in 2^{<\omega} : \mathtt{lh}\, s = m\}$ — множество всех диадических кортежей длины ровно m. Последнее обозначение будет употребляться с оговорками, чтобы избежать путаницы с арифметической степенью.

Для любых кортежей s, t из любых множеств запись $t \subset s$ означает, что кортеж s есть собственное продолжение кортежа t. Если $m \le \mathtt{lh}\, s$, то $s \restriction m$ — кортеж m первых членов кортежа s.

Если s — любой кортеж, то $s^\wedge k$ обозначает продолжение s дополнительным членом k справа, а $k^\wedge s$ — продолжение s дополнительным членом k слева. Например, $\langle 1,5\rangle^\wedge 3 = \langle 1,5,3\rangle$ а $3^\wedge\langle 1,5\rangle = \langle 3,1,5\rangle$. Если же t — другой кортеж, то $s^\wedge t$ обозначает *конкатенацию* s и t, например, $\langle 1,5\rangle^\wedge\langle 3,1,7\rangle = \langle 1,5,3,1,7\rangle$.

Определение 1.4.1. Множество $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ называется *деревом*, если мы имеем $t \in T$ всякий раз, когда $s \in T$, $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $t \subset s$. Для всякого дерева $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ определяется множество $[T] = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall n\, (a \restriction n \in T)\}$ — т. е. множество всех бесконечных ветвей дерева T.

Мы называем $s \in T$ *концевой вершиной* дерева T, если ни при каком $k \in \mathbb{N}$ продолжение $s^\wedge k$ не принадлежит T, и *точкой ветвления* дерева T, если найдутся такие числа $n \neq k \in \mathbb{N}$, что $s^\wedge n \in T$ и $s^\wedge k \in T$. Множество всех концевых вершин дерева T обозначается $\mathtt{Max}\, T$. Дерево T называется *совершенным*, если 1) оно не имеет концевых вершин и 2) если $s \in T$ то имеется такая точка ветвления $t \in T$, что $s \subset t$.

Упражнение 1.4.2. Докажите, что если $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ — дерево, то множество $[T]$ замкнуто в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а если T — совершенное дерево, то и $[T]$ — совершенное множество. И обратно, если множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ замкнуто, то $X = [T(X)]$, где $T(X) = \{x \restriction n : x \in X \wedge n \in \mathbb{N}\}$ — дерево без концевых вершин, причем если множество X совершенно, то таково же и дерево $T(X)$.

§ 1.5 Расщепляющиеся системы

Следующий метод построения точечных множеств будет многократно использоваться в последующем изложении.

Определение 1.5.1. *Канторовой системой* называется любое индексированное семейство $\{F_s\}_{s \in 2^{<\omega}}$ множеств F_s. *Суслинской системой* называется любое индексированное семейство $\{F_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ множеств F_s. В обоих случаях, множества F_s — это обычно точечные множества данного польского пространства.

Разница этими между двумя понятиями только в том, что в первом случае индексы берутся из диадического дерева $2^{<\omega}$, а во втором из более широкого дерева $\mathbb{N}^{<\omega}$ со счетными ветвлениями. Обычно рассматриваются системы, удовлетворяющие определенной комбинации нескольких простых условий. Скажем, что канторова либо суслинская система множеств F_s:

монотонна, если $F_{s^\wedge n} \subseteq F_s$ для всех s и n ($n \in \mathbb{N}$ для суслинских систем, но $n = 0, 1$ для канторовых);

измельчающаяся, если для любой бесконечной последовательности $a \in 2^{\mathbb{N}}$ (для канторовых систем) либо $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (для суслинских систем) диаметры множеств $F_{a \restriction n}$ стремятся к 0;

неисчезающая, если для каждой бесконечной последовательности $a \in 2^{\mathbb{N}}$ либо $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (как выше) пересечение $F_{a \restriction n}$ непусто;

регулярна, если она монотонная, измельчающаяся и неисчезающая;

дизъюнктна, если $F_{s^\wedge i} \cap F_{s^\wedge j} = \varnothing$ при $i \neq j$;

открыто-отделима, если, для канторовых систем каждое множество $F_{s^\wedge i}$ отделимо открытым множеством от $F_{s^\wedge j}$ при $i \neq j \in \{0,1\}$, а для суслинских систем каждое множество $F_{s^\wedge i}$ $(i \in \mathbb{N})$ отделимо открытым множеством от $\bigcup_{j \in \mathbb{N},\, j \neq i} F_{s^\wedge j}$.

Если канторова система $\{F_s\}_{s \in 2^{<\omega}}$ множеств данного польского пространства $\mathbb{X}$ регулярна, то, обозначив для $a \in 2^{\mathbb{N}}$ через $f(a)$ единственную в силу регулярности точку пересечения $\bigcap_n F_{a \restriction n}$, мы получаем функцию $f \colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{X}$, называемую *ассоциированной функцией*, и ее область значений $\mathtt{ran}\, f = \{f(a) : a \in 2^{\mathbb{N}}\}$, называемую *ядром* данной канторовой системы. Для суслинских систем получается соответственно ассоциированная функция $f \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{X}$ и ядро $\mathtt{ran}\, f = \{f(a) : a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Следующая лемма раскрывает природу этих функций и множеств, являющихся ядрами.

Лемма 1.5.2. *Рассматривается регулярная канторова или суслинская система множеств F_s данного польского пространства $\mathbb{X}$.*

(i) *Ассоциированная функция f такой системы непрерывна, для дизъюнктных систем взаимно однозначна, а для дизъюнктных и открыто-отделимых — гомеоморфизм.*

(ii) *Для дизъюнктных регулярных систем* 1) *ядром канторовой системы является компактное совершенное множество и* 2) *если ядро суслинской системы замкнуто, то оно является совершенным множеством.*

Доказательство. (i) Внимания заслуживает только проверка непрерывности. Рассмотрим для определенности случай канторовой системы; для суслинских систем проверка аналогична. Рассмотрим открытое множество $U \subseteq \mathbb{X}$. Из свойства измельчания следует, что если $a \in 2^{\mathbb{N}}$ и $f(a) \in U$, то найдется такое число m, что $f(b) \in U$ всякий раз, когда $b \in 2^{\mathbb{N}}$ и $b \restriction m = a \restriction m$. Это значит, что f-образ $f[[s]] = \{f(b) : b \in 2^{\mathbb{N}} \wedge s \subset b\}$ канторова интервала $[s] = \{a \in 2^{\mathbb{N}} : s \subset a\}$, где $s = a \restriction n$, включен в U.

Обратно, пусть $s \in 2^{<\omega}$ и требуется доказать, что f-образ $X = f[[s]]$ множества $[s]$ — открытое множество в полном образе $R = \mathtt{ran}\, f = \{f(x) : x \in 2^{\mathbb{N}}\} \subseteq \mathbb{X}$. Однако множество X удовлетворяет условию $X \subseteq F_s$, так что согласно открытой отделимости оно отделимо множеством, открытым в $\mathbb{X}$, от объединения

$$\bigcup_{t \in 2^{<\omega},\, \mathtt{lh}\, t = \mathtt{lh}\, s,\, t \neq s} F_t\,,$$

а тогда и от включенного в это объединение множества $R \setminus X$.

(ii) Используем результаты упражнения 1.3.6. □

§ 1.6 Совершенные подмножества в польских пространствах

Канторовы системы множеств были впервые применены Кантором для решения вопроса о мощности замкнутых множеств вещественной прямой.

Упражнение 1.6.1. Докажите, используя сепарабельность, что если $\mathbb{X}$ — польское пространство, то $\mathtt{card}\,\mathbb{X} \le \mathfrak{c}$.

Напомним, что $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ — мощность континуума. Имеются элементарные примеры конечных и счетных польских пространств, а также такие примеры польских пространств мощности ровно $\mathfrak{c}$, как $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$. Следующая теорема Кантора показывает, что этим исчерпываются все возможности.

Теорема 1.6.2. *Если $\mathbb{X}$ — несчетное польское пространство, то существует замкнутое множество $F \subseteq \mathbb{X}$, гомеоморфное $2^{\mathbb{N}}$ и потому совершенное и удовлетворяющее условию $\mathtt{card}\,F = \mathfrak{c}$. Следовательно, $\mathtt{card}\,\mathbb{X} = \mathfrak{c}$.*

Доказательство. Первой частью доказательства является следующая лемма.

Лемма 1.6.3. *Если P — замкнутое множество в польском пространстве $\mathbb{X}$, то найдется такое совершенное множество $P' \subseteq P$, что разность $P \smallsetminus P'$ не более чем счетна.*

Доказательство (лемма)**.** Если $X \subseteq \mathbb{X}$, то *производным множеством по Кантору—Бендиксону* называется множество $X' = X \smallsetminus I$, где I — множество всех изолированных точек множества X. Например, если X — совершенное множество, то $I = \varnothing$ и $X' = X$. Но в любом случае I открыто в X, а X' замкнуто в X. Поэтому если само X замкнуто в $\mathbb{X}$, то и X' замкнуто. А из-за сепарабельности множество $X \smallsetminus X' = I$ не более чем счетно.

После этих предварительных замечаний определим индукцией по $\xi < \omega_1$ множество $P_\xi \subseteq \mathbb{X}$ так, что $P_0 = P$, $P_{\xi+1} = (P_\xi)'$ и $P_\lambda = \bigcap_{\xi<\lambda} P_\xi$ для предельных ординалов λ. Из вышесказанного следует, что получилась убывающая последовательность замкнутых множеств длины ω_1. Но из сепарабельности по теореме Линделёфа следует, что она не может быть строго убывающей; другими словами, найдется индекс $\eta < \omega_1$, для которого $P_\eta = P_{\eta+1}$, т. е. $P' = P_\eta$ — совершенное множество. Далее, каждая разность $P_{\xi+1} \smallsetminus P_\xi$ не более чем счетна, а потому и множество $P \smallsetminus P'$ не более чем счетно. Тем самым, лемма доказана. $\square$

Доказанная лемма сводит теорему к случаю, когда $\mathbb{X}$ — непустое совершенное польское пространство. Построение искомого множества F в этой ситуации использует регулярную дизъюнктную канторову систему $\{F_s\}_{s\in 2^{<\omega}}$ совершенных множеств $F_s \subseteq \mathbb{X}$. Если такая система получена, то ассоциированная функция[3] $f\colon 2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} F = \bigcap_n \bigcup_{s\in 2^n} F_s$ является гомеоморфизмом по лемме 1.5.2. Требование открытой отделимости здесь следует из дизъюнктности, поскольку множества F_s замкнуты.

Для построения искомой системы множеств F_s заметим, что любое непустое совершенное множество $P \subseteq \mathbb{X}$ обязательно содержит две различные точки $x_0 \neq x_1$, взяв достаточно малые окрестности U_0 и U_1 которых внутри множества P и их замыкания P_0 и P_1, получим пару непустых непересекающихся совершенных множеств $P_0, P_1 \subseteq P$. Используя этот факт, мы получаем искомую систему непустых совершенных (замкнутых) множеств $F_s \subseteq \mathbb{X}$, удовлетворяющую таким техническим условиям:

1) $F_{s^\wedge i} \subseteq F_s$ для любых $s \in 2^{<\omega}$ и $i = 0, 1$,
2) диаметр множества F_s не превосходит $2^{-\,\mathtt{lh}\, s}$, где $\mathtt{lh}\, s$ — длина кортежа $s \in 2^{<\omega}$;
3) $F_{s^\wedge 0} \cap F_{s^\wedge 1} = \varnothing$ для всех s.

То, что система неисчезающая, т. е. $\bigcap_n F_{a\restriction n} \neq \varnothing$ для всех $a \in 2^{\mathbb{N}}$, следует из замкнутости множеств F_s, полноты пространства $\mathbb{X}$, и условий 1, 2. □

Множество F, о котором идет речь в теореме, необходимо компактно вместе с $2^{\mathbb{N}}$, а потому замкнуто в $\mathbb{X}$ и является совершенным согласно упражнению 1.3.6. Это не обязательно верно для множеств, гомеоморфных бэровскому пространству. Для них можно только утверждать, что они принадлежат классу $\mathbf{G}_\delta$, по теореме 1.1.3. Согласно следующей теореме такие множества в польских пространствах достаточно обычны.

Теорема 1.6.4. *Если $\mathbb{X}$ — несчетное польское пространство, то найдется множество $Y \subseteq \mathbb{X}$, гомеоморфное $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и потому принадлежащее классу $\mathbf{G}_\delta$, и такое, что его дополнение $\mathbb{X} \smallsetminus Y$ — тощее множество в $\mathbb{X}$.*

Доказательство. Здесь для построения искомого множества придется использовать суслинскую систему множеств вместо канторовской. Легко видеть, что если множество $U \subseteq \mathbb{X}$ открыто и непусто, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется счетное объединение попарно

[3] Здесь 2^n — множество всех диадических последовательностей длины n.

дизъюнктных непустых открытых множеств $U' \subseteq U$ диаметра меньше ε, плотное в U, для которого замыкание $\overline{U'}$ каждого U' включено в U. Это позволяет построить такую суслинскую систему $\{U_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ открытых непустых множеств $U_s \subseteq \mathbb{X}$, что $U_\Lambda = \mathbb{X}$ и выполнены следующие условия:

1) если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $n \in \mathbb{N}$ то замыкание $U_{s^\wedge n}$ включено в U_s,
2) диаметр множества U_s не превосходит $2^{-\mathtt{lh}\, s}$ при $\mathtt{lh}\, s \geq 1$;
3) $U_{s^\wedge k} \cap U_{s^\wedge n} = \varnothing$ для всех s и $k \neq n$;
4) $\bigcup_n U_{s^\wedge n}$ — плотное подмножество в U_s при любом s.

Эта суслинская система, очевидно, регулярна, дизъюнктна и отделима, а потому ее ассоциированная функция f является гомеоморфизмом $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на полный прообраз $Y = \mathtt{ran}\, f = \bigcap_n \bigcup_{s \in \mathbb{N}^n} U_s$ по лемме 1.5.2. Наконец, множество R ко-тощее (дополнение тощего) согласно условию 4. □

Если же мы хотим получить *замкнутое* множество, гомеоморфное $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то это возможно в силу следующей теоремы Гуревича, в которой условие, что пространство не является σ-компактным, необходимо: само $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не σ-компактно.

Теорема 1.6.5. *Если $\mathbb{X}$ — польское пространство, не являющееся σ-компактным, то имеется замкнутое множество $P \subseteq \mathbb{X}$, гомеоморфное $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Доказательство. Используется суслинская система $\{F_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ непустых, замкнутых, не σ-компактных множеств $F_s \subseteq \mathbb{X}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $F_{s^\wedge i} \subseteq F_s$ для любых $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $i \in \mathbb{N}$;
2) диаметр множества F_s не превосходит $2^{-\mathtt{lh}\, s}$;
3) $F_{s^\wedge k} \cap F_{s^\wedge n} = \varnothing$ для всех s и $k \neq n$;
4) если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $x_k \in F_{s^\wedge k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то последовательность точек x_k не имеет ни одной сходящейся подпоследовательности.

Такая система множеств регулярна и дизъюнктна по очевидным соображениям, но она также и открыто-отделима. В самом деле, согласно условию 4, каждая точка $x \in F_{s^\wedge i}$ имеет открытую окрестность U_x, не содержащую точек из множества $\bigcup_{j \neq i} F_{s^\wedge j}$, и тогда

$U = \bigcup_{x \in F_{s^\wedge i}} U_x$ есть искомое отделяющее множество. Поэтому ассоциированное отображение f является гомеоморфизмом $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на множество $Y = \mathtt{ran}\, f = \bigcap_n \bigcup_{s \in \mathbb{N}^n} F_s \subseteq \mathbb{X}$ по лемме 1.5.2.

Докажем замкнутость множества Y. Пусть x — предельная точка множества Y. Докажем, что $x = f(a)$ для некоторого $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Из замкнутости множества F_Λ следует $x \in F_\Lambda$. Теперь достаточно проверить следующее: если $x \in F_s$ то найдется такое число k, что $x \in F_{s^\wedge k}$. Вследствие открытой отделимости системы (см. выше), из того, что $x \in F_s$, вытекает, что x — предельная точка множества $F'_s = \bigcup_k F_{s^\wedge k}$. Но тогда из условия 4 следует, что x — предельная точка для какого-то одного $F_{s^\wedge k}$, так что мы имеем $x \in F_{s^\wedge k}$ в силу замкнутости.

Что касается построения системы, допустим, что F_s уже построено. Множество H_s всех таких точек $x \in F_s$, что замыкание $\overline{U \cap F_s}$ не σ-компактно для любой окрестности U точки x, замкнуто и непусто, так как F_s не σ-компактно. И само H_s не σ-компактно, так как $F_s \smallsetminus H_s$ накрывается σ-компактным множеством. Но в этом случае существует бесконечная последовательность точек $x_k \in H_s$, не имеющая сходящихся подпоследовательностей. Эти точки можно окружить окрестностями $U_k \ni x_k$ с попарно непересекающимися замыканиями, причем диаметр каждой окрестности U_k меньше 2^{-n-k-1}. Положим $F_{s^\wedge k} = \overline{U_k \cap F_s}$. □

§1.7 Другие примеры польских пространств

Пример 1.7.1. Любое не более чем счетное множество X с дискретной топологией — это польское пространство. Для доказательства можно взять дискретную метрику на X, т. е. $\rho(x, y) = 1$ для всех $x \neq y$ из X.

В частности, множество $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ всех натуральных чисел представляет собой польское пространство с дискретной топологией.

Разумеется, математически значимые топологии на конечных и счетных множествах отнюдь не обязательно дискретны, см., например, упражнение 1.7.8 ниже. Вообще, счетные дискретные пространства — это вырожденный и самый простой случай польских пространств. Рассмотрим более интересные примеры.

Пример 1.7.2. *Вещественная прямая* $\mathbb{R}$ — это польское пространство. Разумеется, здесь мы имеем в виду обычную топологию открытых интервалов и порождающую ее обычную метрику $\rho(x, y) = |x - y|$ на $\mathbb{R}$. Сепарабельность этой метрики очевидна: рациональные числа образуют счетное всюду плотное множество $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Полнота этой метрики известна как *полнота по Дедекинду* и доказывается во вводных учебниках топологии или теории функций, см., например, книгу П. С. Александрова [1].

Пример 1.7.3. *Единичный отрезок* $\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$ — компактное польское пространство. С ним связано такое важное компактное польское пространство, как *гильбертов куб* $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$. Обычную (и в данном случае компактную) топологию произведения пространства $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ можно задать метрикой $d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x(n)-y(n)|}{2^{-n-1}}$.

Важность пространства $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ состоит в следующей *теореме универсальности.*

Теорема 1.7.4. *Каждое польское пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно $\mathbf{G}_\delta$-множеству в пространстве $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$. Каждое компактное польское пространство $\mathbb{X}$ гомеоморфно замкнутому множеству в $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$.*

Доказательство (набросок, см. подробнее в книге [68, 4.14])**.** Пусть d — польская метрика на $\mathbb{X}$. Согласно упражнению 1.1.2, можно считать, что $d(x,y) \le 1$ для всех $x, y \in \mathbb{X}$. Теперь зафиксируем счетное плотное множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ и положим $f(x) = \{d(x,x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ для каждой точки $x \in \mathbb{X}$. Затем проверяется, что f — гомеоморфизм $\mathbb{X}$ на множество $R = f[X] \subseteq \mathbb{I}^{\mathbb{H}}$. То, что R есть $\mathbf{G}_\delta$, следует из теоремы 1.1.3. Если $\mathbb{X}$ компактно, то R компактно и замкнуто в пространстве $\mathbb{X}$. □

Вернемся ненадолго к канторову дисконтинууму $2^{\mathbb{N}}$.

Теорема 1.7.5. *Любое компактное польское пространство $\mathbb{X}$ является непрерывным образом пространства $2^{\mathbb{N}}$. Для пространства $\mathbb{X} = \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ имеются такая непрерывная функция $h\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ и такое плотное $\mathbf{G}_\delta$-множество $G \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, что функция h взаимно однозначна на G и $\mathbb{I}^{\mathbb{N}} = h[G]$.*

Доказательство. Функция $g(a) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}a(n)$ непрерывно отображает $2^{\mathbb{N}}$ на $\mathbb{I}$. Отсюда имеем непрерывное отображение $f\colon (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$, а тогда и $2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$, поскольку $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно $2^{\mathbb{N}}$. Соответствующее $\mathbf{G}_\delta$-множество для отображения $f\colon (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ состоит из всех таких точек $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, что среди членов x_n нет «двоично-рациональных с избытком», т. е. для любого n либо множество $\{k : x_n(k) = 0\}$ бесконечно, либо $x_n(k) = 1$ для всех k (чтобы выполнилось равенство $g(x_n) = 1$).

По теореме 1.7.4 получается, что любое компактное польское пространство является непрерывным образом некоторого замкнутого множества $Y \subseteq 2^{\mathbb{N}}$. Теперь легко доказывается, что само Y — непрерывный образ пространства $2^{\mathbb{N}}$. □

Пример 1.7.6. Множество-степень $\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{x : x \subseteq \mathbb{N}\}$ обычно отождествляется с $2^{\mathbb{N}}$ посредством отождествления каждого множества $x \subseteq \mathbb{N}$ с его *характеристической функцией* $\chi_x \in 2^{\mathbb{N}}$. (Последняя задана соотношениями $\chi_x(k) = 1$ при $k \in x$ и $\chi_x(k) = 0$ при $k \notin x$.) Это отождествление превращает $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ в польское пространство, польскую топологию которого можно также задать базовыми множествами вида $\{x \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N}) : x \cap n = u\}$, где $n \in \mathbb{N}$ и $u \subseteq n$. Напомним, что каждое натуральное число n отождествляется с множеством всех меньших натуральных чисел,

$$n = \{k : k < n\} = \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

так что $u \subseteq n$ означает, что u есть множество, все элементы которого являются натуральными числами, меньшими, чем число n.

Ниже (§ 1.8) мы познакомимся с другими примерами польских пространств, и некоторые из них будут весьма непохожи на бэровское пространство либо вещественную прямую.

Упражнение 1.7.7. Множество $I = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ всех иррациональных чисел является, очевидно, $\mathbf{G}_\delta$-множеством вещественной прямой $\mathbb{R}$. Докажите, что I с топологией подпространства является польским пространством. (Это частный случай теоремы 1.1.3.) Для этого используйте известное соответствие между бэровским пространством и множеством иррациональных чисел единичного отрезка через разложение в цепную дробь, сопоставляющее каждой точке $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ число

$$\frac{1}{1 + a(0) + \frac{1}{1 + a(1) + \frac{1}{1 + a(2) + \ldots}}} \,. \qquad \square$$

В то же время нетрудно проверить, что I с метрикой вещественной прямой — не полное пространство, так что для реализации польской топологии незамкнутого подпространства иногда приходится менять метрику.

Упражнение 1.7.8. Докажите, что топология множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел как подпространства вещественной прямой $\mathbb{R}$ не дискретна, и даже не является польской. Используйте бесконечную вложенную систему рациональных интервалов, стягивающуюся к иррациональной точке. (Это также частный случай теоремы 1.1.3. Именно, $\mathbb{Q}$ **не** является $\mathbf{G}_\delta$-множеством, что вытекает, например, из следствия 1.2.3, (iii) или (iv).)

§ 1.8 Более сложные примеры

Пространство перестановок $\mathbb{N}$. Через $\mathbb{S}_\infty$ обозначается множество всех $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, являющихся биекциями $\mathbb{N}$ на себя, т. е. всех перестановок натуральных чисел. Формально,

$$a \in \mathbb{S}_\infty \iff \forall k \, \forall n \, (a(k) \neq a(n)) \wedge \forall k \, \exists n \, (a(n) = k).$$

Упражнение 1.8.1. Докажите что $\mathbb{S}_\infty$ является $\mathbf{G}_\delta$-множеством в пространстве $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, следовательно по 1.1.3 $\mathbb{S}_\infty$ является польским пространством в топологии подпространства.

Покажите, что совместимую польскую метрику на $\mathbb{S}_\infty$ можно задать так: $d(f,g) = \mathtt{max}\{\rho(f,g), \rho(f^{-1}, g^{-1})\}$, где ρ — обычная метрика бэровского пространства (1) из § 1.3.

На самом деле $\mathbb{S}_\infty$ является даже *польской группой* с групповой операцией суперпозиции[4] $\circ$. Это означает, что отображения $f, g \mapsto f \circ g$ и $f \mapsto f^{-1}$ непрерывны в указанной топологии.

Здесь имеется еще один момент, важный для работы с польскими группами. *Совместимой инвариантной слева метрикой* для польской группы G называется метрика ρ, совместимая с топологией G как пространства (т. е. порождающая в точности те же открытые множества) и удовлетворяющая соотношению $\rho(xa, xb) = \rho(a, b)$ для всех $a, b, x \in G$. Полагая в этом случае $\rho'(a,b) = \rho(a^{-1}, b^{-1})$, мы, очевидно, получим и *инвариантную справа* совместимую метрику. Обычная метрика вещественной прямой инвариантна как слева, так и справа по отношению к $\mathbb{R}$ как аддитивной группе. Но, оказывается, $\mathbb{S}_\infty$ не допускает совместимой инвариантной слева метрики, см. [38, 1.5]. Здесь есть много интересных вопросов, соединяющих дескриптивную теорию множеств с алгеброй и другими областями математики, но в этой книге мы их в целом касаться не будем.

Некоторые банаховы пространства. Область $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ всех бесконечных последовательностей вещественных чисел является, очевидно, группой и линейным пространством в смысле покомпонентных операций. А некоторые её линейные подпространства превращаются в банаховы пространства при помощи специально подобранных норм. Например, множество

$$\mathbf{c_0} = \{x \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \lim_{n \to \infty} x(n) = 0\}$$

всех вещественных последовательностей, имеющих предел, является сепарабельным банаховым (а следовательно, и польским) пространством с нормой $||x|| = \mathtt{sup}_n |x(n)|$. Другой важный пример образуют сепарабельные банаховы пространства

$$\boldsymbol{\ell}^p = \{x \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \textstyle\sum_{n=0}^\infty |x(n)|^p < \infty\} \ \ (p \geq 1)$$

[4] Если $f, g \in \mathbb{S}_\infty$ то $h = f \circ g \in \mathbb{S}_\infty$ определяется условием $h(n) = f(g(n))$ для всех n.

суммируемых последовательностей с нормами $||x|| = (\sum_n |x(n)|^p)^{\frac{1}{p}}$. Также известно и несепарабельное банахово пространство

$$\boldsymbol{\ell}^\infty = \{x \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \mathtt{sup}_n |x(n)| < \infty\}$$

с нормой $||x|| = \mathtt{sup}_n |x(n)|$.

Пространство структур счетного языка. Пусть $\mathscr{L} = \{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — счетный реляционный язык. Таким образом, R_i есть символ отношения некоторой конечной «арности» m_i при любом i. Пусть

$$\mathtt{Mod}_\mathscr{L} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{P}(\mathbb{N}^{m_i})$$

— пространство всех (кодированных) *$\mathscr{L}$-структур* на $\mathbb{N}$. Таким образом, типичный элемент $x \in \mathtt{Mod}_\mathscr{L}$ — это функция или последовательность $x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, каждый член $x_i = x(i)$ которой удовлетворяет условию $x_i \subseteq \mathbb{N}^{m_i}$, т. е. является m_i-арным отношением на $\mathbb{N}$. Топологически $\mathtt{Mod}_\mathscr{L}$ можно отождествить с канторовым дисконтинуумом. Именно, отождествляем $\mathscr{P}(\mathbb{N}^{m_i})$ с $2^{\mathbb{N}^{m_i}}$, после чего получаем $\mathtt{Mod}_\mathscr{L} = \prod_{i\in\mathbb{N}} = \prod_i 2^{\mathbb{N}^{m_i}} = 2^I$, где $I = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(\{i\} \times \mathbb{N}^{m_i})$ — счетное множество. С точки же зрения логики и теории моделей $\mathtt{Mod}_\mathscr{L}$ можно понимать как совокупность всех $\mathscr{L}$-структур (т. е. моделей этого языка) с $\mathbb{N}$ как основной областью. Другими словами, если $x \in \mathtt{Mod}_\mathscr{L}$, то каждая замкнутая формула φ из $\mathscr{L}$ естественным образом квалифицируется как истинная либо ложная на x. Например, если арности m_0 и m_1 равны соответственно 2 и 1, то формула $\exists u \, \forall v \, (R_0(u,v) \vee R_1(v))$ истинна на $x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathtt{Mod}_\mathscr{L}$, когда

$$\forall k \in \mathbb{N} \, \exists n \in \mathbb{N} \, (\langle k, n\rangle \in x_0 \vee n \in x_1)\,.$$

Пространство компактных множеств. Если $\mathbb{X}$ — топологическое пространство, то через $\mathbf{K}(\mathbb{X})$ обозначается множество всех компактных множеств $A \subseteq \mathbb{X}$. Стандартная *топология Виеториса* на $\mathbf{K}(\mathbb{X})$ определяется как наименьшая такая топология, что для любого открытого множества $U \subseteq \mathbb{X}$ множества $\{A \in \mathbf{K}(\mathbb{X}) : A \subseteq U\}$ и $\{A \in \mathbf{K}(\mathbb{X}) : A \cap U = \varnothing\}$ открыты.

Упражнение 1.8.2. Пусть $\mathbb{X}$ — сепарабельное пространство. Докажите, что тогда и $\mathbf{K}(\mathbb{X})$ сепарабельно. Для этого возьмите произвольное счетное плотное множество $D \subseteq \mathbb{X}$ и покажите, что $\{A \subseteq D : A$ конечно$\}$ плотно (и счетно) в $\mathbf{K}(\mathbb{X})$. Докажите (это более сложно!), что $\{A \subseteq \mathbb{X} : A$ конечно$\}$ является $\mathbf{F}_\sigma$-множеством в $\mathbf{K}(\mathbb{X})$.

Если исходное пространство $\mathbb{X}$ метрическое, то и $\mathbf{K}(\mathbb{X})$ превращается в метрическое пространство с помощью *метрики Хаусдорфа*

$$\rho(A,B) = \mathtt{max}\{\mathop{\mathtt{sup}}_{a\in A} d(a,B), \mathop{\mathtt{sup}}_{b\in B} d(b,A)\}\,,$$

где d — метрика пространства $\mathbb{X}$. Оказывается, эта метрика совместима с топологией Виеториса. Кроме того, если d — полная метрика на $\mathbb{X}$, то ρ будет полной метрикой на $\mathbf{K}(\mathbb{X})$. Тем самым, если $\mathbb{X}$ — польское пространство, то $\mathbf{K}(\mathbb{X})$ также польское пространство. Более подробно см. об этом в книге [68].

Глава 2

Борелевские множества

Чтобы отличать множества, расположенные в польских пространствах, от произвольных множеств, первые часто называются *точечными множествами*. Таким образом, точечное множество — это подмножество какого-то, как правило, фиксированного контекстом польского пространства. Точечные множества, рассматриваемые дескриптивной теорией множеств, как правило, таковы, что их можно определить или построить при помощи тех или иных математически значимых операций, которые обычно применяют в итеративной форме и начиная с открытых множеств.

Известно несколько иерархий точечных множеств, дающих классификацию на основе типа разрешенных операций, способа их чередования и общей длины итеративной конструкции. Наиболее важные из них — это борелевская и проективная иерархии. Мы начнем с борелевской иерархии.

§2.1 Борелевские множества

Борелевские множества данного польского (и вообще, любого топологического) пространства $\mathbb{X}$ образуют наименьшую σ-алгебру[1] $\mathbf{Bor}(\mathbb{X})$ множеств $Y \subseteq \mathbb{X}$, содержащую все открытые множества этого пространства. *Борелевская иерархия* борелевских множеств пространства $\mathbb{X}$ состоит из *борелевских классов* $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, $\mathbf{\Pi}^0_\xi$, $\mathbf{\Delta}^0_\xi$, где $1 \le \xi < \omega_1$. (Напомним, что ω_1 — первый несчетный *ординал* — порядковое число.) Эти классы определяются трансфинитной индукцией по ξ:

$\mathbf{\Sigma}^0_1$ состоит из всех открытых множеств пространства $\mathbb{X}$;

$\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ (для $\xi > 1$) содержит все счетные объединения множеств, которые принадлежат классам $\mathbf{\Pi}^0_\eta$, $1 \le \eta < \xi$;

$\mathbf{\Pi}^0_\xi$ содержит все дополнения $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-множеств к пространству $\mathbb{X}$, так что множество $X \subseteq \mathbb{X}$ принадлежит $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{X} \smallsetminus X$ есть $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$;

$\mathbf{\Delta}^0_\xi$ содержит все множества, которые являются одновременно множествами классов $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ и $\mathbf{\Pi}^0_\xi$.

В этой области математики по традиции фразы «X — множество из C», «X является C-множеством», «X имеет класс C», даже просто «X есть C» и им подобные выражают одно и то же, а именно то, что точечное множество X принадлежит классу точечных множеств C (например, одному из классов борелевской иерархии).

Имеет хождение и более старая система обозначений борелевских классов, согласно которой:

$\mathbf{\Sigma}^0_1$ (открытые множества) обозначается[2] $\mathbf{G}$;

$\mathbf{\Pi}^0_1$ (замкнутые множества) обозначается $\mathbf{F}$;

$\mathbf{\Sigma}^0_2$ (счетные объединения замкнутых множеств) обозначается $\mathbf{F}_\sigma$;

$\mathbf{\Pi}^0_2$ (счетные пересечения открытых множеств) обозначается $\mathbf{G}_\delta$;

за ними следуют классы $\mathbf{F}_{\sigma\delta} = \mathbf{\Pi}^0_3$, $\mathbf{G}_{\delta\sigma} = \mathbf{\Sigma}^0_3$, и т. д.

Замечание 2.1.1. Буква $\mathbf{\Gamma}$ используется для замещения любой из букв $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{\Delta}$ в обозначении борелевских классов, так что $\mathbf{\Gamma}^0_\xi$ может обозначать любой из классов $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, $\mathbf{\Pi}^0_\xi$, $\mathbf{\Delta}^0_\xi$ — в том случае, когда говорится обо всех них, если иное не следует из контекста.

---

[1] Напомним, что σ-алгеброй называется такое семейство подмножеств некоторого фиксированного объемлющего пространства $\mathbb{X}$, которое замкнуто относительно операций счетного объединения, счетного пересечения и дополнения.

[2] Буква $\mathbf{G}$ в этих обозначениях происходит из немецкого слова Gebiet, т. е. «область» — слово, часто применяемое в связи с открытыми множествами. Буква $\mathbf{F}$ произошла от французского ferme — «замкнутое».

Разумеется, построение борелевской иерархии зависит от выбора пространства $\mathbb{X}$, и это иногда учитывается в обозначениях: $\mathbf{\Gamma}^0_\xi[\mathbb{X}]$ обозначает класс $\mathbf{\Gamma}^0_\xi$ для пространства $\mathbb{X}$. Обычно, однако, эта спецификация опускается, поскольку то пространство, о котором идет речь, либо определено контекстом, либо является произвольным из некоторого класса.

Упражнение 2.1.2. Докажите, используя упражнение 1.2.4, что в любом топологическом пространстве все борелевские множества имеют свойство Бэра.

В несчетных польских пространствах множества со свойством Бэра образуют значительно более широкое семейство, чем борелевские множества.

§ 2.2 Простые свойства борелевских множеств

Следующая лемма показывает, что борелевские классы растут с ростом индекса.

Лемма 2.2.1. *Пусть $\mathbb{X}$ — польское пространство.*
Тогда для любых ординалов $1 \le \xi < \eta < \omega_1$ выполнено включение $\mathbf{\Sigma}^0_\xi[\mathbb{X}] \cup \mathbf{\Pi}^0_\xi[\mathbb{X}] \subseteq \mathbf{\Delta}^0_\eta[\mathbb{X}]$. Кроме того,

$$\mathbf{Bor}(\mathbb{X}) = \bigcup_{1\le\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi[\mathbb{X}] = \bigcup_{1\le\xi<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\xi[\mathbb{X}] = \bigcup_{1\le\xi<\omega_1} \mathbf{\Delta}^0_\xi[\mathbb{X}],$$

классы $\mathbf{\Sigma}^0_\xi[\mathbb{X}]$ замкнуты относительно конечных пересечений и счетных объединений, классы $\mathbf{\Pi}^0_\xi[\mathbb{X}]$ замкнуты относительно конечных объединений и счетных пересечений, классы $\mathbf{\Delta}^0_\xi[\mathbb{X}]$ замкнуты относительно дополнений, конечных пересечений и конечных объединений.

Из выделенного равенства леммы, в частности, следует, что в польских пространствах для образования всех борелевских множеств вполне достаточно итерированного применения операций счетного объединения и счетного пересечения, т. е. не требуется операции дополнения.

Доказательство. Заметим, что для любого польского пространства $\mathbb{X}$ выполнено включение $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$, т. е. каждое открытое множество является множеством $\mathbf{F}_\sigma$. В самом деле, пусть $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ — счетное плотное подмножество пространства $\mathbb{X}$. Если множество $U \subseteq \mathbb{X}$ открыто, то оно совпадает с объединением всех таких замкнутых шаров $B_{nr} = \{x \in \mathbb{X} : \rho(x, x_n) \le r\}$, что $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Q}$ и $B_{nr} \subseteq U$, а это объединение счетно.

Итак, $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$, откуда по очевидной двойственности $\mathbf{\Pi}^0_1 \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2$ (каждое замкнутое множество есть множество $\mathbf{G}_\delta$). С другой стороны, по определению $\mathbf{\Pi}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$, и по двойственности $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2$, так что $\mathbf{\Sigma}^0_1 \cup \mathbf{\Pi}^0_1 \subseteq \mathbf{\Delta}^0_2$. Что же касается случая $2 \le \xi < \eta < \omega_1$, то по определению класса $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ немедленно получаем $\mathbf{\Sigma}^0_\xi \cup \mathbf{\Pi}^0_\xi \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\eta$, так что по двойственности имеем $\mathbf{\Sigma}^0_\xi \cup \mathbf{\Pi}^0_\xi \subseteq \mathbf{\Delta}^0_\eta$.

Утверждения о замкнутости борелевских классов относительно указанных операций мы оставим читателю в качестве несложного упражнения. □

Упражнение 2.2.2. Докажите индукцией по определению борелевских классов $\mathbf{\Gamma}^0_\xi$, что каждый из них замкнут относительно непрерывных прообразов в том смысле, что если $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — польские пространства и функция $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ непрерывна, то прообраз $f^{-1}[Y] = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \in Y\}$ любого множества $Y \subseteq \mathbb{Y}$ из класса $\mathbf{\Gamma}^0_\xi[\mathbb{Y}]$ принадлежит классу $\mathbf{\Gamma}^0_\xi[\mathbb{X}]$.

Но замкнутость относительно непрерывных *образов* не имеет места: мы увидим ниже, что уже непрерывные образы самого пространства $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ в польских пространствах приводят к более широкому классу А-множеств.

Пусть $\mathbb{X}$ — польское пространство. Тогда произведение $\mathbb{N}\times\mathbb{X}$ также польское пространство (если на $\mathbb{N}$ принята дискретная метрика). Следующая лемма связывает класс множества $P \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{X}$ с классом его *сечений* $(P)_n = \{x \in \mathbb{X} : \langle n, x\rangle \in P\}$.

Лемма 2.2.3. *Множество $P \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{X}$ принадлежит какому-то борелевскому классу $\mathbf{\Gamma}^0_\xi$, если и только если все сечения $(P)_n$ принадлежат $\mathbf{\Gamma}^0_\xi$.*

Доказательство. В одну сторону результат следует из упражнения 2.2.2, поскольку $(P)_n$ является непрерывным прообразом P при отображении $x \mapsto \langle n, x\rangle$. В другую сторону (от сечений к самому множеству) достаточно рассмотреть лишь классы $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, поскольку тогда результат для двойственных классов $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ получается простым переходом к дополнениям.

Итак, пусть каждое из сечений $(P)_n$ принадлежит $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$. Тогда при любом n образ $X_n = \{n\}\times(P)_n$ множества $(P)_n$ при гомеоморфизме $x \mapsto \langle n, x\rangle$ также, очевидно, принадлежит $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$. Но $P = \bigcup_n X_n$, а класс $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ замкнут относительно счетных объединений. □

Упражнение 2.2.4. Докажите, что если X, Y — борелевские множества класса $\mathbf{\Gamma}^0_\xi$ в польских пространствах $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ соответственно, то $X \times Y$ — множество того же класса $\mathbf{\Gamma}^0_\xi$ в пространстве $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$.

Итак, согласно лемме 2.2.1 борелевские классы растут, по крайней мере нестрого, с ростом индекса ξ. Является ли этот рост обязательно строгим? Отрицательный ответ имеет место для некоторых достаточно простых пространств. Например, если $\mathbb{X}$ — счетное дискретное пространство, то $\mathbf{Bor}(\mathbb{X}) = \mathbf{\Sigma}^0_1[\mathbb{X}] = \mathbf{\Sigma}^0_\xi[\mathbb{X}] = \mathscr{P}(\mathbb{X})$ (вообще все подмножества пространства $\mathbb{X}$) для любого ординала ξ, $1 < \xi < \omega_1$, и то же верно для $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{\Delta}$. В этом случае говорят, что *длина* борелевской иерархии для $\mathbb{X}$ (т. е. произвольного счетного дискретного пространства) равна 1. Из работы [93] известно, что длина борелевской иерархии может быть произвольным счетным ординалом ξ для подходящего пространства $\mathbb{X}$ (в том смысле, что $\mathbf{\Sigma}^0_\eta \subsetneqq \mathbf{\Sigma}^0_\xi = \mathbf{Bor}(\mathbb{X})$ для всех $\eta < \xi$).

Но для несчетных польских пространств длина борелевской иерархии равна ω_1 согласно следующей теореме.

Теорема 2.2.5 (теорема иерархии, Лебег, [72]). *Если $\mathbb{X}$ — несчетное польское пространство, то $\mathbf{\Sigma}^0_\xi[\mathbb{X}] \not\subseteq \mathbf{\Pi}^0_\xi[\mathbb{X}]$ и соответственно $\mathbf{\Pi}^0_\xi[\mathbb{X}] \not\subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\xi[\mathbb{X}]$ для каждого ординала ξ, $1 \le \xi < \omega_1$. Поэтому борелевские классы $\mathbf{\Sigma}^0_\xi[\mathbb{X}]$, $\mathbf{\Pi}^0_\xi[\mathbb{X}]$, $\mathbf{\Delta}^0_\xi[\mathbb{X}]$ строго возрастают с ростом индекса ξ до ω_1.*

Доказательство. Мы ограничимся здесь лишь выводом второго утверждения из первого, оставив само доказательство первого утверждения до § 2.7. Предположим противное, т. е. пусть, например, $\mathbf{\Sigma}^0_\xi = \mathbf{\Sigma}^0_{\xi+1}$ для какого-то ординала $1 \le \xi < \omega_1$. Однако $\mathbf{\Pi}^0_\xi \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_{\xi+1}$ по лемме 2.2.1, так что $\mathbf{\Pi}^0_\xi \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\xi$. Отсюда по двойственности следует, что $\mathbf{\Sigma}^0_\xi \not\subseteq \mathbf{\Pi}^0_\xi$, и мы получаем противоречие. □

Закончим этот параграф следующим любопытным результатом, согласно которому в построении борелевских множеств можно ограничиться операцией счетного объединения только для случая объединений попарно непересекающихся множеств.

Предложение 2.2.6. *В любом польском пространстве $\mathbb{X}$ класс борелевских множеств совпадает с наименьшим классом множеств, содержащим все открытые множества и замкнутым относительно счетного пересечения и счетного объединения попарно непересекающихся множеств.*

Доказательство. Поскольку второй класс содержит все открытые и все $\mathbf{G}_\delta$-множества (класс $\mathbf{\Pi}^0_2$), достаточно доказать, что для любого ординала $\xi \ge 3$ каждое $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-множество $X \subseteq \mathbb{X}$ есть дизъюнктное счетное объединение множеств из классов $\mathbf{\Pi}^0_\eta$ для разных ординалов $\xi > \eta \ge 2$. (Класс $\mathbf{\Pi}^0_1$ замкнутых множеств можно оставить в стороне, поскольку $\mathbf{\Pi}^0_1 \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2$ по лемме 2.2.1.) По определению имеем $X = \bigcup_n X_n$, где каждое X_n есть $\mathbf{\Pi}^0_{\eta_n}$, $2 \le \eta_n < \xi$. Положим $Y_n = X_n \smallsetminus (X_0 \cup \dots \cup X_{n-1}) = X_n \cap C_n$, где $C_n = \mathbb{X} \smallsetminus (X_0 \cup \dots \cup X_{n-1})$ — множество класса $\mathbf{\Sigma}^0_{\eta_n}$. Но каждое C_n есть объединение $C_n = \bigcup_k C_{nk}$ множеств C_{nk} классов $\mathbf{\Pi}^0_\zeta$, $\zeta < \eta_n$, т. е. дизъюнктное объединение множеств $C'_{nk} = C_{nk} \smallsetminus \bigcup_{\ell<k} C_{n\ell}$. Наконец, каждое C'_{nk} есть $\mathbf{\Pi}^0_{\eta_n}$-множество по лемме 2.2.1. □

§2.3 Операция предела

Иерархию борелевских множеств можно построить и при помощи операции предела. Предел последовательности множеств X_n (любого рода) определяется так. Сначала определяем

верхний предел $\mathtt{lim\,sup}_n X_n = \bigcup_n \bigcap_{k \ge n} X_k$ — он содержит элементы, принадлежащие всем, за исключением конечного числа, множествам X_n,

нижний предел $\mathtt{lim\,inf}_n X_n = \bigcap_n \bigcup_{k \ge n} X_k$ — он содержит элементы, принадлежащие бесконечному числу множеств X_n;

а если $\mathtt{lim\,sup}_n X_n = \mathtt{lim\,inf}_n X_n$, то это общее значение и объявляется *пределом* $\mathtt{lim}_n X_n$, а сама последовательность множеств X_n объявляется *сходящейся*.

Упражнение 2.3.1. Докажите, что $\subseteq$-возрастающие последовательности (т. е. такие последовательности, что $X_n \subseteq X_{n+1}$, $\forall\, n$) и $\subseteq$-убывающие последовательности множеств X_n являются сходящимися, причем $\mathtt{lim}_n X_n = \bigcup_n X_n$ в первом случае и $\mathtt{lim}_n X_n = \bigcap_n X_n$ во втором.

Для каждого семейства множеств $\mathbf{X}$, через $\mathbf{X}_\cup$ (соответственно $\mathbf{X}_\cap$) обозначается семейство всех конечных объединений (соответственно, конечных пересечений) множеств из $\mathbf{X}$, а через $\mathbf{X}_\sigma$, $\mathbf{X}_\delta$ — соответственно семейство счетных объединений и счетных пересечений множеств из $\mathbf{X}$. Наконец, $\mathbf{X}_\lambda$ обозначает семейство всех пределов сходящихся последовательностей множеств из $\mathbf{X}$.

В этих обозначениях $\mathbf{\Sigma}^0_{\xi+1} = (\mathbf{\Pi}^0_\xi)_\sigma$, а $\mathbf{\Pi}^0_{\xi+1} = (\mathbf{\Sigma}^0_\xi)_\delta$.

Семейство $\mathbf{X}$ называется *кольцом*, если $\mathbf{X}_\cup \subseteq \mathbf{X}$ и $\mathbf{X}_\cap \subseteq \mathbf{X}$ (т. е. $\mathbf{X}$ замкнуто относительно конечных объединений и пересечений), и σ-*кольцом*, если $\mathbf{X}_\sigma \subseteq \mathbf{X}$ и $\mathbf{X}_\delta \subseteq \mathbf{X}$ ($\mathbf{X}$ замкнуто относительно счетных объединений и пересечений).

Упражнение 2.3.2 (Серпинский, [107]). Докажите, что для любого кольца множеств $\mathbf{X}$ выполнено равенство $\mathbf{X}_\lambda = \mathbf{X}_{\sigma\delta} = \mathbf{X}_{\delta\sigma}$.

Чтобы получить вывод в нетривиальную сторону, докажите, что если $X = \bigcup_m \bigcap_n X_n^m = \bigcap_m \bigcup_n Y_n^m$, и выполнены включения $X_n^m \subseteq X_{n+1}^m$ и $Y_n^m \subseteq Y_{n+1}^m$ для всех m, n, то $X = \mathtt{lim}_n Z_n$, где

$$Z_n = (X_n^0 \cap Y_n^0) \cup (X_n^1 \cap Y_n^0 \cap Y_n^1) \cup \ldots \cup (X_n^n \cap Y_n^0 \cap \ldots \cap Y_n^n). \quad \square$$

Упражнение 2.3.3. Докажите, используя результат упражнения 2.3.2, что для любого польского пространства $\mathbb{X}$ если $2 \le \xi < \omega_1$, то класс $\mathbf{\Delta}^0_{\xi+1}$ совпадает с $(\mathbf{\Delta}^0_\xi)_\lambda$, а в случае, когда $\mathbb{X} = \mathbb{N}^\mathbb{N}$ (бэровское пространство), результат имеет место и для $\xi = 1$.

Почему последнее замечание не может быть отнесено к случаю $\mathbb{X} = \mathbb{R}$?

Последний результат позволяет построить другой вариант борелевской иерархии, начав с класса $\mathbf{K}_1 = \mathbf{\Delta}^0_2$ (а для бэровского пространства с класса $\mathbf{K}_0 = \mathbf{\Delta}^0_1$ открыто-замкнутых множеств) и далее полагая $\mathbf{K}_\xi = (\bigcup_{\eta<\xi} \mathbf{K}_\eta)_\lambda$ для всех $\xi \ge 1$. Тогда по индукции $\mathbf{K}_n = \mathbf{\Delta}^0_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, далее, $\mathbf{K}_\omega = \mathbf{\Delta}^1_{\omega+1}$ (а класс $\mathbf{\Delta}^0_\omega$ проскакивается), $\boldsymbol{k}_{\omega+k} = \mathbf{\Delta}^0_{\omega+k+1}$, $\forall\, k$, и вообще $\boldsymbol{k}_\xi = \mathbf{\Delta}^0_{\xi+1}$ для любого ординала ξ, $1 \le \xi < \omega$. Классы $\mathbf{K}_\xi$ образуют *иерархию Валле-Пуссена* (см. [44]), также активно использовавшуюся Н. Н. Лузиным (см., например, [85]) и математиками его школы. Она вызывала интерес аналогиями между операцией теоретико-множественного предела и обычным пределом последовательности в теории функций, но в целом оказалась менее удобной, чем иерархия классов $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, $\mathbf{\Pi}^0_\xi$, $\mathbf{\Delta}^0_\xi$.

§ 2.4 Отображения польских пространств

Топология обычно интересуется теми отображениями, которые сохраняют топологические структуры, например непрерывными отображениями, гомеоморфизмами, открытыми отображениями. Для дескриптивной теории множеств большее значение имеют отображения, сохраняющие борелевскую структуру, и даже более общие отображения.

Определение 2.4.1. Допустим, что X, Y — борелевские множества в польских пространствах $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ соответственно. Отображение $f\colon X \to Y$ называется

борелевским, если его *график*[3] $\Gamma_f = \{\langle x, y\rangle : x \in X \wedge f(x) = y\}$ является борелевским множеством (пространства $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$);

[3] Формально любое отображение f отождествляется со своим графиком Γ_f, но бывает удобно делать неформальное разничие между ними.

B-измеримым[4], если все f-прообразы $f^{-1}[Y'] = \{x \in X : f(x) \in Y'\}$ борелевских множеств $Y' \subseteq Y$ являются борелевскими множествами (пространства $\mathbb{X}$);

измеримым по Бэру, если все f-прообразы $f^{-1}[Y']$ борелевских множеств $Y' \subseteq Y$ суть множества, имеющие свойство Бэра (в пространстве $\mathbb{X}$). □

Упражнение 2.4.2. Докажите, что для B-измеримости отображения $f\colon X \to Y$ достаточно, чтобы f-прообразы *открытых* множеств $U \subseteq \mathbb{Y}$ были борелевскими множествами. То же верно для отображений, измеримых по Бэру.

В следующей теореме изложены некоторые главные свойства борелевских и B-измеримых отображений в польских пространствах.

Теорема 2.4.3. *Пусть X, Y — борелевские множества в польских пространствах и $f\colon X \to Y$ — некоторое отображение. Тогда*:

(i) *если f — борелевское отображение, то f-прообразы борелевских множеств $Y' \subseteq Y$ — снова борелевские множества, а потому отображение f является B-измеримым*;

(ii) *обратно, если f является B-измеримым, то оно представляет собой борелевское отображение*;

(iii) *если отображение f является борелевским и взаимно однозначным (но не обязательно $\mathtt{ran}\, f = Y$), то множество $\mathtt{ran}\, f$ борелевское.*

Итак, классы борелевских и B-измеримых отображений совпадают для польских пространств. (Класс отображений, измеримых по Бэру, значительно шире.) Кроме того, взаимно однозначные борелевские образы борелевских множеств сами являются борелевскими множествами. Мы увидим ниже, что произвольные, т. е. не обязательно взаимно однозначные борелевские образы борелевских множеств образуют более широкий класс A-множеств.

Доказательство (предварительное)**.** Утверждение (i) будет доказано в §4.5.

Докажем утверждение (ii). Взяв произвольное B-измеримое отображение $f\colon X \to Y$, зафиксируем некоторое счетное всюду плотное множество $D \subseteq \mathbb{Y}$, и пусть $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ — произвольное перечисление всех окрестностей рационального радиуса точек из D. Понятно, что каждая точка $y \in \mathbb{Y}$ есть единственная точка пересечения всех

[4] Латинская буква B в названии указывает на борелевские множества.

множеств U_n, содержащих y, т. е., формально, $\{y\} = \bigcap\{U_n : y \in U_n\}$. Отсюда следует, что

$$\langle x, y\rangle \in \Gamma_f \iff x \in X \wedge y \in Y \wedge \forall n\,(y \in U_n \Longrightarrow x \in B_n)\,,$$

где $B_n = f^{-1}[U_n]$ — борелевское множество в X. Тем самым, Γ_f есть пересечение борелевских множеств $X \times Y$ и $B_n \times (\mathbb{Y} \smallsetminus U_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение (iii) будет доказано в § 11.1 (следствие 11.1.2). □

Отложенные доказательства утверждений (i) и (iii) основаны на некоторых более глубоких результатах дескриптивной теории множеств, связанных с A-множествами (= проекциями, или непрерывными образами, борелевских множеств), теоремой Суслина и некоторыми другими вопросами.

§ 2.5 Полунепрерывность и теорема Адяна

Пусть дано метрическое пространство $\mathbb{X}$. Вещественнозначная функция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной сверху* (соответственно *снизу*), в точке $x_0 \in \mathbb{X}$, если

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \le f(x_0) \quad (\text{соответственно } \liminf_{x \to x_0} f(x) \ge f(x_0)\,).$$

Функция f называется полунепрерывной сверху (снизу) на *множестве* $M \subseteq \mathbb{X}$, если она полунепрерывна сверху (снизу) для всех $x_0 \in M$. Эти два понятия симметричны в том смысле, что функция f полунепрерывна снизу, если и только если функция $g(x) = -f(x)$ полунепрерывна сверху.

Понятно, что непрерывные функции — это те, которые одновременно полунепрерывны и сверху, и снизу. Следующее несложное упражнение доставляет удобный критерий полунепрерывности.

Упражнение 2.5.1. Докажите, что для того чтобы функция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ была полунепрерывной *сверху*, необходимо и достаточно, чтобы для любого $p \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}[< p] = \{x \in X : f(x) < p\}$ было открыто в стандартной топологии вещественной прямой.

Дайте соответствующий критерий полунепрерывности *снизу*.

Следствие 2.5.2. *Если $\mathbb{X}$ — польское пространство, то любая функция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, полунепрерывная сверху или снизу на $\mathbb{X}$, измерима по Бэру.*

Доказательство. Согласно упражнению 2.4.2 достаточно убедиться, что прообраз $X_{pq} = \{x \in \mathbb{X} : p < f(x) < q\}$ любого интервала

(p, q) вещественной прямой $\mathbb{R}$ — борелевское множество в $\mathbb{X}$. Однако нетрудно проверить, что

$$X_{pq} = f^{-1}[< q] \cap \bigcup_{r \in \mathbb{Q},\, r > p} (\mathbb{R} \smallsetminus f^{-1}[< p])\,,$$

т. е. если функци f полунепрерывна сверху, то X_{pq} — множество класса $\mathbf{F}_\sigma$, поскольку объединение по рациональным числам $r > p$ — счетное объединение. □

Упражнение 2.5.3. (1) Пусть $\mathbb{X}$ — польское пространство. Докажите, что множество всех функций $f \colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, полунепрерывных сверху, замкнуто относительно суммы.

(2) Докажите, что если функции $f_n \colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ полунепрерывны сверху, $f_{n+1} \le f_n(x)$ для всех n и x, и предел $f(x) = \mathtt{lim}_n\, f_n(x)$ существует в каждой точке $x \in \mathbb{X}$, то функция f также полунепрерывна сверху.

В то же время произвольный (не обязательно монотонный) поточечный предел всюду сходящейся последовательности функций, полунепрерывных сверху, уже не обязательно принадлежит этому классу. На самом деле наименьший класс функций $f \colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, содержащий все непрерывные функции и замкнутый относительно взятия поточечного предела всюду сходящейся последовательности, совпадает с классом всех функций $f \colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, измеримых по Бэру. На этой основе возникает *бэровская иерархия* функций, связанная с иерархией борелевских множеств и исторически предшествовавшая последней. См. об этом подробнее в последних главах книги Хаусдорфа [31].

Мы остановимся здесь на одном интересном результате, касающемся полунепрерывных функций. Согласно следствию 2.5.2, этот класс функций не может включать такие объекты, которые обычно ассоциируются с применением аксиомы выбора. Тем не менее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5.4. *Существует полунепрерывная сверху вещественная функция f, определенная на отрезке $[0,1]$ и существенно разрывная на нем.*[5]

Функция $f \colon X \to Y$ называется *существенно разрывной* на X, если множество X невозможно разбить на счетное число множеств X_n, на каждом из которых она непрерывна. Как указано в работе [26], вопрос о существовании существенно разрывной функции среди бэровских функций был поставлен Н. Н. Лузиным. Теорема 2.5.4 позволяет найти такую функцию даже в более узком классе функций, полунепрерывных сверху.

[5] Теорема опубликована в статье П. С. Новикова и С. И. Адяна [26], где полунепрерывные сверху функции называются просто полунепрерывными.

Доказательство. Не составляет труда построить расщепляющуюся систему $\{F_s\}_{s\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ совершенных непустых множеств $F_s \subseteq [0,1]$ с такими свойствами:

1) $F_\Lambda = [0,1]$;
2) если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $\mathtt{lh}\, s = n$, то диаметр F_s не превосходит 2^{-n};
3) каждое множество $F_{s^\wedge n}$ включено в F_s и нигде не плотно в F_s;
4) $F_{s^\wedge n} \cap F_{s^\wedge k} = \varnothing$ при $k \neq n$ и любом $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$;
5) если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $U \subseteq F_s$ — непустое пересечение F_s с некоторым бэровским интервалом, то найдется такое k, что $F_{s^\wedge k} \subseteq U$; отсюда следует, что множество $X_s = \bigcup_k F_{s^\wedge k}$ плотно в F_s.

Каждое X_s и каждое из множеств $X_n = \bigcup_{\mathtt{lh}\, s=n} X_s$ является $\mathbf{F}_\sigma$-множеством, т. е. множеством класса $\mathbf{\Sigma}^0_2$, а потому пересечение $E = \bigcap_n X_n$ принадлежит классу $\mathbf{\Pi}^0_3$. По построению для каждой бесконечной последовательности $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ пересечение $F_a = \bigcap_n F_{a\restriction n}$ содержит единственную точку, которую мы обозначим через $\varphi(a)$, причем функция $\varphi\colon \mathbb{N}^\mathbb{N} \to [0,1]$ непрерывна и взаимно однозначна и $E = \mathtt{ran}\,\varphi = \{\varphi(a) : a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$. А из свойства 5 нетрудно вывести, что множество $E = \mathtt{ran}\,\varphi$ плотно в $[0,1]$. Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.5.5. *Если $x \in [0,1]$, то либо $x \in E$ и тогда $x = \varphi(a)$ для некоторой (единственной) точки $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, либо же $x \in F_s \smallsetminus X_s$ для некоторого (также единственного) кортежа $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$.* □

Теперь приступим к определению искомой функции f. Прежде всего, для любого кортежа $s = \langle k_0, \ldots, k_{n-1}\rangle \in \mathbb{N}^{<\omega}$ длины $\mathtt{lh}\, s = n \geq 1$ определим

$$\begin{aligned} \rho_s &= 2^{-k_0-1} + 2^{-k_0-k_1-2} + \ldots + 2^{-k_0-k_1-\ldots-k_{n-1}-n}\ ; \\ \delta_s &= 2^{-k_0-k_1-\ldots-k_{n-1}-n}\ ; \end{aligned}$$

и $\rho_\Lambda = 0$, $\delta_s = 1$ для пустого кортежа Λ. Теперь для $x \in [0,1]$ положим

$$f(x) = \begin{cases} \rho_s\,, & \text{если} \quad s \in \mathbb{N}^{<\omega} \quad \text{и} \quad x \in F_s \smallsetminus X_s\,; \\ \mathtt{sup}_n\, \rho_{a\restriction n}\,, & \text{если} \quad x = \varphi(a) \quad \text{и} \quad a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Корректность определения $f(x)$ следует из леммы 2.5.5. Кроме того,

(I) $\rho_s < \rho_t < \rho_t + \delta_t \leq \rho_s + \delta_s$ для любых кортежей $s \subset t$ в $\mathbb{N}^{<\omega}$;

(II) $\rho_s < f(x) \le \rho_s + \delta_s$ всякий раз, когда[6] $x \in F_s$.

Лемма 2.5.6. *Функция* $f\colon [0,1] \to [0,1]$ *полунепрерывна сверху.*

Доказательство (лемма)**.** Задавшись значением ε, $0 < \varepsilon < 1$, мы докажем, что множество $Z_\varepsilon = \{x : f(x) \ge \varepsilon\}$ замкнуто в $[0,1]$; этого достаточно для доказательства леммы согласно результату упражнения 2.5.3(2). Положим $S_n = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \mathtt{lh}\, s = n \wedge \rho_s + \delta_s \ge \varepsilon\}$ для каждого n. В частности, $S_0 = \{\Lambda\}$, S_1 состоит из всех одночленных кортежей $\langle n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, для которых $2^{-n} \ge \varepsilon$, и т. д.

Множество $S = \bigcup_n S_n$ содержит Λ и является деревом в $\mathbb{N}^{<\omega}$, так как согласно утверждению (I) если $s^\wedge k \in S$, то и $s \in S$. Далее, для каждого $s \in S$ имеется лишь конечное множество таких чисел k, что продолженный кортеж $s^\wedge k$ также принадлежит s. Так что каждое множество S_n конечно.

Мы утверждаем, что *каждое из множеств S_n содержит единственный кортеж $s_n \in S_n$, для которого вдобавок к неравенству $\rho_{s_n} + \delta_{s_n} \ge \varepsilon$ выполнено и неравенство $\rho_{s_n} < \varepsilon$ и при этом $s_n \subset s_{n+1}$*. В самом деле, $s_0 = \Lambda$ подходит при $n = 0$. Далее, допустим, что $\rho_s < \varepsilon \le \rho_s + \delta_s$. Для любого продолженного кортежа вида $s^\wedge k$ имеем $\rho_{s^\wedge k} = \rho_s + \delta_s 2^{-k-1}$ и $\delta_{s^\wedge k} = \delta_s 2^{-k-1}$, так что существует единственное натуральное k, для которого $\rho_{s^\wedge k} < \varepsilon \le \rho_{s^\wedge k} + \delta_{s^\wedge k}$. Остается заметить, что если $t = s^\wedge k$ удовлетворяет неравенству $\rho_t < \varepsilon \le \rho_t + \delta_t$, то в силу утверждения (I) выполнено и неравенство $\rho_s < \varepsilon \le \rho_s + \delta_s$.

Положим $T_n = S_n \smallsetminus \{s_n\} = \{s \in S_n : \rho_s \ge \varepsilon\}$ и $T_{\le n} = \bigcup_{m \le n} T_m$ (конечные множества). Теперь мы утверждаем, что $Z_\varepsilon = P$, где $P = \bigcap_n \bigl(F_{s_n} \cup \bigcup_{s \in T_{\le n}} F_s\bigr)$, — этим, очевидно, доказывается лемма.

Слева направо. Пусть $x \in Z_\varepsilon$, т. е. $f(x) \ge \varepsilon$. Если $x = \varphi(a) \in E$, $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то по определению $x \in F_{a \restriction n}$, $\forall n$, так что $a \restriction n \in S_n$ при любом n согласно утверждению (II), откуда, очевидно, следует, что $x \in P$. Если же $x \notin E$, то найдется такой кортеж s, что $x \in F_s \smallsetminus X_s$. Тогда $\rho_s = f(x) \ge \varepsilon$, откуда получаем $s \in T_n$ и $x \in P$.

Справа налево. Пусть $x \in P$. Если x принадлежит хотя бы одному множеству F_s, где $s \in T_{\le n}$ для какого-то n, то $f(x) \ge \varepsilon$ (даже $> \varepsilon$) согласно утверждению (II). Остается рассмотреть случай, когда $x \in F_{s_n}$ для каждого n. Тогда $|f(x) - \varepsilon| \le \delta_{s_n}$, $\forall n$, согласно утверждению (II), откуда получаем $f(x) = \varepsilon$, так как $\delta_{s_n} \to 0$ при $n \to \infty$. □ (лемма 2.5.6)

Лемма 2.5.7. *Функция f существенно разрывна на* $[0,1]$.

---

[6] Точному равенству $f(x) = \rho_s + \delta_s$ в утверждении (II) удовлетворяет только точка $x = \varphi(a) \in F_s$, где $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — продолжение кортежа s бесконечным числом нулей. Точному равенству $\rho_t + \delta_t = \rho_s + \delta_s$ в утверждении (I) удовлетворяет только тот кортеж $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, который продолжает s конечным числом нулей.

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение $[0,1] = \bigcup_n Y_n$ на попарно дизъюнктные множества Y_n. Пусть $E_n = E \cap Y_n$. Утверждается, что *существуют такой кортеж* $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ *и такое натуральное число* n*, что* $F_s \cap E_n$ *не является нигде не плотным в* F_s. В самом деле, иначе согласно свойству 5 множеств F_s мы получили бы такую последовательность $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $F_{a\restriction(n+1)} \subseteq F_{a\restriction n} \setminus E_n$ для всех n, и тогда, с одной стороны, $x = \varphi(a) \in E$, а с другой стороны, $x \notin E_n$, $\forall n$, и мы приходим к противоречию.

Пусть s и n таковы, как указано. Мы собираемся доказать, что функция $f \restriction E_n$ не является непрерывной; этим доказывается лемма.

Найдется такой бэровский интервал $I \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что пересечение $Q = E_n \cap I \cap F_s$ всюду плотно в $I \cap F_s \neq \varnothing$. Возьмем произвольную точку $x = \varphi(a) \in Q$. По определению $a \restriction n = s$ и $f(x) = \mathtt{sup}_m \rho_{a\restriction m}$, т. е. $f(x) > \rho_s + 2\varepsilon$, где $2\varepsilon = \rho_{a\restriction(n+1)} - \rho_s > 0$. Теперь докажем, что любой бэровский интервал $J \subseteq I$, содержащий точку x, также содержит некоторую точку $x' \in E_n \cap J$, для которой $f(x') \le \rho_s + \varepsilon$; отсюда следует, что функция $f \restriction E_n$ имеет разрыв в точке x.

Возьмем достаточно большое натуральное N, удовлетворяющее $2^{-N} < \varepsilon$. Множество $X' = \bigcup_{k<N} F_{s^\wedge k}$ нигде не плотно в F_s. С другой стороны, множество $Q' = Q \cap J = E_n \cap J \cap F_s$ всюду плотно в $J \cap F_s$ (поскольку это верно для множества I). Поэтому найдется точка $x' \in Q' \setminus X'$. Мы утверждаем, что $f(x') \le \rho_s + \varepsilon$. В самом деле, коль скоро $x' \in E \cap F_s$, мы имеем $x' \in F_{s^\wedge k}$ для какого-то k, и при этом $k \ge N$, поскольку $x' \notin X'$. Однако $\rho_{s^\wedge k} \le \rho_s + 2^{-k-1} \le \rho_s + \frac{\varepsilon}{2}$ и также $\delta_{s^\wedge k} \le \frac{\varepsilon}{2}$, так что выполнено неравенство $\rho_{s^\wedge k} + \delta_{s^\wedge k} \le \rho_s + \varepsilon$. Значит, $f(x') \le \rho_s + \varepsilon$ согласно утверждению (II), что и требовалось.

□ (лемма 2.5.7)

Из двух доказанных лемм следует теорема 2.5.4. □

§ 2.6 Борелевская изоморфность польских пространств

Разные польские пространства обладают, очевидно, различной топологической структурой: они могут быть компактными, даже не σ-компактными, связными, нульмерными, и т. д. Однако при переходе от топологической к борелевской структуре эти различия стираются: польские пространства становятся изоморфными согласно следующей теореме 2.6.2.

Определение 2.6.1. *Борелевским изоморфизмом* между борелевскими множествами X и Y в польских пространствах называется любая такая биекция $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$, что как f, так и f^{-1} являются B-измеримыми отображениями.

Теорема 2.6.2. (i) *Для любого польского пространства* $\mathbb{X}$ *существуют замкнутое множество* $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *и непрерывная биекция* $h\colon F \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{X}$*, переводящая открытые множества в множества* $\mathbf{F}_\sigma$*.*

(ii) *Все несчетные польские пространства борелевски изоморфны.*

(iii) *Если* X *— борелевское множество в польском пространстве, то существуют замкнутое множество* $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *и непрерывная биекция* $h\colon F \xrightarrow{\text{на}} X$*.*

(iv) *Каждая такая функция* h*, как в* (iii)*, является борелевским изоморфизмом* F *на* X*.*

(v) *Все несчетные борелевские множества в польских пространствах борелевски изоморфны.*

Общий вывод из утверждения (iii) и теоремы 2.4.3 (iii) состоит в том, что в польских пространствах класс борелевских множеств совпадает с классом непрерывных взаимно однозначных образов замкнутых множеств пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Доказательство. [7] (i) Справедливо следующее: *если* $\varepsilon > 0$*, то любое* $\mathbf{F}_\sigma$*-множество* $X \subseteq \mathbb{X}$ *можно разбить на счетное число таких* $\mathbf{F}_\sigma$*-множеств* X_n*, что* $\overline{X_n} \subseteq X$ *и* $\mathtt{diam}\, X_n \le \varepsilon$, где $\mathtt{diam}$ — диаметр в $\mathbb{X}$, а $\overline{Y}$ обозначает топологическое замыкание множества Y в $\mathbb{X}$. В самом деле, пусть $X = \bigcup_m F_m$, где все F_m замкнуты и имеют диаметр меньше ε (здесь используется сепарабельность!). Берем $X_m = F_m \smallsetminus \bigcup_{n<m} F_n$.

Из этого утверждения о разбиении мы легко получаем суслинскую систему $\mathbf{F}_\sigma$-множеств $X_s \subseteq \mathbb{X}$ $(s \in \mathbb{N}^{<\omega})$, удовлетворяющую таким требованиям:

1) $\overline{X_t} \subseteq X_s$, если $s \subset t$;

2) $\mathtt{diam}\, X_t \le 2^{-n}$, если $\mathtt{lh}\, s = n$;

3) $X_{s^\wedge k} \cap X_{s^\wedge n} = \varnothing$, если $k \ne n \in \mathbb{N}$;

4) $X_\Lambda = \mathbb{X}$ и $X_s = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_{s^\wedge k}$ для всех s.

Эта система не регулярна, точнее, не является неисчезающей в смысле §1.5, однако множество $S = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : X_s \ne \varnothing\}$ является деревом в $\mathbb{N}^{<\omega}$ согласно требованию 1 и не имеет концевых вершин согласно требованию 4, и на этом дереве система регулярна и дизъюнктна. Это означает, что ассоциированная функция f определена

[7] Доказательство утверждений (iv) и (v) включает ссылку на теорему 2.4.3, доказательство которой в требуемой здесь части будет завершено только в §4.5.

на замкнутом множестве $F = [S] = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall\, m\, (a \restriction m \in S)\}$ и сопоставляет каждому $a \in F$ единственную точку пересечения $\bigcap_m X_{a \restriction m}$. Кроме того, эта функция непрерывна и взаимно однозначна на F. (Доказательство леммы 1.5.2 сохраняет силу.) Далее, $\mathtt{ran}\, f = \mathbb{X}$, поскольку если $x \in \mathbb{X}$, то из требований 4 и 1 следует существование такого аргумента $a \in F$, что $x = f(a)$. Наконец, f-образ $f[U]$ любого бэровского интервала $U = [s] = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset a\}$ $(s \in \mathbb{N}^{<\omega})$, очевидно, совпадает с $\mathbf{F}_\sigma$-множеством X_s, откуда и следует, что f-образы открытых множеств являются множествами класса $\mathbf{F}_\sigma$.

(ii) Понятно, что такие отображения f, как в утверждении (i) теоремы, являются борелевскими изоморфизмами. Поэтому остается проверить, что любые два несчетных замкнутых подмножества $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ борелевски изоморфны, или, что эквивалентно, что любое несчетное замкнутое $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ борелевски изоморфно самому пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Понятно, что F допускает борелевское вложение в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ посредством тождественного отображения. Обратно, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ допускает борелевское вложение в $2^{\mathbb{N}}$ согласно результату упражнения 1.3.5 (1) и далее в F в соответствии с упражнением 1.3.4 (3). Отсюда, следуя стандартному доказательству теоремы Шрёдера–Бернштейна из общей теории множеств[8], мы получаем борелевский изоморфизм между F и $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(iii) Рассуждаем индукцией по борелевскому построению X из открытых множеств при помощи операций счетного объединения попарно дизъюнктных множеств и счетного пересечения. (Мы ссылаемся на предложение 2.2.6.) Если X открыто, то само X есть польское пространство согласно теореме 1.1.3, и можно сослаться на теорему 2.6.2 (ii). Допустим теперь, что для борелевских множеств $X_n \subseteq \mathbb{X}$ уже имеются замкнутые множества $F_n \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и непрерывные взаимно однозначные функции $h_n : F_n \xrightarrow{\text{на}} X_n$. Множество P всех таких бесконечных последовательностей $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, что $a_n \in F_n$ для всех n и $h_0(a_0) = h_1(a_1) = h_2(a_2) = \ldots$, замкнуто в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, функция $h(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = h_0(a_0)$ непрерывна и взаимно однозначна на F, а ее образ в точности совпадает с пересечением $\bigcap_n X_n$. Остается заметить, что пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ гомеоморфны (см. упражнение 1.3.2).

Теперь предположим, что в той же ситуации множества X_n попарно дизъюнктны. Множество $F = \{n^\wedge a : n \in \mathbb{N} \wedge a \in F_n\}$ замкнуто в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а функция $h(n^\wedge a) = h_n(a)$ непрерывна и взаимно однозначна на F, а ее образ в точности совпадает с объединием $\bigcup_n X_n$.

(iv) Понятно, что график непрерывной функции, определенной на замкнутом множестве, — замкнутое множество, а значит функ-

[8] Эта теорема утверждает, что из наличия инъективных отображений $f : A \to B$ и $g : B \to A$ следует существование биекции $\beta : A \xrightarrow{\text{на}} B$, см., например, теорему 4 в книге [4].

ция h борелевская. Поэтому она В-измерима в обе стороны согласно теореме 2.4.3, следовательно, является борелевским изоморфизмом.

(v) Это утверждение выводится из утверждений (iii) и (iv) в точности так же, как и утверждение (ii) из (i). □

Приведем одно важное следствие этой теоремы.

Следствие 2.6.3. *Если A — борелевское множество в польском пространстве $\mathbb{X}$ с топологией τ, то существует такая польская топология τ_A на $\mathbb{X}$, что*

1) *τ_A содержит исходную польскую топологию τ на $\mathbb{X}$;*
2) *τ_A порождает те же борелевские множества, что и τ;*
3) *множество A открыто-замкнуто в τ_A.*

В частности, та топология $\tau \upharpoonright A$ (не обязательно польская), которую борелевское множество A наследует из польской топологии τ объемлющего пространства $\mathbb{X}$, может быть усилена до польской топологии на множестве A, причем так, что эта более сильная топология не производит новых борелевских множеств в A.

Доказательство. Нам достаточно определить польскую топологию T на A, которая содержит $\tau \upharpoonright A$ и порождает те же борелевские множества в A, что и $\tau \upharpoonright A$, и обладающую такими же свойствами польскую топологию T' на дополнительном множестве $A' = \mathbb{X} \smallsetminus A$. Если это выполнено, то в роли τ_A можно просто взять прямую сумму этих двух топологий, т. е. множество $X \subseteq \mathbb{X}$ открыто в τ_A, если $X \cap A$ открыто в T, а $X \smallsetminus A$ открыто в T'.

Для построения T заметим, что по теореме 2.6.2 (iii) существуют замкнутое множество $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и борелевский изоморфизм $h\colon F \xrightarrow{\text{на}} A$, который к тому же является непрерывной функцией. Отнесем к T все те множества $Y \subseteq A$, прообраз которых $h^{-1}[Y]$ открыт в F в смысле топологии подпространства.

Понятно, что топология T — это просто копия польской (мы ссылаемся на упражнение 1.1.1) топологии множества F, и, следовательно, она сама является польской. Более того, по определению T содержит все множества $Y \subseteq A$, открытые в смысле $\tau \upharpoonright A$, поскольку отображение h непрерывно. Наконец, T производит те же самые борелевские множества, что и исходная польская топология $\tau \upharpoonright A$, поскольку h является борелевским изоморфизмом. □

Легко видеть, что любой борелевский изоморфизм $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ индуцирует $\subseteq$-изоморфизм $X' \mapsto f[X']$ алгебры $\mathbf{Bor}(X)$ всех борелевских множеств $X' \subseteq X$ на $\mathbf{Bor}(Y)$.

Определение 2.6.4. *Стандартным борелевским пространством* называется несчетное польское пространство $\mathbb{X}$ вместе с ассоциированной борелевской структурой $\mathbf{Bor}(\mathbb{X})$.

Из теоремы 2.6.2 следует, что это понятие не зависит от выбора $\mathbb{X}$ в категории несчетных польских пространств и даже, согласно следствию 2.6.3, в категории несчетных борелевских множеств в польских пространствах.

§ 2.7 Теорема иерархии и универсальные множества

Здесь мы даем доказательство главного утверждения теоремы 2.2.5: *если $\mathbb{X}$ — несчетное польское пространство, то $\mathbf{\Sigma}^0_\xi[\mathbb{X}] \not\subseteq \mathbf{\Pi}^0_\xi[\mathbb{X}]$ для каждого ординала ξ, $1 \le \xi < \omega_1$.*

Доказательство. Убедимся первым делом, что теорема 2.6.2 (ii) сводит задачу к случаю бэровского пространства $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. В самом деле, рассмотрим какой-либо борелевский изоморфизм $f\colon \mathbb{N}^\mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{X}$. Зафиксируем счетную базу $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ топологии $\mathbb{X}$. Множества $U_n = f^{-1}[G_n]$ все борелевские в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, так что найдется такой ординал $\zeta < \omega_1$, что класс $\mathbf{\Sigma}^0_\zeta[\mathbb{N}^\mathbb{N}]$ содержит все множества U_n. Тогда, очевидно, все f-прообразы открытых множеств $G \subseteq \mathbb{X}$ будут $\mathbf{\Sigma}^0_\zeta$-множествами в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Отсюда индукцией по ξ получаем, что если $1 \le \xi < \omega_1$, то все f-прообразы множеств из $\mathbf{\Sigma}^0_\xi[\mathbb{X}]$ являются $\mathbf{\Sigma}^0_{\zeta+\xi}$-множествами в пространстве $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

Теперь допустим, что теорема неверна для $\mathbb{X}$, т. е. для какого-то ординала ξ, $1 \le \xi < \omega_1$, выполнено включение $\mathbf{\Sigma}^0_\xi[\mathbb{X}] \subseteq \mathbf{\Pi}^0_\xi[\mathbb{X}]$, а тогда с очевидностью и равенство $\mathbf{\Sigma}^0_\xi[\mathbb{X}] = \mathbf{\Pi}^0_\xi[\mathbb{X}] = \mathbf{Bor}(\mathbb{X})$. Возьмем произвольное борелевское множество $B \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Тогда $X = f[B]$ — борелевское множество в $\mathbb{X}$, т. е. по предположению X — множество из $\mathbf{\Sigma}^0_\xi[\mathbb{X}]$. Это значит, что само $B = f^{-1}[X]$ есть $\mathbf{\Sigma}^0_{\zeta+\xi}$-множество в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Другими словами, $\mathbf{\Sigma}^0_{\zeta+\xi}[\mathbb{N}^\mathbb{N}] = \mathbf{Bor}(\mathbb{N}^\mathbb{N})$, так что теорема 2.2.5 не выполняется и для бэровского пространства $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

Итак, осталось доказать, что $\mathbf{\Sigma}^0_\xi[\mathbb{N}^\mathbb{N}] \not\subseteq \mathbf{\Pi}^0_\xi[\mathbb{N}^\mathbb{N}]$ для каждого ξ.

Доказательство основано на использовании универсальных множеств. Пусть $\mathbf{\Gamma}$ — какой-то класс точечных множеств. Тогда множество $U \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ называется *универсальным для* $\mathbf{\Gamma}$, если для всякого $\mathbf{\Gamma}$-множества $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ найдется точка $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, для которой X совпадает с *сечением*

$$(U)_a = \{b \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \langle a, b\rangle \in U\}\,.$$

Мы утверждаем, что для любого борелевского класса $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Sigma}^0_\xi$ или $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ найдется $\mathbf{\Gamma}$-множество $U \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$, универсальное для $\mathbf{\Gamma}$. Это доказывается трансфинитной индукцией по ξ начиная с класса $\mathbf{\Sigma}^0_1$ открытых множеств.

Занумеровав множество $\mathbb{N}^{<\omega} = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ всех кортежей из натуральных чисел, мы получаем универсальное открытое множество

$$U = \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N} : \exists\, n\,(a(n) = 0 \wedge s_n \subset b)\}\,.$$

Далее, дополнение универсального $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-множества с очевидностью становится универсальным $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множеством.

Остается получить универсальное $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-множество $U \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ ($\xi \geq 2$) в предположении, что для каждого ординала $\eta < \xi$ уже имеется универсальное $\mathbf{\Pi}^0_\eta$-множество $U(\eta) \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Для этого занумеруем множество ординалов $\{\eta : 1 \leq \eta < \xi\} = \{\eta_n : n \in \mathbb{N}\}$ так, чтобы каждый ординал имел бесконечно много номеров. Рассмотрим множество

$$U = \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N} : \exists\, n\,(\langle (a)_n, b)\rangle \in U(\eta_n))\} = \textstyle\bigcup_n W_n\,,$$

где $W_n = \{\langle a, b\rangle : \langle (a)_n, b)\rangle \in U(\eta_n)\}$. (Напомним, что $(a)_n \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ определено в упражнении 1.3.2.) Каждое из множеств W_n принадлежит $\mathbf{\Pi}^0_{\eta_n}$ по лемме 2.2.1 как непрерывный прообраз множества $U(\beta_n)$ этого класса в смысле отображения $\langle a, b\rangle \mapsto \langle (a)_n, b\rangle$. Следовательно, U есть $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-множество.

Для проверки универсальности множества U рассмотрим любое $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$. По определению имеем $X = \bigcup_n X_n$, где каждое множество X_n принадлежит $\mathbf{\Pi}^0_{\eta_n}$. Стало быть, найдутся такие точки $a_n \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, что $X_n = (U(\eta_n))_{a_n}$ для всех n. Теперь берем то единственное $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, для которого $a_n = (a)_n$, $\forall\, n$. Легко видеть, что $X = (U)_a$.

Итак, каждый класс $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ в самом деле допустает универсальное $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-множество $U \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Утверждается, что такое множество U не принадлежит $\mathbf{\Pi}^0_\xi$, что, очевидно, и приводит к искомому результату. Для доказательства предположим противное: U есть $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множество. Тогда $X = \{a : \langle a, a\rangle \notin U\}$ является $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-множеством как непрерывный прообраз дополнительного к U множества в смысле отображения $a \mapsto \langle a, a\rangle$. Следовательно, из-за универсальности найдется такое $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, что $X = (U)_a$. Тогда $\langle a, a\rangle \notin U \iff a \in X \iff \langle a, a\rangle \in U$, и мы приходим к противоречию.

$\square$ (теорема 2.2.5)

Глава 3

А-множества

Несмотря на всю важность борелевских множеств для математики, область интересов дескриптивной теории множеств много шире. В этой и двух последующих главах рассматривается более широкий класс А-множеств. Мы изложим классические доказательства нескольких теорем (не самых сложных) об этих множествах, просто чтобы дать представление о связанных с ними методах. В частности, в этой главе доказываются теоремы о представлении А-множеств при помощи проектирования и непрерывных образов, теорема Суслина о совершеном ядре и более сложная теорема Гуревича со следствием для суперсовершенных подмножеств. В конце главы вводятся С-множества и проективные множества.

Но систематическое изложение теории А-множеств и дополнительных СА-множеств будет дано в последующих главах, в том числе в гл. 4 и начиная с глав 6 и 7 на основе современной технической базы *эффективной* дескриптивной теории множеств.

§ 3.1 А-операция и А-множества

Операции счетного объединения и счетного пересечения, применяемые к открытым множествам данного пространства, по определению приводят к борелевским множествам. Если мы желаем получить *не*борелевские множества, то следует прибегнуть к операциям несчетного характера. Простейшей из таковых является А-операция, которая применяется всё еще к счетным семействам множеств, но включает одно несчетное действие.

Определение 3.1.1. Напомним, что через $\mathbb{N}^{<\omega}$ обозначается множество всех кортежей (конечных последовательностей) натуральных чисел, а *суслинской системой* на пространстве (или вообще произвольном множестве) $\mathbb{X}$ называется любое индексированное семейство $\mathfrak{F} = \{X_s\}_{s\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ каких-то множеств $X_s \subseteq \mathbb{X}$. Результатом *А-операции*[1] над ним объявляется множество

$$\boldsymbol{A}[\mathfrak{F}] = A \cdot \{X_s\}_{s\in\mathbb{N}^{<\omega}} = \bigcup\nolimits_{a\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap\nolimits_{m\in\mathbb{N}} X_{a\restriction m} \,.$$

Внешнее объединение здесь берется над всеми бесконечными последовательностями a натуральных чисел, а что касается внутреннего пересечения, то $a \restriction m$ есть кортеж из m начальных членов бесконечной последовательности a.

Наконец, *А-множеством* в данном (обычно польском) пространстве называется любое множество, которое получается применением А-операции к какой-то суслинской системе замкнутых множеств этого пространства.[2]

Множества, дополнительные к А-множествам в данном пространстве, т. е. дополнения А-множеств, называются *СА-множествами*.

Рассматриваемые суслинские системы, вообще говоря, не предполагаются дизъюнктными, а потому множество $\bigcup_{a\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} X_{a\restriction m}$ в определении может и не совпадать с множеством $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in\mathbb{N}^m} X_s$.

§ 3.2 Простые свойства А-множеств

Прежде всего заметим, что *регулярных* систем достаточно для образования всех А-множеств!

[1] Введена в математику П. С. Александровым, возможно, не без участия М. Я. Суслина и Н. Н. Лузина. О некоторых исторических аспектах в связи с открытием А-операции и А-множеств см. в работах [28, 73, 65].

[2] А-множества также называются *суслинскими множествами*, по имени открывшего класс этих множеств М. Я. Суслина, см. [113]. Они же называются *аналитическими множествами* и $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-*множествами*, см. ниже. Соответственно СА-множества называются *косуслинскими*, *аналитическими дополнениями* и $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-*множествами*.

Замечание 3.2.1. Для того чтобы суслинская система множеств замкнутых непустых множеств F_s польского пространства $\mathbb{X}$ была регулярной в смысле § 1.5, необходимо и достаточно, чтобы она была монотонной и измельчающейся. В этих предположениях система будет и неисчезающей по очевидным соображениям.

Лемма 3.2.2. *Каждое A-множество X польского пространства $\mathbb{X}$ допускает представление $X = \boldsymbol{A}[\mathfrak{F}] = \bigcup_{a\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_{a\restriction m}$, где $\mathfrak{F} = \{F_s\}_{s\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ — некоторая регулярная система замкнутых непустых подмножеств пространства $\mathbb{X}$.*

Доказательство (набросок). Можно считать, что диаметр пространства $\mathbb{X}$ не превосходит 1 (см. упражнение 1.1.2). Начнем с произвольной суслинской системы замкнутых множеств X_s, A-операция над которыми дает X. Чтобы превратить ее в измельчающуюся систему, заметим, что вследствие сепарабельности каждому $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ можно сопоставить открытое множество $U_t \subseteq \mathbb{X}$ диаметра $\le 2^{-\mathtt{lh}\, t}$ так, что $U_\Lambda = \mathbb{X}$ и $U_t = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_{t^\wedge k}$ для всех t. Положим $Y_s^t = Y_s \cap \overline{U_t}$ для всех пар из $s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющих условию $\mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, t$. Тогда все множества Y_s^t замкнуты и

$$X = \bigcup_{a,b\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\bigcap_m Y_{a\restriction m}^{b\restriction m}\,.$$

Далее, если $s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $\mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, t = n$, то определим последовательность $w = p(s,t) \in \mathbb{N}^{<\omega}$ той же длины n соотношением $w(k) = 2^{s(k)} \cdot 3^{t(k)}$ для всех $k < n$, и положим $Z_w = Y_s^t$. Если же кортеж $w \in \mathbb{N}^{<\omega}$ не имеет вида $p(s,t)$, то просто положим $Z_w = \varnothing$. Мы получили измельчающуюся систему замкнутых множеств Z_w, $w \in \mathbb{N}^{<\omega}$, и при этом всё еще выполняется равенство $X = \bigcup_{a\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\bigcap_m Z_{a\restriction m}$.

Чтобы обеспечить монотонность, положим $Z'_s = \bigcap_{m\le\mathtt{lh}\, s} Z_{s\restriction m}$.

Свойство неисчезаемости также требует некоторой работы. Возможно, что некоторые множества Z'_s (как, впрочем, и исходные множества X_s) пусты. Вообще, множество $T = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : Z'_s \cap X \ne \varnothing\}$ является деревом в $\mathbb{N}^{<\omega}$ без концевых вершин. Для $s \in T$ положим $W_s = Z'_s$, но $W_s = \varnothing$ для $s \notin T$. Тогда система множеств W_s неисчезающая и регулярная в области T, и всё еще выполняется равенство $X = \bigcup_{a\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\bigcap_m W_{a\restriction m} = \bigcup_{a\in[T]}\bigcap_m W_{a\restriction m}$.

Последний этап состоит в том, что мы используем произвольную биекцию $h\colon \mathbb{N}^{<\omega} \xrightarrow{\text{на}} T$, сохраняющую отношение $\subset$ (т. е. $s \subset t \Longrightarrow h(s) \subset h(t)$), сохраняющую $\mathtt{lh}$ (т. е. $\mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, h(s)$) и удовлетворяющую условию $h(t) = t$ для $t \in T$. Положим $F_s = W_{h(s)}$ для всех $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Множества F_s образуют регулярную систему замкнутых множеств, применяя к которым A-операцию, мы получаем X. $\square$

Наше изложение теории А-множеств начинается со следующего результата, весьма полезного и для доказательства ряда других утверждений, которые будут приведены ниже.

Лемма 3.2.3 (Суслин, [113]). *Множество $A \neq \varnothing$ польского пространства X является А-множеством, если и только если X есть непрерывный образ бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Значит, непрерывные образы А-множеств в польских пространствах являются А-множествами.*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_m F_{a \restriction m}$, где суслинская система замкнутых множеств $F_s \subseteq \mathbb{X}$ регулярна. Тогда ассоциированная функция $f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} A$ непрерывна по лемме 1.5.2.

Обратно, если $A = f[\mathbb{N}^{\mathbb{N}}]$, где функция $f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{X}$ непрерывна, то положим $X_s = \{f(a) : s \subset a\}$ для любого $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, и пусть F_s — топологическое замыкание X_s в $\mathbb{X}$. Утверждается, что $A = \bigcup_{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_m F_{a \restriction m}$. Достаточно проверить, что для любого $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, значение $f(a)$ есть единственный элемент пересечения $\bigcap_m F_{a \restriction m}$. Пусть, напротив, $f(a) \neq x \in \bigcap_m F_{a \restriction m}$. Тогда для любого m найдется такая точка $a_m \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $a_m \restriction m = a \restriction m$ и $d_{\mathbb{X}}(x, f(a_m)) \leq \frac{1}{m}$. Итак, $a_m \to a$, а с другой стороны, $f(a_m) \to x \neq f(a)$, и мы получаем противоречие с непрерывностью. $\square$

Обобщения и родственные результаты см. ниже в § 3.3.

Следствие 3.2.4. *Класс всех А-множеств любого польского пространства $\mathbb{X}$ замкнут относительно счетного объединения и счетного пересечения. Значит, все борелевские множества в $\mathbb{X}$ являются А-множествами.*

Доказательство. Докажем, что если $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ являются А-множествами, то к этому классу относятся и множества $U = \bigcup_k X_k$ и $P = \bigcap_k X_k$. Согласно лемме 3.2.3 для всякого n найдется непрерывная функция $f_n\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} X_n$. Для $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ положим $f(a) = f_{a(0)}(a^-)$, где $a^-(k) = a(k+1)$ для всех k. Легко видеть, что функция f непрерывна и $U = f[\mathbb{N}^{\mathbb{N}}]$.

Далее, множество X всех последовательностей $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ из точек $a_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которых выполнено равенство $f_0(a_0) = f_1(a_1) = f_2(a_2) = \ldots$, очевидно, замкнуто в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, а функция h, определенная на X условием $h(\mathbf{a}) = f_0(a_0)$, непрерывна и удовлетворяет соотношению $P = h[X]$. Остается заметить, что само множество X есть непрерывный образ пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в соответствии с упражнениями 1.3.2 и 1.3.4 (2). $\square$

Мы увидим ниже, что обратное не имеет места, т. е. в несчетных польских пространствах имеются неборелевские А-множества.

Упражнение 3.2.5. Докажите следствие 3.2.4 непосредственно из определения через А-операцию.

Упражнение 3.2.6. Докажите, используя следствие 3.2.4, что если B — борелевское множество польского пространства и $A \subseteq B$, то A является А-множеством, если и только если разность $X = B \smallsetminus A$ есть СА-множество.

§ 3.3 А-множества как образы и проекции

Возвращаясь к лемме 3.2.3, отметим, что А-множество X в польском пространстве $\mathbb{X}$ может и не быть непрерывным образом самого пространства $\mathbb{X}$. Например, непрерывные образы канторова дисконтинуума $2^{\mathbb{N}}$ и его замкнутых подмножеств — компактные множества, в то время как среди даже борелевских множеств $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, очевидно, имеются некомпактные. Однако имеет место следующий результат.

Следствие 3.3.1. *Если $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — несчетные польские пространства, то любое А-множество $X \subseteq \mathbb{X}$ является непрерывным образом некоторого $\mathbf{G}_\delta$-множества $G \subseteq \mathbb{Y}$.*

Доказательство. Согласно доказанному ниже следствию 3.5.1 в $\mathbb{Y}$ имеется $\mathbf{G}_\delta$-множество, гомеоморфное $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Теперь результат следует из леммы 3.2.3. □

Используем лемму 3.2.3 и следствие 3.3.1 для вывода следующей теоремы, предоставляющей разные методы построения А-множеств в польских пространствах. Напомним, что *проекцией* множества $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ в произведении двух пространств называется множество

$$\mathtt{pr}\, P = \mathtt{dom}\, P = \{x \in \mathbb{X} : \exists\, y \in \mathbb{Y}\, (\langle x, y\rangle \in P)\}\,.$$

Понятно, что проектирование является непрерывным отображением.

Теорема 3.3.2. *Следующие классы множеств тождественны классу всех А-множеств в любом польском пространстве $\mathbb{X}$:*

(i) *непрерывные образы (в пространстве $\mathbb{X}$) бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ плюс пустое множество $\varnothing$;*

(ii) *если $\mathbb{Y}$ — несчетное польское пространство, то непрерывные образы в $\mathbb{X}$ всевозможных $\mathbf{G}_\delta$-множеств в $\mathbb{Y}$;*

(iii) *если* $\mathbb{Y}$ — *несчетное польское пространство, то образы в* $\mathbb{X}$ *всех A-множеств в* $\mathbb{Y}$ *при борелевских отображениях* $\mathbb{Y} \to \mathbb{X}$; *другими словами, класс A-множеств замкнут относительно не только непрерывных (по лемме 3.2.3) но и борелевских отображений*;

(iv) *проекции на* $\mathbb{X}$ *замкнутых множеств в* $\mathbb{X} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;

(v) *если* $\mathbb{Y}$ — *несчетное польское пространство, то проекции на* $\mathbb{X}$ *всех* $\mathbf{G}_\delta$*-множеств в* $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Доказательство. Для классов из (i) и (ii) результат уже получен. Для доказательства в отношении (iii) рассмотрим борелевское отображение $h\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ и A-множество $Y \subseteq \mathbb{Y}$. Тогда образ $X = h[Y]$ удовлетворяет соотношению

$$x \in X \iff \exists\, y\, (y \in Y \wedge \langle y, x\rangle \in \Gamma_h)\,,$$

т. е. является непрерывным образом множества $P = (Y \times \mathbb{X}) \cap \Gamma_h$. Но Γ_h — борелевское множество, т. е. A-множество, и таково же $Y \times \mathbb{X}$ по выбору Y. Значит, и P является A-множеством. Используем лемму 3.2.3.

Для доказательства (iv) достаточно заметить, что если, в соответствии с (i) множество $X \subseteq \mathbb{X}$ является образом пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ при непрерывном отображении $f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{X}$, то X — проекция замкнутого множества $P = \{\langle x, a\rangle : x = f(a)\}$, а в обратную сторону просто ссылаемся на (iii). Доказательство для (v) аналогично, только вместо (i) в качестве исходного пункта используется (ii). □

Следствие 3.3.3. *Класс A-множеств замкнут относительно непрерывных и даже борелевских прообразов*: *если* X, Y — *борелевские множества в польских пространствах, а* $h\colon X \to Y$ — *борелевское отображение, то прообраз* $A = h^{-1}[B]$ *A-множества* $B \subseteq Y$ *есть A-множество.*

Следовательно, класс A-множеств инвариантен и относительно борелевских изоморфизмов: *если* X, Y — *борелевские множества в польских пространствах, а* $h\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ — *борелевский изоморфизм, то* $A \subseteq X$ *есть A-множество, если и только если образ* $B = h[A]$ *есть A-множество.*

То же верно для CA-множеств.

Доказательство. По условию график $\Gamma_h = \{\langle x, y\rangle \in X \times Y : f(x) = y\}$ отображения h является борелевским множеством в $X \times Y$. Далее,

$$x \in A \iff \exists\, y\, (\langle x, y\rangle \in \Gamma_h \wedge y \in B)\,,$$

так что A есть проекция борелевского множества $\Gamma_h \cap (X \times B)$. Остается применить теорему 3.3.2 (iii).

Переход к А-множествам происходит при помощи результата упражнения 3.2.6. □

В качестве еще одного приложения теоремы 3.3.2 покажем, что обращение второго результата следствия 3.2.4 (о том, что все борелевские множества являются А-множествами) неверно.

Предложение 3.3.4. *В любом несчетном польском пространстве $\mathbb{X}$ имеется А-множество, не являющееся борелевским.*

Доказательство. Пространство $\mathbb{X}$ борелевски изоморфно бэровскому пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ по теореме 2.6.2, а с другой стороны, борелевские изоморфизмы сохраняют свойство «быть А-множеством» согласно следствию 3.3.3. Поэтому результат достаточно доказать для множеств бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Далее, по тем же причинам, что и в доказательстве теоремы 2.2.5 в § 2.7, достаточно вывести существование *универсального А-множества*, т. е. такого А-множества $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что каждое А-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ совпадает с подходящим его сечением $(P)_a = \{b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \langle a, b\rangle \in P\}$, $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Построение множества P начнем с универсального замкнутого множества $U \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, существующего согласно результатам § 2.7. Пусть h — произвольный гомеоморфизм $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда множество

$$W = \{\langle a, b, c\rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^3 : \langle a, h(b, c)\rangle \in U\}$$

замкнуто в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^3$ (из-за непрерывности отображения h) и по выбору U оно универсально в том смысле, что каждое замкнутое множество $F \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ совпадает с подходящим его сечением $(W)_a = \{\langle b, c\rangle : \langle a, b, c\rangle \in W\}$, $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Проекция W как подмножества пространства $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2 \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$, т. е. множество $P = \{\langle a, b\rangle : \exists c\, (\langle a, b, c\rangle \in W)\}$, является А-множеством по теореме 3.3.2 (iv) (при $\mathbb{X} = (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$), а его искомая универсальность легко выводится из универсальности множества W при помощи того же утверждения 3.3.2 (iv) в обратную сторону (при $\mathbb{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$), поскольку сечения множества P являются проекциями сечений множества W. □

Ниже будет указано совершенно конкретное и математически значимое неборелевское А-множество: множество **IFT** всех нефундированных деревьев, см. § 4.3 и упражнение 4.4.3.

§ 3.4 Теорема о совершенном ядре

Следующая ключевая теорема классической дескриптивной теории множеств была установлена, как считается, М. Я. Суслиным (об этом сказано, например, в статье [80]), хотя в единственной заметке самого Суслина [113] на эту тему этой теоремы нет.

Теорема 3.4.1. *Всякое А-множество X польского пространства $\mathbb{X}$, в частности любое борелевское множество, либо не более чем счетно, либо содержит подмножество C, гомеоморфное канторову дисконтинууму $2^{\mathbb{N}}$. Любое такое множество C компактно и, следовательно, замкнуто в $\mathbb{X}$.*

Доказательство. Мы получаем $X = \bigcup_{a\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_{a\restriction m}$ согласно лемме 3.2.2, где $\{F_s\}_{s\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ — регулярная суслинская система замкнутых множеств $F_s \subseteq \mathbb{X}$. Положим $X(s) = \bigcup_{s\subset a\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_{a\restriction m}$ для $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Множество S всех таких s, что $X(s)$ несчетно, является деревом в $\mathbb{N}^{<\omega}$ по регулярности, причем $\Lambda \in S$, поскольку само $X = X(\Lambda)$ несчетно. При этом S не имеет концевых вершин, и, более того, нетрудно убедиться, взяв какие-нибудь $x \neq y$ в $X(s)$, что если $s \in S$, то найдутся такие $\subseteq$-несравнимые $s', s'' \in S$, что $s \subset s'$, $s \subset s''$ и $F_{s'} \cap F_{s''} = \varnothing$. Это позволяет сопоставить каждому двоичному кортежу $\sigma \in 2^{<\omega}$ некоторый кортеж $s_\sigma \in S$ так, что $s_\Lambda = \Lambda$, $s_\sigma \subset s_{\sigma^\wedge i}$ для $i = 0, 1$, $s_{\sigma^\wedge 0}$ и $s_{\sigma^\wedge 1}$ $\subseteq$-несравнимы и $F_{s_{\sigma^\wedge 0}} \cap F_{s_{\sigma^\wedge 1}} = \varnothing$ для всех $\sigma \in 2^{<\omega}$.

Если теперь $a \in 2^{\mathbb{N}}$, то пересечение $\bigcap_m F_{s_{a\restriction m}}$ содержит единственную точку, которую мы обозначим через $f(a)$, и она принадлежит множеству X. Легко видеть, что отображение $f\colon 2^{\mathbb{N}} \to X$ непрерывно и взаимно однозначно, а потому его образ $C = f[2^{\mathbb{N}}]$ является искомым множеством. □

Следствие 3.4.2. *Любое несчетное А-множество, в частности любое несчетное борелевское множество, польского пространства имеет мощность ровно континуум $\mathfrak{c}$.*

Доказательство. Из леммы 3.2.2 следует, что любое А-множество X польского пространства имеет мощность не выше мощности бэровского пространства, т. е. $\mathfrak{c}$, просто в силу того, что вследствие регулярности системы множеств F_s любое пересечение вида $\bigcap_m F_{a\restriction m}$ содержит не более одной точки. С другой стороны, если X несчетно, то его мощность и не ниже мощности множества $2^{\mathbb{N}}$ по теореме 3.4.1, т. е. опять-таки $\mathfrak{c}$. □

Этот результат иногда трактуется как *доказательство континуум-гипотезы для А-множеств*. Аналогичная теорема для более узкого семейства борелевских множеств принадлежит П. С. Александрову (см. [36]) и Ф. Хаусдорфу (см. [55]).

§ 3.5 Суперсовершенные подмножества

Следуя изложению в § 1.6, остановимся на вопросе о том, когда A-множество X польского пространства $\mathbb{X}$ содержит подмножество $Y \subseteq X$, гомеоморфное не канторову дисконтинууму $2^{\mathbb{N}}$, а бэровскому пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. В первом приближении дается простой ответ.

Следствие 3.5.1. *Любое несчетное A-множество X польского пространства $\mathbb{X}$ содержит подмножество $Y \subseteq X$, гомеоморфное бэровскому пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а потому принадлежащее классу $\mathbf{G}_\delta$ в $\mathbb{X}$ по теореме 1.1.3.*

Доказательство. Используем теорему 3.4.1 и результат упражнения 1.3.5 (1). □

Если же мы хотим получить *замкнутое* подмножество $Y \subseteq X$, гомеоморфное $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, — такое множество называется *суперсовершенным*, если оно еще и замкнуто, — то в первую очередь здесь следует отличить требование замкнутости в X (в топологии подпространства) от более сильного требования замкнутости в объемлющем пространстве $\mathbb{X}$. Для множеств, гомеоморфных $2^{\mathbb{N}}$, такого различия, конечно, нет вследствие компактности.

Для первого варианта, следующая теорема дает подходящий критерий.

Теорема 3.5.2 (Гуревич, [61]). *Пусть $\mathbb{X}$ — польское пространство, и $A \subseteq \mathbb{X}$ есть A-множество, не принадлежащее классу $\mathbf{F}_\sigma$. Тогда найдется такое совершенное множество $D \subseteq \mathbb{X}$, что $D \smallsetminus A$ счетно и плотно в D, а $D \cap A$ гомеоморфно $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Условие, что A не принадлежит классу $\mathbf{F}_\sigma$, здесь необходимо. В самом деле, если A есть множество $\mathbf{F}_\sigma$, то дополнительное множество $C = \mathbb{X} \smallsetminus A$ есть соответственно $\mathbf{G}_\delta$, а потому C можно метризовать полной метрикой (с сохранением топологии) по теореме 1.1.3. Однако счетное множество $Y = D \smallsetminus A = D \cap C$ замкнуто в топологии C и совершенно, так как оно плотно в D. Но в полных пространствах счетных совершенных множеств быть не может согласно следствию 1.2.3 (v). Отметим еще, что согласно Кехрису (см. [68, теорема 21.18]) теорема 3.5.2 может быть усилена требованием: само D гомеоморфно канторову дисконтинууму $2^{\mathbb{N}}$. Отсюда согласно упражнению 1.3.5 (2) следует, что $D \cap A$ гомеоморфно $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Но доказательство в книге [68] включает такие топологические детали, которые выходят за рамки нашего изложения.

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_m F_{a \restriction m}$, где все множества F_s замкнуты и образуют регулярную суслинскую систему. Если $s \in$

$\mathbb{N}^{<\omega}$, то положим $A_s = \bigcup_{s\subset a\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_m F_{a\restriction m}$. Эти множества также, очевидно, являются А-множествами, причем $A_s \subseteq F_s$ и $A_s = \bigcup_n A_{s^\wedge n}$. При этом $A_\Lambda = A$.

Мы построим точки $y_s \in C = \mathbb{X} \smallsetminus A$ $(s \in \mathbb{N}^{<\omega})$, их (открытые) окрестности U_s, и функцию $\varphi\colon \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}^{<\omega}$, не обязательно взаимно однозначную и «на», но сохраняющую отношение $\subset$ (т. е. $s \subset t \Longrightarrow \varphi(s) \subset \varphi(t)$) и длину $\mathtt{lh}$ (т. е. $\mathtt{lh}\,\varphi(s) = \mathtt{lh}\,s$), так, что будут выполнены следующие условия для всех $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$:

(А) какова бы ни была окрестность U точки y_s (в частности, окрестность U_s), множество $A_{\varphi(s)} \cap U$ не является $\mathbf{F}_\sigma$-отделимым от C — другими словами, нет такого $\mathbf{F}_\sigma$-множества Y, что $A_{\varphi(s)} \cap U \subseteq Y$, но $Y \cap B = \varnothing$;

(Б) y_s — предельная точка множества $A_{\varphi(s)}$, т. е. в любой ее окрестности содержится бесконечно много точек этого множества;

(В) расстояние между y_s и $y_{s^\wedge n}$ не превосходит $2^{-\Sigma(s)-\mathtt{lh}\,s-n}$, где $\Sigma(s)$ есть сумма всех членов s (в частности, $\Sigma(\Lambda) = 0$); отсюда следует $y_s = \mathtt{lim}_{n\to\infty}\, y_{s^\wedge n}$;

(Г) если $n \in \mathbb{N}$, то $y_s \neq y_{s^\wedge n}$, $\overline{U_{s^\wedge n}} \subseteq U_s$, диаметр множества $U_{s^\wedge n}$ меньше половины диаметра U_s и $\overline{U_{s^\wedge n}} \cap \overline{U_{s^\wedge n'}} = \varnothing$ при $n' \neq n$.

Как обычно, $\overline{X}$ — топологическое замыкание множества X.

Построение происходит следующим образом.

Шаг 0. Найдется такая точка $y_\Lambda \in C$, что, какова бы ни была ее окрестность U, множество $A \cap U$ не является $\mathbf{F}_\sigma$-отделимым от C. (Иначе C было бы покрыто счетным объединением «рациональных» окрестностей, на каждой из которых $A = A_\Lambda$ является $\mathbf{F}_\sigma$-отделимым от C, откуда следовала бы общая $\mathbf{F}_\sigma$-отделимость A от $C = \mathbb{X} \smallsetminus A$, т. е. само A было бы множеством $\mathbf{F}_\sigma$, противоречие.) В роли U_Λ берем любую окрестность точки y_Λ. Полагаем $\varphi(\Lambda) = \Lambda$. Условие (Б) выполнено, поскольку если некоторая окрестность U точки y_Λ не содержит точек A, то получается противоречие с неотделимостью.

Индуктивный шаг. Предположим, что $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и точка $y_s \in C$ с окрестностью U_s уже построены и удовлетворяют условию (А), и значение $\varphi(s) \in \mathbb{N}^{<\omega}$ определено и удовлетворяет равенству $\mathtt{lh}\,\varphi(s) = \mathtt{lh}\,s$. Для любого n пусть W_n — любая окрестность точки y_s диаметра меньше $2^{-\Sigma(s)-1-n}$ удовлетворяющая условию $W_n \subseteq U_s$. Тогда $A_s \cap W_n$ не является $\mathbf{F}_\sigma$-отделимым от C согласно предположению (А). Но $A_s = \bigcup_m A_{s^\wedge m}$. Поэтому найдется такое число m_n, что даже множество $A_{s^\wedge m_n} \cap W_n$ не является $\mathbf{F}_\sigma$-отделимым от $C \cap W_n$, а тогда и от $(C \cap W_n) \smallsetminus \{y_s\}$. Полагаем $\varphi(s^\wedge n) = \varphi(s)^\wedge m_n$. Как и для шага 0, найдется такая точка $y_{s^\wedge n} \in C \cap W_n$, $y_{s^\wedge n} \neq y_s$, что, какова бы ни была ее открытая окрестность U, множество $A_{s^\wedge n} \cap U$ не является $\mathbf{F}_\sigma$-отделимым от C.

Условие (Б) выполнено по той же причине, что и для шага 0.

Далее, по построению $\mathtt{lim}_{n\to\infty} y_{s^\wedge n} = y_s$. При этом можно считать, что $y_{s^\wedge n} \neq y_{s^\wedge n'}$ при $n \neq n'$, ибо если это не так, то мы можем выбрать подходящую бесконечную подпоследовательность. Это позволяет выбрать окрестности $U_{s^\wedge n} \subseteq W_n$ точек $y_{s^\wedge n}$ так, чтобы они удовлетворяли условию (Г). Остальные условия выполнены по построению.

Понятно, что такое построение позволяет получить искомую систему точек y_s и $\subset$-гомоморфизм φ. Из условий (В) и (Г) следует, что счетное множество $Y = \{y_s : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\} \subseteq C$ не имеет изолированных точек. Таково же и его топологическое замыкание $D = \overline{Y}$ в пространстве $\mathbb{X}$. Докажем, что $D \smallsetminus Y \subseteq A$; другими словами, *любая предельная точка y множества Y либо сама принадлежит Y, либо принадлежит множеству A.*

Докажем это утверждение. Пусть $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — та последовательность попарно различных $s_k \in \mathbb{N}^{<\omega}$, для которой $y = \mathtt{lim}_{k\to\infty} y_{s_k}$. И здесь возможны два случая, в зависимости от характера дерева $T = \{s_k \restriction m : k \in \mathbb{N} \wedge m < \mathtt{lh}\, s_k\}$.

Случай 1: T — дерево с конечными ветвлениями. Тогда по лемме Кёнига T имеет бесконечную ветвь $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, т. е. $a \restriction k \in T$ для всех k. После перехода к подходящей бесконечной подпоследовательности, приходим к случаю, когда $a \restriction k \subseteq s_k$ для всех k. Теперь из условия (В) следует, что $y = \mathtt{lim}_{k\to\infty} y_{a\restriction k}$. Однако согласно условию (Б) мы имеем $y_{a\restriction k} \in A_{\varphi(a\restriction k)} \subseteq F_{\varphi(a\restriction k)}$. Далее, по выбору φ получаем $b = \bigcup_k \varphi(a \restriction k) \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и $b \restriction k = \varphi(a \restriction k)$ для всех k, так что $y_{a\restriction k} \in F_{b\restriction k}$, $\forall\, k$. Но все множества F_s замкнуты. Поэтому $y \in \bigcap_k F_{b\restriction k}$, откуда следует, что $y \in A$, что и требовалось.

Случай 2: T имеет хотя бы одно бесконечное ветвление. После перехода к подходящей подпоследовательности приходим к случаю, когда найдутся такое число m и такой кортеж $\sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}$ длины $\mathtt{lh}\,\sigma = m$, что $\mathtt{lh}\, s_k > m$ строго, $\sigma = s_k \restriction m$ для всех k и $s_k(m) \neq s_{k'}(m)$ для всех $k \neq k'$. Пусть $t_k = s_k \restriction (m+1)$. Согласно условию (В), мы получаем $\mathtt{lim}_{k\to\infty} y_{t_k} = \mathtt{lim}_{k\to\infty} y_{s_k} = y$, и в то же время $\mathtt{lim}_{k\to\infty} y_{t_k} = y_\sigma$. Значит, $y = y_\sigma \in Y$, что и требовалось.

Доказательство включения $D \smallsetminus Y \subseteq A$ закончено.

Остается понять почему множество $D \cap A = D \smallsetminus Y$ гомеоморфно пространству $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Если $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, то, как показано при рассмотрении случая 1 выше, последовательность точек $y_{a\restriction m}$, $m \in \mathbb{N}$, сходится, причем к точке $y \in A$. И конечно, $y \in D$ по определению множества D. Обозначим эту точку $y \in A \cap D$ через $f(a)$. Имеем $f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to A \cap D$.

Каждая точка $y \in D$ по определению является пределом некоторой последовательности точек y_s, $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. При этом если $y \in A$, то случай 2 не может иметь места (иначе мы имели бы $y = \mathtt{lim}_k\, y_{s_k} \in Y \subseteq C$), так что имеет место случай 1, при котором $y = f(a)$ для некоторого $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Таким образом, $f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} A \cap D$.

Докажем взаимную однозначность отображения f. Пусть $a \neq a' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Найдется такое m, что $a \restriction m = s \neq s' = a' \restriction m$. При этом из условия (Г) следует, что $y_{a\restriction n} \in U_s$ и $y_{a'\restriction n} \in U_{s'}$ при всех $n \geq m$ и в то же время $\overline{U_s} \cap \overline{U_{s'}} = \varnothing$. Значит, $f(a) = \mathtt{lim}_n\, y_{a\restriction n} \neq \mathtt{lim}_n\, y_{a'\restriction n} = f(a')$.

Наконец, докажем непрерывность отображения f в обе стороны. Рассуждение из доказательства взаимной однозначности показывает, что образ $\{f(a) : a \subset s\}$ бэровского интервала $[s] = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset a\}$ равен пересечению $(D \cap A) \cap U_s$, т. е. открыт в $D \cap A$. Обратно, пусть $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $f(a) \in U$, где множество $U \subseteq \mathbb{X}$ открыто. По построению $f(a)$ — единственная точка пересечения $\bigcap_m U_{a\restriction m}$ последовательности открытых множеств с диаметрами, стремящимися к 0. Поэтому $U_{a\restriction m} \subseteq U$ для некоторого m. Но тогда $f(a') \in U$ и для любой другой точки $a' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющей равенству $a' \restriction m = a \restriction m$. □

Следствие 3.5.3. *Пусть A является A-множеством в польском пространстве $\mathbb{X}$. Оно σ-компактно в том и только в том случае, когда нет множеств $Y \subseteq A$, гомеоморфных $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и замкнутых в A в топологии подпространства.*

Доказательство. В одну сторону доказательство просто: множество, гомеоморфное $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, не может быть σ-компактным. В другую сторону: если данное не σ-компактное множество A не является $\mathbf{F}_\sigma$-множеством, то сразу применим теорему 3.5.2. Если же $A = \bigcup_n F_n$ есть множество класса $\mathbf{F}_\sigma$ и все F_n замкнуты, то хотя бы одно из F_n является замкнутым не σ-компактным множеством, к которому можно применить теорему 1.6.5. □

Что касается второго варианта из упомянутых перед теоремой 3.5.2 (т. е. с подмножествами, замкнутыми в объемлющем пространстве), то имеет место следующая теорема Сан-Раймона (см. [103], а также теорему 21.23 в [68]).

Теорема 3.5.4. *Пусть $\mathbb{X}$ — польское пространство и $A \subseteq \mathbb{X}$ есть A-множество, которое нельзя накрыть σ-компактным множеством $Z \subseteq \mathbb{X}$. Тогда найдется замкнутое (в $\mathbb{X}$) множество $P \subseteq A$, гомеоморфное $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Условие ненакрываемости σ-компактным множеством здесь необходимо из тривиальных соображений: само $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не σ-компактно. Кехрис выводит теорему 3.5.4 из теоремы 3.5.2 при помощи некоторых топологических результатов, которые мы здесь не рассматриваем. Существует и прямое доказательство, соединяющее некоторые конструкции из доказательства теоремы 1.6.5 и теоремы 3.5.2 (но без построения точек y_s). Мы докажем теорему 3.5.4 в § 10.5 при помощи методов эффективной дескриптивной теории.

§ 3.6 С-множества

Как мы видели, А-множества можно получить из замкнутых множеств либо А-операцией, либо операцией непрерывного отображения, а СА-множества получаются как дополнения А-множеств к объемлющим польским пространствам. Предложенная Н. Н. Лузиным в середине 1920-х годов идея *чередования* этих операций приводит к классам С-множеств и проективных множеств, которые (особенно проективные множества) играют очень важную роль в развитии дескриптивной теории множеств.

С-множества в данном польском пространстве $\mathbb{X}$ образуют наименьший класс $\mathscr{C}$, содержащий все замкнутые множества и замкнутый относительно А-операции и операции дополнения. Понятно, что все А-множества и все СА-множества принадлежат к классу С-множеств. Но мы можем определить индукцией по $\xi < \omega_1$ последовательную цепочку классов $\mathscr{C}_\xi$ так, что $\mathscr{C}_0 = \{\text{А-множества}\}$, и для любого $\xi > 0$ класс $\mathscr{C}_\xi$ состоит из всех множеств, получаемых действием А-операции на семейства множеств, дополнительных к множествам из $\bigcup_{\eta<\xi} \mathscr{C}_\eta$. Легко видеть, что $\mathscr{C} = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathscr{C}_\xi$. Кроме того, в несчетных польских пространствах классы $\mathscr{C}_\xi$ строго возрастают с ростом ξ до ω_1 — доказательство этого факта опирается на существование универсальных множеств, как и в § 2.7, и в доказательстве предложения 3.3.4.

В настоящее время С-множества рассматриваются как весьма специальный раздел дескриптивной теории множеств, так что нет нужды подробно излагать их теорию в этой книге. Лучшее изложение на русском языке см. в книге [23, с. 64–72].

Следует отметить, что А-операция принадлежит большому семейству δs-операций, введеному Хаусдорфом. Предположим, что I — счетное множество, а B — некоторое семейство, состоящее из подмножеств множества I. Тогда δs-операция с базой B сопоставляет каждому семейству $\{X_i\}_{i\in I}$ множество $\bigcup_{u\in B} \bigcap_{i\in u} X_i$. Например, А-операция получается, когда при $I = \mathbb{N}^{<\omega}$ мы составляем B из всех множеств вида $\{a \restriction m : m \in \mathbb{N}\}$, $a \in \mathbb{N}^{<\omega}$ (т. е. цепей в $\mathbb{N}^{<\omega}$). Такие операции и связанные с ними множества (например, R-множества) были предметом исследований отечественных математиков, в частности А. Н. Колмогорова и А. А. Ляпунова, о чем см. в книге [23], а с позиций современной дескриптивной теории множеств — в обзоре [8].

§ 3.7 Проективные множества

Проективные множества в польских пространствах могут быть определены разными (эквивалентными) способами, например, как наименьший класс, содержащий все борелевские множества и замкнутый относительно непрерывных образов. Другой (но исторически первый) метод построения проективных множеств был основан на операции проекции для перехода от $\mathbf{\Pi}^1_n$ к $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. Его мы и примем за основу нашего изложения.

Проективная иерархия множеств в польских пространствах состоит из *проективных классов* $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$ точечных множеств, определяемых индукцией по n следующим образом:

$\mathbf{\Sigma}^1_1[\mathbb{X}]$ состоит из всех А-множеств данного пространства $\mathbb{X}$;

$\mathbf{\Pi}^1_n[\mathbb{X}]$ содержит все дополнения множеств из $\mathbf{\Sigma}^1_n[\mathbb{X}]$ к пространству $\mathbb{X}$;

$\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}[\mathbb{X}]$ (для $n > 0$) содержит все проекции на $\mathbb{X}$ множеств из $\mathbf{\Pi}^1_n[\mathbb{X} \times \mathbb{Y}]$ для всевозможных польских пространств $\mathbb{Y}$;

$\mathbf{\Delta}^1_n[\mathbb{X}]$ содержит все множества, которые принадлежат одновременно к классу $\mathbf{\Sigma}^1_n[\mathbb{X}]$ и к классу $\mathbf{\Pi}^1_n[\mathbb{X}]$.

Наконец, $\bigcup_n \mathbf{\Sigma}^1_n = \bigcup_n \mathbf{\Pi}^1_n$ — класс всех проективных множеств[3].

Как и для случая борелевской иерархии, буква $\mathbf{\Gamma}$ замещает любую из букв $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{\Delta}$ в обозначении проективных классов, а то польское пространство, множества которого рассматриваются, может быть явно включено в обозначения: $\mathbf{\Gamma}^1_n[\mathbb{X}]$ обозначает класс $\mathbf{\Gamma}^1_n$ для пространства $\mathbb{X}$. Обычно, однако, эта спецификация опускается, если это не приводит к недоразумениям.

Замечание 3.7.1. По определению для множеств польских пространств быть А-множеством и быть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством — это одно и то же. Соответственно, CA-множества — то же самое, что $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества. Отсюда по теореме Суслина 4.4.5 следует, что борелевские множества и $\mathbf{\Delta}^1_1$-множества — это одно и то же.

---

[3] Проективные множества введены Н. Н. Лузиным (см. [81]) как «проективные множества Лебега», однако ссылка на Лебега здесь не соответствует истории вопроса; об этом см. подробнее в статье [29, § 3.1].

Упражнение 3.7.2. Докажите, что каждый проективный класс $\mathbf{\Gamma}^1_n$ замкнут относительно борелевских прообразов и инвариантен относительно борелевских изоморфизмов в смысле следствия 3.3.3. Используйте индукцию по n и следствие 3.3.3 на начальном шаге.

Упражнение 3.7.3. Выведите из упражнения 3.7.2, что для получения всех $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$-множеств данного пространства $\mathbb{X}$ достаточно взять проекции множеств из $\mathbf{\Pi}^1_n[\mathbb{X} \times \mathbb{Y}]$ для любого, но фиксированного, несчетного польского пространства $\mathbb{Y}$, например $\mathbb{Y} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Замечание 3.7.4. Относительно определения $\mathbf{\Sigma}^1_1$. По теореме 3.3.2, если $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — польские пространства и $\mathbb{Y}$ несчетно, то $\mathbf{\Sigma}^1_1[\mathbb{X}]$ состоит из всех проекций на $\mathbb{X}$ множеств $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ класса $\mathbf{G}_\delta$, причем если $\mathbb{Y} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то можно ограничиться проекциями замкнутых множеств $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Поэтому, особенно в случае, когда речь идет только о множествах пространств вида $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^m$ и им подобных, вводится нулевой уровень проективной иерархии: классы $\mathbf{\Sigma}^1_0$, $\mathbf{\Pi}^1_0$, $\mathbf{\Delta}^1_0$, состоящие соответственно из открытых, замкнутых, и открыто-замкнутых множеств. Тогда, подобно общему определению для $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$, класс $\mathbf{\Sigma}^1_1[\mathbb{X}]$ оказывается равен классу всех проекций множеств $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ класса $\mathbf{\Pi}^1_0$.

Следующий результат показывает, что в переходе $\mathbf{\Pi}^1_n \to \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ в принципе можно обойтись и непрерывными образами.

Упражнение 3.7.5. Докажите, что каждое $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$-множество несчетного польского пространства $\mathbb{X}$ есть непрерывный образ некоторого $\mathbf{\Pi}^1_n$-множества этого пространства. Используйте идею из доказательства теоремы 3.3.2.

В заключение скажем о взаимосвязи C-множеств и проективных множеств: первые составляют лишь небольшую часть последних, точнее, даже небольшую часть класса $\mathbf{\Delta}^1_2$. (Отметим, что проективные классы строго растут с ростом индекса подобно борелевским.) Но мы не будем в этой главе вдаваться в теорию проективных множеств. Это будет сделано в гл. 6 на основе более современной технической базы *эффективной* дескриптивной теории множеств, и только для бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и производных пространств вида $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$. (Значительное большинство результатов, однако, могут быть перенесены с бэровского пространства на произвольные польские пространства рутинной ссылкой на их борелевскую изоморфность.)

Глава 4

СА-множества и ординалы

Фактически с самого начала изучения СА-множеств стало ясно, что чисто топологические методы (в терминах того времени — методы теории функций действительного переменного) перестают быть адекватными природе изучаемых объектов. Наиболее яркий феномен здесь — это то, что в центре внимания оказываются ординалы (или порядковые числа), т. е. математические объекты, возникшие в рамках абстрактной, канторовой теории множеств.

§4.1 Деревья и ранги

Множества, дополнительные к А-множествам, называются *СА-множествами*. Таким образом, если $\mathbb{X}$ — польское пространство, то множество $C \subseteq \mathbb{X}$ является СА-множеством, если его дополнение $\mathbb{X} \setminus C$ в данном пространстве $\mathbb{X}$ есть А-множество. Один из подходов к исследованию этих множеств основан на анализе фундированных подмножеств множества $\mathbb{N}^{<\omega}$ всех кортежей натуральных чисел. Точнее говоря, множество $\mathbb{N}^{<\omega}$ рассматривается как дерево, и изучаются его поддеревья. Этот параграф содержит изложение соответствующих определений и результатов и комментарии к ним.

О понятии дерева и связанных с ним понятиях и определениях (кортежи и пр.) см. §1.4.

Определение 4.1.1. Обозначим через $\mathbf{Tr}$ множество всех деревьев $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$.

Если $s \in T \in \mathbf{Tr}$, то кортеж s называется *вершиной* дерева T. Вершина $s \in T$ называется *точкой фундированности* дерева T, если T не имеет *бесконечных ветвей*, проходящих через s, т. е. нет таких бесконечных последовательностей $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $s \subset a$ и $a \restriction m \in T$ для всех m. Множество $T_{\mathtt{wf}}$ всех таких элементов называется *областью фундированности* дерева T.

Дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ называется *фундированным*, если $T = T_{\mathtt{wf}}$, т. е. все $s \in T$ являются точками фундированности. Обозначим через $\mathbf{WFT}$ и $\mathbf{IFT} = \mathbf{Tr} \setminus \mathbf{WFT}$ множества[1] всех фундированных, и соответственно нефундированных, деревьев $T \in \mathbf{Tr}$.

Понятно, что *пустая последовательность* Λ принадлежит любому непустому дереву.

Упражнение 4.1.2. Пусть $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ — произвольное дерево. Докажите следующее.

(1) Дерево T фундировано, если и только если Λ принадлежит $T_{\mathtt{wf}}$, что в свою очередь выполняется если и только если дерево T не имеет бесконечных *ветвей*, т. е. нет таких $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $a \restriction m \in T$ для всех m.

(2) Если $s \in T_{\mathtt{wf}}$ и $t \in T$, $s \subset t$, то t также принадлежит $T_{\mathtt{wf}}$. В частности, если $s \in T_{\mathtt{wf}}$ и $k \in \mathbb{N}$, $s^\wedge k \in T$, то $s^\wedge k \in T_{\mathtt{wf}}$.[2]

---

[1] $\mathbf{WFT}$ и $\mathbf{IFT}$ — от well-founded tree и ill-founded tree.

[2] По определению, $s^\wedge k$ получается приписыванием члена k к кортежу s справа, а $k^\wedge s$ получается приписыванием члена k к кортежу s слева. Если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $k \in \mathbb{N}$, то оба кортежа $s^\wedge k$, $k^\wedge s$ также принадлежат $\mathbb{N}^{<\omega}$ и имеют длину $\mathtt{lh}\,(s^\wedge k) = \mathtt{lh}\,(k^\wedge s) = \mathtt{lh}\, s + 1$.

(3) Кортеж $s \in T$ принадлежит $T_{\mathtt{wf}}$, если и только если *обрезанное дерево* $T\restriction_s = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : s^\wedge t \in T\}$ фундировано. $\square$

Анализ по Кантору–Бендиксону является удобным методом исследования деревьев. Для всякого дерева $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ определяется *производное дерево*[3]

$$T' = T \smallsetminus \mathtt{Max}\, T = \{s \in T : \exists\, k\, (s^\wedge k \in T)\}.$$

Далее, определим трансфинитную последовательность производных деревьев $T^{(\xi)}$, $\xi < \omega_1$, так что $T^{(0)} = T$,

$T^{(\xi+1)} = (T^{(\xi)})'$ для всех $\xi < \omega_1$ и

$T^{(\lambda)} = \bigcap_{\xi<\lambda} T^{(\xi)}$ для предельных ординалов $\lambda < \omega_1$.

Наконец, положим $T^{(\infty)} = \bigcap_{\xi \in \mathtt{Ord}} T^{(\xi)}$ (предельное дерево).

Упражнение 4.1.3. Пусть $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ — любое дерево.

Докажите, что последовательность производных деревьев $T^{(\xi)}$ $\subseteq$-убывает с ростом $\xi \to \omega_1$, так что $\xi < \eta \Longrightarrow T^{(\eta)} \subseteq T^{(\xi)}$, и при этом вследствие счетности множества всех кортежей $\mathbb{N}^{<\omega}$ найдется такой ординал $\xi < \omega_1$, что $T^{(\xi)} = T^{(\xi+1)} = T^{(\infty)}$.

Наименьший из таких ординалов ξ называют *рангом Кантора–Бендиксона* дерева T и обозначают $|T|_{\mathtt{CB}}$. Таким образом, $|T|_{\mathtt{CB}} < \omega_1$.

Докажите, что $T^{(\infty)} = T \smallsetminus T_{\mathtt{wf}}$ и, следовательно, дерево T фундировано (т. е. $T \in \mathbf{WFT}$), если и только если $T^{(\infty)} = \varnothing$.

Необходимость разделения фундированных и нефундированных деревьев приводит к следующему измененному определению ранга.

Определение 4.1.4 (ранги). Если T — дерево и $s \in T \smallsetminus T^{(\infty)}$, то $|s|_T$ есть наименьший такой ординал ξ, что $s \notin T^{(\xi+1)}$, а если $s \in T^{(\infty)}$, то[4] $|s|_T = \infty$.

Отдельно положим $|s|_T = -1$ при $s \in \mathbb{N}^{<\omega} \smallsetminus T$.

Если $T \in \mathbf{WFT}$, то полагаем $|T| = |\Lambda|_T$. Для нефундированных деревьев T (т. е. $T \in \mathbf{IFT}$) положим $|T| = \infty$.

Если $\xi < \omega_1$, то определяем

$$\mathbf{WFT}_\xi = \{T \in \mathbf{WFT} : |T| = \xi\} \quad \text{и} \quad \mathbf{IFT}_\xi = \{T \in \mathbf{IFT} : |T|_{\mathtt{CB}} = \xi\},$$

а также $\mathbf{WFT}_{\le\xi} = \bigcup_{\eta\le\xi} \mathbf{WFT}_\eta$ и аналогично $\mathbf{WFT}_{<\xi}$, $\mathbf{IFT}_{\le\xi}$, $\mathbf{IFT}_{<\xi}$.

---

[3] Напомним, что $\mathtt{Max}\, T$ состоит из всех концевых вершин дерева T, т. е. всех таких $s \in T$, что нет вершин $t \in T$, удовлетворяющих условию $s \subset t$. Таким образом, производное дерево T' получается удалением из T всех концевых вершин.

[4] Здесь ∞ понимается как формальный символ, причем мы считаем, что $\xi < \infty$ для любого ординала ξ.

Упражнение 4.1.5. Докажите следующие утверждения для любого дерева $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$:

(i) $|s|_T = 0$, если и только если $s \in \mathtt{Max}\, T$;

(ii) если $s \in T_{\mathtt{wf}}$, то $0 \le |s|_T < \omega_1$, но если $s \in T \smallsetminus T_{\mathtt{wf}}$, то $|s|_T = \infty$;

(iii) $|s|_T = \mathtt{sup}_{s^\wedge k \in T}(|s^\wedge k|_T + 1)$ для всех $s \in T_{\mathtt{wf}} \smallsetminus \mathtt{Max}\, T$;

(iv) если T фундировано, то $|T| = |\Lambda|_T$ и $|T|_{\mathtt{CB}} = |T| + 1$;

(v) если $s \in T$, то $|s|_T = |T \restriction_s|$ (как при $s \in T_{\mathtt{wf}}$, так и при $s \in T \smallsetminus T_{\mathtt{wf}}$!);

(vi) если T не фундировано, то $|T| = \infty$ и $|T|_{\mathtt{CB}} = \mathtt{sup}_{s \in T_{\mathtt{wf}}}(|s|_T + 1)$;

(vii) если деревья T_n фундированы, то $T = \{\Lambda\} \cup \{n^\wedge s : n \in \mathbb{N} \wedge s \in T_n\}$ также фундированное дерево, $|\langle n \rangle|_T = |T_n|$ для каждого n и соответственно $|T| = |\Lambda|_T = \mathtt{sup}_n(|T_n| + 1)$. □

Напомним, что если $\Xi \subseteq \mathtt{Ord}$, то $\mathtt{sup}\, \Xi$ обозначает наименьший ординал, который больше либо равен (нестрого!) любого ординала $\xi \in \Xi$. В данном случае в (iii) речь идет о том, что $|s|_T$ — наименьший ординал, строго больший, чем все ординалы $|s^\wedge k|_T$, где $s^\wedge k \in T$. Аналогично для (vii).

Тот факт, что при наших определениях $|\cdot|$ и $|\cdot|_{\mathtt{CB}}$ отличаются на 1 для фундированных деревьев согласно (iv), доставляет определенное неудобство. Но оно компенсируется некоторыми преимуществами, например, выполняются свойства (v) и (vii), которые для $|\cdot|_{\mathtt{CB}}$, вообще говоря, не имели бы места. В сущности же наше $|T|$ просто равно $|T \smallsetminus \{\Lambda\}|_{\mathtt{CB}}$, т. е. Λ как бы удаляется из $\mathbb{N}^{<\omega}$.

Лемма 4.1.6. *Пусть* $T \in \mathbf{Tr}$, $s \in T_{\mathtt{wf}}$ *и* $|s|_T = \xi$; $\xi < \omega_1$.

Если $s \subset t \in T$, *то* $t \in T_{\mathtt{wf}}$ *и* $|t|_T < \xi$. *Обратно, если* $\eta < \xi$, *то найдется элемент* $t \in T$, *для которого* $s \subset t$ *и* $|t|_T = \eta$. *Значит,* $\{\eta : \eta < \xi\} = \{|t|_T : s \subset t \in T\}$ *и* $|s|_T = \mathtt{sup}_{s \subset t \in T}(|t|_T + 1)$.

Доказательство. Первое утверждение доказывается индукцией по $\mathtt{lh}\, t - \mathtt{lh}\, s$ (разность длин). Если $\mathtt{lh}\, t = \mathtt{lh}\, s + 1$ (наименьшее возможное значение, поскольку $s \subset t$), то $t = s^\wedge n$ для некоторого n, так что результат следует из упражнения 4.1.5 (iii). Теперь проведем индуктивный шаг. Пусть $\mathtt{lh}\, t - \mathtt{lh}\, s \ge 2$. Найдется такое n, что продолженный кортеж $s' = s^\wedge n \in T$ удовлетворяет условию $s' \subset t$. Тогда по индуктивному предположению $|t|_T < |s'|_T$, а $|s'|_T < |s|_T = \xi$ в силу упражнения 4.1.5 (iii).

Обратное утверждение доказываем индукцией по ξ. По определению найдется такое n, что $s' = s^\wedge n \in T$ и $\eta \le \xi' = |s'|_T$. Если

$\eta = \xi'$, то задача решена: берем $t = s'$. Пусть $\eta < \xi'$ строго. Однако $\xi' < \xi$ согласно упражнению 4.1.5 (iii), так что можно применить индуктивное предположение. □

Следствие 4.1.7. *Пусть* $\xi < \omega_1$.
Если $T \in \mathbf{WFT}_\xi$, *то* $\{\eta : \eta \le \xi\} = \{|t|_T : t \in T\}$.
Если $T \in \mathbf{IFT}_\xi$, *то* $\{\eta : \eta < \xi\} = \{|t|_T : t \in T_{\mathtt{wf}}\}$. □

Упражнение 4.1.8. Докажите, что дерево $T = \{\Lambda, \langle 0\rangle, \langle 0,0\rangle\}$ и дерево S, состоящее из всех последовательностей длины не больше 2 (т. е. с 0, 1 или 2 членами), фундированы и имеют ранг $|T| = |S| = 2$, а дерево U, содержащее Λ, все одночленные последовательности $\langle k\rangle$, $k \in \mathbb{N}$, и все последовательности вида $\langle k, 0, 0, \dots, 0\rangle$ с не более чем k нулями, фундировано и имеет ранг $|U| = \omega$.

Лемма 4.1.9. *Если* $\xi < \omega_1$, *то множества* $\mathbf{IFT}_\xi$, $\mathbf{WFT}_\xi$ *непусты.*

Доказательство (набросок)**.** Постройте фундированное дерево T ранга $|T| = \xi$ (т. е. $T \in \mathbf{WFT}_\xi$), используя индуктивную конструкцию из упражнения 4.1.5 (vii). Доказательство непустоты $\mathbf{IFT}_\xi$ начнем с любого дерева $T \in \mathbf{WFT}_\xi$. Дополнительно можно предполагать, что ни один кортеж из T не содержит члена 0. (Иначе применим почленное преобразование $k \mapsto k+1$.) Докажите, что тогда дерево $S = T \cup \{0^n : n \ge 1\}$ (где $0^n \in \mathbb{N}^{<\omega}$ — кортеж из n нулей) **не** фундировано и $|S|_{\mathtt{CB}} = \xi$, т. е. $S \in \mathbf{IFT}_\xi$. □

§ 4.2 Вложения деревьев и сравнение рангов

Для ряда приложений деревьев и рангов к вопросам теории A-множеств и CA-множеств важно уметь делать следующее: имея деревья $S, T \in \mathbf{Tr}$, выяснить, имеет ли место, к примеру, соотношение $|S| \le |T|$, не прибегая к вычислению самих рангов. Это можно сделать с помощью гомоморфизмов (вложений) деревьев.

Определение 4.2.1. *Частичным гомоморфизмом* дерева $S \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ в другое дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ называется любая функция $h \colon S' \to T$, определенная на некотором множестве $S' = \mathtt{dom}\, h \subseteq S$ так, что

(1) если $s \in S$, $s' \in S'$, $s' \subset s$, то $s \in S'$, и

(2) если $s, s' \in S'$ и $s' \subset s$, то $h(s') \subset h(s)$.

Множество всех частичных гомоморфизмов из S в T обозначим через $\mathbf{PH}_{ST}$.

Лемма 4.2.2. *Пусть* $S, T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ *— произвольные деревья.*

(i) *Если* $h \in \mathbf{PH}_{ST}$ *и* $s \in S' = \mathtt{dom}\, h$, *то* $|s|_S \le |h(s)|_T$.

(ii) *Если* $s \in S$, $t \in T$ *и* $|s|_S \le |t|_T$, *то найдется гомоморфизм* $h \in \mathbf{PH}_{ST}$, *для которого* $h(s) = t$.

Доказательство. (i) Пусть $s \in S'$ и $h(s) = t \in T$. Если $|s|_S = \infty$ (первый случай), т. е. $s \notin S_{\mathtt{wf}}$, то S содержит бесконечную $\subset$-возрастающую цепочку элементов, начинающуюся с s. Эта цепочка принадлежит S' согласно условию (1) определения 4.2.1, так что она превращается в бесконечную $\subset$-возрастающую цепочку в T, начинающуюся с $h(s)$, согласно условию (2). Отсюда следует, что $|h(s)|_T = \infty$.

Теперь предположим, что $|s|_S = \xi < \omega_1$ (второй случай). Доказываем индукцией по ξ, что и здесь $|s|_S \le |h(s)|_T$. Если $|s|_S = 0$, то доказывать нечего. Поэтому пусть $|s|_S = \xi > 0$. Имеем $|s|_S = \mathtt{sup}_{s^\wedge k \in S}(|s^\wedge k|_S + 1)$ согласно упражнению 4.1.5 (iii). Но $|s^\wedge k|_S \le |h(s^\wedge k)|_T$ по индуктивному предположению. Остается использовать последнее равенство леммы 4.1.6.

(ii) Первый случай: $|t|_T = \infty$, т. е. $t \notin T_{\mathtt{wf}}$ и найдется такая бесконечная последовательность $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $a \restriction m \in T$ для всех m и $t = a \restriction m_0$ для некоторого $m_0 = \mathtt{lh}\, t$. Пусть $n_0 = \mathtt{lh}\, s$. Если $s' \in S$ и $s \subset s'$, то определим $h(s') = a \restriction m$, где m удовлетворяет равенству $m - m_0 = \mathtt{lh}\, s' - n_0$. Легко видеть, что $h \in \mathbf{PH}_{ST}$ и $h(s) = t$.

Второй случай: $|t|_T = \xi < \omega_1$, т. е. $t \in T_{\mathtt{wf}}$ и $\eta = |s|_S \le \xi$. Существование искомого гомоморфизма доказывается индукцией по ξ.

Если $\xi = 0$, то $t \in \mathtt{Max}\, T$ и $\eta = 0$, т. е. $s \in \mathtt{Max}\, S$. Можно просто определить $h(s) = t$, получая $h \in \mathbf{PH}_{ST}$, причем $\mathtt{dom}\, h = \{s\}$.

Пусть $\xi > 0$. Если $\eta = 0$, то определяем $h \in \mathbf{PH}_{ST}$ равенством $h(s) = t$, как и для случая $\xi = 0$. Теперь предполагаем, что $\eta > 0$, т. е. $s \in S \smallsetminus \mathtt{Max}\, S$. Рассмотрим произвольное число n из множества $N = \{n : s^\wedge n \in S\}$. Тогда $|s^\wedge n|_S < \eta = |s|_S \le \xi$. Согласно лемме 4.1.6, найдется вершина $t_n \in T$, для которой $t \subset t_n \in T$ и $|t_n|_T = |s^\wedge n|_S$. По индуктивному предположению найдется гомоморфизм $h_n \in \mathbf{PH}_{ST}$, удовлетворяющий равенствам $h_n(s^\wedge n) = t_n$ и $\mathtt{dom}\, h_n = C_n = \{s' \in S : s^\wedge n \subseteq s'\}$. Определим теперь гомоморфизм $h \in \mathbf{PH}_{ST}$ условиями $h(s') = h_n(s')$ для всех $s' \in C_n$ и $n \in N$, и дополнительно условием $h(s) = t$. □

А теперь докажем следующую важную теорему.

Теорема 4.2.3. *Предположим, что* S, T *— деревья в* $\mathbb{N}^{<\omega}$. *Тогда*

(i) *если* $s \in T$, $t \in T$, *то неравенство* $|s|_S \le |t|_T$ *равносильно условию* $\exists\, h \in \mathbf{PH}_{ST}\ (h(s) = t)$.

(ii) *неравенство* $|S| \le |T|$ *равносильно условию* $\exists\, h \in \mathbf{PH}_{ST}\ (\Lambda \in \mathtt{dom}\, h)$.

(iii) *неравенство* $|S| < |T| \vee T \in \mathbf{IFT}$ *равносильно условию*[5]
$$\exists\, h \in \mathbf{PH}_{ST}\ (\Lambda \in \mathtt{dom}\, h \wedge h(\Lambda) \ne \Lambda).$$

Дополнительно предположим, что $\xi < \omega_1$ *и* $T \in \mathbf{WFT}_\xi$. *Тогда*

[5] Левая часть этой эквивалентности выполнена в том и только в том случае, когда мы имеем $|S| < |T| \le \infty$ либо (исключающее) $|S| = |T| = \infty$.

(iv) *соотношение* $S \in \mathbf{IFT}_{\le\xi}$ *равносильно каждому из двух следующих условий*:

(1) $S \in \mathbf{IFT} \wedge \forall s \in S_{\mathtt{wf}}\, \exists t \in T\, (t \ne \Lambda \wedge |s|_S \le |t|_T)$;

(2) $\forall s \in S\, \forall t \in T\, (|s|_S \le |t|_T \Longrightarrow s \ne \Lambda \wedge t \ne \Lambda)$.

Доказательство. Утверждение (i) следует в обе стороны из леммы 4.2.2. Далее, утверждение (ii) следует из (i), а утверждение (iii) также легко выводится из леммы 4.2.2. Мы оставляем эти доказательства в качестве несложного **упражнения** для читателя.

(iv) Предположим, что $S \in \mathbf{IFT}_{\le\xi}$, т. е. дерево S не фундировано и $|S|_{\mathtt{CB}} = \eta \le \xi = |T|$. Для вывода, что условие (iv)(1) выполнено, пусть $s \in S_{\mathtt{wf}}$. Тогда $|s|_S < \eta \le \xi$, так что по лемме 4.1.6 получаем вершину $t \in T$, $|t|_T = |s|_S$. Для вывода условия (iv)(2), пусть $s \in S$, $t \in T$ и $|t|_T = |s|_S$. Заметим, что $|t|_T < \omega_1$, поскольку $T \in \mathbf{WFT}$, а $|\Lambda|_S = \infty$, так как $S \in \mathbf{IFT}$. Отсюда сразу $s \ne \Lambda$. Если теперь $t = \Lambda$, то $|t|_T = |T| = \xi$, откуда следует $|s|_S = \xi$, так что в частности $s \in S_{\mathtt{wf}}$ и далее $|s|_S < |S|_{\mathtt{CB}} = \eta$. Однако $\eta \le \xi$, и мы получаем противоречие.

Теперь, предполагая, что выполнено условие (iv) (1), выведем, что $S \in \mathbf{IFT}_{\le\xi}$. Требуется доказать, что $|s|_S < \xi$ для каждого $s \in S_{\mathtt{wf}}$. Но если $s \in S_{\mathtt{wf}}$, то $|s|_S \le |t|_T < |\Lambda|_T = |T| = \xi$ для подходящей вершины $t \in T \smallsetminus \{\Lambda\}$, что и требовалось.

Наконец, выведем $S \in \mathbf{IFT}_{\le\xi}$, предполагая, что выполнено условие (iv)(2). Пусть напротив, $S \notin \mathbf{IFT}_{\le\xi}$, т. е. либо $S \in \mathbf{WFT}$, либо $S \in \mathbf{IFT}_\eta$, $\xi < \eta < \omega_1$. Рассмотрим первый случай: $S \in \mathbf{WFT}_\eta$, т. е. $|S| = |\Lambda|_S = \eta < \omega_1$. Если $\eta \le \xi$, то имеем $|t|_T = \eta$ для какого-то $t \in T$ по лемме 4.1.6, что сразу противоречит равенству $|t|_T = |T| = \xi$. Второй случай: $S \in \mathbf{IFT}_\eta$, $\xi < \eta < \omega_1$. Тогда найдется $s \in S_{\mathtt{wf}}$, для которого $|s|_S = \xi$, и мы получаем противоречие с условием (iv)(2), как и тремя строками выше. □

§ 4.3 Дополнения A-множеств. Конституанты

Теперь вернемся к изучению A-множеств и дополнительных к ним CA-множеств в польских пространствах. Исследования, лежащие в основе результатов этого параграфа, появились в статье Н. Н. Лузина и Серпинского [78].

Определение 4.3.1 (конституанты). Пусть $\mathbb{X}$ — польское пространство, а множества $F_s \subseteq \mathbb{X}$ ($s \in \mathbb{N}^{<\omega}$) замкнуты и образуют регулярную (суслинскую) систему $\mathfrak{F} = \{F_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ в смысле определения из § 1.5. Рассмотрим A-множество $A = \boldsymbol{A}[\mathfrak{F}] = \bigcup_{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_{a \restriction m}$ и дополнительное CA-множество $C = \boldsymbol{C}[\mathfrak{F}] = \mathbb{X} \smallsetminus A$.

Из-за регулярности каждое *сечение* $F^x = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : x \in F_s\}$, где $x \in \mathbb{X}$, является деревом в $\mathbb{N}^{<\omega}$. Для любого ординала $\xi < \omega_1$, положим

$$C_\xi = \boldsymbol{C}_\xi[\mathfrak{F}] = \{x \in \mathbb{X} : \text{дерево } F^x \text{ фундировано и } |F^x| = \xi\};$$
$$A_\xi = \boldsymbol{A}_\xi[\mathfrak{F}] = \{x \in \mathbb{X} : F^x \text{ не фундировано и } |F^x|_{\mathsf{CB}} = \xi\}.$$

Эти множества A_ξ и C_ξ называются *конституантами* соответственно A-множества $A = \boldsymbol{A}[\mathfrak{F}]$ и CA-множества $C = \boldsymbol{C}[\mathfrak{F}]$. Понятно, что $C = \bigcup_{\xi<\omega_1} C_\xi$, конституанты C_ξ попарно дизъюнктны и соответственно $A = \bigcup_{\xi<\omega_1} A_\xi$ и конституанты A_ξ попарно дизъюнктны.

Определяются *аппроксимации* $C_{<\xi} = \boldsymbol{C}_{<\xi}[\mathfrak{F}] = \bigcup_{\eta<\xi} C_\eta$ множества $C = \boldsymbol{C}[\mathfrak{F}]$ и аналогично $C_{\le\xi} = \boldsymbol{C}_{\le\xi}[\mathfrak{F}]$, $A_{<\xi} = \boldsymbol{A}_{<\xi}[\mathfrak{F}]$ и $A_{\le\xi} = \boldsymbol{A}_{\le\xi}[\mathfrak{F}]$.

Следующий пример весьма показателен.

Пример 4.3.2. В польском пространстве $\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$, точками которого являются произвольные множества $X \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ (оно идентифицируется с произведением $2^{(\mathbb{N}^{<\omega})}$, см. пример 1.7.6), множество $\mathbf{Tr}$ всех деревьев, очевидно, замкнуто, а потому само является польским пространством.

Множества $F_s = \{T \in \mathbf{Tr} : s \in T\}$ $(s \in \mathbb{N}^{<\omega})$ открыто-замкнуты, и сечения $F^T = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : T \in F_s\}$ удовлетворяют равенству $F^T = T$. Поэтому соответствующее CA-множество $C = \boldsymbol{C}[\mathfrak{F}] \subseteq \mathbf{Tr}$ (где $\mathfrak{F} = \{F_s\}_{s\in\mathbb{N}^{<\omega}}$) равно множеству $\mathbf{WFT}$ всех фундированных деревьев, а соответствующее A-множество $A = \boldsymbol{A}[\mathfrak{F}] = \mathbf{Tr} \smallsetminus C$ — множеству $\mathbf{IFT}$ всех нефундированных деревьев.

Каждая же из конституант A_ξ (соответственно C_ξ) в этом случае тождественна множеству $\mathbf{IFT}_\xi$ (соответственно, множеству $\mathbf{WFT}_\xi$) из леммы 4.1.9. То же самое верно и для аппроксимаций.

Следствие 4.3.3. *Множество* $\mathbf{IFT}$ *является A-множеством, а множество* $\mathbf{WFT}$ *является CA-множеством.* □

Итак, каждое A-множество A и каждое CA-множество C являются объединениями попарно дизъюнктных множеств — конституант A_ξ, соответственно C_ξ, в числе не более $\aleph_1$. Отметим, что эти разложения на конституанты зависят не только от самих множеств A и C, но, скорее, от выбора той системы замкнутых множеств F_s, A-операция над которыми дает данное A-множество. Какова природа конституант как точечных множеств?

Лемма 4.3.4. *В условиях определения 4.3.1 все множества* A_ξ, C_ξ *борелевские. В частности, множества* $\mathbf{IFT}_\xi$, $\mathbf{WFT}_\xi$ *из определения 4.1.4 борелевские.*

Доказательство. Докажем борелевость вспомогательных множеств $C_\xi(s) = \{x \in \mathbb{X} : |s|_{F^x} < \xi\}$ и $A_\xi(s) = \mathbb{X} \smallsetminus C_\xi(s)$. Отсюда следует утверждение леммы, поскольку $C_\xi = C_{\xi+1}(\Lambda) \smallsetminus C_\xi(\Lambda)$ и

$$A_\xi = \bigcap_s (C_\xi(s) \cup A_{\xi+1}(s)) \,\cap\, \bigcap_{\eta<\xi} \bigcup_s (C_\xi(s) \cap A_\eta(s)) \,\cap\, A_{\xi+1}(\Lambda)\,.$$

Борелевость множеств $C_\xi(s)$ доказывается индукцией по ξ. Если $\xi = 0$, то множество $C_0(s) = \mathbb{X} \smallsetminus F_s$ борелевское при любом s. Пусть теперь $0 < \xi < \omega_1$. Тогда условие $x \in C_\xi(s)$ равносильно такому предложению:

$$\exists\, \eta < \xi\, \forall\, k\; (x \in C_\eta(s^\wedge k)),$$

откуда следует, что $C_\xi(s) = \bigcup_{\eta<\xi} \bigcap_k C_\eta(s^\wedge k)$. Поэтому борелевость множества $C_\xi(s)$ следует из борелевости всех множеств вида $C_\eta(t)$, $\eta < \xi$. □

Следствие 4.3.5. *Любое А-множество в польском пространстве есть объединение борелевских множеств в числе не более* $\aleph_1$*.*

Любое СА-множество X в польском пространстве также является объединением борелевских множеств в числе не более $\aleph_1$*. Поэтому, и в силу следствия 3.4.2, X либо не более чем счетно, либо имеет мощность $\aleph_1$, либо имеет мощность континуума $\mathfrak{c}$.* □

Последнее утверждение (о мощности) имеет мало смысла для А-множеств, ибо следствие 3.4.2 дает более сильный результат.

Более точная классификация СА-множеств дается в § 4.4.

И еще одно замечание к лемме 4.3.4. Доказательство борелевости конституант вполне эффективно в том смысле, что для любого ординала $\xi < \omega_1$ из него извлекается конкретная трансфинитная конструкция конституанты C_ξ из множеств F_s при помощи борелевских операций, а затем и такой ординал $\rho(\xi)$, что C_ξ — множество класса $\mathbf{\Sigma}^0_{\rho(\xi)}$. Точные оценки классов конституант (т. е. оценки величины $\rho(\xi)$ как функции от ξ) и другие свойства конституант были предметом как работ 1930-х годов, например трудов Н. Н. Лузина [18, 17, 84], так и более современных исследований, см., например, статью [94]. В частности, оказалось, что попытки построить такую последовательность конституант C_ξ, что 1) среди них несчетно много непустых, но 2) для некоторого одного ординала $\rho < \omega_1$, все C_ξ — множества класса $\mathbf{\Sigma}^0_\rho$, приводят к неразрешимым проблемам. Об этом см. в § 13.4.

Упражнение 4.3.6. В условиях и обозначениях определения 4.3.1 положим $f(x) = F^x$ для $x \in \mathbb{X}$. Докажите, используя замкнутость множеств F_s, что это отображение (из $\mathbb{X}$ в $\mathbf{Tr}$) В-измеримо и, кроме того, для любого ординала $\xi < \omega_1$ выполнены равенства

$$A = f^{-1}[\mathbf{IFT}]\,,\;\; C = f^{-1}[\mathbf{WFT}]\,,\;\; A_\xi = f^{-1}[\mathbf{IFT}_\xi]\,,\;\; C_\xi = f^{-1}[\mathbf{WFT}_\xi].$$

Докажите, что обратно, если отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbf{Tr}$ B-измеримо, то множества $A = f^{-1}[\mathbf{IFT}]$ и $C = f^{-1}[\mathbf{WFT}]$ являются, соответственно, А-множеством и СА-множеством, а множества $A_\xi = f^{-1}[\mathbf{IFT}_\xi]$ и $C_\xi = f^{-1}[\mathbf{WFT}_\xi]$ все борелевские. Это представление является несколько более общим, чем то, которое дано определением 4.3.1, поскольку соответствующие множества $F_s = \{x \in \mathbb{X} : s \in f(x)\}$ (тогда $F^x = f(x)$) — борелевские, но не обязательно замкнутые.

§ 4.4 Принцип ограничения и его следствия

Конституанты СА-множеств обладают рядом других замечательных свойств, среди которых следующая классическая теорема Лузина–Серпинского [78].

Теорема 4.4.1 (принцип ограничения индексов)**.** *В условиях определения 4.3.1 если А-множество Y является подмножеством СА-множества C, то найдется такой ординал $\lambda < \omega_1$, что $Y \subseteq \bigcup_{\xi<\lambda} C_\xi$.*

Доказательство. [6] Пусть $Y = \bigcup_{a\in\mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigcap_m G_{a\restriction m}$, где все множества G_s данного польского пространства $\mathbb{X}$ замкнуты. Согласно лемме 3.2.2, предполагаем, что система множеств G_s, как и система замкнутых множеств F_s, определяющая множество C (см. определение 4.3.1), регулярны.

Предположим противное: нет такого ординала $\lambda < \omega_1$, что $Y \subseteq \bigcup_{\xi<\lambda} C_\xi$, или, что эквивалентно, множество $\Omega = \{|F^x| : x \in Y\}$ неограничено в ω_1. (Как обычно, $F^x = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : x \in F_s\}$.) Пусть $Y_t = \bigcup_{t\subset b\in\mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigcap_m G_{b\restriction m}$ для любого $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$. (Тогда $Y = Y_\Lambda$.) Обозначим через U множество всех таких пар $\langle s,t\rangle$ кортежей $s,t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, что множество ординалов $\Omega_{st} = \{|s|_{F^x} : x \in Y_t\}$ неограничено в ω_1.

Например, пара $\langle\Lambda,\Lambda\rangle$ принадлежит U по предположению, поскольку $|F^x| = |\Lambda|_{F^x}$. С другой стороны, нетрудно проверить, что если $\langle s,t\rangle \in U$, то найдутся такие числа k и n, что продолженная пара $\langle s^\wedge k, t^\wedge n\rangle$ также принадлежит U. Это позволяет построить такие бесконечные последовательности $a,b \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, что $\langle a\restriction m, b\restriction m\rangle \in U$ для всех m. Тогда каждое из множеств

$$\Omega_m = \Omega_{a\restriction m, b\restriction m} = \{|a\restriction m|_{F^x} : x \in Y_{b\restriction m}\}$$

неограничено в ω_1. Отсюда следует, что $F_{a\restriction m} \cap G_{b\restriction m} \neq \varnothing$ для любого m. (В самом деле, иначе мы получили бы $a\restriction m \notin F^x$ для всех

[6] Ниже мы изложим более современное доказательство этой теоремы, см. § 4.8.

$x \in Y_{b\restriction m}$, поскольку $Y_{b\restriction m} \subseteq G_{b\restriction m}$. Поэтому множество Ω_m содержит самое большее один элемент, т. е. число -1, имеем противоречие.) Теперь из регулярности обеих систем множеств следует, что оба пересечения $\bigcap_m F_{a\restriction m}$ и $\bigcap_m G_{b\restriction m}$ содержат одну и ту же общую точку, так что $A \cap Y \neq \varnothing$ — противоречие с предположением, что $Y \subseteq C$. □

Сразу получим несколько следствий принципа ограничения.

Следствие 4.4.2 (критерий борелевости CA-множеств). *В условиях определения 4.3.1 CA-множество C является борелевским, если и только если найдется такой ординал $\lambda < \omega_1$, что $C_\xi = \varnothing$ для всех $\xi \geq \lambda$.* □

Упражнение 4.4.3. Докажите, используя критерий 4.4.2, что множество **WFT** всех фундированных деревьев $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ является **неборелевским** CA-множеством. Соответственно, множество **IFT** всех нефундированных деревьев $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ является **неборелевским** A-множеством.

Следствие 4.4.4 (теорема Лузина об отделимости A-множеств). *Если X и Y — непересекающиеся A-множества в польском пространстве $\mathbb{X}$, то найдется борелевское множество $B \subseteq \mathbb{X}$, отделяющее X от Y в том смысле, что $X \subseteq B$, но $Y \cap B = \varnothing$.*

Доказательство. Используем теорему 4.4.1 при $A = X$, а затем лемму 4.3.4 для доказательства того, что счетные объединения конституант (как множество $\bigcup_{\xi<\lambda} C_\xi$ при $\lambda < \omega_1$) являются борелевскими множествами. □

Согласно следствию 3.2.4 все борелевские множества (польских пространств) являются A-множествами. Это наблюдение дополняется следующим фактом.

Следствие 4.4.5 (теорема Суслина). *Если X, Y — взаимно дополнительные A-множества в польском пространстве, то они борелевские. Более того, если X, Y — дизъюнктные A-множества и их объединение $X \cup Y$ — борелевское множество, то X, Y — борелевские множества.* □

Теперь вернемся к классификации CA-множеств, начатой следствием 4.3.5. Рассмотрим разложение $C = \bigcup_{\xi<\omega_1} C_\xi$ некоторого CA-множества C в польском пространстве $\mathbb{X}$ на конституанты, как указано в определении 4.3.1. Возможны три и только три случая.

1. Каждая конституанта C_ξ не более чем счетна, и число непустых конституант C_ξ не более чем счетно. В этом случае и само C не более чем счетно.

2. Каждая конституанта C_ξ не более чем счетна, но имеется несчетно много непустых конституант C_ξ. В этом случае само C имеет мощность ровно $\aleph_1$ и, что более важно, C не содержит совершенных подмножеств! В самом деле, если $Y \subseteq C$ — такое множество, то по теореме 4.4.1 найдется такой ординал $\lambda < \omega_1$, что $Y \subseteq \bigcup_{\xi<\lambda} C_\xi$, т. е. Y счетно, и мы получаем противоречие.
3. Имеется хотя бы одна несчетная конституанта C_ξ. Тогда C_ξ, как несчетное борелевское множество, имеет совершенное подмножество по теореме 3.4.1. Следовательно, и само C имеет совершенное подмножество.

Следствие 4.4.6 (Лузин). *В любом несчетном польском пространстве $\mathbb{X}$ для существования несчетного СА-множества, не имеющего совершенных подмножеств, необходимо и достаточно, чтобы существовало разложение на конституанты, как в как в определении 4.3.1, имеющее тип 2 из трех указанных.* □

В то время как существуют совершенно элементарные примеры разложений на конституанты типов 1 и 3, в отношении типа 2 вопрос намного более сложен. Существуют ли в действительности разложения типа 2, или, что эквивалентно, несчетные СА-множества без совершенных подмножеств? Эту проблему не удалось решить в рамках классической дескриптивной теории множеств. Более того, исследования в рамках аксиоматической теории множеств показали, что на вопрос о существовании такого СА-множества (или такого разложения на конституанты) вообще нельзя дать определенный ответ в обычном понимании, см. об этом ниже в § 13.3 и 13.4.

Отметим, что аналоги теоремы 4.4.1 и следствия 4.4.2, вообще говоря, не имеют места для конституант А-множеств!

Упражнение 4.4.7. Мы видели, что в любом несчетном польском пространстве $\mathbb{X}$ существует неборелевское А-множество $A \subseteq \mathbb{X}$. Соответственно, $C = \mathbb{X} \smallsetminus A$ — неборелевское СА-множество. Лемма 3.2.2 дает такую регулярную систему $\{F_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ замкнутых множеств этого пространства, что $C = \{x \in \mathbb{X} : F^x \text{ фундировано}\}$, и тогда, для конституант C_ξ, как в определении 4.3.1, мы получим $C = \bigcup_{\xi<\omega_1} C_\xi$, причем вследствие неборелевости число непустых множеств среди конституант C_ξ несчетно по следствию 4.4.2.

Не ограничивая общности, предполагаем, что $F_s = \varnothing$ для любой последовательности $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, содержащей хотя бы один член 0.

Положим $\widehat{F}_s = \mathbb{X}$ для любой последовательности $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, состоящей из одних нулей, и $\widehat{F}_s = F_s$ для всех прочих s. Понятно, что $\widehat{F}^x = F^x \cup \{0^n : n \in \mathbb{N}\}$, где 0^n — последовательность из n нулей. Поэтому все множества $\widehat{F}^x$, $x \in \mathbb{X}$, не фундированы, так что

A-множество $\widehat{A} = \bigcup_{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_m \widehat{F}_{a \restriction m}$, соответствующее этой измененной системе множеств $\widehat{F}_s$, просто совпадает с $\mathbb{X}$.

Докажите, что для A-множества $\widehat{A}$ соответствующие конституанты $\widehat{A}_\xi$ связаны с конституантами C_ξ таким образом, что среди них, как и среди C_ξ, несчетно много непустых. Поэтому аналоги критерия 4.4.2 и теоремы 4.4.1 не имеют места, поскольку $\widehat{A} = \mathbb{X}$ — борелевское множество.

§ 4.5 Борелевские и B-измеримые отображения

Теорема Суслина позволяет нам заполнить один пробел в гл. 2. Речь идет об утверждении (i) теоремы 2.4.3, на которую опирается и доказательство двух последних утверждений теоремы 2.6.2.

Допустим, что в условиях теоремы 2.4.3 отображение $f\colon X \to Y$ борелевское, и докажем, что прообраз $B = f^{-1}[U]$ любого борелевского множества $U \subseteq Y$ — борелевское множество. В самом деле, B является A-множеством согласно следствию 3.3.3. Но и дополнительное множество $X \smallsetminus B$ является A-множеством по той же причине как прообраз дополнительного же множества $Y \smallsetminus U$. Остается сослаться на теорему Суслина 4.4.5. Тем самым, теоремы 2.4.3 и 2.6.2 доказаны полностью.

§ 4.6 Решета

Альтернативный подход к A-множествам и CA-множествам в классической дескриптивной теории множеств был основан на операции решета.

Решетом для данного пространства $\mathbb{X}$ мы будем называть любое семейство $\boldsymbol{R} = \{R_q\}_{q \in \mathbb{Q}}$ замкнутых множеств $R_q \subseteq \mathbb{X}$, индексированное рациональными числами. (Решето понимается в узком смысле; можно рассматривать решета и из незамкнутых множеств — см. об этом ниже.) Имея такое решето, мы можем сопоставить каждой точке $x \in \mathbb{X}$ *сечение* $R^x = \{q : x \in R_q\}$ — некоторое множество рациональных чисел. Оно может быть, а может и не быть вполне упорядоченным в смысле естественного порядка на $\mathbb{Q}$ (т. е. порядка вещественных чисел). В соответствии с этим всё пространство разбивается на два множества:

$$\textit{внешнее}\ \text{множество}: \quad C = \{x \in \mathbb{X} : R^x \ \text{вполне упорядочено}\};$$

$$\textit{внутреннее}\ \text{множество}: \quad A = \{x \in \mathbb{X} : R^x \ \text{не вполне упорядочено}\};$$

внешнее множество в литературе иногда называют еще *просеянным*.[7]

[7] Понятие решета было введено Н. Н. Лузиным в статье [82], но впервые появилось в контексте доказательства в статье [79]. Конструкция, вполне равносильная одному специальному решету, связанному с множествами **IFT** и **WFT**, известна из более ранней работы Лебега [72]. Более подробно об истории вопроса см. в обзорной статье В. А. Успенского [29].

Теорема 4.6.1. *Для любого польского пространства $\mathbb{X}$, внутренние множества решет (состоящих из замкнутых множеств) — это в точности все А-множества, соответственно, внешние множества решет — это в точности все СА-множества данного пространства.*

Доказательство. Взаимозаменяемость решет и А-операции основана на том, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ подобно (порядково изоморфно) множеству $\mathbb{N}^{<\omega} \smallsetminus \{\Lambda\}$ всех кортежей натуральных чисел ненулевой длины с *порядком Лузина – Серпинского*[8] $<_{\text{лс}}$. Этот порядок определяется на $\mathbb{N}^{<\omega}$ так, что $s <_{\text{лс}} t$ в одном из двух случаев: 1) когда кортеж s — собственное продолжение кортежа t, 2) когда найдется такое число $i < \mathtt{min}\{\mathtt{lh}\, s, \mathtt{lh}\, t\}$, что $s(i) < t(i)$, но $s \restriction i = t \restriction i$. Легко видеть, что пустой кортеж Λ является $<_{\text{лс}}$-наибольшим элементом, и потому он удаляется, а без него счетное множество $\mathbb{N}^{<\omega} \smallsetminus \{\Lambda\}$ упорядочивается отношением $<_{\text{лс}}$ плотно (т. е. между любыми двумя элементами имеется третий) и без наибольшего и наименьшего элементов. Это значит, что $\mathbb{N}^{<\omega} \smallsetminus \{\Lambda\}$ с порядком $<_{\text{лс}}$ подобно $\mathbb{Q}$. Пусть $h \colon \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}^{<\omega} \smallsetminus \{\Lambda\}$ — биекция, реализующая это подобие, т. е. условие $p < q$ равносильно $h(p) <_{\text{лс}} h(q)$ для любых $p, q \in \mathbb{Q}$.

Рассмотрим теперь произвольное А-множество $X = \bigcup_{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_m F_{a \restriction m}$, где все множества $F_s \subseteq \mathbb{X}$ ($s \in \mathbb{N}^{<\omega}$) замкнуты. Можно предполагать, что система множеств F_s *регулярна* в смысле замечания 3.2.1. Утверждается, что X совпадает с внутренним множеством A решета $\boldsymbol{R}$, определенного так, что $R_q = F_{h(q)}$ для всех $q \in \mathbb{Q}$.

Пусть $x \in X$, т. е. найдется такое $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $x \in F_{a \restriction m}$ для всех m. Другими словами, множество $F^x = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : x \in F_s\}$ содержит *ветвь*, т. е. подмножество вида $\{a \restriction m : m \in \mathbb{N}\}$. В частности, F^x не является вполне упорядоченным в смысле $<_{\text{лс}}$, а тогда и сечение R^x не вполне упорядочено в смысле порядка вещественных чисел, так что $x \in A$.

Обратно, если $x \in A$, то сечение R^x не вполне упорядочено, следовательно, и множество $F^x = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : x \in F_s\}$ не вполне упорядочено в смысле $<_{\text{лс}}$. Кроме того, из регулярности системы множеств F_s следует, что F^x является деревом в $\mathbb{N}^{<\omega}$. Мы утверждаем, что F^x содержит ветвь: найдется такое $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $a \restriction m \in F^x$ для всех m; отсюда немедленно следует, что $x \in X$.

Итак, остается доказать утверждение о существовании ветви в F^x. Мы знаем, что F^x не вполне упорядочено в смысле $<_{\text{лс}}$. Отсюда легко следует, что найдется такое натуральное число $a(0)$, что множество $F^x_{\langle a(0) \rangle} = \{s \in F^x : s(0) = a(0)\}$ не вполне упорядочено. В частности, $F^x_{\langle a(0) \rangle}$ непусто, откуда благодаря регулярности системы множеств F_s следует, что одноэлементный кортеж $\langle a(0) \rangle$ принадлежит F^x. По аналогичной причине найдется такое натуральное число $a(1)$, что множество

$$F^x_{\langle a(0), a(1) \rangle} = \{s \in F^x : s(0) = a(0) \wedge s(1) = a(1)\}$$

не вполне упорядочено, так что двухэлементный кортеж $\langle a(0), a(1) \rangle$ принадлежит множеству F^x. Продолжая это рассуждение по индукции, по-

[8] Введен в статье [78], иногда называется порядком Клини – Брауэра.

лучим искомую ветвь. □

Внешнее множество C любого решета $\boldsymbol{R}$ (из замкнутых множеств) естественным образом разбивается на *конституанты*

$$C_\xi = \{x \in \mathbb{X} : R^x \text{ вполне упорядочено и имеет порядковый тип } \xi\}\,,$$

$\xi < \omega_1$, которые оказываются борелевскими множествами и подчиняются принципу ограничения, аналогичному теореме 4.4.1.

Пример 4.6.2. В польском пространстве $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ всех множеств $u \subseteq \mathbb{Q}$ (= произведение $2^{\mathbb{Q}}$, см. пример 1.7.6) положим $R_q = \{x \subseteq \mathbb{Q} : q \in u\}$ для каждого $q \in \mathbb{Q}$. Множества R_q открыто-замкнуты, и сечения $R^u = \{q \in \mathbb{Q} : u \in R_q\}$ удовлетворяют условию $R^x = x$. Поэтому соответствующее CA-множество $C \subseteq \mathbb{Q}$ тождественно множеству **WO** всех вполне упорядоченных множеств $u \subseteq \mathbb{Q}$, а соответствующее A-множество $A = \mathscr{P}(\mathbb{Q}) \smallsetminus C$ тождественно множеству **IO** всех множеств $u \subseteq \mathbb{Q}$, не являющихся вполне упорядоченными. Каждая из конституант C_ξ тождественна множеству $\mathbf{WO}_\xi$ всех вполне упорядоченных множеств $u \subseteq \mathbb{Q}$ порядкового типа $\mathtt{otp}\, x = \xi$. Поэтому множества $\mathbf{WO}_\xi$ — борелевские. Точная оценка их борелевского класса дана в работе [94].

На самом деле оба типа разложений на конституанты, т. е. через ранги деревьев и через решета и порядковые типы вполне упорядоченных подмножеств множествоа $\mathbb{Q}$, сводятся к одной общей схеме, указанной Хаусдорфом, см. [57], комментарий к рукописи 559. Предположим, что I — счетное множество с заданным на нем частичным порядком $\prec$. Приведем два конкретных примера:

1) $I = \mathbb{N}^{<\omega}$ и $s \prec t$, когда $t \subset s$ (обратно продолжению),

2) $I = \mathbb{Q}$ и $\prec$ — обычный порядок вещественных чисел.

Для каждого множества $D \subseteq I$ определим *производное множество* D' всех таких $i \in D$, что множество $\{j \in D : j \prec i\}$ пусто. Далее строим убывающую последовательность производных множеств $D^{(\xi)}$, $\xi < \omega_1$, полагаем $D^{(\infty)} = \bigcap_{\xi<\omega_1} D^{(\xi)}$, как в упражнении 4.1.2, и наконец вводим ранг Кантора–Бендиксона $|D|_{\mathsf{CB}}$ множества $D \subseteq I$ как в упражнении 4.1.3.

Назовем множество $D \subseteq I$ приводимым, если $D^{(\infty)} = \varnothing$. Это аналог фундированных деревьев или вполне упорядоченных подмножеств множества $\mathbb{Q}$.

Если теперь задана система $\{F_i\}_{i \in I}$ замкнутых подмножеств некоторого польского пространства $\mathbb{X}$, то мы разбиваем точки $x \in \mathbb{X}$ на два множества в соответствии с приводимостью сечений $F^x = \{i : x \in F_i\}$:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{X} : F^x \text{ неприводимо}\}\,, \\ C &= \{x \in \mathbb{X} : F^x \text{ приводимо}\}\,, \end{aligned}$$

а каждое из них — в свою очередь на конституанты A_ξ и C_ξ в соответствии с рангом $|F^x|_{\mathsf{CB}}$.

Упражнение 4.6.3 (Лузин). 1. Докажите, что в этих условиях множества A и C являются соответственно A-множеством и CA-множеством, а все конституанты A_ξ и C_ξ — борелевскими множествами.

2. Докажите принцип ограничения в этой ситуации, т. е. утверждение, аналогичное теореме 4.4.1. Это более сложное упражнение.

3. Выведите аналог следствия 4.4.6.

§ 4.7 Фундированные отношения

Для строгих отношений частичного порядка $<$ по определению предполагается только транзитивность и то, что $a \not< a$ для всех a из области $\mathtt{dom}\,(<)$ отношения $<$. Такое отношение называется *фундированным*, если любое непустое множество $X \subseteq \mathtt{dom}\,(<)$ имеет $<$-наименьший элемент, или, что в данном случае эквивалентно, нет бесконечно убывающих цепочек $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$. В этом случае аналогично § 4.1 мы можем сопоставить каждому элементу $a \in \mathtt{dom}\,(<)$ его *ранг* $|a|_<$ – некоторый ординал, так, что выполнено условие $|a|_< = \mathtt{sup}_{b<a}(|b|_< + 1)$, в частности $|a|_< = 0$ для $<$-минимальных элементов a. Соответственно определяем *длину*, или *ранг*, фундированного строгого порядка $<$: $|<| = \mathtt{sup}_{a\in\mathtt{dom}\,(<)}(|a|_< + 1)$.

Упражнение 4.7.1. Докажите, что произвольное дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ фундировано в смысле определения 4.1.1, если и только если отношение $s <_T t$, когда $t \subset s$ для $s, t \in T$ (т. е. обратно строгому продолжению), фундировано, и в этом случае пустой кортеж Λ является наибольшим элементом для $<_T$, и мы имеем $|<_T| = |T|_{\mathtt{wf}} = |T| + 1 = |\Lambda|_T + 1 = |\Lambda|_{<_T} + 1$.

Гомоморфизмом частично упорядоченного множества $\langle Q\,; <_Q\rangle$ в частично упорядоченное множество $\langle P\,; <_P\rangle$ называется такое отображение $h\colon Q \to P$, для которого выполнено условие

$$q <_P q' \implies h(q) <_Q h(q')$$

(только в одну сторону!). Утверждение, что если порядки $<_P$ и $<_Q$ фундированы и $|<_Q| < |<_P|$, то существует гомоморфизм $\langle Q\,; <_Q\rangle$ в $\langle P\,; <_P\rangle$, вообще говоря, неверно, однако оно становится верным для случая, когда Q — фундированное дерево, как в упражнении 4.7.1.

Лемма 4.7.2. *Предположим, что $\langle P\,; <\rangle$ — фундированное частично упорядоченное множество, а $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ — фундированное дерево, причем $|T| < |<|$. Тогда найдется гомоморфизм $h\colon \langle T\,; <_T\rangle \to \langle P\,; <\rangle$.*

Доказательство. Определяем значение $h(t) \in P$ для $t \in T$ индукцией по длине $\mathtt{lh}\, t$ так, чтобы выполнялось неравенство $|t|_T \le |h(t)|_<$. По условию если $t = \Lambda$ (так что $\mathtt{lh}\, t = \mathtt{lh}\, \Lambda = 0$, но $|t|_T = |\Lambda|_T = |T|$), то можно выбрать $h(\Lambda) \in P$ так, чтобы было выполнено условие $|T| = |\Lambda|_T \le |h(\Lambda)|_<$. Далее, пусть $t \in T$ и $h(t) \in P$ уже определено, и имеет место неравенство $|t|_T \le |h(t)|_<$. Если при этом $n \in \mathbb{N}$ и $t^\wedge n \in T$, то, очевидно, $|t^\wedge n|_T < |t|_T$, так что можно подобрать значение $p = h(t^\wedge n) \in P$, при котором $p < h(t)$ и $|t^\wedge n|_T \le |p|_<$. В этом состоит индуктивный шаг построения $h(t)$.

Понятно, что h — искомый гомоморфизм. □

Следующая теорема возвращает нас к тематике дескриптивной теории множеств: «длинные» (т. е. несчетной длины) фундированные отношения не могут быть слишком простыми!

Теорема 4.7.3 (Кюнен). *Всякий фундированный строгий частичный порядок $<$ на множестве X в польском пространстве, который есть A-множество как множество пар, имеет длину строго меньше ω_1.*

Доказательство. Как и выше в подобных случаях, можно считать, что $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Заметим, что X есть A-множество как проекция A-множества $<$. Предположим противное, т. е. пусть $<$ имеет длину $\ge \omega_1$. Чтобы получить противоречие, рассмотрим произвольное неборелевское CA-множество $C = \boldsymbol{C}[\mathfrak{F}]$, где $\mathfrak{F} = \{F_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ есть регулярная система замкнутых множеств $F_s \subseteq \mathbb{X}$, как в определении 4.3.1. Положим $F^x = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : x \in F_s\}$ для $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; это множество будет деревом в $\mathbb{N}^{<\omega}$, см. определение 4.3.1. Рассмотрим борелевскую функцию $x \mapsto F^x$ из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в $\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$. Утверждается, что

$$
\begin{aligned}
C \;&=\; \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \text{дерево } F^x \text{ фундировано}\} \;= \\
&=\; \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists \text{ гомоморфизм } \langle F^x\,; <_{F^x}\rangle \to \langle X\,; <\rangle\}\,.
\end{aligned}
$$

Первое равенство следует из упражнения 4.3.6, а второе — из леммы 4.7.2, поскольку, в другую сторону, если дерево F^x **не** фундировано, то никаких гомоморфизмов из F^x в фундированное отношение быть не может.

Обозначим через H польское пространство всех функций h из $\mathbb{N}^{<\omega}$ в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; оно, разумеется, гомеоморфно $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ посредством отождествления $H \sim (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}^{<\omega}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, индуцированного любой биекцией $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$. Итак, C является проекцией множества

$$
P = \{\langle x, h\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times H : h \restriction F^x \text{ есть гомоморфизм в } \langle X\,; <\rangle\}\,.
$$

Мы утверждаем, что P есть A-множество. Если это доказано, то и C оказывается A-множеством по лемме 3.2.3, откуда получаем противоречие с выбором C.

Положим $P' = \bigcap_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}} P_s$, $P'' = \bigcap_{s,t \in \mathbb{N}^{<\omega},\ s \subset t} P_{st}$, и

$$\begin{aligned} P_s &= \{\langle x, h\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times H : s \in F^x \Longrightarrow h(s) \in X\}\,, \\ P_{st} &= \{\langle x, h\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times H : s, t \in F^x \Longrightarrow h(t) < h(s)\}\,. \end{aligned}$$

Тогда $P = P' \cap P''$. Остается проверить, что все множества P_t и P_{st} суть A-множества, после чего результат (что P есть A-множество) вытекает из следствия 3.2.4.

Например, для P_s понятно, что $P_s = P'_s \cup P''_s$, где

$$P'_s = \{\langle x, h\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times H : s \notin F^x\} = (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus F_s) \times H$$

— даже борелевское множество в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times H$, а множество

$$P''_s = \{\langle x, h\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times H : h(s) \in X\} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \{h \in H : h(s) \in X\}$$

может быть представлено как борелевский прообраз A-множества X (поскольку отображение $h \mapsto h(s)$ при любом s является даже непрерывным), и теперь обращение к следствию 3.3.3 завершает доказательство. □

Теорема 4.7.3 позволяет дать еще одно доказательство теоремы 4.4.1 об ограничении индексов. Именно, в обозначениях теоремы 4.4.1 следующее отношение $<$ на Y фундировано и является A-отношением: $x < y$, когда для единственной такой пары ординалов ξ, η, что $x \in C_\xi$ и $y \in C_\eta$, выполнено неравенство $\xi < \eta$. В частности, принадлежность классу A вытекает из следующего результата, который будет получен ниже как теорема 7.2.1 (iv): в данных условиях существует такое бинарное A-отношение L, что для любых $x, y \in C$, условие $\langle x, y\rangle \in L$ равносильно тому, что x встречается в последовательности конституант C_ξ раньше y.

§4.8 Полные предупорядочения и нормы

Предупорядочением некоторого множества X (или *предпорядком на* X) называется всякое бинарное отношение $\le$ на X, удовлетворяющее следующим двум условиям:

транзитивность, т. е. если $x \le y \wedge y \le z$, то $x \le z$, и

рефлексивность, т. е. $x \le x$ для всех x из области X.

При этом, однако, **не** требуется, чтобы из одновременного выполнения условий $x \le y$ и $y \le x$ следовало равенство $x = y$. Таким образом, предупорядочения образуют более широкий класс, чем частичные порядки в обычном смысле.

Если задано предупорядочение $\le$, то определяются:

отношение эквивалентности: $x \sim y$, когда $x \le y \wedge y \le x$; и в силу сказанного выше отношение $\sim$ — это не обязательно равенство;

отношение строгого порядка: $x < y$, когда $x \le y$, но $y \not\le x$.

Предупорядочение называется *линейным*, если дихотомия $x \le y \vee y \le x$ выполнена для всех $x, y, z \in X$. Предупорядочение называется *полным*, если оно линейно и, кроме того (свойство *фундированности*), каждое непустое множество $Y \subseteq X$ содержит $\le$-минимальный элемент, т. е. имеется (не обязательно единственный) элемент $y \in Y$, для которого если $x \in Y$ и $x \le y$, то $x \sim y$.

Например, любая функция $f : X \to \mathtt{Ord}$ (из X в множество ординалов) задает полное предупорядочение $x \le_f y$, когда $f(x) \le f(y)$. Такие функции называются *нормами* на X, а *длиной* $|f| \in \mathtt{Ord}$ нормы f называется порядковый тип множества ординалов $\mathtt{ran}\, f = \{f(x) : x \in X\}$. Конечно, если $|f| = \lambda$, то значения нормы f можно «спрессовать» так, что отношение $\le_f$ сохранится, но область всех значений $\mathtt{ran}\, f$ будет в точности равна $\lambda = \{\xi : \xi < \lambda\}$.

Упражнение 4.8.1. Покажите, что обратно, каждое полное предупорядочение $\le$ множества X индуцирует настоящее полное упорядочение фактормножества $X/{\sim}$, а потому существует норма $f : X \to \mathtt{Ord}$, для которой отношение $\le$ тождественно $\le_f$ и при этом $|f|$ зависит только от $\le$, но не от выбора f.

Следующий пример вводит класс норм на CA-множествах, весьма важный для дескриптивной теории множеств.

Пример 4.8.2. В условиях определения 4.3.1 (или в более общих условиях упражнения 4.3.6), определим норму φ на CA-множестве $C = \bigcup_{\xi<\omega_1} C_\xi$ так, что $\varphi(x) = \xi$ для всех $\xi < \omega_1$ и $x \in C_\xi$. (Напомним, что конституанты C_ξ попарно дизъюнктны.) Понятно, что длина $|\varphi|$ этой нормы не превосходит ω_1.

Подобную норму можно определить и на любом A-множестве $A = \bigcup_{\xi<\omega_1} A_\xi$, однако такие нормы имеют меньше применений.

Подробнее о нормах и предупорядочениях говорится в § 8.3. В частности, о нормах примера 4.8.2 см. доказательство теоремы 8.3.2.

Глава 5

Дополнительные структуры в польских пространствах

Особенностью современной дескриптивной теории множеств является то, что важную роль начинает играть изучение таких математических структур в польских пространствах, которые традиционно не относились к сфере интересов дескриптивной теории множеств. О некоторых из них рассказывается в этой главе. К ним относятся меры (и мы докажем теорему измеримости A-множеств относительно широкого класса мер), отношения эквивалентности (будет доказана теорема о 0-1 законе) и действия борелевских групп.

§ 5.1 Меры

Напомним, что *борелевской мерой* на борелевском множестве X (как обычно, X — множество некоторого польского пространства $\mathbb{X}$) называется любая σ-аддитивная функция μ, определенная на всей σ-алгебре $\mathbf{Bor}(X)$ борелевских множеств $X' \subseteq X$ и со значениями в промежутке $[0, +\infty]$ (включая и правый конец)[1]. Таким образом, требуется, чтобы равенство

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(Y_n)$$

было выполнено для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $Y_n \in \mathbf{Bor}(X)$. В этом случае мера, изначально определенная на борелевских множествах, естественным образом продолжается и на многие неборелевские множества.

Определение 5.1.1. Множество $A \subseteq X$ (не обязательно борелевское) называется *μ-измеримым*, если существуют такие борелевские множества U, D, что $\mu(D) = 0$ и $A \triangle U \subseteq D$. Если это условие выполнено, то для множества A естественным образом определяется значение меры $\mu(A) = \mu(D)$.

Упражнение 5.1.2. Предполагая, что μ — борелевская мера μ на борелевском множестве X, определим для каждого множества $Y \subseteq X$ (не обязательно борелевского) *верхнюю* меру $\mu^*(Y)$ и *нижнюю* меру $\mu_*(Y)$ как точную нижнюю грань мер $\mu(G)$, где $G \subseteq X$ — борелевское множество, включающее Y, и соответственно точную верхнюю грань мер $\mu(F)$, где $F \subseteq Y$ — борелевское множество.

Докажите, используя σ-аддитивность, что если множество $Y \subseteq X$ измеримо в смысле определения 5.1.1, то $\mu^*(Y) = \mu_*(Y) = \mu(Y))$.

Докажите, что обратно, если $\mu^*(Y) = \mu_*(Y)$ и это значение конечно, то множество Y измеримо и $\mu(Y) = \mu^*(Y) = \mu_*(Y)$.

Покажите, что требование конечности в обратном утверждении существенно, например, для обычной лебеговой меры на $\mathbb{R}$.

Определение 5.1.3. Борелевская мера μ на множестве X является:

σ-конечной, если $X = \bigcup_n X_n$, где все множества $X_n \subseteq X$ борелевские и $\mu(X_n) < +\infty$, — обычно рассматриваются именно такие меры;

вероятностной, если $\mu(X) = 1$.

---

[1] Иногда добавляется требование, чтобы любое компактное множество $C \subseteq X$ имело конечную меру. Это требование имеет определенный смысл, которого мы здесь не будем касаться.

Подчеркнем, что вероятностные (и вообще все борелевские) меры по определению считаются σ-аддитивными. Свойство σ-конечности эквивалентно (для борелевских мер на польских пространствах) требованию, чтобы мера каждого одноточечного множества $X = \{x\}$ была конечна.

Определение 5.1.4. Обозначим через $\boldsymbol{P}(X)$ множество всех вероятностных мер на X. Интересно, что само множество $\boldsymbol{P}(X)$ превращается в польское пространство посредством соответствующей метрики, о чем см. в книге [68].

Приведем несколько примеров борелевских мер.

Пример 5.1.5. Мера Лебега на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Её ограничение на борелевские множества единичного отрезка — вероятностная мера.

Пример 5.1.6. Даже на конечном множестве можно определить континуум вероятностных мер. В сущности, вероятностная мера на конечном множестве $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — это то же самое, что и разбиение $1 = p_1 + \cdots + p_n$ на n неотрицательных вещественных чисел. Поэтому каждое число p, $0 \le p \le 1$, определяет вероятностную меру на двухэлементном множестве $2 = \{0, 1\}$, которая присваивает значение p множеству $\{0\}$ и значение $1 - p$ множеству $\{1\}$: эта мера будет называться $(p, 1-p)$-*мерой*. В частности, если $p = \frac{1}{2}$, то $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-*мера* присваивает значение $\frac{1}{2}$ каждому из множеств $\{0\}$ и $\{1\}$.

Выбор определенной меры среди множества мер на данном множестве может быть продиктован требованием инвариантности относительно той или иной группы преобразований. Например, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-мера — та единственная из всех вероятностных мер на двухэлементном множестве, которая инвариантна относительно перестановки элементов. Мера Лебега на $\mathbb{R}$ — единственная (с точностью до мультипликативной константы) борелевская мера на $\mathbb{R}$, инвариантная относительно сдвигов и удовлетворяющая требованию конечности мер всех конечных интервалов.

Пример 5.1.7 (произведения мер). Допустим, что I — счетное множество и $0 \le p \le 1$. Через λ_p обозначается произведение I экземпляров $(p, 1-p)$-меры на множестве $2 = \{0, 1\}$. Другими словами, λ_p — единственная такая вероятностная мера на 2^I, что для любой пары дизъюнктных конечных множеств $u, v \subseteq I$ множество

$$Z_{uv} = \{a \in 2^I : \forall\, i \in u\,(a(i) = 0) \wedge \forall\, i \in v\,(a(i) = 1))\}$$

удовлетворяет условию $\lambda_p(Z_{uv}) = p^n(1-p)^k$, где $n = \mathtt{card}\, u$ и $k = \mathtt{card}\, v$. В частности, если $p = \frac{1}{2}$, то $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_{1/2}$ — это единственная вероятностная мера на 2^I такая, что для любой пары дизъюнктных конечных множеств $u, v \subseteq I$ множество Z_{uv} удовлетворяет условию $\boldsymbol{\lambda}(Z_{uv}) = p^m$, где $m = \mathtt{card}\, u + \mathtt{card}\, v$.

§ 5.2 Регулярность мер

По определению борелевская мера вполне определяется своими значениями на борелевских множествах. Следующая лемма показывает, что любая борелевская σ-конечная мера на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (тогда это верно и для $2^{\mathbb{N}}$) определяется своими значениями на открытых покрытиях и замкнутых подмножествах. Это свойство, в различных вариантах, называется *регулярностью* рассматриваемой меры.

Теорема 5.2.1. *Пусть μ — борелевская σ-конечная мера на польском пространстве $\mathbb{X}$. Тогда*

(i) *для каждого борелевского множества $X \subseteq \mathbb{X}$ найдутся такое σ-компактное (следовательно, $\mathbf{F}_\sigma$) множество F и такое дополнительное к σ-компактному (значит, $\mathbf{G}_\delta$) множество G, что $F \subseteq X \subseteq G$ и $\mu(G \smallsetminus F) = 0$;*

(ii) *если $\mathbb{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то для каждого борелевского множества $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое замкнутое множество F и такое открытое множество G такие, что $F \subseteq X \subseteq G$ и $\mu(G \smallsetminus F) \leq \varepsilon$;*

(iii) *более того, в условиях* (ii) *множество F можно выбрать замкнутым и σ-компактным, а множество G — открытым и дополнительным к σ-компактному*;

(iv) *если $\mu(X) < +\infty$, то в условиях* (ii) *множество F можно выбрать компактным, а множество G — дополнительным к компактному.*

Доказательство. Мы начнем с утверждения (ii). *Шаг 1* состоит в сведéнии общего случая к случаю конечного значения меры $\mu(X)$. Утверждается, что

(∗) существует разбиение пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \bigcup_n U_n$ на счетное число (попарно дизъюнктных) *открытых* множеств конечной меры.

Чтобы доказать это положение, рассмотрим множество S всех таких кортежей $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, что соответствующий бэровский интервал

$B_s = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset x\}$ удовлетворяет неравенству $\mu(B_s) < +\infty$. Пусть S' — множество всех $\subset$-минимальных кортежей $s \in S$. Из σ-конечности меры μ следует равенство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{s \in S} B_s = \bigcup_{s \in S'} B_s$. Также очевидно, что $B_s \cap B_t = \varnothing$ для любой пары $s \neq t$ в S'. Этим вывод утверждения $(*)$ закончен.

Понятно, что множества U_n из $(*)$ не только открыты, но и замкнуты. Рассмотрим соответствующее разбиение данного множества X на (борелевские) множества $X_n = X \cap U_n$. Положим $\mu_n(Y) = \mu(Y \cap U_n)$ для любого n и всех борелевских множеств Y; тогда μ_0, $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — борелевские конечные меры на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Предполагая, что утверждение (ii) выполнено для конечных мер μ_n, мы находим для всякого n такое замкнутое множество F_n и такое открытое G_n, что $F_n \subseteq X_n \subseteq G_n$ и $\mu_n(G_n \smallsetminus F_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n-2}$. Положим $G = \bigcup_n G_n$ и $F = \bigcup_n F_n$. Тогда $F \subseteq X \subseteq G$ и $\mu(G \smallsetminus F) < \varepsilon/2$: в самом деле, $G \smallsetminus F \subseteq \bigcup_k (G_k \smallsetminus F_k)$ и $\mu(G_n \smallsetminus F_n) = \mu_n(G_n \smallsetminus F_n) < \varepsilon \cdot 2^{-k-2}$. Остается заметить, что множество F замкнуто, поскольку составляющие его замкнутые множества F_n отделены семейством попарно дизъюнктных открыто-замкнутых множеств U_n.

Шаг 2: в предположении, что мера μ конечна, доказываем (ii) индукцией по борелевскому построению X из замкнутых множеств.

Рассмотрим замкнутое множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Можно взять $F = X$. Что касается G, напомним, что все замкнутые множества являются множествами класса $\mathbf{G}_\delta$ (см. доказательство леммы 2.2.1). Таким образом, $X = \bigcap_n G_n$, где все G_n открыты. Можно считать, что $G_{n+1} \subseteq G_n$, $\forall n$. Тогда $\mu(X) = \mathtt{lim}_{n\to\infty} \mu(G_n)$ согласно счетной аддитивности и конечности меры. Теперь можно взять $G = G_n$, где n столь велико, что $\mu(G_n \smallsetminus X) < \varepsilon$.

Индуктивный переход от X к дополнению $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus X$ тривиален.

Наконец, докажем утверждение (ii) для множества $X = \bigcup_n X_n$ в предположении, что для множеств $X_n \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ результат уже получен. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждого n имеются такое замкнутое множество F_n и такое открытое множество G_n, что $F_n \subseteq X_n \subseteq G_n$ и $\mu(G_n \smallsetminus F_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n-2}$. Положим $G = \bigcup_n G_n$, а в качестве F возьмем подходящее конечное подобъединение полного объединения $\bigcup_n F_n$, пользуясь конечностью меры $\mu(X)$.

(iv) Имея замкнутое множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mu(X) < +\infty$, найдем такое компактное множество $F \subseteq X$, что $\mu(X \smallsetminus F) < \varepsilon$ для заданного $\varepsilon > 0$. В силу σ-аддитивность меры, найдется натуральное число n_0, для которого множество $X_0 = \{x \in X : x(0) < n_0\}$ удовлетворяет неравенству $\mu(X \smallsetminus X_0) < \varepsilon/2$. Затем находим n_1 такое, что множество $X_1 = \{x \in X_0 : x(1) < n_1\}$ удовлетворяет условию $\mu(X_0 \smallsetminus X_1) < \varepsilon/4$. И так далее. Пересечение $F = \bigcap_n X_n \subseteq X$ компактно и является искомым множеством.

(iii) Имея замкнутое множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, найдем такое замкнутое σ-компактное множество $Y \subseteq X$, что $\mu(X \smallsetminus F) < \varepsilon$ для заданного $\varepsilon > 0$. Воспользуемся разбиением (∗). По доказанному для каждого n найдется компактное множество $Y_n \subseteq X \cap U_n$, для которого $\mu((X \cap U_n) \smallsetminus Y_n) < \varepsilon\, 2^{n+1}$. Множество $Y = \bigcup_n Y_n \subseteq X$ замкнуто, σ-компактно, и удовлетворяет неравенству $\mu(X \smallsetminus Y) < \varepsilon$.

Наконец, (i). Для пространства $\mathbb{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ искомый результат легко следует из (iii) при помощи разбиения (∗). Перенос на произвольное польское пространство $\mathbb{X}$ происходит так. Мы знаем, что $\mathbb{X}$ есть образ $\mathbb{X} = f[P]$ некоторого замкнутого множества $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ при некотором непрерывном взаимно однозначном отображении $f \colon P \to \mathbb{X}$ по теореме 2.6.2. Тогда f-образы и f-прообразы борелевских множеств являются борелевскими множествами по теореме 2.4.3, так что f — борелевский изоморфизм P на $\mathbb{X}$, который, очевидно, переводит (при обращенном действии) меру μ в некоторую борелевскую σ-конечную меру μ' на P, а тогда и на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (считаем, что мера дополнительного множества $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus P$ равна 0). Этим и достигается требуемое сведéние к случаю пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. □

§ 5.3 Измеримость и свойство Бэра А-множеств

Понятно, что все борелевские множества измеримы и имеют свойство Бэра. Следующая теорема распространяет этот результат на более широкий класс А-множеств. Теорема принадлежит Н. Н. Лузину (см. [80]); доказательство для измеримости впервые появилось в работе [78], а для свойства Бэра в [79]. Наше доказательство использует метод, предложенный Е. А. Селивановским для доказательства нижеследующей теоремы 5.3.3.

Теорема 5.3.1. *Любое А-множество X польского пространства $\mathbb{X}$ имеет свойство Бэра в $\mathbb{X}$, а также измеримо в смысле каждой борелевской σ-конечной меры на $\mathbb{X}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{I}$ либо идеал всех тощих борелевских множеств в $\mathbb{X}$, либо идеал всех множеств меры 0 в смысле данной борелевской σ-конечной меры на $\mathbb{X}$. (Случай σ-конечной меры легко сводится к случаю конечной меры.) Требуется доказать, что каждое А-множество A, или, что эквивалентно, каждое СА-множество C в $\mathbb{X}$, *$\mathscr{I}$-измеримо* в том смысле, что найдется такое борелевское множество $B \subseteq \mathbb{X}$, что симметрическая разность $C \bigtriangleup B$ накрывается множеством из $\mathscr{I}$.

Рассмотрим произвольное А-множество $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и дополнительное СА-множество $C = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus A$; измеримость этого последнего мы и будем доказывать. По определению A представимо в виде $A = \bigcup_{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_{a \restriction m}$, где множества $F_s \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $(s \in \mathbb{N}^{<\omega})$ замкнуты и образуют регулярную систему в смысле § 1.5. Следуя определению 4.3.1, положим $F^x = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : x \in F_s\}$ для $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; вследствие регулярности системы эти множества будут деревьями в $\mathbb{N}^{<\omega}$.

При этом $x \in C$ эквивалентно тому, что дерево F^x фундировано.

Напомним, что для всякого дерева $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ определяется производное дерево $T' = T \smallsetminus \mathtt{Max}\, T$, полученное удалением из дерева T его концевых вершин. Если $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то определяется последовательность производных деревьев $F^x(\xi)$, $\xi < \omega_1$, дерева F^x так, как указано в § 4.1, т. е. $F^x(0) = F^x$, $F^x(\xi+1) = (F^x(\xi))'$, а на предельных шагах берем пересечение.

Упражнение 5.3.2. Докажите индукцией по ξ, что множества

$$F(\xi) = \{\langle x, s\rangle : x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \wedge s \in F^x(\xi)\} \quad \text{и} \quad F_s(\xi) = \{x : \langle x, s\rangle \in F(\xi)\},$$

где $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, являются борелевскими.

Из построения следует соотношение $F_s(\xi) \subseteq F_s(\eta)$ при $\eta < \xi$ и любом $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Поэтому по выбору идеала $\mathscr{I}$ существует такой ординал $\xi < \omega_1$, что $F_s(\xi) \smallsetminus F_s(\eta) \in \mathscr{I}$ при $\xi \le \eta$ и $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Теперь мы утверждаем, что объединение $U = \bigcup_{\eta > \xi} C_\eta$ всех конституант $C_\eta = \{x \in C : |F^x| = \eta\}$ множества C с индексами $\eta > \xi$ накрывается множеством из $\mathscr{I}$. Этого, очевидно, вполне достаточно для $\mathscr{I}$-измеримости множества C, поскольку $C = \bigcup_{\eta < \omega_1} C_\eta$, а множество $C' = \bigcup_{\eta \le \xi} C_\eta$ является борелевским.

Докажем утверждение о накрытии. Пусть $x \in U$. Это означает, что дерево F^x фундировано и $|F^x| > \xi$. Тем самым в терминах производных деревьев имеем $F^x(\xi+1) \subsetneqq F^x(\xi)$, откуда следует, что $x \in F_s(\xi) \smallsetminus F_s(\xi+1)$ хотя бы для одного кортежа $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Этим рассуждением доказано включение $D \subseteq \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}} (F_s(\xi) \smallsetminus F_s(\xi+1))$. Но объединение в правой части принадлежит $\mathscr{I}$ по выбору ξ. □

Теорема 5.3.3. *В условиях определения 4.3.1 разложения на конституанты $A = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$ и $C = \bigcup_{\xi < \omega_1} C_\xi$ аддитивны относительно меры и категории, в том смысле, что для любой борелевской меры μ на $\mathbb{X}$ найдется ординал $\zeta < \omega_1$, для которого «хвосты» разложений $\bigcup_{\zeta \le \xi < \omega_1} A_\xi$ и $\bigcup_{\zeta \le \xi < \omega_1} C_\xi$ суть тощие множества и множества μ-меры 0.*

Доказательство. Для конституант C_ξ задача решается достаточно элементарным применением принципа ограничения 4.4.1. Например, для случая меры мы знаем, что данное СА-множество C

является μ-измеримым по теореме 5.3.1, откуда следует, что найдется такое борелевское (а тогда и А-) множество $B \subseteq C$, что разность $C \smallsetminus B$ имеет μ-меру 0. Но B накрывается счетным числом конституант по теореме 4.4.1.

Для конституант A_ξ (разложение А-множеств на конституанты) такое рассуждение не проходит, поскольку для них нет принципа ограничения, аналогичного 4.4.1, — см. упражнение 4.4.7. Поэтому здесь используется отдельное рассуждение, впервые указанное Е. А. Селивановским в работе [106] для разложений при помощи решет (как в § 4.6) и переработанное Серпиньским в [108] для разложений на основе определения 4.3.1. В этом втором случае мы докажем, сразу для множеств $B_\xi = A_\xi \cup C_\xi$, что найдется ординал $\zeta < \omega_1$, для которого «хвост» $B_{>\zeta} = \bigcup_{\zeta<\xi<\omega_1} B_\xi$ есть множество μ-меры 0. (Доказательство для категории совершенно аналогично.)

Обратимся к множествам $C_\xi(s) = \{x \in \mathbb{X} : |s|_{F^x} \le \xi\}$ $(s \in \mathbb{N}^{<\omega})$, борелевость которых установлена в доказательстве леммы 4.3.4. Если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, то множества $C_\xi(s)$, $\xi < \omega_1$, образуют возрастающую последовательность, а потому найдется такой ординал ζ, что $\mu(C_\xi(s) \smallsetminus C_\zeta(s)) = 0$ для всех $\xi > \zeta$ и всех $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ (поскольку $\mathbb{N}^{<\omega}$ счетно). С другой стороны, условие $x \in B_{>\zeta}$ равносильно существованию кортежа $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, для которого $|s|_{F^x} = \zeta + 1$. Тем самым,

$$\begin{aligned} x \in B_{>\zeta} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, s \in \mathbb{N}^{<\omega} (|s|_{F^x} \not\le \zeta \wedge |s|_{F^x} \le \zeta + 1) \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in C_{\zeta+1}(s) \smallsetminus C_\zeta(s)\,, \end{aligned}$$

так что $B_{>\zeta} = \bigcup_{s\in\mathbb{N}^{<\omega}} (C_{\zeta+1}(s) \smallsetminus C_\zeta(s))$. Отсюда по выбору ζ и следует искомый результат. □

Упражнение 5.3.4. Докажите аналогичный результат для конституант, определяемых из решет, а также в рамках того обобщенного подхода, который изложен в конце § 4.6.

§ 5.4 Нерегулярные множества

Мы знаем (см. теоремы 3.4.1 и 5.3.1), что любое А-множество X в польском пространстве $\mathbb{X}$ имеет следующие три свойства:

свойство совершенного ядра: если множество X несчетно, то оно имеет совершенное подмножество;

свойство Бэра: свойство Бэра для X, как в § 1.2;

абсолютная измеримость: X измеримо в смысле любой σ-конечной меры на данном пространстве $\mathbb{X}$.

Эти свойства объединяются под общим названием *свойства регулярности*. Существуют ли «нерегулярные» множества (конечно, не в классе A-множеств), т. е. те, которые не обладают одним (или всеми) из этих свойств? Давно известен отрицательный ответ на этот вопрос, причем важной особенностью здесь является то, что искомые контрпримеры получаются только при помощи аксиомы выбора.

Теорема 5.4.1. *В любом несчетном польском пространстве $\mathbb{X}$ существует множество Бернштейна X, т. е. такое множество, что ни само X, ни его дополнение $\mathbb{X} \smallsetminus X$ не содержат совершенного подмножества.*

Доказательство. Из простых мощностных соображений следует, что совокупность $\mathscr{B}$ всех борелевских множеств $B \subseteq \mathbb{X}$ имеет мощность континуума $\mathfrak{c}$; пусть $\mathscr{B} = \{B_\xi : \xi < \kappa\}$, где $\kappa = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Мы построим две трансфинитные последовательности точек x_ξ и y_ξ в $\mathbb{X}$, $\xi < \kappa$, для которых $x_\xi \neq x_\eta$ и $y_\xi \neq y_\eta$ при $\xi \neq \eta$, кроме того, $x_\xi \neq y_\eta$ для всех $\xi, \eta < \kappa$, а также если множества B_ξ и $C_\xi = \mathbb{X} \smallsetminus B_\xi$ для любого $\xi < \kappa$ оба несчетны (а тогда оба имеют мощность континуум $\kappa = 2^{\aleph_0}$), то $x_\xi \in B_\xi$ и $y_\xi \in C_\xi$.

Собственно, выполнимость такого построения следует из того, что если $\xi < \kappa$, то множество $X_\xi = \{x_\xi : \xi < \kappa\} \cup \{y_\xi : \xi < \kappa\}$ имеет мощность $\mathtt{card}\, X_\xi = \mathtt{card}\, \xi < \kappa$ (строго), а потому если каждое из двух множеств B_ξ, C_ξ имеет мощность κ, то можно выбрать $x_\xi \in B_\xi \smallsetminus X_\xi$ и $y_\xi \in C_\xi \smallsetminus X_\xi$. Здесь, конечно, используется аксиома выбора.

По построению множество $X = \{x_\xi : \xi < \kappa\}$ является множеством Бернштейна. □

Упражнение 5.4.2. Докажите, что если X — множество Бернштейна в польском пространстве, то для него не верно ни одно из трех приведенных выше свойств регулярности, если мера в последнем свойстве исчезающая в точках.[2]

§ 5.5 Отношения эквивалентности

Отношением эквивалентности на множестве X называется любое транзитивное, рефлексивное и симметричное бинарное отношение E на X. На теоретико-множественном языке, любое бинарное отношение понимается как множество пар, т. е. записи $x \,\mathsf{E}\, y$ и $\langle x, y\rangle \in \mathsf{E}$ означают одно и то же. Соответственно, отношение эквивалентности E называется *борелевским*, если множество пар $\{\langle x, y\rangle : x \,\mathsf{E}\, y\}$ является борелевским множеством в произведении $X \times X$.

[2] Без этого требования теорема, разумеется, неверна в отношении последнего свойства, т. е. абсолютной измеримости.

Если x принадлежит *области* $X = \mathsf{dom}\,\mathsf{E}$ данного отношения эквивалентности E, то определяется класс E-*эквивалентности* произвольного элемента $x \in X$

$$[x]_{\mathsf{E}} = \{y \in X : x \mathrel{\mathsf{E}} y\},$$

а *насыщением* множества $Y \subseteq X$ называется множество

$$[Y]_{\mathsf{E}} = \{y \in X : \exists\, x \in Y\ (x \mathrel{\mathsf{E}} y)\} = \bigcup\nolimits_{x \in Y} [x]_{\mathsf{E}}\,.$$

Наконец, *фактормножество* X/E состоит из всех классов эквивалентности $[x]_{\mathsf{E}}$ элементов x данного множества X.

Главный вопрос, возникающий в дескриптивной теории множеств в связи с отношениями эквивалентности на множествах польских пространств, состоит в *эффективном сравнении мощностей* возникающих при этом фактормножеств вида X/E. Эффективность здесь означает, что те отображения, которые реализуют сравнение мощностей, должны быть явно определены, например даны конкретным построением, в противоположность, скажем, отображениям, существование которых доказывается при помощи аксиомы выбора. Обычно в этом качестве рассматриваются борелевские (или, что эквивалентно, B-измеримые, см. определение 2.4.1) отображения.

Определение 5.5.1. Предположим, что E и F — отношения эквивалентности на множествах X и Y соответственно. Отображение $\vartheta \colon X \to Y$ называется *редукцией* E к F, если для всех $x, x' \in X$ выполнена эквивалентность

$$x \mathrel{\mathsf{E}} x' \iff \vartheta(x) \mathrel{\mathsf{F}} \vartheta(x')\,.$$

Если при этом множества X, Y являются борелевскими в некоторых польских пространствах, а отображение ϑ — борелевским отображением, то ϑ называется *борелевской редукцией*, и говорят, что отношение E *борелевски сводится* к F; это записывается так: $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$.[3] Вводятся производные отношения:

$\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ и $\mathsf{F} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, — *борелевская эквивалентность*;

$\mathsf{E} <_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, если $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, но $\mathsf{F} \not\leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, — *строгая сводимость*.

Упражнение 5.5.2. Докажите, что $\leqslant_{\mathrm{B}}$ является отношением частичного порядка на борелевских отношениях эквивалентности.

Упражнение 5.5.3. Покажите, что любая редукция $\vartheta \colon X \to Y$ отношения эквивалентности E на множестве X к отношению F на множестве Y индуцирует инъекцию $\bar\vartheta \colon X/\mathsf{E} \to Y/\mathsf{F}$ соответствующих фактормножеств, а именно $\bar\vartheta([x]_{\mathsf{E}}) = [\vartheta(x)]_{\mathsf{F}}$.

[3] Индекс в указывает на борелевость отображения ϑ.

Следовательно, существование такой редукции ϑ как в упражнении 5.5.3 прямо означает, что (обычная, канторова) мощность фактормножества X/E мажорируется мощностью второго фактормножества Y/F (возможно, нестрого).

Случай, когда отображение θ в определении 5.5.1 является борелевским, приводит к следующему определению *борелевской мощности* для фактормножеств:

Определение 5.5.4. Мы говорим, что борелевская мощность фактормножества X/E *мажорируется* борелевской мощностью фактормножества Y/F, когда $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$.

В этой связи иногда даже пишут $X/\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} Y/\mathsf{F}$ вместо $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$.

Таким образом, аналогично понятию мощности в канторовской теории множеств, борелевская мощность не определяется как конкретный математический объект, а вместо этого дается определение того, что одна борелевская мощность мажорируется другой борелевской мощностью.

Равенство $X/\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} Y/\mathsf{F}$ борелевских мощностей определяется как $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, т. е. через комбинацию двух противоположных неравенств $X/\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} Y/\mathsf{F}$ и $Y/\mathsf{F} \leqslant_{\mathrm{B}} X/\mathsf{E}$, а не через существование определенного рода биекции, как для мощностей в канторовской теории множеств. Здесь имеет место различие с теорией канторовых мощностей. В последней из наличия инъекций (взаимно однозначных отображений) $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$ по теореме Шрёдера–Бернштейна следует существование биекции $\beta\colon A \to B$. Однако в случае, когда $A = X/\mathsf{E}$, $B = Y/\mathsf{F}$, $f = \bar{\vartheta}$, $g = \bar{\tau}$, а ϑ и τ являются борелевскими редукциями соответственно E к F и F к E, доказательство теоремы Шрёдера–Бернштейна, конечно, дает биекцию из X/E на Y/F, но не приводит к борелевской биекции X на Y, в обе стороны сводящей E и F друг к другу, т. е. не приводит к борелевскому изоморфизму.

Упражнение 5.5.5. Проанализируйте доказательство теоремы Шрёдера–Бернштейна в указанном случае.

§ 5.6 О структуре борелевских мощностей

Исследование $\leqslant_{\mathrm{B}}$-структуры борелевских и некоторых более сложных отношений эквивалентности в польских пространствах относится к сфере интересов *дескриптивной динамики* — области математики, которая очень тесно связана как с дескриптивной теорией множеств, так и с теорией меры, эргодической теорией и алгеброй. Наша книга [13] дает введение в дескриптивную динамику и излагает ряд основополагающих теорем о борелевской сводимости. В этой книге (гл. 12) мы представим две центральные теоремы в этой области, называемые дихотомическими теоремами. А в этом параграфе рассматриваются некоторые более элементарные понятия и результаты в связи со структурой борелевских мощностей, т. е., другими словами, $\leqslant_{\mathrm{B}}$-структурой борелевских отношений эквивалентности.

Прежде всего отметим, что среди борелевских мощностей имеются те, которые вполне можно отождествить с некоторыми обычными, например конечными, мощностями. Пусть Δ_X обозначает отношение равенства на множестве X, рассматриваемое как отношение эквивалентности.

Упражнение 5.6.1. Пусть X, Y — два конечных точечных множества с числом элементов m и n соответственно. Докажите, что условие $\Delta_X \leqslant_{\mathrm{B}} \Delta_Y$ равносильно неравенству $m \le n$, и соответственно условие $\Delta_X \sim_{\mathrm{B}} \Delta_Y$ равносильно равенству $m = n$.

Это позволяет ввести $\boldsymbol{n}$ как символ, объединяющий отношения эквивалентности Δ_X на любом n-элементном точечном множестве X, а также соответствующие фактормножества и их борелевскую мощность. Собственно говоря, $\boldsymbol{n}$ естественно отождествляется с самим натуральным числом n. Аналогично, можно ввести $\boldsymbol{\aleph}_0$ как символ, объединяющий отношения эквивалентности Δ_X на любом счетном (бесконечном!) точечном множестве X, соответствующие фактормножества и их борелевскую мощность, и $\boldsymbol{\aleph}_0$ естественным образом отождествляется с обычной счетной мощностью $\aleph_0$. Разумеется, для отношений равенства на конечных и счетных множествах всё это достаточно тривиально.

Наконец, введем $\boldsymbol{\mathfrak{c}}$ как борелевскую мощность фактормножества по отношению равенства $\Delta_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ на бэровском пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — формально $\boldsymbol{\mathfrak{c}} \sim_{\mathrm{B}} \Delta_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$; — это естественно отождествляется с обычной мощностью континуума $\mathfrak{c}$.

Предложение 5.6.2. *Пусть $m < n \in \mathbb{N}$. Тогда $\boldsymbol{m} <_{\mathrm{B}} \boldsymbol{n} <_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\aleph}_0 <_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\mathfrak{c}}$. Далее, пусть E — произвольное борелевское отношение эквивалентности на (борелевском) множестве X. Тогда*

(i) *либо $\boldsymbol{n} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, либо $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \boldsymbol{m}$ для одного из чисел $m < n$;*

(ii) *либо $\boldsymbol{\aleph}_0 \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, либо $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \boldsymbol{m}$ для одного из чисел $m \in \mathbb{N}$;*

(iii) *либо $\boldsymbol{\mathfrak{c}} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, либо $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\aleph}_0$, либо $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \boldsymbol{m}$ для одного из чисел $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Все утверждения, кроме (iii), в сущности тривиальны. Для примера, докажем (ii). Допустим, что X имеет конечное число n классов E-эквивалентности. Выберем в каждом из классов по точке, и пусть $X' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество всех выбранных точек. Тождественное отображение $x_i \mapsto x_i$ показывает, что $\mathsf{\Delta}_{X'} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, а отображение, переводящее каждую точку $x \in X$ в ту единственную точку $x_i \in X'$, для которой $x \mathrel{\mathsf{E}} x_i$, показывает, что $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{\Delta}_{X'}$, и мы получаем $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \boldsymbol{n}$.

Теперь допустим, что X имеет бесконечное число классов E-эквивалентности. Возьмем бесконечное множество $X' = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \subseteq X$ попарно различных точек. Тождественное отображение $x_i \mapsto x_i$ показывает, что $\mathsf{\Delta}_{X'} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, откуда $\boldsymbol{\aleph}_0 \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$.

Что касается утверждения (iii), то оно гораздо более сложное; мы выведем его в § 12.1 на основе первой дихотомической теоремы (теорема 12.1.1). □

Сразу возникает вопрос: существуют ли борелевские мощности строго больше континуальной, или, что эквивалентно, существуют ли борелевские отношения эквивалентности E, удовлетворяющие неравенству $\mathsf{\Delta}_{\mathbb{N}^\mathbb{N}} <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ (строго)? Несколько неожиданно мы довольно легко получаем положительный ответ, см. лемму 5.6.7. .

Определение 5.6.3. Отношение эквивалентности E на пространстве $\mathbb{X}$ называется *гладким*[4], если существует такая борелевская функция $f\colon \mathscr{X} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$, что $x \mathrel{\mathsf{E}} y \iff f(x) = f(y)$.

Другими словами, гладкость равносильна тому, что $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{\Delta}_{\mathbb{N}^\mathbb{N}}$.

Разделение отношений эквивалентности на гладкие и негладкие имеет важное значение, в частности в связи с некоторыми задачами для групп борелевских преобразований и задачами теории меры.

Пространство $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ в определении может быть заменено любым несчетным польским пространством $\mathbb{X}$ (а равенство $\mathsf{\Delta}_{\mathbb{N}^\mathbb{N}}$ — отношением $\mathsf{\Delta}_{\mathbb{X}}$), поскольку все эти пространства борелевски изоморфны по теореме 2.6.2.

Упражнение 5.6.4. 1. Докажите следующий критерий гладкости: отношение эквивалентности E является гладким, если и только если существует такое семейство борелевских множеств A_n, что $x \mathrel{\mathsf{E}} y \iff \forall n\, (x \in A_n \iff y \in A_n)$ (*разделяющее семейство*).

2. Докажите, что если E, F — борелевские отношения эквивалентности, причем $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ и отношение F гладкое, то E также является гладким отношением.

3. Докажите, используя предложение 5.6.2 (iii), что если E — гладкое борелевское отношение эквивалентности, то либо $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \mathfrak{c}$ (а $\mathfrak{c} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{\Delta}_{\mathbb{N}^\mathbb{N}}$), либо $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\aleph}_0$, либо $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \boldsymbol{m}$ для одного из чисел $m \in \mathbb{N}$,

[4] Или сглаженным, *smooth* в англоязычной литературе.

так что все гладкие борелевские отношения эквивалентности попарно сравнимы отношением $\leqslant_{\mathrm{B}}$.

4. Докажите, что если E — **не**гладкое борелевское отношение эквивалентности, то с необходимостью $\mathfrak{c} <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$.

К категории гладких относятся, например, отношения эквивалентности между матрицами, возникающие из их приводимости к одной и той же канонической форме. А вот два примера **не**гладких отношений.

Пример 5.6.5. Отношение эквивалентности E_0 определяется на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (тем самым и на $2^{\mathbb{N}}$) так: $a \mathbin{\mathsf{E}_0} b$, когда $a(n) = b(n)$ для всех, кроме, возможно, конечного числа, значений $n \in \mathbb{N}$.

Отношение эквивалентности Витали $\mathtt{Vit}$ определяется на вещественной прямой $\mathbb{R}$ так: $x \mathbin{\mathtt{Vit}} y$, когда разность $x - y$ рациональна.

Упражнение 5.6.6. Докажите, что $\Delta_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$. Для доказательства постройте совершенное множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ из попарно E_0-неэквивалентных элементов, а затем воспользуйтесь борелевской изоморфностью X и $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. (На самом деле $\Delta_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$ строго согласно лемме 5.6.7.)

Из аналогичных соображений $\Delta_{\mathbb{R}} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathtt{Vit}$.

Отношения E_0 и $\mathtt{Vit}$ относятся к типу *счетных* отношений эквивалентности, характеризуемых тем свойством, что каждый класс эквивалентности — не более чем счетное множество. На самом деле между E_0 и $\mathtt{Vit}$ имеется и более глубокая связь: они борелевски эквивалентны, см. ниже.

Лемма 5.6.7. *Отношения* $\mathtt{Vit}$ *и* E_0 *не являются гладкими. Следовательно,* $\Delta_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} <_{\mathrm{B}} \mathtt{Vit}$ *и* $\Delta_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$ *согласно результату упражнения 5.6.6.*

Доказательство. Для отношения $\mathtt{Vit}$, пусть, напротив, борелевская функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию $x \mathbin{\mathtt{Vit}} y \iff f(x) = f(y)$. Тогда все сечения $P/x = \{y : P(x,y)\} = f^{-1}[x]$ плоского борелевского множества $P = \{\langle x, y\rangle : f(y) = x\}$, т. е. все классы эквивалентности Витали, счетны. Согласно следствию 11.1.4 множество P допускает представление в виде $P = \bigcup_n P_n$, где все P_n — *однозначные* борелевские множества. Каждое из множеств $X_n = \{y : \exists\, x\, P_n(x,y)\}$ принадлежит классу $\mathbf{\Sigma}^1_1$ (на самом деле оно даже борелевское), следовательно, оно измеримо по Лебегу по теореме 5.3.1. Кроме того, $\mathbb{R} = \bigcup_n X_n$, так что хотя бы одно из множеств вида $Y_n = X_n \cap [0,1]$ имеет ненулевую меру. Возьмем одно из таких n и рассмотрим все рациональные сдвиги $S_r = Y_n + r = \{x + r : r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$

множества Y_n на расстояния r, $0 \le r \le 1$. Однако X_n имеет не более одной общей точки с каждым классом $\mathtt{Vit}$-эквивалентности. Отсюда следует, что множества S_r попарно дизъюнктны. Но каждое из них имеет одну и ту же лебегову меру $\lambda(S_r) = \lambda(Y_n) = \varepsilon > 0$, а их объединение удовлетворяет включению $\bigcup_{0\le r\le 1} S_r \subseteq [0,2]$, и мы получаем очевидное противоречие.

Таким же способом можно доказать негладкость отношения E_0, однако вместо рациональных сдвигов вещественной прямой используются гомеоморфизмы $H_{st} \colon [s] \xrightarrow{\text{на}} [t]$, определенные для любой пары кортежей $s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ одной и той же длины соотношением $H_{st}(s^\wedge a) = t^\wedge a$ для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. □

Итак, в отличие от обычных мощностей точечных множеств, борелевские мощности могут строго превосходить континуальную — это случай *негладких* отношений эквивалентности. На самом деле $\leqslant_{\mathrm{B}}$-структура негладких борелевских отношений эквивалентности чрезвычайно сложна и при современном состоянии науки в этой области известна только в отдельных элементах (см., например, книги [13] и [64]). Впрочем, имеется несколько типов негладких отношений эквивалентности, для которых удалось добиться если не полной, то относительной ясности. Одна из них — это гиперконечные отношения эквивалентности, которые связаны с отношением E_0, подобно тому как гладкие отношения связаны с равенствами Δ_X. Само же отношение E_0 занимает весьма важное место в $\leqslant_{\mathrm{B}}$-структуре. В частности, имеет место следующий результат, который будет доказан ниже в форме теоремы 12.3.1.

Предложение 5.6.8 (продолжает 5.6.2). *Пусть* E *— произвольное борелевское отношение эквивалентности на (борелевском) множестве* X. *Тогда*

(iv) *либо* $\mathsf{E}_0 \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, *либо* E *— гладкое отношение* (и тогда см. упражнение 5.6.4, пункт 3). □

Теперь скажем несколько слов о гиперконечных отношениях. Борелевское отношение эквивалентности E называется *конечным*, если каждый его класс эквивалентности есть конечное множество, и *гиперконечным*, если $\mathsf{E} = \bigcup_n \mathsf{F}_n$, где каждое F_n — борелевское конечное отношение эквивалентности и $\mathsf{F}_n \subseteq \mathsf{F}_{n+1}$ для всех n. Каждое гиперконечное отношение эквивалентности E является счетным (т. е. все классы E-эквивалентности суть не более чем счетные множества). Обратное неверно, наиболее простой контрпример предоставляет пример 5.8.5.

Лемма 5.6.9. *Отношения* E_0 *и* $\mathtt{Vit}$ *гиперконечны.*

Доказательство. Чтобы доказать утверждение для E_0, определим отношение F_n, для $a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$: $a \mathbin{\mathsf{F}_n} b$, если $a(k) = b(k)$ для всех $k \geq n$. Чтобы доказать утверждение для $\mathtt{Vit}$, определим отношение F_n, для $x, y \in \mathbb{R}$: $x \mathbin{\mathsf{F}_n} y$, если, во-первых, x и y принадлежат одному и тому же интервалу вещественной прямой вида $[z\, 2^n, z\, 2^{n+1})$, $z \in \mathbb{Z}$, и, во-вторых, разность $x - y$ есть целое кратное дроби вида $\frac{1}{k}$, $1 \leq k \leq n$. □

Гиперконечные отношения допускают ряд эквивалентных определений, изложенных, например, в гл. 6 книги [13]. Из них для нас здесь представляет интерес следующее: *борелевское отношение эквивалентности* E *гиперконечно тогда и только тогда, когда* $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$.

Следствие 5.6.10. *Имеет место эквивалентность* $\mathtt{Vit} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$.

Доказательство. Неравенство $\mathtt{Vit} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$ следует из упомянутого критерия гиперконечности и леммы 5.6.9, а $\mathsf{E}_0 \leqslant_{\mathrm{B}} \mathtt{Vit}$ — из предложения 5.6.8 и леммы 5.6.7. □

§ 5.7 0-1 закон

Следующий результат, связанный с мерой $\boldsymbol{\lambda}$ из примера 5.1.7, относится скорее к эргодической теории, но нам он понадобится ниже. Теорема говорит о том, что в определенной ситуации любое достаточно однородное множество имеет вероятностную меру 0 или 1, а также является тощим либо котощим.

Возвратимся к отношению E_0 из примера 5.6.5. Скажем, что множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является E_0-*инвариантным*, если эквивалентность $a \in X \iff b \in X$ выполнена для всех точек $a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющих отношению $a \mathbin{\mathsf{E}_0} b$. Скажем, что множество $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ является E_0-инвариантным в $2^{\mathbb{N}}$, если эквивалентность $a \in X \iff b \in X$ выполнена для всех точек $a, b \in 2^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющих отношению $a \mathbin{\mathsf{E}_0} b$.

Теорема 5.7.1 (0-1 закон). *Пусть множество* $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ *является* E_0-*инвариантным. Тогда*

(i) *выполнено одно из двух следующих утверждений*:

 (1) *множество* X *является* $\boldsymbol{\lambda}$-*измеримым, и либо* $\boldsymbol{\lambda}(X) = 0$, *либо* $\boldsymbol{\lambda}(X) = 1$;

 (2) *множество* X $\boldsymbol{\lambda}$-*неизмеримо,* $\boldsymbol{\lambda}_*(X) = 0$ *и* $\boldsymbol{\lambda}^*(X) = 1$;

(ii) *множество* X *либо тощее в* $2^{\mathbb{N}}$, *либо котощее, либо не имеет свойства Бэра ни на каком непустом бэровском интервале*;

(iii) *утверждение* (ii) *верно и для пространства* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Доказательство. (i) Собственно, достаточно доказать, что если $F \subseteq X$ и $F' \subseteq 2^{\mathbb{N}} \smallsetminus X$ — замкнутые множества, то они оба не могут иметь положительные значения меры $p = \boldsymbol{\lambda}(F)$ и $p' = \boldsymbol{\lambda}(F')$. Предположим противное, т. е. пусть $p, p' > 0$ строго. Очевидно, можно предполагать, что $p = p'$.

Пусть $\varepsilon = \frac{p}{2}$. Вследствие компактности множество F накрывается открытым множеством G, которое представляет собой конечное объединение канторовых интервалов $[s] = \{a \in 2^{\mathbb{N}} : s \subset a\}$, где $s \in 2^{<\omega}$, и удовлетворяет неравенству $\boldsymbol{\lambda}(G) \le p + \varepsilon$. Аналогично F' накрывается конечным объединением G' канторовых интервалов, которое удовлетворяет неравенству $\boldsymbol{\lambda}(G') \le p + \varepsilon$. Можно, не ограничивая общности, считать, что $\boldsymbol{\lambda}(G) = \boldsymbol{\lambda}(G')$ (иначе добавим к меньшему из множеств G, G' еще несколько интервалов подходящей меры).

Но тогда найдется такая в обе стороны непрерывная и сохраняющая $\boldsymbol{\lambda}$ биекция $h : G \xrightarrow{\text{на}} G'$, что отношение $a \mathsf{E_0} h(a)$ выполнено для всех $a \in G$. Полный образ $H = h[F] = \{h(a) : a \in F\}$ множества F удовлетворяет включению $H \subseteq X \cap G'$ (из-за инвариантности множества X), так что $H \cap F' = \varnothing$, и, кроме того, $\boldsymbol{\lambda}(H) = \boldsymbol{\lambda}(F) = p$ по выбору h. Таким образом, множество G' меры не больше чем $p + \varepsilon$ содержит два дизъюнктных подмножества H и F' каждое меры ровно p. Получилось противоречие, так как $\varepsilon < p$.

(ii) Предположение противного приводит к паре канторовых интервалов $I = [s]$ и $I' = [s']$ в $2^{\mathbb{N}}$, где кортежи $s, s' \in 2^{<\omega}$ имеют одну и ту же длину m, причем множество X является тощим на I и котощим на I'. Определим гомеоморфизм $h : I \xrightarrow{\text{на}} I'$ так, что $h(a) \restriction m = s'$ и $h(a)(k) = a(k)$ для всех $a \in I$ и $k \ge m$. Снова полный образ $Y = h[X \cap I]$ удовлетворяет включению $Y \subseteq X \cap I'$ и является котощим в I', что противоречит выбору I'. $\square$

§ 5.8 Польские группы и их действия

Польской группой называется любая группа, множеством элементов которой является польское пространство, а групповая операция и отображение в обратный элемент непрерывны. *Борелевской группой* называется группа, множеством элементов которой является борелевское множество в польском пространстве, а групповая операция и отображение в обратный элемент являются борелевскими функциями. Наконец, борелевская группа называется *полизируемой*, если существует такая польская топология на ее множестве элементов, которая производит те же самые борелевские множества, что и исходная топология.

Теорема 5.8.1 (Петтис)**.** *Предположим, что $\mathbb{G}$ — польская группа. Если отображение $f\colon \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ является групповым гомоморфизмом и отображением, измеримым по Бэру, то f — непрерывное отображение.* □

Действием группы $\mathbb{G}$ на множестве $\mathbb{X}$ называется любое отображение $\mathfrak{a}\colon \mathbb{G} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, обозначаемое $\mathfrak{a}(g, x) = g{\cdot}x$, для которого $g{\cdot}(h{\cdot}x) = (gh){\cdot}x$. Для любого $g \in \mathbb{G}$ отображение $x \mapsto g{\cdot}x$ является биекцией $\mathbb{X}$ на себя, а отображение $x \mapsto g^{-1}{\cdot}x$ – обратной биекцией. Пара $\langle \mathbb{X}\,; \mathfrak{a}\rangle$ и также само $\mathbb{X}$ называются $\mathbb{G}$-*пространством*. Из определения вытекает, что $e{\cdot}x = x$ для всех x, где e – нейтральный элемент группы $\mathbb{G}$. Действие *свободно*, если для любого x и любого элемента $g \in \mathbb{G}$, $g \neq e$, выполнено неравенство $g{\cdot}x \neq x$.

Орбитальное отношение эквивалентности $\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathfrak{a}} = \mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}$ на $\mathbb{X}$ определяется следующим условием: $x \mathrel{\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}} y$, если существует $g \in \mathbb{G}$, для которого $y = g{\cdot}x$. Об этом отношении говорят, что оно *индуцируется действием* $\mathfrak{a}$ *группы* G *на* $\mathbb{X}$. Таким образом, $\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}$-классы — то же самое, что и $\mathbb{G}$-*орбиты* данного действия, т. е. множества вида

$$[x]^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}} = [x]^{\mathbb{X}}_{\mathfrak{a}} = [x]_{\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}} = [x]_{\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathfrak{a}}} = \{y : \exists\, g \in \mathbb{G}\ (g{\cdot}x = y)\}\,.$$

Произвольные действия абстрактных групп на каких-то множествах трудно изучать методами дескриптивной теории множеств. Ограничиваясь изучаемыми здесь объектами, приходим к следующему определению.

Если пространство $\mathbb{X}$ и группа $\mathbb{G}$ являются польскими, а действие $\mathfrak{a}$ – непрерывным как функция двух аргументов, то действие называется *польским*, а $\langle \mathbb{X}\,; \mathfrak{a}\rangle$ и, неформально, само пространство $\mathbb{X}$ называются *польским* $\mathbb{G}$-пространством. В этом случае при любом $g \in \mathbb{G}$ отображение $x \mapsto g{\cdot}x$ — гомеоморфизм $\mathbb{X}$ на себя. Если же $\mathbb{X}$, $\mathbb{G}$, $\mathfrak{a}$ борелевские, то $\langle \mathbb{X}\,; \mathfrak{a}\rangle$ и также само $\mathbb{X}$ называются *борелевским* $\mathbb{G}$-пространством. Достаточно трудное доказательство следующей теоремы можно найти в книге [38, 5.2.1].

Теорема 5.8.2. *Предположим, что $\mathbb{G}$ — польская группа и $\langle \mathbb{X}\,; \mathfrak{a}\rangle$ — борелевское $\mathbb{G}$-пространство. Тогда $\mathbb{X}$ допускает польскую топологию, которая порождает те же борелевские множества, что и исходная топология, и в этой новой топологии действие является польским.* □

Таким образом, любое борелевское действие польской группы превращается в ее польское действие.

Пример 5.8.3. Рассмотрим счетную группу G всех биекций $g\colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}^2$, для которых 1) множество $\{\langle n, i\rangle : g(n, i) \neq \langle n, i\rangle\}$

конечно и 2) если $g(n,i) = \langle m,j \rangle$ то $m = n$. Понятно, что каждый элемент $g \in G$ раскладывается в последовательность биекций $g_n : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}$, определенных так, что $g(n,i) = g_n(i)$. Определим действие G на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ так: $g \cdot a = b$ $(a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$, если $b(n) = g_n(a(n))$, $\forall n$. Соответствующее орбитальное отношение эквивалентности, очевидно, совпадает с $\mathsf{E_0}$.

Пример 5.8.4. Отношение эквивалентности, индуцированное аддитивным действием подгруппы $\mathbb{Q}$ рациональных чисел на $\mathbb{R}$, совпадает с $\mathtt{Vit}$.

Пример 5.8.5. Рассмотрим сдвиговое действие свободной группы F_2 с двумя образующими на 2^{F_2}. Соответствующее орбитальное отношение эквивалентности обозначается через E_∞. Это, очевидно, счетное борелевское отношение эквивалентности, причем максимальное в том смысле, что для любого другого счетного борелевского отношения эквивалентности E выполнено неравенство $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_\infty$. В частности, $\mathsf{E_0} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_\infty$, причем известно, что на самом деле это неравенство строгое, т. е. $\mathsf{E_0} <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_\infty$. Таким образом, E_∞ — счетное, но не гиперконечное борелевское отношение эквивалентности. См. об этих результатах гл. 6 книги [13].

Пример 5.8.6 (логическое действие)**.** Определенная в § 1.8 группа $\mathbb{S}_\infty$ (т. е. $\mathbf{G}_\delta$-множество всех перестановок $\mathbb{N}$ в бэровском пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ с суперпозицией в качестве групповой операции) является, как нетрудно проверить, польской группой. Она важна тем, что среди ее действий имеются те, которые порождают отношения изоморфизма между различными счетными структурами. В самом деле, рассмотрим счетный реляционный язык $\mathscr{L} = \{R_i\}_{i \in I}$. *Логическое действие* $j_{\mathscr{L}}$ группы S_∞ на пространстве $\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ всех $\mathscr{L}$-структур определяется так: если $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ и $g \in S_\infty$, то

$$y = j_{\mathscr{L}}(g,x) = g \cdot x = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}},$$

где

$$\langle k_1, \ldots, k_{m_i} \rangle \in x_i \iff \langle g(k_1), \ldots, g(k_{m_i}) \rangle \in y_i$$

для всех $i \in \mathbb{N}$ и всех $\langle k_1, \ldots, k_{m_i} \rangle \in \mathbb{N}^{m_i}$.

Упражнение 5.8.7. Докажите, что $\langle \mathtt{Mod}_{\mathscr{L}} ; j_{\mathscr{L}} \rangle$ — польское S_∞-пространство, причем $j_{\mathscr{L}}$-орбиты в $\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$ являются классами попарно изоморфных $\mathscr{L}$-структур на $\mathbb{N}$.

Поэтому (т. е. из-за указанной связи с изоморфизмами) соответствующее отношение эквивалентности $\mathsf{E}_{j_{\mathscr{L}}}^{\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}}$ часто обозначают $\cong_{\mathscr{L}}$.

Что можно сказать о дескриптивном типе индуцированных отношений эквивалентности? Ограничение сверху дается следующей простой теоремой

Теорема 5.8.8. *Если $\langle \mathbb{X}\,; \mathfrak{a}\rangle$ — борелевское $\mathbb{G}$-пространство (соответственно $\mathbb{G}$ — борелевская группа), то индуцированное отношение $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ есть A-множество в пространстве $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$.*

Доказательство. В сделанных предположениях множество

$$P = \{\langle x, y, g\rangle : x, y \in \mathbb{X} \wedge g \in \mathbb{G} \wedge \mathfrak{a}(g, x) = y\}$$

является борелевским в пространстве $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathbb{G}$. С другой стороны, $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}} = \{\langle x, y\rangle : \exists\, g\,(\langle x, y, g\rangle \in P\}$ — проекция множества P. Но проекции являются непрерывными образами, что́ и приводит к классу A-множеств. □

Даже польские действия индуцируют, вообще говоря, неборелевские отношения эквивалентности. В то же время, из такого чисто топологического свойства группы, как локальная компактность, следует борелевость всех отношений эквивалентности, индуцированных ее польскими (а тогда и борелевскими) действиями, см. [38]. Для счетных групп это достаточно просто.

Упражнение 5.8.9. Докажите, что если $\mathbb{G}$ — счетная группа, а действие является борелевским, то и отношение $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ борелевское и счетное.

Гораздо менее тривиальные случаи, когда можно утверждать борелевость орбитальных отношениий эквивалентности, указаны в книге [38, гл. 7]. Например, это имеет место, когда все $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$-классы являются множествами ограниченного борелевского класса. С другой стороны, довольно неожиданно классы эквивалентности борелевских действий сами являются борелевскими множествами во всех случаях по следующей теореме Скотта (см. [105], доказательство на русском языке см., например, в книге [13, гл. 3]).

Теорема 5.8.10. *Если $\mathbb{G}$ — польская группа и $\langle \mathbb{X}\,; \mathfrak{a}\rangle$ является борелевским $\mathbb{G}$-пространством, то все классы эквивалентности отношения $\mathsf{E}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{X}}$ суть борелевские множества.* □

Отсюда следует, что не все A-отношения эквивалентности индуцированы борелевскими действиями польских групп. Возьмем, например, неборелевское A-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и определим $x \mathrel{\mathsf{E}} y$, если либо $x = y$, либо $x, y \in X$. Это A-отношение эквивалентности с неборелевским классом X.

§ 5.9 Теорема Хаусдорфа о щели

Континуум $\mathbb{R}$ вещественных чисел, разумеется, несчетен, однако вследствие наличия счетного плотного (в данном случае в смысле порядка) подмножества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел **любая** строго возрастающая или строго убывающая трансфинитная последовательность вещественных чисел не более чем счетна.

Упражнение 5.9.1. Оснастим бэровское пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ лексикографическим порядком: $a <_{\mathtt{lex}} b$, когда найдется число m, для которого $a \restriction m = b \restriction m$, но $a(m) < b(m)$. Докажите, что любая строго $<_{\mathtt{lex}}$-возрастающая или строго $<_{\mathtt{lex}}$-убывающая трансфинитная последовательность в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не более чем счетна. То же для канторова дисконтинуума $2^{\mathbb{N}}$ с тем же порядком.

Выведите аналогичный результат для частичного порядка: $a \prec b$, когда $a(m) < b(m)$ для всех m.

В свете этих результатов могло бы показаться, что вообще нелегко определить порядок на польском пространстве, допускающий несчетные монотонные трансфинитные последовательности. Но это не так. Простейший пример дает порядок $\leqslant^*$ *эвентуального доминирования* на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, определенный так: $a \leqslant^* b$, когда $a(m) \le b(m)$ для всех, кроме конечного числа, значений m. Для него определяются[5] отношения эквивалентности $\equiv^*$ и строгого порядка $<^*$:

$$a \equiv^* b \quad \text{когда} \quad a \leqslant^* b \ \text{и} \ b \leqslant^* a$$
$$a <^* b \quad \text{когда} \quad a \leqslant^* b \ \text{но} \ \neg\,(b \leqslant^* a)\,.$$

Лемма 5.9.2 (Дюбуа-Раймон [46]). *Если множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не более чем счетно, то оно $<^*$-ограничено, т. е. найдется такая точка $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $a <^* b$ для всех $a \in X$.*

Доказательство. [6] Пусть $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для каждого n положим $b(n) = 1 + \mathtt{max}\{a_k(j) : k, j \le n\}$. □

Эта лемма позволяет строить $<^*$-возрастающие последовательности $\{x_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ несчетной длины ω_1. Слегка изменив конструкцию, можно получить и $<^*$-убывающую последовательность в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ длины ω_1.

[5] Можно рассмотреть и более сильный, чем $<^*$, строгий порядок: $a <^{**} b$, когда $a(m) < b(m)$ для всех, кроме конечного числа, значений m. Все приведенные ниже в этом параграфе результаты сохраняют силу для порядка $<^{**}$ вместо $<^*$.

[6] Эта простая конструкция называется *диагональным методом* и обычно ассоциируется с более поздним, но и более важным для математики прямым доказательством несчетности континуума по Кантору.

Перед изложением дальнейших результатов, нам потребуется такое определение. Пусть κ, λ — произвольные ординалы. Тогда (κ, λ)-*предщелью* для некоторого порядка $<$ называется всякая пара из $<$-возрастающей последовательности $X = \{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ и $<$-убывающей последовательности $Y = \{y_\beta\}_{\beta<\lambda}$ таких элементов x_α, y_β в области порядка $<$, что $X < Y$, т. е. $x_\alpha < y_\beta$ для всех $\alpha < \kappa$, $\beta < \lambda$. Об элементе z из области $<$, удовлетворяющем неравенствам $X < z < Y$, т. е. $x_\alpha < z < y_\beta$ для всех $\alpha < \kappa$, $\beta < \lambda$, говорят, что он *заполняет* предщель $\langle X, Y\rangle$; а если таких элементов z нет, то данная (κ, λ)-предщель называется (κ, λ)-щелью.

Упражнение 5.9.3. Используя метод доказательства леммы 5.9.2, докажите следующее. Если $\lambda, \kappa < \omega_1$ — предельные ординалы, то частично упорядоченное множество $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}} ; <^* \rangle$ не имеет (κ, λ)-щелей.

Итак, порядок эвентуального доминирования не допускает счетных щелей. Следующая теорема более сложна. Мы дадим набросок ее доказательства для удобства читателя, так как на русском языке его найти трудно.

Теорема 5.9.4 (Теорема Хаусдорфа о щели)**.** *В упорядоченной структуре $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}} ; <^* \rangle$ существуют (ω_1, ω_1)-щели.*

Эта знаменитая теорема впервые была установлена Хаусдорфом в статье [54] для несколько иного частично упорядоченного множества, а именно, для $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; <^{**} \rangle$ (т. е. для вещественных бесконечных последовательностей с порядком, определенным в сноске 5 на стр. 107), а в варианте для диадической структуры $\langle 2^{\mathbb{N}} ; <^* \rangle$ — в статье [56], которая и является стандартной ссылкой в современной литературе. Доказательства в работах [54] и [56] следуют одной и той же схеме, которая с определенными модификациями подходит для всех подобных частичных порядков, включая и $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}} ; <^* \rangle$.

Доказательство (набросок)**.** Если $a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $a <^* b$, то через $(a\, b)$ будем обозначать наименьшее число n_0, для которого $n \geq n_0 \implies a(n) \leq b(n)$. Будем строить $<^*$-возрастающую последовательность $A = \{a_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ и $<^*$-убывающую последовательность $B = \{b_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ элементов a_ξ, $b_\xi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, которые удовлетворяют неравенству $a_\eta <^* b_\xi$ для всех ξ, η (т. е. пара $\langle A, B\rangle$ образует предщель) и удовлетворяют следующему ключевому требованию:

$(*)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\xi < \omega_1$ множество $\{\eta < \xi : (a_\eta\, b_\xi) = n\}$ конечно.

Это условие можно понимать так, что, хотя b_ξ и расположено строго $<^*$-выше всех a_η, имеет место и определенная $<^*$-близость b_ξ к множеству $\{a_\eta : \eta < \xi\}$. Если такое построение выполнено, то $\langle A, B\rangle$ есть искомая (ω_1, ω_1)-щель. В самом деле, пусть, напротив, $c \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и $a_\xi <^* c <^* b_\xi$ для всех ξ. Из-за несчетности ω_1 найдутся такой ординал ξ и такое число n, что $(a_\eta\, c) = n$ для бесконечно многих $\eta < \xi$. Но это противоречит требованию $(*)$, поскольку $c <^* b_\xi$.

Теперь опишем индуктивную конструкцию членов последовательностей, удовлетворяющих условию $(*)$. Непредельные шаги очевидны: если члены $a_\xi <^* b_\xi$ уже определены, то берем в качестве $a_{\xi+1}$ и $b_{\xi+1}$ любую пару $a, b \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, удовлетворяющую неравенствам $a_\xi <^* a <^* b <^* b_\xi$. Предельные шаги требуют бо̀льших усилий. Допустим, что $\lambda < \omega_1$ — предельный ординал, и a_ξ, b_ξ уже определены для всех $\xi < \lambda$ так, что требование $(*)$ выполнено. То же «диагональное» построение, которое использовано в доказательстве леммы 5.9.2, позволяет определить $c \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ так, чтобы условие $a_\xi <^* c <^* b_\xi$ выполнялось для всех $\xi < \lambda$. Согласно индуктивному предположению $(*)$ множество $\{\eta < \xi : (a_\eta\, c) = n\}$ конечно, каковы бы ни были число n и ординал $\xi < \lambda$. В этом случае другая, более сложная версия того же самого построения дает нам такую точку $b \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, что $b <^* c$, но всё еще $a_\xi <^* b$ для всех $\xi < \lambda$ и дополнительно для каждого n множество $\{\eta < \lambda : (a_\eta\, b) = n\}$ конечно. Положим $b_\lambda = b$, а в качестве a_λ возьмем любое $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, для которого $a_\xi <^* a <^* b$ для всех ξ. □

Щелями Хаусдорфа называются (ω_1, ω_1)-щели в частично упорядоченном множестве $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; <^*\rangle$ и некоторых ему подобных множествах. Приведем одно важное следствие теоремы 5.9.4, также полученное Хаусдорфом.

Следствие 5.9.5. *Бэровское пространство $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ есть объединение строго возрастающей последовательности $\mathbf{G}_\delta$-множеств.*

Доказательство. Берем любую (ω_1, ω_1)-щель в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; <^*\rangle$ из возрастающей последовательности $\{x_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ и убывающей последовательности $\{y_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$. Тогда всё пространство $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ тождественно объединению $\bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$, где каждое множество X_α состоит из всех точек $z \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, для которых не выполняется условие $x_\alpha <^* z <^* y_\alpha$. Чтобы получить класс $\mathbf{G}_\delta$ множеств X_α, заметим, что

$$X_\alpha = \Big(\bigcap_n \bigcup_{m\ge n} \{z : z(m) \le x_\alpha(m)\}\Big) \cup \Big(\bigcap_n \bigcup_{m\ge n} \{z : z(m) \ge y_\alpha(m)\}\Big)$$

откуда и следует результат. □

Любопытно, что существование *разбиения* пространства $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ на $\aleph_1$ непустых $\mathbf{G}_\delta$-множеств уже не может быть доказано (без дополнительных предположений, например, континуум-гипотезы). Это установили Фремлин и Шелах в статье [48].

Упражнение 5.9.6 (Зальцвассер). Пусть $x \in \mathbb{R}$ и $X_0 = \{x\}$. Если множество $X_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ ($\alpha < \omega_1$) лебеговой меры 0 уже построено, то добавим к нему точку $x_\alpha \notin X_\alpha$, и пусть $X_{\alpha+1}$ — любое $\mathbf{G}_\delta$-множество меры 0, накрывающее $X_\alpha \cup \{x_\alpha\}$. На каждом предельном шаге $\lambda < \omega_1$ пусть X_λ — любое $\mathbf{G}_\delta$-множество меры 0, накрывающее $\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha$. Докажите, что получается строго возрастающая ω_1-последовательность $\mathbf{G}_\delta$-множеств. О том, что их объединение накрывает всё пространство, как в следствии 5.9.5, речь, конечно, не идет.

Построения из следствия 5.9.5 и упражнения 5.9.6 имеют одно общее негативное свойство: равенство $X_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ не обязательно выполняется на предельных шагах. Но это не удивительно: Н. Н. Лузин доказал в статье [17], что нет (строго) возрастающих ω_1-последовательностей $\mathbf{G}_\delta$-множеств X_α, удовлетворяющих равенству $X_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ на всех предельных шагах.

Упражнение 5.9.7 (Линделёф). Докажите, что в польском пространстве нет строго возрастающих ω_1-последовательностей замкнутых либо открытых множеств.

Следующий несколько более сложный результат принадлежит Зальцвассеру (см. [116], а также книгу Куратовского [15, 24.III]).

Теорема 5.9.8. *В польском пространстве нет строго возрастающих ω_1-последовательностей $\mathbf{\Delta}^0_2$-множеств, т. е. таких, которые одновременно принадлежат классам $\mathbf{F}_\sigma$ и $\mathbf{G}_\delta$.*

Возрастающие же ω_1-последовательности множеств класса $\mathbf{F}_\sigma$ (например счетных) банально существуют в любом несчетном пространстве.

Доказательство. Пусть, напротив, $\mathbf{\Delta}^0_2$-множества X_α, $\alpha < \omega_1$, в польском пространстве $\mathbb{X}$ образуют строго возрастающую последовательность. Тогда каждая разность $D_\alpha = X_{\alpha+1} \smallsetminus X_\alpha$ непуста; пусть $x_\alpha \in D_\alpha$. Все точки x_α попарно различны, так что их множество $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ несчетно. Тогда множество P всех точек конденсации[7] множества X есть (непустое) совершенное множество в $\mathbb{X}$, причем разность $X \smallsetminus P$ не более чем счетна. Легко видеть, что найдется ординал $\alpha < \omega_1$, для которого множество $A_\alpha = P \cap X_\alpha$ будет плотным в P. Однако дополнительное множество $C_\alpha = P \smallsetminus X_\alpha$ также плотно в P, поскольку по построению A_α не более чем счетно. Заметим, наконец, что эти множества являются $\mathbf{\Delta}^0_2$-множествами в P, поскольку X_α есть $\mathbf{\Delta}^0_2$-множество. В частности, они являются плотными взаимно дополнительными $\mathbf{G}_\delta$-множествами в P. Но это противоречит следствию 1.2.3 (iv). □

[7] Напомним, что *точкой конденсации* множества X в пространстве $\mathbb{X}$ называется любая точка $x \in \mathbb{X}$ (не обязательно $x \in X$!), каждая открытая окрестность которой содержит несчетно много точек множества X.

Глава 6

Эффективная дескриптивная теория множеств в бэровских произведениях

Здесь мы начинаем изложение основ современной *эффективной* дескриптивной теории множеств. Связанные с ней методы представляют собой удачное соединение методов классической дескриптивной теории и техники, пришедшей из теории рекурсии. Правда, за это придется платить определенную цену: приходится работать только с множествами бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и пространств вида $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$, которые мы называем бэровскими произведениями. (Более общий подход, вводящий понятие *рекурсивно представимого* польского пространства, приводит к существенным усложнениям, и поэтому мы не будем ему следовать.) Но в практическом плане это ограничение обычно не представляется существенным просто потому, что борелевская изоморфность всех несчетных польских пространств по теореме 2.6.2 позволяет переносить подавляющее большинство результатов из одного пространства этого типа в другое.

Эффективная дескриптивная теория множеств следует главному принципу классической дескриптивной теории множеств: в ней рассматриваются иерархии точечных множеств, построенные по существу на тех же операциях, что и иерархии классической теории. Но имеется и важный дополнительный аспект, не относящийся к первоначальному кругу основных идей дескриптивной теории множеств.

Именно, точечные множества классифицируются не только на основе числа итераций основных операций, необходимого для построения данного множества, скажем, из открытых или замкнутых множеств, но также и на основе теоретико-рекурсивной определимости этих исходных множеств.

§6.1 Бэровские произведения

Все пространства вида $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, т. е. произведения конечного числа копий множества $\mathbb{N}$ с дискретной топологией и конечного числа копий бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, являются польскими пространствами. Мы будем называть их *бэровскими прозведениями*. Если $\ell = 0$, то пространство $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell = (\mathbb{N})^k$, очевидно, дискретно, а при $\ell \geq 1$ пространство $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$ гомеоморфно бэровскому пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Следующее определение вводит удобную систему гомеоморфизмов (просто биекций для дискретного случая) между этими пространствами.

Определение 6.1.1 (гомеоморфизмы). (i) Положим $\pi(i,j) = 2^i(2j+1)-1$; таким образом, π — биекция из $\mathbb{N}^2$ на $\mathbb{N}$. Далее, определим

$$\pi(i_0, \ldots, i_{k-1}, i_k) = \pi(\pi(i_0, \ldots, i_{k-1})\,,\, i_k),$$

индукцией по k, и тогда в каждой арности $k \geq 2$ отображение π является биекцией из $\mathbb{N}^k$ на $\mathbb{N}$. Зададим систему обратных отображений $(m)^k_i$, где $i < k \geq 2$, так: $\pi((m)^k_0, (m)^k_1, \ldots, (m)^k_{k-1}) = m$ для всех $k \geq 2$ и m. В частности, $(m)^2_0 = i$ и $(m)^2_1 = j$, если и только если $m = \pi(i,j) = 2^i(2j+1)-1$. Отдельно определим $(m)^1_0 = m$ и $(m)^k_i = 0$ в «неправильном» случае $k \leq i$.

(ii) Определим перечисление $\mathbb{N}^{<\omega} = \{\mathbf{s}_n : n \in \mathbb{N}\}$ множества $\mathbb{N}^{<\omega}$ всех кортежей (конечных последовательностей) натуральных чисел, следующим образом. Пусть

$$n' = (n)^2_0\,, \quad n'' = (n)^2_1 + 1\,, \quad \mathbf{s}_n = \langle (n')^{n''}_0, (n')^{n''}_1, \ldots, (n')^{n''}_{n''-1} \rangle\,.$$

для $n > 0$. Отдельно положим $\mathbf{s}_0 = \Lambda$ (пустой кортеж). Это перечисление, очевидно, удовлетворяет следующим условиям: $\mathtt{lh}\,\mathbf{s}_n \leq n$ и $\mathbf{s}_n \subset \mathbf{s}_m \Longrightarrow n < m$. (Напомним, что $\mathtt{lh}\,s$ — длина кортежа s, а $s \subset t$ означает, что t есть собственное продолжение кортежа s.)

(iii) Определим $(a)^\ell_j \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для всяких $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $j < \ell \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось условие $(a)^\ell_j(n) = a(n\ell + j)$, $\forall n$. Ясно, что отображение $a \mapsto \langle (a)^\ell_0, (a)^\ell_1, \ldots, (a)^\ell_{\ell-1} \rangle$ есть биекция и даже гомеоморфизм бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell}$. Обозначим через π обратное отображение, т. е. $\pi(a_0, \ldots, a_{\ell-1}) = a$, если $a_i = (a)_i^{\ell}$ для всех $i < \ell$. (Здесь $a_0, \ldots, a_{\ell-1}, a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.) Отдельно определим $(a)_i^{\ell} = a$ в «неправильном» случае $\ell \le i$.

(iv) Бесконечное произведение $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ также гомеоморфно пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ посредством отображения $a \mapsto \{(a)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где точка $(a)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$ определена соотношением $(a)_n(k) = a(2^n(2k+1)-1)$, $\forall\, k$.

(v) Произведение $\mathbb{N}^1 \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^1 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ посредством отображения $a \mapsto \langle a(0), a^- \rangle$, где точка $a^- \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ определена соотношением $a^-(k) = a(k+1)$, $\forall\, k$. Обратно, если $k \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то определим $k^\wedge b = a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ так, чтобы выполнялись условия $a(0) = k$ и $a^- = b$.

Общее соглашение 6.1.2. С этого момента мы будем обычно рассматривать точечные множества только в пространствах, которые являются бэровскими произведениями (т. е. имеют вид $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell}$), либо в пространствах, легко сводящихся к ним, как, например, $\mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Упражнение 6.1.3. Пусть $k, \ell \ge 1$. Докажите, что отображение

$$a \mapsto \langle (a(0))_0^k, (a(0))_1^k, \ldots, (a(0))_{k-1}^k\,,\, (a^-)_0^{\ell}, (a^-)_1^{\ell}, \ldots, (a^-)_{\ell-1}^{\ell} \rangle$$

является биекцией $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell}$.

§ 6.2 Аналитические формулы

Структура этих пространств позволяет использовать весьма простой язык для описания точечных множеств — язык арифметики Пеано второго порядка, который имеет два типа переменных:

тип 0 — с областью пробегания $\mathbb{N}$ (для обозначения таких переменных мы будем использовать буквы k, l, m, n, i, j);

тип 1 — с областью $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (используются буквы a, b, c, x, y, z, p, q и т. п.).

Термы для формул этого языка получаются из переменных и натуральных чисел по следующим правилам:

1) всякое натуральное число есть терм типа 0, а переменная типа $i = 0, 1$ является и термом типа i;
2) если t, s — термы типа 0, то ими же являются и $t + s$, ts, t^s, $t - s$ (с дополнительным определением $0^0 = 0$ и $m - n = 0$ при $n > m$, чтобы остаться в области натуральных чисел);

3) если s, t, u — термы типа 0, то $(u)^t_s$ является термом типа 0, причем $(u)^t_s$ понимается в соответствии с определением 6.1.1 (i);

4) если $k \geq 2$ и $s_0, \ldots, s_{k-1}$ — термы типа 0, то $\pi(s_0, \ldots, s_{k-1})$ — терм типа 0, понимаемый согласно определению 6.1.1 (i);

5) если t, s — термы типа 0, то таковыми являются также $\mathtt{lh}\,\mathbf{s}_t$ и $\mathbf{s}_t(s)$, причем $\mathbf{s}_t$ понимается в соответствии с определением 6.1.1(ii), в частности, $\mathbf{s}_n(k) = 0$ в «неправильном» случае $k \geq \mathtt{lh}\,\mathbf{s}_n$;

6) если τ, s — термы типов соответственно $1, 0$, то $\tau(s)$ — терм типа 0;

7) если τ — терм типа 1, а t — типа 0, то τ^- и $t^\wedge\tau$ являются термами типа 1, понимаемыми в соответствии с определением 6.1.1 (v);

8) если τ — терм типа 1, а s, t — термы типа 0, то $(\tau)_s$ и $(\tau)^t_s$ — термы типа 1, причем они понимаются в соответствии с определением 6.1.1 (iii,iv).

9) если $k \geq 2$ и $\tau_0, \ldots, \tau_{k-1}$ — термы типа 1, то $\pi(\tau_0, \ldots, \tau_{k-1})$ — терм типа 1, понимаемый согласно определению 6.1.1 (iii);

Например, $a(2^k + (b)_j(3n))$ — терм типа 0.

В наше определение термов для удобства «вшито» прямое использование функций, введенных в определении 6.1.1. Без этого можно было бы обойтись, однако тогда пришлось бы выводить рекурсивность этих функций и делать некоторую другую лишнюю работу для анализа преобразований аналитических формул в §6.4.

Рассматриваются следующие классы формул этого языка:

элементарные — те, которые имеют вид $t = t'$, $t < t'$, $t \leq t'$, где t, t' — термы (например, просто переменные) типа 0;

аналитические — все формулы, которые получаются из элементарных формул посредством пропозициональных связок и кванторов любого из двух типов, т. е. все (правильно построенные) формулы языка арифметики Пеано второго порядка;

арифметические — те аналитические формулы, которые не содержат кванторов типа 1 (т. е. с областью пробегания $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$);

ограниченные — те арифметические формулы, которые содержат только кванторы вида $\exists k < t$ и $\forall k < t$, где k — переменная типа 0, а t — терм типа 0;[1]

[1] В частности, все бескванторные формулы являются ограниченными.

типов $\varSigma^0_n$ и $\varPi^0_n$ $(n \ge 1)$ — арифметические формулы видов соответственно

$$\exists\, k_1\, \forall\, k_2\, \exists\, k_3 \ldots \exists\,(\forall)\, k_n\, \varphi \quad \text{и} \quad \forall\, k_1\, \exists\, k_2\, \forall\, k_3 \ldots \forall\,(\exists)\, k_n\, \varphi\,, \qquad (0)$$

где φ — ограниченная формула (все k_i — переменные типа 0);

типов $\varSigma^1_n$ и $\varPi^1_n$ — аналитические формулы видов соответственно

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, a_1\, \forall\, a_2\, \exists\, a_3 \ldots \exists\,(\forall)\, a_n\, \forall\,(\exists)\, m\, \varphi \quad \text{и} \\ \forall\, a_1\, \exists\, a_2\, \forall\, a_3 \ldots \forall\,(\exists)\, a_n\, \exists\,(\forall)\, m\, \varphi\,, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где φ — ограниченная формула (a_i — переменные типа 1, m типа 0).

Кванторной приставкой называется левая часть аналитической формулы, имеющая вид строки кванторов. Кванторные приставки формул вида (0) называются $\varSigma^0_n$-*приставкой* и $\varPi^0_n$-*приставкой*, а кванторные приставки формул вида (1) называются $\varSigma^1_n$-*приставкой* и $\varPi^1_n$-*приставкой*. Отметим, что в обоих случаях имеет смысл и значение $n = 0$. Именно, $\varSigma^0_0$-приставка и $\varPi^0_0$-приставка просто не содержат кванторов, т. е. соответствующие формулы — это ограниченные формулы, а $\varSigma^1_0$-приставка и $\varPi^1_0$-приставка — это, очевидно, то же самое, что и $\varSigma^0_1$-приставка и $\varPi^0_1$-приставка соответственно.

Отметим, что по определению $\varSigma^0_1 = \varSigma^1_0$, и то же для $\varPi$ и $\varDelta$.

§ 6.3 Эффективная иерархия множеств

Главная идея в связи с использованием аналитических формул состоит в том, что с их помощью можно определять точечные множества в бэровских произведениях, причем тип определяемого множества выводится из типа определяющей формулы. Покажем, как это делается.

Свободные переменные аналитических формул можно замещать конкретными элементами множества $\mathbb{N}$ (натуральные числа, тип 0) или точками пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (тип 1). Эти замещающие элементы[2] называются *параметрами*. Формула называется *замкнутой*, если в ней нет незамещенных свободных переменных. И такая формула, очевидно, либо истинна, либо ложна. Если же свободные переменные есть, например мы имеем формулу $\varphi(n_1, \ldots, n_k, x_1, \ldots, x_\ell)$ (все

[2] На самом деле такая подстановка несущественна для типа 0, поскольку по определению мы разрешили натуральным числам прямо входить в формулы. И даже без этого каждое натуральное число определимо простой бескванторной формулой.

свободные переменные явно указаны), то такая формула определяет точечное множество

$$X = \{\langle n_1, \ldots, n_k, x_1, \ldots, x_\ell \rangle \in \mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\ell : \varphi(n_1, \ldots, n_k, x_1, \ldots, x_\ell)\}$$

соответствующего пространства $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\ell$, состоящее из всех тех точек этого пространства, подстановка координат которых вместо соответствующих свободных переменных превращает данную формулу в истинную.

Пример 6.3.1. Формула $\forall n\, (a(n) < a(n+1))$ выражает тот факт, что $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ — (строго) возрастающая последовательность. Соответствующее множество $\{a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \forall n\, (a(n) < a(n+1))\}$ состоит из всех точек $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, возрастающих как функция $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Мы приходим к классификации точечных множеств в бэровских произведениях (пространствах вида $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\ell$), принимающей во внимание как положение определяющей формулы в иерархии формул из § 6.2, так и список параметров, которые могут встретиться в этой формуле.

Определение 6.3.2. Предположим, что $A \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$.

Пусть $n, i \in \mathbb{N}$, причем хотя бы одно из n, i отлично[3] от 0. Через $\varSigma^i_n(A)$ обозначим класс всех точечных множеств в пространствах $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\ell$, которые определимы $\varSigma^i_n$-формулами с параметрами типа 1 из множества A. Класс $\varPi^i_n(A)$ вводится аналогичным образом, а $\varDelta^i_n(A) = \varSigma^i_n(A) \cap \varPi^i_n(A)$.

Принято писать $\varSigma^i_n$ и $\varSigma^i_n(p)$ вместо $\varSigma^i_n(A)$ в случаях когда $A = \varnothing$ (нет параметров типа 1) и $A = \{p\}$ (единственный параметр $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ типа 1) соответственно, и аналогично для $\varPi$ и $\varDelta$.

Те классы, обозначения которых включают простые наклонные буквы $\varSigma$, $\varPi$, $\varDelta$, принято называть *эффективными*, в отличие от борелевских и проективных классов $\mathbf{\Sigma}^i_n$, $\mathbf{\Pi}^i_n$, $\mathbf{\Delta}^i_n$ (с полужирными прямыми буквами), о связи которых с первыми см. ниже.

Если множество параметров $A \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ не более чем счетно, то любой класс $\varSigma^i_n(A)$ содержит лишь счетное число множеств. В частности, каждый из классов вида $\varSigma^i_n$ и $\varSigma^i_n(a)$, $a \in 2^\mathbb{N}$, содержит лишь счетное число множеств. То же для $\varPi$ и $\varDelta$. Таким образом, эффективная иерархия нетривиальна, в отличие от проективной, даже для счетного (дискретного) пространства $\mathbb{N}$ (натуральные числа), и, разумеется, она прибавляет совершенно особую грань в классификации множеств несчетных польских пространств.

[3] Именно для этого случая (т. е. с исключением $n = i = 0$) ниже по умолчанию формулируются все определения и результаты.

Общее соглашение 6.3.3. Аналогично замечанию 2.1.1 буква $\mathit{\Gamma}$ может обозначать любую из букв $\mathit{\Sigma}$, $\mathit{\Pi}$, $\mathit{\Delta}$.

Упражнение 6.3.4. Пусть $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Докажите, что множество $X \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$ принадлежит $\mathit{\Gamma}^i_n(p)$, если и только если X совпадает с сечением $(W)_p = \{x : \langle p, x\rangle \in W\}$ некоторого $\mathit{\Gamma}^i_n$-множества $W \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{X}$.

Замечание 6.3.5. Каждый класс $\mathit{\Gamma}^i_n(A)$ замкнут относительно подстановки термов. Более точно, если $X \subseteq \mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$ — множество из $\mathit{\Gamma}^i_n(A)$ и

$$t_0(\mathbf{m},\mathbf{a}),\ t_1(\mathbf{m},\mathbf{a}),\ \dots,\ t_{k-1}(\mathbf{m},\mathbf{a}),\ \tau_0(\mathbf{m},\mathbf{a}),\ \tau_1(\mathbf{m},\mathbf{a}),\ \dots,\ \tau_{\ell-1}(\mathbf{m},\mathbf{a})$$

— термы (t_i типа 0 и τ_i типа 1) от переменных, входящих в общий список

$$(\mathbf{m},\mathbf{a}) = m_0, m_1, \dots, m_{j-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\,,$$

то множество Y всех точек $\langle \mathbf{m},\mathbf{a}\rangle = \langle m_0,\dots,m_{j-1},a_0,\dots,a_{n-1}\rangle$ пространства $\mathbb{N}^j \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n$, для которых

$$\langle t_0(\mathbf{m},\mathbf{a}),\dots,t_{k-1}(\mathbf{m},\mathbf{a}),\ \tau_0(\mathbf{m},\mathbf{a}),\dots,\tau_{\ell-1}(\mathbf{m},\mathbf{a})\rangle \in X,$$

также принадлежит $\mathit{\Gamma}^i_n(A)$. Причина совершенно очевидна: тип определяющей формулы не меняется при подстановке термов.

Следствие 6.3.6. *Каждый класс $\mathit{\Gamma}^i_n(A)$ инвариантен относительно введенных в определении 6.1.1 (i,iii,v) и упражнении 6.1.3 гомеоморфизмов бэровских произведений.* □

Например, множества $X \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $Y = \{m^\wedge a : \langle m, a\rangle \in X\}$ одновременно принадлежат или не принадлежат классу $\mathit{\Gamma}^i_n(A)$.

Упражнение 6.3.7. Пусть $\mathbb{X}$ — бэровское произведение и множество $X \subseteq \mathbb{X}$ принадлежит $\mathit{\Gamma}^i_n(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$. Покажите, используя следствие 6.3.6, что найдется такой параметр $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что X является $\mathit{\Gamma}^i_n(p)$-множеством.

§ 6.4 Преобразования аналитических формул

Эквивалентности в таблице на с. 118 позволяют преобразовывать сложные аналитические формулы посредством упрощения кванторной приставки к такому виду, который дает возможность немедленно оценить тип формулы (и тип множества, определяемого этой формулой). Отметим, что предпоследняя эквивалентность ($\forall^0\,\exists^1$) выражает счетную аксиому выбора, а последняя эквивалентность ($\exists^0\,\forall^1$) выражает двойственное утверждение.

$(\forall^{<}\,\exists^0 \to \exists^0\,\forall^{<})$	$\forall\, i<j\ \exists\, k\ \varphi(i,j,k)$	$\Longleftrightarrow$	$\exists\, k\ \forall\, i<j\ \varphi(i,j,(k)^j_i)$
$(\exists^{<}\,\forall^0 \to \forall^0\,\exists^{<})$	$\exists\, i<j\ \forall\, k\ \varphi(i,j,k)$	$\Longleftrightarrow$	$\forall\, k\ \exists\, i<j\ \varphi(i,j,(k)^j_i)$
$(\exists^0\,\exists^0 \to \exists^0)$	$\exists\, i\ \exists\, j\ \varphi(i,j)$	$\Longleftrightarrow$	$\exists\, n\ \varphi((n)^2_0,(n)^2_1)$
$(\forall^0\,\forall^0 \to \forall^0)$	$\forall\, i\ \forall\, j\ \varphi(i,j)$	$\Longleftrightarrow$	$\forall\, n\ \varphi((n)^2_0,(n)^2_1)$
$(\exists^1\,\exists^1 \to \exists^1)$	$\exists\, a\ \exists\, b\ \varphi(a,b)$	$\Longleftrightarrow$	$\exists\, c\ \varphi((c)^2_0,(c)^2_1)$
$(\forall^1\,\forall^1 \to \forall^1)$	$\forall\, a\ \forall\, b\ \varphi(a,b)$	$\Longleftrightarrow$	$\forall\, c\ \varphi((c)^2_0,(c)^2_1)$
$(\forall^0\,\exists^0 \to \exists^1\,\forall^0)$	$\forall\, i\ \exists\, j\ \varphi(i,j)$	$\Longleftrightarrow$	$\exists\, a\ \forall\, i\ \varphi(i,a(i))$
$(\exists^0\,\forall^0 \to \forall^1\,\exists^0)$	$\exists\, i\ \forall\, j\ \varphi(i,j)$	$\Longleftrightarrow$	$\forall\, a\ \exists\, i\ \varphi(i,a(i))$
$(\exists^1\,\exists^0 \to \exists^1)$	$\exists\, a\ \exists\, j\ \varphi(a,j)$	$\Longleftrightarrow$	$\exists\, b\ \varphi((b)_0,(b)_1(0))$
$(\forall^1\,\forall^0 \to \forall^1)$	$\forall\, a\ \forall\, j\ \varphi(a,j)$	$\Longleftrightarrow$	$\forall\, b\ \varphi((b)_0,(b)_1(0))$
$(\forall^0\,\exists^1 \to \exists^1\,\forall^0)$	$\forall\, i\ \exists\, a\ \varphi(i,a)$	$\Longleftrightarrow$	$\exists\, b\ \forall\, i\ \varphi(i,(b)_i)$
$(\exists^0\,\forall^1 \to \forall^1\,\exists^0)$	$\exists\, i\ \forall\, a\ \varphi(i,a)$	$\Longleftrightarrow$	$\forall\, b\ \exists\, i\ \varphi(i,(b)_i)$

Правила преобразования аналитических формул.
См. определение 6.1.1, где вводятся обозначения $(n)^k_i$ и др.

Замечание 6.4.1. Таблица включает только те правила преобразования формул, которые используют особые черты и свойства рассматриваемого языка, но не включает общематематические правила обращения с формулами, которые предполагаются известными. К этим последним, не включенным в таблицу и предполагаемым известными, относятся, например, правила проноса отрицания через кванторы, выражаемые эквивалентностями

$$\neg\,\exists\, a\ \varphi(a) \Longleftrightarrow \forall\, a\ \neg\,\varphi(a) \quad \text{и} \quad \neg\,\forall\, a\ \varphi(a) \Longleftrightarrow \exists\, a\ \neg\,\varphi(a)\,,$$

а также известные правила, связанные с логическими связками $\vee$, $\wedge$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ и продвигающие связки направо, а кванторы налево.

Дадим несколько примеров преобразования формул.

Пример 6.4.2. Отрицание $\varSigma^i_n$-формулы преобразуется к эквивалентному $\varPi^i_n$-виду при помощи эквивалентностей в выделенной строке в замечании 6.4.1. Более кратко, но формально не совсем верно, это положение может быть сформулировано так: отрицание $\varSigma^i_n$-формулы является $\varPi^i_n$-формулой.

Пример 6.4.3. Если $\varphi(a, b, k, m)$ является Σ^1_n-формулой (и $n \geq 1$), то формулы

$$\exists\, a\, \varphi(a, b, k, m)\,, \quad \exists\, k\, \varphi(a, b, k, m)\,, \quad \forall\, k\, \varphi(a, b, k, m)$$

принадлежат к тому же классу в том смысле, что каждая из них может быть преобразована к эквивалентному Σ^1_n-виду при помощи преобразований $(\exists^1 \exists^1 \to \exists^1)$, $(\exists^1 \exists^0 \to \exists^1)$ и комбинации преобразований $(\forall^0 \exists^1 \to \exists^1 \forall^0)$ и $(\forall^1 \forall^0 \to \forall^1)$ соответственно.

Пример 6.4.4. Пусть $n \geq 1$. Любая аналитическая формула, имеющая Σ^1_n-приставку, за которой следует арифметическая формула, может быть преобразована к эквивалентному Σ^1_n-виду, и то же для Π^1_n. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим, к примеру, формулу φ вида

$$\exists\, a\, \forall\, b\, \exists\, k\, \forall\, m\, \psi(a, b, k, m),$$

где ψ — ограниченная формула, при $n = 2$. Кванторная приставка имеет вид $\exists^1 \forall^1 \exists^0 \forall^0$. Эта приставка преобразуется к виду $\exists^1 \forall^1 \forall^1 \exists^0$, а затем к виду $\exists^1 \forall^1 \exists^0$ при помощи преобразований $(\exists^0 \forall^0 \to \forall^1 \exists^0)$ и $(\forall^1 \forall^1 \to \forall^1)$.

Отсюда следует, что любая арифметическая формула допускает преобразование как к эквивалентному Σ^1_1-виду, так и к эквивалентному Π^1_1-виду.

Правило 6.4.5. На самом деле пример 6.4.4 является частным случаем следующего «правила», которое мы будем часто использовать для быстрого определения типа данной формулы.

Допустим, что аналитическая формула Φ *уже записана в предваренном виде, т. е. имеет вид* $\mathsf{Q}\,\psi$, *где* Q *— строка кванторов, а* ψ *— ограниченная формула, причем* Q *включает хотя бы один квантор типа* 1, *а кванторы типа* 0 *могут располагаться произвольным образом по отношению к кванторам типа* 1, *в том числе и между ними. Удалим из* Q *все кванторы типа* 0, *и пусть* Q' *— полученная редуцированная кванторная приставка, содержащая теперь только кванторы типа* 1.

Редуцированная кванторная приставка Q' *имеет тип* Σ^1_n *или* Π^1_n *для некоторого* $n \geq 1$. *Именно, считаем, что она имеет тип* Σ^1_n, *если она включает ровно* n *чередующихся блоков кванторов*[4], *начинающихся с блока* $\exists$ *(т. е. самый левый блок есть* $\exists$*) и она имеет тип* Π^1_n *в том же случае, но самый левый блок должен*

[4] Блок кванторов — это несколько (может быть, и один) соседних кванторов $\exists$ или несколько соседних кванторов $\forall$. Блоки чередуются, если $\exists$ сменяет $\forall$ или наоборот.

быть $\forall$ *. Подчеркнем, что, в отличие от классификации в § 6.2, здесь нам удобно рассматривать лишь кванторы типа* 1*, не обращая внимание на кванторы типа* 0*.*

Теперь постановительная часть.

Если в указанной ситуации редуцированная приставка Q' *имеет тип* Σ^1_n*, то данную формулу* Φ *можно преобразовать к эквивалентному* Σ^1_n*-виду в смысле § 6.2. Если же* Q' *имеет тип* Π^1_n*, то* Φ *можно преобразовать к эквивалентному* Π^1_n*-виду в смысле § 6.2.*

Обоснование.

1. Последовательно применим к Φ преобразования ($\forall^0 \exists^1 \to \exists^1 \forall^0$) и ($\exists^0 \forall^1 \to \forall^1 \exists^0$) нужное число раз, чтобы вынести все кванторы типа 0 направо от кванторов типа 1. При этом структура последовательности кванторов типа 1 не меняется.

2. Применяем к полученной формуле преобразования ($\exists^1 \exists^1 \to \exists^1$) и ($\forall^1 \forall^1 \to \forall^1$) нужное число раз, чтобы привести каждый блок кванторов типа 1 к одному квантору.

3. Используем пример 6.4.4. □

Пример 6.4.6. Пусть $n \ge 1$. Конъюнкцию и дизъюнкцию двух Σ^1_n-формул можно преобразовать к эквивалентному Σ^1_n-виду, и то же для Π^1_n. Чтобы доказать это, рассмотрим Σ^1_n-формулы φ и φ' вида

$$\exists\, a\, \forall\, b\, \exists\, k\, \psi(a,b,k) \quad \text{и} \quad \exists\, a\, \forall\, b\, \exists\, k\, \psi'(a,b,k)\,,$$

в случае $n = 2$, где формулы ψ, ψ' ограничены. Конъюнкция $\varphi \wedge \varphi'$ эквивалентна формуле

$$\exists\, a\, \exists\, a'\, \forall\, b\, \forall\, b'\, \exists\, k\, \exists\, k'\, (\psi(a,b,k) \wedge \psi'(a',b',k'))\,,$$

которая уже без труда преобразуется к Σ^1_2 подходящими преобразованиями из таблицы.

Пример 6.4.7 (фиктивные кванторы)**.** Пусть $n \ge 1$. Любая Σ^0_n-формула φ преобразуется к эквивалентному Π^0_{n+1}-виду путем приписывания к ней слева квантора $\forall\, k$, где k — некоторая переменная типа 0, вообще не встречающаяся в φ. Такой квантор называется *фиктивным*, ибо он по существу ничего не выражает. Аналогично любая Σ^0_n-формула φ преобразуется к эквивалентному Σ^0_{n+1}-виду путем приписывания подходящего фиктивного квантора справа к кванторной приставке. В частности, при $n = 0$ любая ограниченная формула преобразуется как к эквивалентному Σ^0_1-виду, так и к эквивалентному Π^0_1-виду.

Соответственно, добавление фиктивных кванторов приводит любую Π^0_n-формулу к эквивалентному Σ^0_{n+1}-виду и к эквивалентному

Π^0_{n+1}-виду, а любую формулу из Σ^1_n или Π^1_n к эквивалентному Σ^1_{n+1}-виду и к эквивалентному Π^1_{n+1}-виду.

Упражнение 6.4.8. Докажите, используя последнее утверждение примера 6.4.4, что для иерархии множеств в бэровских произведениях $\Sigma^0_n(p) \cup \Pi^0_n(p) \subseteq \Delta^1_1(p)$ для любых $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Упражнение 6.4.9. Докажите, что всякое точечное множество, определимое ограниченной формулой, принадлежит Δ^0_1. Например, множество

$$\mathtt{Prim} = \{m : \forall\, k < m\, \forall\, n < m\; (m \neq nk)\}$$

всех простых натуральных чисел есть Δ^0_1-множество. Причина в том, что каждая ограниченная формула может быть превращена в Σ^0_1-формулу и в Π^0_1-формулу присоединением *фиктивного* квантора, как в примере 6.4.7.

На самом деле не так легко привести пример Δ^0_1-множества натуральных чисел, **не** определимого ограниченной формулой.

§ 6.5 Класс Σ^0_1: связь с теорией рекурсии и топологией

Здесь приведены два результата о классе Σ^0_1. Первый из них связывает класс Σ^0_1 с рекурсивными функциями и рекурсивно перечислимыми множествами (понятия теории рекурсии, которые мы здесь не комментируем).

Лемма 6.5.1 (Σ^0_1 = рекурсивно перечислимые). *Множество $X \subseteq \mathbb{N}^m$ принадлежит классу Σ^0_1, если и только если оно рекурсивно перечислимо.*

Доказательство (набросок). Допустим, что $X \subseteq \mathbb{N}$ — рекурсивно перечислимое множество, т. е. имеется компьютерная программа C, которая вычисляет $C(n) = 1$ в случае, когда $n \in X$, и вычисляет какое-то значение $C(n) \neq 1$ или не вычисляет ничего (не останавливается) в случае, когда $n \notin X$. Можно показать, что отношение «$C(n) = 1$ вычисляется после не более чем k шагов программы C» выразимо некоторой ограниченной формулой $\varphi(n, k)$. Теперь $n \in X \iff \exists\, k\, \varphi(n, k)$, и поэтому X принадлежит классу Σ^0_1. Для доказательства в обратную сторону достаточно заметить, что множества $X \subseteq \mathbb{N}^m$, определимые ограниченными формулами, рекурсивны (даже примитивно рекурсивны). □

Упражнение 6.5.2. Докажите, что функция $f\colon \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ рекурсивна, если и только если она (т. е. ее график $\Gamma_f \subseteq \mathbb{N}^{m+1}$) принадлежит Δ^0_1.

Вторая лемма показывает, что для множеств в пространстве $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ принадлежность классу Σ^0_1 равносильна эффективной открытости, т. е. определимости через объединение некоторой Σ^0_1-совокупности базовых интервалов. Напомним, что множества вида $[s] = \{a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : s \subset a\}$ (где $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$), т. е. бэровские интервалы, образуют базу топологии $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, а перечисление $\mathbb{N}^{<\omega} = \{\mathbf{s}_n : n \in \mathbb{N}\}$ введено в определении 6.1.1 (ii).

Лемма 6.5.3 (Σ^0_1= эффективно открытые)**.** *Множество $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ принадлежит классу $\Sigma^0_1(p)$ (где $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$), если и только если существует $\Sigma^0_1(p)$-множество $N \subseteq \mathbb{N}$, для которого $X = \bigcup_{n\in N}[\mathbf{s}_n]$.*

Доказательство (набросок)**.** Считаем для простоты, что параметра p нет. Допустим, что N — такое множество, как указано, в частности $N = \{n : \varphi(n)\}$, где φ является Σ^0_1-формулой. Тогда X — Σ^0_1-множество, поскольку

$$\begin{aligned} a \in X \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists n\,(n \in N \wedge \mathbf{s}_n \subset a) \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists n\,(\varphi(n) \wedge \forall k < \mathtt{lh}\,\mathbf{s}_n(\mathbf{s}_n(k) = a(k)))\,, \end{aligned}$$

а формула во второй строке приводится к Σ^0_1-виду при помощи преобразований из таблицы.

Доказательство обратного требует большей работы. Рассмотрим произвольное множество $X = \{a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \exists m\; \varphi(m, a)\}$, где формула φ ограничена. Вследствие ограниченности для любой конкретной пары $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ истинностное значение (т. е. истина либо ложь) формулы $\varphi(m, a)$ может быть найдено при помощи подходящей компьютерной программы (которая зависит от структуры φ, но не от значений a, m), причем a (бесконечная последовательность натуральных чисел) вводится как бесконечная в одну сторону лента числовых значений $a(k)$, $k \in \mathbb{N}$, а m — как одно число, а результат получается через конечное число шагов. Очевидно, что при этом программа (при заданных a, m) конкретно обращается лишь к конечному (зависящему от a, m) числу значений $a(k)$.

Если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, то пусть $s^\wedge\mathbf{0} \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ — продолжение кортежа s бесконечным числом нулей. Положим

$W =$ множество всех пар $\langle m, n\rangle$, для которых имеется вычисление истинностного значения $\varphi(m, \mathbf{s}_n{}^\wedge\mathbf{0})$, дающее «истинно» и не обращающееся к значениям $(s^\wedge\mathbf{0})(j)$, $j \ge \mathtt{lh}\,\mathbf{s}_n$.

Можно убедиться, что множество W рекурсивно перечислимо, т. е. принадлежит Σ_1^0, по лемме 6.5.1. Поэтому $N = \{n : \exists m(\langle m, n\rangle \in W)\}$ является Σ_1^0-множеством, причем $X = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists n \in N\,(\mathbf{s}_n \subset x)\} = \bigcup_{n\in N}[\mathbf{s}_n]$. □

§ 6.6 Связь с борелевскими и проективными множествами

Теперь покажем, что проективные классы $\mathbf{\Sigma}_n^1$, $\mathbf{\Pi}_n^1$, $\mathbf{\Delta}_n^1$ и борелевские классы $\mathbf{\Sigma}_\xi^0$, $\mathbf{\Pi}_\xi^0$, $\mathbf{\Delta}_\xi^0$ для конечных $\xi \geq 1$ являются и классами эффективной иерархии в бэровских произведениях.[5]

Предложение 6.6.1. *В любом польском пространстве $\mathbb{X}$, которое является бэровским произведением, имеет место равенство $\mathbf{\Gamma}_n^i = \Gamma_n^i(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$. Более точно, как следует из упражнения 6.3.7, $X \in \mathbf{\Gamma}_n^i$, если и только если $X \in \Gamma_n^i(a)$ для некоторого $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Напомним, что в соответствии с соглашением 6.3.3 символ Γ может обозначать любую из букв Σ, Π, Δ, и тогда $\mathbf{\Gamma}$ обозначает соответствующую полужирную букву $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{\Delta}$.

Доказательство. Первым делом докажем теорему для класса Σ_1^0. Для дискретных пространств вида $\mathbb{N}^m$ каждый из классов $\mathbf{\Sigma}_1^0$ и $\Sigma_1^0(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ содержит все множества $X \subseteq \mathbb{N}$. (Например любое множество $X = \{n : p(n) = 1\}$ принадлежит $\Sigma_1^0(p)$, где p есть характеристическая функция множества X.) Случай же несчетных бэровских произведений сводится к случаю самого пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ посредством гомеоморфизмов из определения 6.1.1 и леммы 6.3.6.

Итак, докажем $\Sigma_1^0(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \mathbf{\Sigma}_1^0$ для множеств пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Если множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ открыто, то найдется такое множество $N \subseteq \mathbb{N}$, что $X = \bigcup_{n\in N}[\mathbf{s}_n]$. Пусть $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — характеристическая функция множества N. Легко видеть, что N является $\Sigma_1^0(p)$-множеством, а потому этому же классу принадлежит и X по лемме 6.5.3. Обратно, имея множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ из $\Sigma_1^0(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$, мы сначала находим такой параметр $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $X \in \Sigma_1^0(p)$, а тогда по лемме 6.5.3 множество X открыто.

Таким образом, $\Sigma_1^0(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \mathbf{\Sigma}_1^0$. Отсюда легко получается результат для всех арифметических классов Σ_n^0, Π_n^0, Δ_n^0. Именно, рассуждаем индукцией по n по схеме $\Sigma_n^0 \to \Pi_n^0 \to \Sigma_{n+1}^0$. Шаг $\Sigma_n^0 \to \Pi_n^0$

[5] Систематическое использование аналитических формул для исследования проективных множеств вместо геометрических построений, характерных для стиля более ранних работ Н. Н. Лузина и др. 1920–30-х годов, было начато Аддисоном; см. [34, 33].

просто является переходом к отрицаниям формул и к дополнительным множествам. Шаг $\mathit{\Pi}^0_n \to \mathit{\Sigma}^0_{n+1}$ сделаем для простоты только для пространства $\mathbb{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Доказываем $\mathit{\Sigma}^0_{n+1}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_{n+1}$. Пусть $\varphi(a)$ является $\mathit{\Sigma}^0_{n+1}$-формулой с любыми параметрами из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, т. е. $\varphi(a)$ есть $\exists n\, \psi(n,a)$, где ψ есть $\mathit{\Pi}^0_n$-формула. Требуется доказать, что $X = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \varphi(a)\}$ является $\mathbf{\Sigma}^0_{n+1}$-множеством. Тогда $P = \{\langle n,a\rangle : \psi(n,a)\}$ есть $\mathbf{\Pi}^0_n$-множество по индуктивному предположению. Отсюда согласно лемме 2.2.3 следует, что все сечения $(P)_n = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \langle n,a\rangle \in P\}$ также принадлежат $\mathbf{\Pi}^0_n$. Однако $X = \bigcup_n (P)_n$.

Обратно, рассмотрим произвольное $\mathbf{\Sigma}^0_{n+1}$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Имеем $X = \bigcup_n X_n$, где все X_n — $\mathbf{\Pi}^0_n$-множества. Но тогда множество $P = \{\langle n,a\rangle : a \in X_n\}$ также является $\mathbf{\Pi}^0_n$-множеством по лемме 2.2.3, поскольку $(P)_n = X_n$, $\forall n$. Поэтому по индуктивному предположению имеется такая $\mathit{\Pi}^0_n$-формула $\psi(n,a)$, что $P = \{\langle n,a\rangle : \psi(n,a)\}$. Остается взять $\exists n\, \psi(n,a)$ в качестве $\mathit{\Sigma}^0_{n+1}$-формулы, определяющей X.

Теперь докажем утверждение для проективных классов. Для классов $\mathit{\Sigma}^1_0 = \mathit{\Sigma}^0_1$ и $\mathit{\Pi}^1_0 = \mathit{\Pi}^0_1$ результат уже получен. Поскольку индуктивный шаг $\mathit{\Sigma}^1_n \to \mathit{\Pi}^1_n$ тривиален, остается провести шаг $\mathit{\Pi}^1_n \to \mathit{\Sigma}^1_{n+1}$. Рассмотрим произвольную $\mathit{\Sigma}^1_{n+1}$-формулу $\varphi(a)$, т. е. формулу вида $\exists b\, \psi(a,b)$, где ψ является $\mathit{\Pi}^1_n$-формулой. Множество $P = \{\langle a,b\rangle : \psi(a,b)\} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит классу $\mathbf{\Pi}^1_n$ по индуктивному предположению (в частности, классу $\mathbf{\Pi}^0_1 = \mathbf{\Pi}^1_0$ замкнутых множеств при $n = 0$). Но множество $X = \{a : \varphi(a)\}$ равно проекции

$$\mathtt{pr}\, P = \{a : \exists b\, (\langle a,b\rangle \in P\} = \{a : \exists b\, \psi(a,b)\}$$

множества P, т. е. X есть $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. (При $n = 0$ ссылаемся на замечание 3.7.4.)

Обратно если $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$-множеством, то имеется $\mathbf{\Pi}^1_n$-множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, проекция $\mathtt{pr}\, P$ которого тождественна X. По индуктивному предположению P определяется некоторой $\mathit{\Pi}^1_n$-формулой $\psi(a,b)$. Но тогда X определяется $\mathit{\Sigma}^1_{n+1}$-формулой $\exists b\, \psi(a,b)$. □

§6.7 Теорема иерархии и универсальные множества (еще раз)

Следующее определение 6.7.1 обобщает то понятие универсального множества, которое дано в §2.7. Напомним, что сечениями множества $P \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{X}$ называются множества вида $(P)_a = \{x \in \mathbb{X} : P(a,x)\}$, где $a \in \mathbb{A}$.

Определение 6.7.1. Пусть $\mathbb{X}$ — бэровское произведение.

Множество $U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$ называется *универсальным* Σ^i_n*-множеством*, когда U само принадлежит классу Σ^i_n и для любого Σ^i_n-множества $X \subseteq \mathbb{X}$ существует число $e \in \mathbb{N}$, для которого $X = (U)_e$.

Множество $U \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{X}$ называется Σ^i_n*-множеством, универсальным для* $\mathbf{\Sigma}^i_n$, когда U само принадлежит Σ^i_n и для любого $\mathbf{\Sigma}^i_n$-множества $X \subseteq \mathbb{X}$ существует точка $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которой $X = (U)_z$.

То же для классов Π^i_n и $\mathbf{\Pi}^i_n$.

Таким образом, мы имеем два разных вида универсальных множеств. Множества первого вида, иногда называемые $\mathbb{N}$-*универсальными*, рассматриваются для эффективных классов Σ^i_n, $\Sigma^i_n(a)$, Π^i_n, $\Pi^i_n(a)$ и обеспечивают индексацию всех множеств данного класса натуральными числами. Множества второго вида, называемые соответственно $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-*универсальными*, рассматриваются для борелевских и проективных классов $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^0_\xi$, $\mathbf{\Pi}^1_n$ и обеспечивают индексацию всех множеств данного класса точками $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. (А для Δ-классов универсальных множеств нет, см. ниже.)

Теорема 6.7.2. *Пусть $\mathbb{X}$ — бэровское произведение. Тогда*

(i) *каждый из борелевских и проективных классов $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^0_\xi$, $\mathbf{\Pi}^1_n$ имеет $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-универсальное множество $U \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{X}$;*

(ii) *более того, классы $\mathbf{\Sigma}^i_n$ и $\mathbf{\Pi}^i_n$ имеют $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-универсальные множества, принадлежащие соответствующим эффективным классам Σ^i_n и Π^i_n;*

(iii) *Все классы Σ^i_n, Π^i_n, а также $\Sigma^i_n(p)$, $\Pi^i_n(p)$ ($p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$), имеют $\mathbb{N}$-универсальные множества $U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$.*

Доказательство (набросок)**.** (i) Искомый результат для борелевских классов уже получен в § 2.7, а результат для проективных классов следует из утверждения (ii).

(ii) Σ^0_1-множество $U \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, универсальное для класса $\mathbf{\Sigma}^0_1$ открытых множеств, можно определить так:

$$U = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists\, n\, (x(n) = 0 \wedge \mathbf{s}_n \subset y)\}.$$

Здесь используется перечисление $\mathbb{N}^{<\omega} = \{\mathbf{s}_n : n \in \mathbb{N}\}$ из определения 6.1.1 (ii). Отсюда для любого бэровского произведения $\mathbb{X} = \mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$ ($\ell \geq 1$) мы получаем Σ^0_1-множество $W \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{X}$, универсальное для $\mathbf{\Sigma}^0_1$, при помощи одного из гомеоморфизмов, введенных в определении 6.1.1 или в упражнении 6.1.3. Например, для пространства $\mathbb{X} = (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ множество

$$W = \{\langle a, b, c\rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^3 : \langle a, \pi(b, c)\rangle \in U\}$$

(где π в арности 2 вводится в соответствии с определением 6.1.1 (iii)) принадлежит Σ_1^0 вместе с U. Для проверки универсальности рассмотрим произвольное $\mathbf{\Sigma}_1^0$-множество (т. е. открытое) $Y \subseteq \mathbb{X} = (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$. Множество $X = \{\pi(b,c) : \langle b,c\rangle \in Y\}$ также принадлежит $\mathbf{\Sigma}_1^0$, поскольку π — гомеоморфизм. Значит, $X = (U)_a$ для какой-то точки $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Но тогда, очевидно, $Y = (W)_a$, что и требовалось.

После этого начального шага мы используем индукцию. Переходы $\mathbf{\Sigma}_n^0 \to \mathbf{\Pi}_n^0$ и $\mathbf{\Sigma}_n^1 \to \mathbf{\Pi}_n^1$ производятся путем взятия дополнения.

Опишем переход $\mathbf{\Pi}_n^0 \to \mathbf{\Sigma}_{n+1}^0$. Имея Π_n^0-множество $U \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{X}$, универсальное для $\mathbf{\Pi}_n^0$, мы определяем Σ_{n+1}^0-множество

$$W = \{\langle a,x\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{X} : \exists\, n\,(\langle (a)_n, x\rangle \in U)\},$$

универсальное для $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^0$. (Определение точек $(a)_n$ см. в определении 6.1.1 (iv).) В самом деле, заменив в некоторой Π_n^0-формуле $\varphi(a,x)$, определяющей $U = \{\langle a,x\rangle : \varphi(a,x)\}$, всякое вхождение a на $(a)_n$ (предполагается, что n не встречается в φ), мы, очевидно, получим Π_n^0-формулу, скажем $\psi(n,a,x)$. Тогда $\exists\, n\, \psi(n,a,x)$ есть Σ_{n+1}^0-формула, определяющая W, так что $W \in \Sigma_{n+1}^0$. Для доказательства универсальности рассмотрим произвольное Σ_{n+1}^0-множество $X = \bigcup_n X_n \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, где все X_n являются Π_n^0-множествами. По выбору U найдутся точки $a_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которых $X_n = (U)_{a_n}$, $\forall\, n$. Существует (единственная) точка $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ такая, что $a_n = (a)_n$, $\forall\, n$, и тогда по определению $X = (W)_a$.

Опишем переход $\mathbf{\Pi}_n^1 \to \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$. Начинаем с Π_n^1-множества $U \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{X} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$, универсального для $\mathbf{\Pi}_n^0$. Тогда множество

$$W = \{\langle a,x\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{X} : \exists\, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,(\langle a,x,b\rangle \in U)\}$$

принадлежит Σ_{n+1}^1. Его универсальность для $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$ легко проверяется. Именно, рассмотрим произвольное $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$-множество $X \subseteq \mathbb{X}$. Из упражнения 3.7.3 следует, что найдется $\mathbf{\Pi}_n^1$-множество $Y \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, проекция которого на $\mathbb{X}$ совпадает с X, т. е. $x \in X \iff \exists\, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,(\langle x,b\rangle \in Y)$. Вследствие универсальности U имеем $Y = (U)_a$ для некоторого параметра $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда $X = (W)_a$.

(iii) Существование универсального Σ_1^0-множества $U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — хорошо известный результат теории рекурсии, см., например, [32, 7.4]. Чтобы получить такое множество, начинаем с перечисления $\{\varphi_k(m,n)\}_{k\in\mathbb{N}}$ всех ограниченных формул с двумя свободными переменными, которое должно быть рекурсивным в том смысле, что множество $Q = \{\langle k,m,n\rangle : \varphi_k(m,n)\}$ рекурсивно перечислимо, т. е. принадлежит Σ_1^0, согласно лемме 6.5.1. После этого

$$U = \{\langle k,m\rangle : \exists\, n\, \varphi_k(m,n)\}$$

является искомым универсальным Σ^0_1-множеством. (Класс Σ^0_1 обеспечивается преобразованием $\exists^0\,\exists^0 \to \exists^0$ со с. 118.) Далее, из этого множества U можно получить универсальное Σ^0_1-множество

$$V = \{\langle k, a\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists\, m\,(\langle k, m\rangle \in U \wedge \mathbf{s}_m \subset a)\}\,.$$

(Универсальность следует из леммы 6.5.3, а для оценки класса следует заменить $\mathbf{s}_m \subset a$ на $\forall\, i < \mathtt{lh}\,\mathbf{s}_m\,(\mathbf{s}_m(i) = a(i))$ и воспользоваться преобразованиями из таблицы на с. 118.) Последующие классы рассматриваютя по индукции примерно тем же образом, как и в доказательстве утверждения (ii). □

Выведем несколько следствий теоремы об универсальных множествах. Первое из них показывает, что классы $\Sigma^i_n(a)$, $\Pi^i_n(a)$ $(a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ также имеют универсальные множества, причем в достаточной степени равномерно по a.

Следствие 6.7.3. *Если $\mathbb{X}$ — бэровское произведение, то для любого класса Σ^i_n существует Σ^i_n-множество $W \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times \mathbb{X}$, обладающее тем свойством, что если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $X \subseteq \mathbb{X}$ — множество из $\Sigma^i_n(a)$, то найдется такое n, что X совпадает с сечением $(W)_{an} = \{x : \langle a, n, x\rangle \in W\}$. Отсюда в соответствии с упражнением 6.3.4 следует, что $(W)_a = \{\langle n, x\rangle : \langle a, n, x\rangle \in W\}$ является универсальным $\Sigma^i_n(a)$-множеством.*

То же для классов Π^i_n.

Доказательство. Всё оказывается довольно просто: берем универсальное Σ^i_n-множество $W \subseteq \mathbb{N} \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{X})$ и полагаем $W = \{\langle a, n, x\rangle : \langle n, a, x\rangle \in U\}$. □

Следствие 6.7.4 (теорема иерархии). *Каждый класс $\Sigma^i_n(p)$, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, содержит множество $x \subseteq \mathbb{N}$, не принадлежащее двойственному классу $\Pi^i_n(p)$, и содержит множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, не принадлежащее даже классу $\mathbf{\Pi}^i_n$, и наоборот.*

Доказательство. В доказательстве используется диагональная конструкция Кантора. Утверждается, что даваемое теоремой 6.7.2 Σ^i_n-множество $U \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, универсальное для $\mathbf{\Sigma}^i_n$, не принадлежит классу $\mathbf{\Pi}^i_n$. (Перенос этого примера в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ при помощи одного из гомеоморфизмов из определения 6.1.1 мы оставим читателю.) В самом деле, иначе $X = \{b : \langle b, b\rangle \notin U\}$ было бы $\mathbf{\Sigma}^i_n$-множеством (Можно сослаться, например, на то, что если формула $\varphi(x, y)$ относится к Σ^i_n, то ее отрицание, а тогда и формула $\neg\varphi(x, x)$, приводится к Π^i_n-виду.) По выбору U существует параметр $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которого $b \in X \iff \langle a, b\rangle \in U$ для всех b. Взяв $b = a$, мы немедленно получаем противоречие. □

Замечание 6.7.5. То же самое рассуждение, что и в доказательстве следствия 6.7.4, позволяет убедиться, что теорема 6.7.2 неверна для классов Δ и $\boldsymbol{\Delta}$. В самом деле, если U является, к примеру, $\boldsymbol{\Delta}^1_n$-множеством, то множество X, введенное как в доказательстве 6.7.4, также принадлежит классу $\boldsymbol{\Delta}^1_n$, поскольку этот класс, очевидно, содержит дополнения всех своих множеств.

Существует подкатегория универсальных множеств, позволяющих подбирать коды для множеств данного класса некоторым равномерным образом.

Определение 6.7.6. Пусть $\mathbb{X}$ — бэровское произведение. Универсальное Σ^i_n-множество $U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$ называется *хорошим*, если для любого Σ^i_n-множества $P \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$ существует такая Δ^0_1-функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $(P)_n = (U)_{f(n)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Аналогично определяется понятие хорошего универсального множества для Π^i_n и для классов с параметром $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Такие множества легко получаются из «просто» универсальных.

Теорема 6.7.7. *Пусть $n \geq 1$. Для любого бэровского произведения $\mathbb{X}$ существуют хорошее универсальное Σ^1_n-множество $U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$ и хорошее универсальное Π^1_n-множество $V \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$.*

Чтобы получить V из U, достаточно определить $V = (\mathbb{N} \times \mathbb{X}) \smallsetminus U$.

Доказательство. Начнем с некоторого универсального Σ^1_n-множества $W \subseteq \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$. Положим $U = \{\langle \pi(e,k), x\rangle : \langle e,k,x\rangle \in W\}$, где $\pi\colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}$ — любая рекурсивная биекция, например, та, которая задана равенством $\pi(e,k) = 2^e(2k+1)-1$. Это будет универсальное Σ^1_n-множество для $\mathbb{X}$. В самом деле, рассмотрим любое множество $X \subseteq \mathbb{X}$ из Σ^1_n. Тогда $Y = \{0\} \times X$ есть Σ^1_n в $\mathbb{N} \times \mathbb{X}$. По выбору W найдется такое число e, что

$$x \in X \iff \langle 0, x\rangle \in Y \iff \langle e, 0, x\rangle \in W \iff \langle n, x\rangle \in U,$$

где $n = \pi(e,0)$, что и требовалось. Для доказательства «хорошести» множества U рассмотрим произвольное Σ^1_n-множество $P \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$. По выбору W найдется индекс e, для которого

$$\langle n, x\rangle \in P \iff \langle e, n, x\rangle \in W \iff \langle \pi(e,n), x\rangle \in U,$$

а потому $(P)_n = (U)_{f(n)}$ для всех n, где $f(n) = \pi(e,n)$. □

О том, как работают хорошие универсальные множества, см., например, теорему 8.2.3.

§ 6.8 Классификация функций

В топологии функции (или отображения, что одно и то же) вообще классифицируются с точки зрения типа их графиков, или типа прообразов открытых множеств. (Это, разумеется, отнюдь не исчерпывающая схема.) В частности, мы рассматривали непрерывные, борелевские и B-измеримые отображения, причем два последних типа для польских пространств совпадают. В более общем виде этот подход реализуется в нижеследующих определениях 6.8.1 и 6.8.3. Предположим, что $\mathbb{X}$ — произвольное польское пространство, а $\mathbb{Y}$ — бэровское произведение.

Определение 6.8.1. Пусть K — некоторый класс точечных множеств, а $X \subseteq \mathbb{X}$. Отображение $f \colon X \to \mathbb{Y}$ *принадлежит классу* K, или является *K-функцией*, если его график $\Gamma_f = \{\langle x, y\rangle : x \in X \wedge f(x) = y\}$ есть множество класса K в пространстве $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Следующая лемма представляет полезный «переход $\Sigma \to \Delta$».

Лемма 6.8.2. *Если $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — бэровские произведения и $n \geq 1$, то каждая Σ^1_n-функция $F \colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является и Δ^1_n-функцией. Если к тому же $\mathbb{Y} = \mathbb{N}^k$, $k \in \mathbb{N}$, то каждая Σ^0_n-функция $F \colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является и Δ^0_n-функцией.*

То же верно для классов $\Sigma^1_n(p)$, $\Delta^1_n(p)$, $\Sigma^0_n(p)$, $\Delta^0_n(p)$ с любым параметром $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Доказательство. Имеем $F(x) = y \iff \forall\, y' \,(y' \neq y \Longrightarrow F(x) \neq y')$. Для преобразования правой части к Π^1_n используем таблицу преобразований на с. 118. □

Однако если мы желаем классифицировать отображения с точки зрения типа прообразов открытых множеств, то в плане именно эффективной теории здесь возникает необходимость оценить еще и сложность функции, сопоставляющей прообразы базовым открытым множествам. Это реализуется при помощи понятия развертки функции.

Определение 6.8.3. Предположим, что $\mathbb{Y} = \mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$ — бэровское произведение, а $f \colon X \to \mathbb{Y}$ — функция, заданная на произвольном множестве $X \subseteq \mathbb{X}$. Её *разверткой*, или *развернутой функцией*, называется функция $\widehat{f} \colon X \times \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}^{k+\ell}$, определенная равенством

$$\widehat{f}(x, i_0, \dots, i_{\ell-1}) = \langle m_0, \dots, m_{k-1}, j_0, \dots, j_{\ell-1}\rangle\,,$$

где $j_m = a_m(i_m)$ для $0 \leq m < \ell$ и $\langle m_0, \dots, m_{k-1}, a_0, \dots, a_{\ell-1}\rangle = f(x)$.

Отображение $f\colon X \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ называется K-*измеримым* (где, как и выше, K — некоторый класс точечных множеств), если его развертка $\widehat{f}$ является K-функцией в смысле определения 6.8.1.

Понятно, что $\widehat{f} = f$ в случае, когда $\mathbb{Y}$ (область значений f) — пространство вида $\mathbb{N}^m$. Таким образом, для функций $f\colon X \to \mathbb{N}^m$ понятия K-функции и K-измеримой функции совпадают. Если же бэровское произведение $\mathbb{Y}$ имеет хотя бы одну ось $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то $\widehat{f} \neq f$. Например, для функций $f\colon X \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, мы имеем $\mathtt{dom}\,\widehat{f} = X \times \mathbb{N}$ и $\widehat{f}(x,i) = f(x)(i)$, так что

$$\Gamma_{\widehat{f}} = \{\langle x,i,k\rangle : x \in X \wedge f(x)(i) = k\} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{N}^2.$$

Лемма 6.8.4. *Допустим, что $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Функция $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ принадлежит классу $\Delta^1_1(p)$, если и только если она $\Delta^1_1(p)$-измерима.*

Доказательство. Считаем для простоты, что $\mathbb{Y} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Равенство $f(x) = a$ равносильно тому, что $\forall n\, \forall k\, (\langle x,n,k\rangle \in \Gamma_{\widehat{f}} \Longrightarrow a(n) = k)$, так что если $\Gamma_{\widehat{f}}$ — множество из $\Delta^1_1(p)$, то последняя формула трансформируется к $\Sigma^1_1(p)$ и к $\Pi^1_1(p)$ при помощи преобразований из таблицы на с. 118. Обратно,

$$\begin{aligned}\langle x,n,k\rangle \in \Gamma_{\widehat{f}} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall a\, (f(x) = a \Longrightarrow a(n) = k) \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists a\, (f(x) = a \wedge a(n) = k)\,,\end{aligned}$$

и это доказывает, что график $\Gamma_{\widehat{f}}$ принадлежит классу $\Delta^1_1(p)$. □

Важным случаем является Σ^0_1-измеримость. Для отображений в пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ понятия Σ^0_1-функции и Σ^0_1-измеримой функции не совпадают, и, более того, Σ^0_1-функций с областью значений в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ просто нет, поскольку отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не может иметь график класса Σ^0_1 (следовательно, открытый как точечное множество по предложению 6.6.1). Однако справедлива следующая лемма.

Лемма 6.8.5. *Если $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и функция $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является $\Sigma^0_1(p)$-измеримой, то она $\Delta^0_1(p)$-измерима, а ее график Γ_f — множество класса $\Pi^0_1(p)$.*

Доказательство. Пусть, для простоты, $\mathbb{Y} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Ясно, что

$$\langle x,n,k\rangle \in \Gamma_{\widehat{f}} \Longleftrightarrow \forall k' \neq k\, (\langle x,n,k'\rangle \notin \Gamma_{\widehat{f}})\,,$$

что и доказывает $\Pi^0_1(p)$-измеримость и первое утверждение. Для вывода второго утверждения достаточно заметить, что

$$F(x) = y \Longleftrightarrow \forall n\, \forall k\, (\langle x,n,k\rangle \in \Gamma_{\widehat{F}} \Longrightarrow k = y(n))\,. \qquad \square$$

Замечание 6.8.6. Функция $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$-измеримой, если и только если она непрерывна, см. ниже 6.10.3. Тем самым, Σ^0_1-измеримость — это эффективный аналог непрерывности.

Упражнение 6.8.7. (1) Докажите, что все отображения, введенные в определении 6.1.1, Σ^0_1-измеримы. Например, для отображения $f(a,n) = (a)_n$ из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ множество $\Gamma_{\widehat{f}}$ состоит из всех таких четверок $\langle a, n, i, j\rangle$, что $a(2^n(2i+1)-1) = j$, и оно, очевидно, принадлежит Σ^0_1.

(2) Пусть $\mathtt{num}(a,m)$ для $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $m \in \mathbb{N}$ есть то единственное $n \in \mathbb{N}$, для которого $\mathbf{s}_n = a \restriction m$. Докажите при помощи замечания 6.3.5, что эта функция $\mathtt{num}\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ является Σ^0_1-измеримой.

§ 6.9 Классификация точек

Любая точка $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является функцией $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, следовательно, подмножеством пространства $\mathbb{N}^2$, и в этом смысле ее можно рассматривать с точки зрения нашей классификации как множеств (т. е. подмножеств пространства $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$), так и функций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (из дискретного пространства $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$). Таким образом, по определению 6.8.1 точка $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит, скажем, классу Δ^1_n если этому классу принадлежит ее график[6] $\Gamma_a = \{\langle m,k\rangle : a(m) = k\}$.

Следующий простой результат связывает класс точки $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ с классом ее *синглета*, т. е. одноэлементного множества $\{a\}$.

Лемма 6.9.1. *Пусть $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $n \geq 1$. Следующие условия эквивалентны*:

$$\begin{array}{rr} a \text{ имеет класс } \Delta^1_n\,, & a \text{ имеет класс } \Sigma^1_n\,, \\ \{a\} \text{ имеет класс } \Delta^1_n\,, & \{a\} \text{ имеет класс } \Sigma^1_n\,. \end{array}$$

То же для классов $\Sigma^1_n(p)$ и $\Delta^1_n(p)$ для любого $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Доказательство. Если a принадлежит Σ^1_n, то

$$\begin{aligned} b \in \{a\} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, m\, \forall\, k\, (b(m) = k \Longrightarrow a(m) = k) \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall\, m\, \forall\, k\, (a(m) = k \Longrightarrow b(m) = k). \end{aligned}$$

Заменив $a(m) = k$ той Σ^1_n-формулой, которая по предположению определяет a, и используя преобразования из таблицы на с. 118, мы получаем $\{a\} \in \Sigma^1_n$ из первой строки и $\{a\} \in \Pi^1_n$ из второй строки.

[6] Строго говоря, в современной системе обозначений в теории множеств a отождествляется с Γ_a.

Для вывода в обратном направлении допустим, что множество $X = \{a\}$ принадлежит Σ^1_n. Тогда

$$a(m) = k \iff \exists\, b\,(b \in X \wedge b(m) = k) \iff \forall\, b\,(b \in X \Longrightarrow b(m) = k).$$

Вновь мы имеем $a \in \Sigma^1_n$ из средней формулы, и $a \in \Pi^1_n$ из правой формулы. □

Здесь есть еще один интересный вопрос. Пусть $n \geq 1$ фиксировано. Соотношение $a \in \Delta^1_n(b)$ (для $a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) можно понимать как то обстоятельство, что точка a в определенном смысле (зависящем, конечно, от n) *сводима* к b, т. е. мы имеем нечто вроде частичного порядка: пусть $a \leq_{\Delta^1_n} b$ означает, что $a \in \Delta^1_n(b)$. Но в самом ли деле здесь выполнена транзитивность? Следующая простая лемма дает утвердительный ответ.

Лемма 6.9.2. *Предположим, что $n \geq 1$, $a, b, c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и выполнены условия $a \in \Delta^1_n(b)$ и $b \in \Delta^1_n(c)$. Тогда $a \in \Delta^1_n(c)$.*

Доказательство. По определению имеются такие Σ^1_n-формулы φ и φ' и Π^1_n-формулы ψ и ψ', что для любых m и k выполнены:

$$\begin{aligned} a(m) = k &\iff \varphi(m, k, b) &\iff \psi(m, k, b)\,. \\ b(m) = k &\iff \varphi'(m, k, c) &\iff \psi'(m, k, c)\,. \end{aligned}$$

Отсюда следует эквивалентность

$$a(m) = k \iff \exists\, b\,\big(\varphi(m, k, b) \wedge \forall\, m'\, \forall\, k'\, \Phi(m', k', b, c)\big),$$

где $\Phi(m', k', b, c)$ есть формула

$$\big(\psi'(m', k', c) \Longrightarrow b(m') = k'\big) \wedge \big(b(m') = k' \Longrightarrow \varphi'(m', k', c)\big).$$

Остается привести последнюю эквивалентность к Σ^1_n-виду с помощью нашей таблицы преобразований, и мы получим $a \in \Sigma^1_n(c)$. Лемма 6.8.2 усиливает этот результат до $\Delta^1_n(c)$. □

§6.10 Свойства замкнутости классов

Пришло время расмотреть важный вопрос: каким образом те или иные операции над точечными множествами влияют на класс множеств. Здесь есть целый набор достаточно простых результатов, обычно формулируемых как утверждения о замкнутости классов относительно операций. Они основаны на преобразованиях формул из таблицы на с. 118 (и, например, тех, которые упомянуты в замечании

6.4.1), и собраны в следующем предложении. Мы приводим их без подробных доказательств. Больше деталей можно найти в книгах [15, 32, 97, 87, 68].

Читатель без труда заметит, что разные утверждения из предложения 6.10.1 использовались выше со ссылкой на таблицу на с. 118.

Предложение 6.10.1. *Предположим, что* $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. *Тогда, для иерархии множеств в бэровских произведениях, справедливы следующие утверждения.*

(i) *Классы вида* $\Gamma^i_n(A)$ *замкнуты относительно ограниченных кванторов типа* 0, *т. е.* $\exists k < n$ *и* $\forall k < n$, *и относительно конечных объединений и пересечений (множеств в одном и том же пространстве) и декартовых произведений.*

(ii) *Классы вида* $\Delta^i_n(A)$ *также замкнуты относительно дополнений и операции разности двух множеств.*

(iii) *Классы* $\Sigma^0_n(A)$ *замкнуты относительно квантора* $\exists$ *типа* 0 *(т. е. относительно проекции вдоль оси* $\mathbb{N}$*): если* $\mathbb{X}$ *— бэровское произведение и* $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{N}$ *является* $\Sigma^0_n(A)$*-множеством, то его проекция* $\mathtt{pr}\, P = \{x \in \mathbb{X} : \exists k\, (\langle x, k\rangle \in P)\}$ *снова множество из* $\Sigma^0_n(A)$.

Классы $\Pi^0_n(A)$ *замкнуты относительно квантора* $\forall$ *типа* 0.

(iv) *Классы* $\Sigma^1_n(A)$, $n \geq 1$, *замкнуты относительно квантора* $\exists$ *типа* 1 *(т. е. относительно проекции вдоль оси* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$*): если* $\mathbb{X}$ *— бэровское произведение и* $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *является* $\Sigma^1_n(A)$*-множеством, то проекция* $\mathtt{pr}\, P = \{x \in \mathbb{X} : \exists a\, (\langle x, a\rangle \in P)\}$ *снова множество из* $\Sigma^1_n(A)$.

Классы $\Pi^1_n(A)$ *замкнуты относительно квантора* $\forall$ *типа* 1.

(v) *Классы* $\Gamma^1_n(A)$, $n \geq 1$, *замкнуты относительно обоих кванторов* $\exists$ *и* $\forall$ *типа* 0.

(vi) *Классы* $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ *замкнуты относительно счетных объединений (множеств в одном и том же пространстве), а классы* $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ *— относительно счетных пересечений.*

(vii) *Классы* $\mathbf{\Gamma}^1_n$, $n \geq 1$, *замкнуты относительно счетных объединений и счетных пересечений.*

(viii) *Классы вида* $\Gamma^i_n(A)$ *замкнуты относительно* $\Delta^0_1(A)$*-измеримых подстановок и* $\Delta^0_1(A)$*-измеримых прообразов, а классы вида* $\Gamma^1_n(A)$, $n \geq 1$, *— также и относительно* $\Delta^1_1(A)$*-подстановок и* $\Delta^1_1(A)$*-прообразов.*

(ix) *Классы* $\mathbf{\Gamma}^i_n$ *замкнуты относительно непрерывных подстановок и непрерывных прообразов, а классы* $\mathbf{\Gamma}^1_n$, $n \geq 1$, *— также и относительно* $\mathbf{\Delta}^1_1$*-подстановок и* $\mathbf{\Delta}^1_1$*-прообразов.*

Доказательство (набросок)**.** Для вывода утверждений (i), (ii) используйте преобразования $\forall^< \exists^0 \to \exists^0 \forall^<$ и $\exists^< \forall^0 \to \forall^0 \exists^<$ из таблицы на с. 118, а также пример 6.4.6.

Для вывода утверждения (iii) следует использовать преобразования $\exists^0 \exists^0 \to \exists^0$ и $\forall^0 \forall^0 \to \forall^0$. Для вывода утверждения (iv) используйте преобразования $\exists^1 \exists^1 \to \exists^1$ и $\forall^1 \forall^1 \to \forall^1$.

Для вывода утверждения (v) следует использовать преобразования $\exists^1 \exists^0 \to \exists^1$ и $\forall^1 \forall^0 \to \forall^1$ в случае одноименных кванторов и преобразования $\forall^0 \exists^1 \to \exists^1 \forall^0$ и $\exists^0 \forall^1 \to \forall^1 \exists^0$ в случае разноименных кванторов.

Утверждение (vi) можно получить из леммы 2.2.1.

Утверждение (viii) (первая часть) достаточно доказать для классов $\varSigma^0_1(A)$; переход к высшим классам осуществляется при помощи простой индукции. Для простоты отбросим параметры (т. е. множество A) и будем рассматривать функции со значениями в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Рассмотрим $\varDelta^0_1$-измеримую функцию $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и $\varSigma^0_1$-множество $Y \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Докажем, что прообраз $X = f^{-1}[Y]$ также принадлежит $\varSigma^0_1$. Согласно лемме 6.5.3 существует $\varSigma^0_1$-множество $N \subseteq \mathbb{N}$, для которого $Y = \bigcup_{m \in N} [\mathbf{s}_m]$. Тогда

$$f(x) \in Y \iff \exists\, m\, (m \in N \wedge \forall\, n < \mathtt{lh}\, \mathbf{s}_m\, (\langle x, n, \mathbf{s}_m(n) \rangle \in \Gamma_{\widehat{f}})),$$

где множество $\Gamma_{\widehat{f}} = \{\langle x, n, k \rangle : f(x)(n) = k\}$ принадлежит $\varDelta^0_1$. Отсюда легко вывести, что $X \in \varSigma^0_1$, при помощи примера 6.4.6 и преобразований из таблицы на с. 118.

Для доказательства второй части утверждения (viii) рассмотрим $\varDelta^1_1$-функцию $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и $\varSigma^1_n$-множество $Y \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Тогда

$$F(x) \in Y \iff \exists\, y\, (y \in Y \wedge \langle x, y \rangle \in F),$$

и поэтому прообраз $X = f^{-1}[Y]$ также принадлежит $\varSigma^1_n$.

(vii) Докажем, что, к примеру, класс $\mathbf{\Sigma}^1_n$ замкнут относительно счетных операций. Рассмотрим последовательность множеств $X_n \subseteq \mathbb{X}$ класса $\mathbf{\Sigma}^1_n$, и пусть $\varSigma^1_n$-множество $U \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{X}$ универсально для класса $\mathbf{\Sigma}^1_n$ (см. теорему 6.7.2). Найдутся такие точки $a_n \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, что $X_n = (U)_{a_n}$ для каждого n, а затем и единственная точка $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, для которой $a_n = (a)_n$ для всех n. Тогда пересечение $X = \bigcap_n X_n$ удовлетворяет условию

$$x \in X \iff \forall\, n\, (\langle (a)_n, x \rangle \in U).$$

Но множество $\{\langle n,b,x\rangle : \langle (b)_n, x\rangle \in U\}$ само принадлежит классу Σ^1_n, например, по замечанию 6.3.5. Значит, множество X имеет класс $\mathbf{\Sigma}^1_n$, точнее, $\Sigma^1_n(a)$, по уже доказанному утверждению (v). $\square$

Упражнение 6.10.2. Докажите, что для любого борелевского или проективного класса $\mathbf{\Gamma}^i_n$, множество $X \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$ (где $\mathbb{X}$ — бэровское произведение) есть $\mathbf{\Gamma}^i_n$, если и только если каждое сечение $(X)_j = \{x : \langle j, x\rangle \in X\}$ $(j \in \mathbb{N})$ принадлежит $\mathbf{\Gamma}^i_n$.

В сторону от X к сечениям используйте утверждение (ix) из предложения 6.10.1 для, очевидно, непрерывного отображения $x \mapsto \langle j, x\rangle$, а в обратную сторону (для $\mathbf{\Sigma}^1_n$) воспользуйтесь предложением 6.10.1 (i) и тем, что $X = \bigcup_j (\{j\} \times (X)_j)$.

Следующий результат касается измеримости функций в смысле определения 6.8.3 относительно борелевских и проективных классов.

Следствие 6.10.3. *Пусть $\mathbb{X}$ — польское пространство, $\mathbb{Y}$ — бэровское произведение, а $\mathbf{K}$ — один из борелевских или проективных классов $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ или $\mathbf{\Gamma}^1_n$, $n \geq 1$. Отображение $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является $\mathbf{K}$-измеримым в смысле определения 6.8.3, если и только если все f-прообразы открытых множеств $U \subseteq \mathbb{Y}$ принадлежат $\mathbf{K}$.*

В частности, функция f является $\mathbf{\Sigma}^0_1$-измеримой, если и только если она непрерывна.

Доказательство. Для простоты рассматриваем случай $\mathbb{Y} = \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Если функция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ $\mathbf{K}$-измерима, то множество

$$\Gamma_{\widehat{f}} = \{\langle x, n, k\rangle : x \in \mathbb{X} \wedge f(x)(n) = k\} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{N}^2$$

принадлежит классу $\mathbf{K}$. Тогда множества $X_{nk} = \{x \in \mathbb{X} : f(x)(n) = k\}$ также принадлежат классу $\mathbf{K}$ в соответствии с упражнением 6.10.2. Однако любое открытое множество $U \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ может быть получено как счетное объединение конечных пересечений множеств вида $U_{nk} = \{a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : a(n) = k\}$, и соответственно f-прообраз открытого U получается из множеств X_{nk} при помощи тех же операций, относительно которых класс $\mathbf{K}$ замкнут по предложению 6.10.1 (vi),(vii).

Обратно, если все f-прообразы открытых множеств $U \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$, в частности все множества X_{nk}, принадлежат классу $\mathbf{K}$, то $\Gamma_{\widehat{f}} \in \mathbf{K}$ снова в соответствии с упражнением 6.10.2. $\square$

Замечание 6.10.4. Критерий измеримости по следствию 6.10.3 часто берется за определение измеримости функций для «неэффективных» классов (например, проективных или борелевских), т. е. функция f называется $\mathbf{K}$-измеримой, если все f-прообразы открытых множеств принадлежат классу $\mathbf{K}$. (Ср. упражнение 2.4.2.) Но такое определение не подходит для эффективных классов вроде Γ^i_n.

Глава 7

Первый уровень проективной иерархии: введение

Несколько неожиданно оказывается, что наиболее простые и естественные доказательства значительного числа теорем для множеств первого проективного уровня (классы $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Delta}^1_1$ и соответствующие эффективные классы) — это те, которые включают технику и медоды, первоначально разработанные в теории рекурсии для других целей. Это ведет к той ветви современной дескриптивной теории, которая называется *эффективной* [1].

Целью этой главы является введение в эффективную дескриптивную теорию множеств первого проективного уровня. Начав с терминологических и пояснительных замечаний в §7.1 относительно распространения эффективной иерархии на пространства, близкие к бэровским произведениям, мы перейдем затем к анализу одного специального определения Σ^1_1-множеств и дополнительных Π^1_1-множеств, родственного А-операции. Будут рассмотрены некоторые вопросы определимости в связи с деревьями $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$. В конце главы доказывается принцип отражения, связанный с классификацией *семейств* точечных множеств.

[1] Следует отметить вклад Аддисона, показавшего в работах [34, 33] технические преимущества эффективных методов и даже обозначений для дескриптивной теории множеств.

Общее соглашение 7.0.5. Работая с точечными множествами, мы будем по умолчанию рассматривать только множества в пространствах, являющихся бэровскими произведениями, т. е. пространствах вида $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$, а также в тех пространствах, которые могут быть сведены к бэровским произведениям в смысле, указанном ниже в §7.1. Однако те результаты, которые относятся именно к проективным классам $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$ при $n \geq 1$, обычно сохраняют силу для всех польских пространств благодаря борелевской изоморфности последних.

§7.1 Пространства, близкие к бэровским произведениям

Начнем с пояснения по поводу распространения классов эффективной иерархии на деревья и вообще множества конечных последовательностей, множества деревьев и тому подобные объекты. Напомним, что вся глава 6 была посвящена анализу разных определений и построений в пространствах, являющихся конечными произведениями следующих двух областей:

- область $\mathbb{N}$ объектов типа 0 (натуральных чисел), и
- область $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ объектов типа 1 (бесконечных последовательностей объектов типа 0).

К сожалению, обойтись только этими пространствами представляется затруднительным. Например, во многих вопросах естественный ход рассуждений приводит к $2^{\mathbb{N}}$, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ или, скажем, $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ как к областям типа 1.

Но это, как говорится, полбеды, и даже совсем никакой проблемы здесь нет: $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ отождествляется с $2^{\mathbb{N}}$, а $2^{\mathbb{N}}$ — просто замкнутое множество в бэровском пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Однако, чтó несколько хуже, иногда придется рассматривать $\mathbb{Q}$ (множество рациональных чисел) или, скажем, $\mathbb{N}^{<\omega}$ как области типа 0 и соответственно $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$, $\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$, $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$, $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$, и т. п. и даже, например, $(\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega}))^{\mathbb{N}}$ как области типа 1. Подчеркнем, что с чисто топологической стороны здесь нет проблемы: если X и Y — строго счетные (бесконечные) множества, то пространство X^Y гомеоморфно $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, причем любая пара биекций из $\mathbb{N}$ на X и Y сразу индуцирует гомеоморфизм. Проблема состоит в распространении на такие пространства именно тех понятий и методов, которые связаны с эффективной иерархией. Попробуем решить ее так.

Пример 7.1.1. Предположим, что X — счетное множество, с которым связана какая-то структура, существенная при анализе этого множества. Например, если $X = \mathbb{N}^{<\omega}$, то для нас существенны:

1) функция $\mathtt{lh}\, s$ (длина кортежа $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$) из $\mathbb{N}^{<\omega}$ в $\mathbb{N}$;
2) функция конкатенации $s, t \mapsto s^\wedge t$ из $\mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega}$ в $\mathbb{N}^{<\omega}$;
3) функция[2] $s, n \mapsto s(n)$ из $\mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$;
4) функции $s, n \mapsto s^\wedge n$ и $s, n \mapsto n^\wedge s$ из $\mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}^{<\omega}$;
5) отношение $s \subset t$ между последовательностями из $\mathbb{N}^{<\omega}$.

Мы также имеем биекцию $n \mapsto \mathbf{s}_n$ из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^{<\omega}$ (см. определение 6.1.1 (ii)), которая обладает тем свойством, что она превращает все эти функции в рекурсивные функции. Например, для п. 2 функция «$f(m, n) = k$, если $\mathbf{s}_m{}^\wedge \mathbf{s}_n = \mathbf{s}_k$» рекурсивна. Для п. 4 функция «$g(m, n) = k$, если $\mathbf{s}_m{}^\wedge n = \mathbf{s}_k$» рекурсивна.[3] Это можно суммировать так: *биекция $n \mapsto \mathbf{s}_n$ индуцирует рекурсивное представление существенной структуры $\mathbb{N}^{<\omega}$.*

Пример 7.1.2. Для множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ существенны 1) арифметические операции на $\mathbb{Q}$ и отображение $r \mapsto -r$, 2) порядок на $\mathbb{Q}$ и 3) функция $m, n \mapsto \dfrac{m}{n+1}$ из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{Q}$. И здесь найдется простенькая биекция $n \mapsto r_n$ из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Q}$, которая превращает функции из пп. 1, 2, 3 в рекурсивные (в смысле сноски 3) функции.

Определение 7.1.3. Рассмотрим какое-либо пространство вида

$$\mathbb{X} = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n\,, \tag{1}$$

где каждый сомножитель X_i принадлежит к одному из следующих типов:

(А) $X_i = A$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{<\omega}$, $\mathbb{Q}$ или любое конечное произведение этих множеств, понимаемое как дискретное пространство — подходящая комбинация отображений, упомянутых в примерах 7.1.1 и 7.1.2, дает биекцию X_i на $\mathbb{N}$;

(Б) $X_i = \mathscr{P}(A)$, где A — одно из счетных множеств, введенных в пункте (А), и мы применяем биекцию, указанную в (А), для отображения X_i на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, а затем преобразование множества в характеристическую функцию для отображения X_i на $2^{\mathbb{N}}$;

[2] При $n < \mathtt{lh}\, s$; иначе, т. е. при $n \ge \mathtt{lh}\, s$, просто $s(n) = 0$.

[3] Собственно, здесь для нас важна не рекурсивность в смысле теории вычислимости как таковая, а возможность определить все полученные функции и отношение из п. 5 посредством ограниченных арифметических формул языка из § 6.2, которая достаточно очевидна.

(В) X^Y, где X и Y являются счетными множествами из списка (А), — в этом случае применяем нужную пару биекций (из числа указанных в пункте (А) плюс тривиальная биекция, если одно из множеств X, Y есть $\mathbb{N}$) для отображения X_i на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;

(Г) $X^{\mathbb{N}}$, где X есть одно из пространств, упомянутых в пунктах (А), (Б), (В) — в этом случае применим соответствующую биекцию почленно к элементам множества $X^{\mathbb{N}}$ (т. е. бесконечным последовательностям элементов множества X) для отображения X_i на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ или $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, а затем в двух последних случаях применяем преобразование $a \mapsto \{(a)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (гомеоморфизм $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, см. определение 6.1.1 (iv)) в обратную сторону для отображения X_i на $2^{\mathbb{N}}$ или $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

В результате получается гомеоморфизм $H_{\mathbb{X}}$ пространства $\mathbb{X}$ вида (1) на

$$\mathbb{Y} = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n\,, \tag{2}$$

где каждый из сомножителей Y_i есть $\mathbb{N}$, $2^{\mathbb{N}}$ или $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. При этом пространство $\mathbb{Y}$ — это замкнутое множество в бэровском произведении, либо просто бэровское произведение если среди Y_i нет множеств $2^{\mathbb{N}}$.

А теперь постановительная часть. Пространства вида (1) с сомножителями X_i вида (А), (Б), (В) или (Г), назовем *пространствами, близкими к бэровским произведениям*. Если $\mathbb{X}$ — такое пространство, то множество $X \subseteq \mathbb{X}$ принадлежит классу K проективной или эффективной иерархии, если классу K принадлежит соответствующее множество $\{H_{\mathbb{X}}(x) : x \in X\}$ в соответствующем бэровском произведении.

Пример 7.1.4. Множество $\mathbf{Tr}$ всех деревьев $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ есть $\varPi^0_1$ в $\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$. Для доказательства покажем, что соответствующее множество

$$\mathbf{Tr}' = \{\chi(T) : T \in \mathbf{Tr}\} = \{\tau \in 2^{\mathbb{N}} : \{\mathbf{s}_n : \tau(n) = 1\} \in \mathbf{Tr}\}$$

имеет класс $\varPi^0_1$ в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. (Напомним, что $\chi(T) = \{n : \mathbf{s}_n \in T\}$.) В самом деле, условие $\tau \in \mathbf{Tr}'$ выполнено, если $\forall\, n\, (\tau(n) = 0$ или $1)$ и

$$\forall\, k\, \forall\, n\, (\tau(n) = 1 \wedge \mathbf{s}_k \subset \mathbf{s}_n \Longrightarrow \tau(k) = 1).$$

Теперь используем замечание 6.3.5 и подходящие преобразования из таблицы на стр. 118, предварительно заменив подформулу $\mathbf{s}_k \subset \mathbf{s}_n$ подформулой

$$\mathtt{lh}\,\mathbf{s}_k < \mathtt{lh}\,\mathbf{s}_n \wedge \forall\, j < \mathtt{lh}\,\mathbf{s}_k\, (\mathbf{s}_k(j) = \mathbf{s}_n(j)). \qquad \square$$

Замечание 7.1.5. Выкладки типа приведенных в примере 7.1.4 для доказательства принадлежности множества **Tr** всех деревьев к классу $\varPi^0_1$ вряд ли могут устроить. Мы хотели бы вывести принадлежность к классу $\varPi^0_1$ просто из того, что

$$T \in \mathbf{Tr} \iff \forall\, s\, \forall\, t\, (s \in T \wedge t \subset s \Longrightarrow t \in T)\,, \tag{3}$$

где кванторная приставка $\forall\, s \forall\, t$ (переменные релятивизованы к множеству $\mathbb{N}^{<\omega}$) имеет тип $\varPi^0_1$, а внутренняя формула составлена из $\subset$ (одного из «существенных элементов» для $\mathbb{N}^{<\omega}$, выбранных в примере 7.1.1) и отношения принадлежности. Собственно, именно так мы и будем оценивать тип формул и класс множеств едва не на каждой странице ниже, руководствуясь рядом простых принципов. К сожалению, в данном контексте эти принципы невозможно ни сформулировать в точных математических терминах, ни тем более доказать за «разумное число страниц», но их можно освоить и без труда обосновать их конкретные применения типа (3) по отношению к примеру 7.1.4. Итак, сформулируем эти принципы.

(а) В формуле, определяющей множество в одном из пространств, близких к бэровскому произведению (в смысле определения 7.1.3), мы определяем тип переменных, относя к типу 0 переменные с областью пробегания $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{<\omega}$, $\mathbb{Q}$ или другой (счетной) областью из 7.1.3 (А) и к типу 1 — с областями пробегания из пп. (Б), (В), (Г) определения 7.1.3.

(б) Используя обычные правила исчисления предикатов, мы приводим данную формулу к виду $\mathsf{Q}\, M$, где Q — кванторная приставка (кванторов типа 1 и типа 0), а M — бескванторная[4] формула, составленная из функций и отношений, наподобие явно указанных в примерах 7.1.1 и 7.1.2, а также отношения принадлежности **тип0** $\in$ **тип1** и функциональной подстановки **тип1**(**тип0**) в корректных формах.

(в) Если кванторная приставка Q включает хотя бы один квантор типа 1, то мы определяем редуцированную кванторную приставку Q' удалением всех кванторов типа 0. Следуя правилу 6.4.5, определяем тип редуцированной приставки Q', т. е. $\varSigma^1_n$ или $\varPi^1_n$ для некоторого $n \geq 1$. Это и будет класс исходной формулы и (после учета параметров, если они есть) класс определяемого этой формулой множества.

---

[4] Мы не хотим еще ко всему прочему возиться с формулами «кванторными» но *ограниченными* в смысле определения из § 6.2. Если такие кванторы по структуре рассматриваемой формулы есть, то они просто присоединяются к Q_0. При этом происходит огрубление оценки по арифметическим классам, которая, однако, для нас совсем не будет важна.

(г) Если кванторная приставка Q не содержит кванторов типа 1, то определяем ее тип, т. е. теперь Σ^0_n или Π^0_n. Этот пункт на самом деле не очень важен, поскольку в большинстве случаев арифметическая определимость и, как следствие, принадлежность классу Δ^1_1 — это будет всё, что нам нужно, при отсутствии кванторов типа 1.

(д) О параметрах. Любая точка x пространства вида, упомянутого в пп. (Б) – (Г) определения 7.1.3, может служить параметром типа 1 в рассматриваемых формулах. Ведя x по цепочке упомянутых там эффективных преобразований, мы автоматически получаем некоторую точку $x' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Подчеркнем еще раз, что замечание 7.1.5 не содержит ни математически строгих определений, ни математически сформулированных утверждений, хотя, конечно, основано на материале главы 6, в частности на предложении 6.10.1 и правиле 6.4.5. Оно лишь приводит некоторый список более или менее однозначно сформулированных действий, которые, будучи примененными к типичным формульным определениям множеств в рассматриваемой категории пространств, позволяют оценить класс определяемых этими формулами множеств. Этот, так сказать, алгоритм полезно иметь в виду для анализа тех утверждений о классе определяемых множеств, которые в массе последуют ниже. Проверка этих утверждений в каждом конкретном случае намного (многократно) легче, чем любая попытка доведения сказанного в замечании 7.1.5 до математически корректного общего вида.

Пример 7.1.6. Мы принимаем определение *вещественного числа* как множества $u \subseteq \mathbb{Q}$, являющегося собственным начальным сегментом в $\mathbb{Q}$, — по Дедекинду, — и пусть, как обычно, $\mathbb{R}$ обозначает множество всех вещественных чисел. Тогда $\mathbb{R}$ становится арифметическим (следовательно, класса Δ^1_1) множеством в $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$, поскольку

$$x \in \mathbb{R} \iff \exists\, r\, (r \in x) \wedge \exists\, r\, (x \notin x) \wedge \forall\, r \forall\, q\, (r \in x \wedge q < r \Longrightarrow q \in x)$$

выполнено для любого $x \in \mathscr{P}(\mathbb{Q})$. (Даже можно утверждать, что оно принадлежит классу Δ^0_2, что для нас не суть важно.) Точно так же арифметическими (и потому класса Δ^1_1) становятся арифметические действия (как бинарные функции). Доказать это утверждение (или хотя бы понять, почему оно верно, на основе замечания 7.1.5) — хорошее **упражнение** для читателя.

Сами же вещественные числа, т. е. элементы множеств $\mathbb{R}$ и $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$, а также, например, их бесконечные последовательности (т. е. элементы множества $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) могут служить параметрами в определениях и в обозначениях классов типа $\varGamma^1_n(p)$ согласно сказанному в п. (д) замечания 7.1.5.

Отметим, что сказанное здесь совершенно не касается обычной топологии вещественной прямой, т. е. не утверждается, что $\mathbb{R}$ наследует топологию подмножества из $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$.

§ 7.2 Снова о фундированных деревьях

В этом параграфе мы возвратимся к рассмотрению деревьев в $\mathbb{N}^{<\omega}$ и связанных с ними рангов, начатому в § 4.1–4.2, для доказательства теоремы, характеризующей некоторые отношения между деревьями в терминах проективной иерархии. Напомним, что *ранг* $|T| \in \omega_1 \cup \{\infty\}$ сопоставлен каждому дереву $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, см. определение 4.1.4. При этом считается, что $\xi < \infty \le \infty$ для каждого ординала $\xi < \omega_1$.

В следующей теореме деревья $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ рассматриваются как точки пространства $\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ (которое можно отождествить с $2^{(\mathbb{N}^{<\omega})}$), а частичные гомоморфизмы, введенные в определении 4.2.1, — как множества пар в $\mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega}$, т. е. как точки пространства $\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega})$. Таким образом, $\mathbf{Tr} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$, если $S, T \in \mathbf{Tr}$ и $h \in \mathbf{PH}_{ST}$, то $h \in \mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega})$, и оба эти пространства относятся к пространствам, близким к бэровским произведениям, в смысле определения 7.1.3.

Теорема 7.2.1. (i) *Множество* $\mathbf{Tr}$ *всех деревьев* $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ *принадлежит классу* $\varPi^0_1$ *(в пространстве* $\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$*).*

(ii) *Множество* $\mathbf{Hom} = \{\langle S, T, h\rangle : S, T \in \mathbf{Tr} \wedge h \in \mathbf{PH}_{ST}\}$ *принадлежит классу* $\varPi^0_2$ *(в пространстве* $2^{(\mathbb{N}^{<\omega})} \times 2^{(\mathbb{N}^{<\omega})} \times 2^{(\mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega})}$*).*

(iii) *Множество* $\mathbf{WFT}$ *всех фундированных деревьев имеет класс* $\varPi^1_1$*, а множество* $\mathbf{IFT}$ *всех нефундированных деревьев имеет класс*[5] $\varSigma^1_1$*. Кроме того, множество* $\{\langle S, t\rangle : S \in \mathbf{Tr} \wedge t \in S_{\mathtt{wf}}\}$ *принадлежит классу* $\varPi^1_1$*.*

(iv) *Множество* $L = \{\langle S, T\rangle \in \mathbf{Tr}^2 : |S| \le |T|\}$ *имеет класс* $\varSigma^1_1$*.*

(v) *Множество* $M = \{\langle S, T\rangle \in \mathbf{Tr}^2 : T \in \mathbf{IFT} \vee |S| < |T|\}$ *есть* $\varSigma^1_1$*.*

(vi) *Множества* $L_{<} = \{\langle S, T\rangle : S, T \in \mathbf{WFT} \wedge |S| < |T|\}$ *и* $L_{\le} = \{\langle S, T\rangle : S, T \in \mathbf{WFT} \wedge |S| \le |T|\}$ *имеют класс* $\varPi^1_1$*.*

Доказательство. (i) см. пример 7.1.4.

[5] Этим уточняется тот факт, что $\mathbf{IFT}$ является A-множеством, т. е. множеством класса $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$, а $\mathbf{WFT}$ — соответственно $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-множеством, см. следствие 4.3.3.

(ii) По определению $h \in \mathbf{PH}_{ST}$ равносильно такой формуле:

$$\begin{aligned}&\forall\, s,t\,(\langle s,t\rangle \in h \Longrightarrow s \in S \wedge t \in T) \wedge \\ &\quad \forall\, s,t,t'\,(\langle s,t\rangle \in h \wedge \langle s,t'\rangle \in h \Longrightarrow t = t') \wedge \\ &\qquad \forall\, s,t,s'\,(\langle s,t\rangle \in h \wedge s \subset s' \Longrightarrow \exists\, t'\,(t \subset t' \wedge \langle s',t'\rangle \in h))\,,\end{aligned}$$

которая без труда приводится к Π^0_2-виду подсчетом кванторов (см. замечание 7.1.5), которые все имеют $\mathbb{N}^{<\omega}$ своей областью, т. е. имеют тип 0.

(iii) Легко видеть, что

$$\tau \in \mathbf{IFT} \iff \tau \in \mathbf{Tr} \wedge \exists\, a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \forall\, m\,(\tau(\mathtt{num}(a,m)) = 1)\,,$$

откуда и получается требуемое утверждение при помощи упражнения 6.8.7 (ii) и предложения 6.10.1 (vii).

(iv) Согласно теореме 4.2.3 (ii) для любой пары деревьев S, T мы имеем:

$$|S| \le |T| \iff \exists\, h\,(\langle S,T,h\rangle \in \mathbf{Hom} \wedge \Lambda \in \mathtt{dom}\, h)\,.$$

Формула в правой части имеет искомый тип Σ^1_1, см. замечание 7.1.5.

(v) Аналогично, но используется теорема 4.2.3 (iii).

(vi) Соотношение $\langle S,T\rangle \in L_<$ равносильно тому, что $S, T \in \mathbf{WFT}$ и $\langle T,S\rangle \notin L$, где L — множество из (iv). Аналогично проводится доказательство для $L_\le$, но с множеством M из (v) вместо L. □

Замечание 7.2.2. Согласно теореме, множества $L_<$ и $L_\le$, взаимно дополнительные в $\mathbf{WFT}^2$ (т. е. условие $\langle S,T\rangle \in L_<$ равносильно тому, что $\langle T,S\rangle \notin L_\le$ при $S,T \in \mathbf{WFT}$), оба принадлежат Π^1_1. Поэтому можно сказать, что они как бы имеют еще и класс Σ^1_1 на Π^1_1-множестве $\mathbf{WFT}^2$. В таких случаях говорят, что $L_<$, $L_\le$ являются множествами класса Σ^1_1 на Π^1_1 (в добавление к тому, что они принадлежат Π^1_1).

Это наблюдение можно сформулировать и по-другому: существуют такие Σ^1_1-множества $N_<$, $N_\le \subseteq \mathbf{Tr}^2$, что для любых деревьев $S,T \in \mathbf{WFT}$ выполняются условия

$$|S| \le |T| \Longleftrightarrow \langle S,T\rangle \in N_\le \quad \text{и} \quad |S| < |T| \Longleftrightarrow \langle S,T\rangle \in N_<\,.$$

Именно, берем $N_\le = L$ и $N_< = M$.

§ 7.3 Деревья и первый проективный уровень

Каждым деревом $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ определяется замкнутое множество

$$[T] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall m \, (x \restriction m \in T)\}$$

в пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и обратно, если множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ замкнуто, то множество $T = \{a \restriction n : a \in X \wedge n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ — дерево, удовлетворяющее условию $X = [T]$.

Упражнение 7.3.1. Докажите, что это соответствие между деревьями и замкнутыми множествами взаимно однозначно, если ограничиться непустыми деревьями без концевых вершин.

Аналогичное представление замкнутых множеств можно построить для любого пространства вида $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell}$, $\ell \geq 1$. Именно, по определению множество $(\mathbb{N}^{\ell})^{<\omega}$ состоит из (конечных) кортежей, членами которых служат ℓ-кортежи натуральных чисел. Итак, каждый кортеж $\sigma \in (\mathbb{N}^{\ell})^{<\omega}$ есть отображение из $m = \mathtt{lh}\, \sigma = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ в $\mathbb{N}^{\ell}$, так что $\sigma(k) = \langle \sigma_0(k), \sigma_1(k), \ldots, \sigma_{\ell-1}(k) \rangle$ для любого $k < m$. Поэтому σ можно идентифицировать с кортежем $\langle \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{\ell-1} \rangle$, где каждый член σ_j $(j < \ell)$ принадлежит $\mathbb{N}^m$. Тем самым, $(\mathbb{N}^{\ell})^{<\omega}$ идентифицируется с подмножеством

$$\{\langle \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{\ell-1} \rangle \in (\mathbb{N}^{<\omega})^{\ell} : \mathtt{lh}\, \sigma_0 = \mathtt{lh}\, \sigma_1 = \cdots = \mathtt{lh}\, \sigma_{\ell-1}\}$$

множества $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\ell}$, т. е. полного декартова произведения ℓ копий множества $\mathbb{N}^{<\omega}$.

Определение 7.3.2. Множество $W \subseteq (\mathbb{N}^{<\omega})^{\ell}$ является *деревом*, если оно состоит из таких кортежей вида $s = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{\ell-1} \rangle$, что все s_i принадлежат $\mathbb{N}^{<\omega}$, $\mathtt{lh}\, s_0 = \mathtt{lh}\, s_1 = \cdots = \mathtt{lh}\, s_{\ell-1}$, и выполнено такое условие: если $s = \langle s_0, s_1, \ldots, s_{\ell-1} \rangle \in W$, $t = \langle t_0, t_1, \ldots, t_{\ell-1} \rangle \in (\mathbb{N}^{<\omega})^{\ell}$, $\mathtt{lh}\, t_0 = \mathtt{lh}\, t_1 = \cdots = \mathtt{lh}\, t_{\ell-1} < \mathtt{lh}\, s_i$, и $t_i \subset s_i$ для всех i, то и $t \in W$. Для всякого дерева $W \subseteq (\mathbb{N}^{<\omega})^{\ell}$ множество

$$[W] = \{\langle a_0, a_1, ..., a_{\ell-1} \rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell} : \forall m (\langle a_0 \restriction m, a_1 \restriction m, ..., a_{\ell-1} \restriction m \rangle \in W)\},$$

очевидно, замкнуто в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell}$, и обратно, для каждого замкнутого множества найдется дерево, производящее это множество указанным образом.

Следующая лемма уточняет это соотношение между деревьями и замкнутыми множествами в плане эффективной иерархии.

Лемма 7.3.3. *Пусть $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Множество $X \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell}$ принадлежит $\Pi^0_1(p)$, если и только если существует дерево $W \subseteq (\mathbb{N}^{\ell})^{<\omega}$ класса $\Delta^0_1(p)$ (в смысле определения 7.1.3), для которого $X = [W]$.*

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай, когда $\ell = 1$ и параметр p отсутствует; общий случай мало чем отличается. Итак, требуется доказать, что $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит классу Π^0_1, если и только если существует Δ^0_1-дерево $W \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, для которого $X = [W]$. Если такое дерево W существует, то $N = \{n : \mathbf{s}_n \in W\}$ также является Δ^0_1-множеством по определению. Более того,

$$x \in X \iff \forall m \, \forall n \, (x \restriction m = \mathbf{s}_n \Longrightarrow n \in N),$$

откуда и следует, что $X \in \Pi^0_1$, поскольку формула в правой части легко преобразуется к виду Π^0_1 при помощи таблицы преобразований на с. 118.

В обратную сторону, расмотрим Π^0_1-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Его дополнение $Y = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus X$ принадлежит классу Σ^0_1, а потому по лемме 6.5.3 существует Σ^0_1-множество $K \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, для которого $Y = \bigcup_{s \in K} [s]$. По лемме 6.5.1 множество K рекурсивно перечислимо, т. е. имеется такая Δ^0_1-функция $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $Y = \bigcup_n [\mathbf{s}_{f(n)}]$. Дерево W всех таких $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, что $\mathbf{s}_{f(n)} \not\subseteq t$ для каждого $n < \mathtt{lh}\, t$, имеет класс Δ^0_1. (Упражнение: проверьте!) Докажем, что $X = [W]$.

Утверждается, что если $x \in X$, то $x \restriction m \in W$ для всех m и потому $x \in [W]$. В самом деле, если $x \restriction m \notin W$, то $\mathbf{s}_{f(n)} \subset x \restriction m$ для какого-то $n < m$, откуда следует, что $x \in Y$, и мы получаем противоречие. Обратно, пусть $x \in Y$, т. е., по выбору f, мы имеем $\mathbf{s}_{f(n)} \subset x$ для какого-то n. Возьмем любое $m > \mathtt{max}\{n, \mathtt{lh}\, \mathbf{s}_{f(n)}\}$. Тогда $x \restriction m \notin W$, а потому $x \notin [W]$, что и требовалось. □

Доказанная лемма позволяет получить представление множеств через деревья для всех проективых классов. Например, для класса Σ^1_1, справедливо

Следствие 7.3.4. *Пусть $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Множество $X \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell}$ принадлежит классу $\Sigma^1_1(p)$, если и только если существует такое $\Delta^0_1(p)$-дерево $W \subseteq (\mathbb{N}^{\ell+1})^{<\omega}$, что $X = \mathtt{pr}[W]$, т. е.*

$$\langle x_1, \ldots, x_\ell \rangle \in X \iff \exists y \, \forall m \, (\langle x_1 \restriction m, \ldots, x_\ell \restriction m, y \restriction m \rangle \in W).$$

Доказательство. По определению найдется $\Pi^0_1(p)$-множество $P \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell+1}$, удовлетворяющее

$$\langle x_1, \ldots, x_\ell \rangle \in X \iff \exists y \, P(x_1, \ldots, x_\ell, y).$$

Теперь лемма 7.3.3 дает такое $\Delta^0_1(p)$-дерево $W \subseteq (\mathbb{N}^{\ell+1})^{<\omega}$, что

$$\langle x_1, \ldots, x_\ell, y \rangle \in P \iff \forall m \, (\langle x_1 \restriction m, \ldots, x_\ell \restriction m, y \restriction m \rangle \in W). \qquad \square$$

§ 7.4 Связь деревьев с A-операцией и конституантами

Теперь мы можем уточнить, в плане эффективной дескриптивной теории множеств, те результаты гл. 3, согласно которым A-множества получаются действием A-операции на регулярные системы замкнутых множеств, а также являются B-измеримыми прообразами множества **IFT**, а CA-множества соответственно являются B-измеримыми прообразами множества **WFT**.

Пусть $\mathbb{X}$ — бэровское произведение. Следуя определению 6.8.3, функцию $F\colon \mathbb{X} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ назовем *K-измеримой*, если множества $\{\langle x, s\rangle : s \in F(x)\}$ и $\{\langle x, s\rangle : s \notin F(x)\}$ (подмножества произведения $\mathbb{X} \times \mathbb{N}^{<\omega}$) принадлежат классу K. (См. определение 7.1.3.) Систему множеств $\{X_s\}_{s\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ бэровского назовем *системой класса K*, если множество $\{\langle x, s\rangle : x \in X_s\}$ принадлежит классу K.

Теорема 7.4.1. *Пусть $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, A есть $\Sigma^1_1(p)$-множество, а $C = \mathbb{X} \setminus A$ — $\Pi^1_1(p)$-множество в бэровском произведении $\mathbb{X}$. Тогда существуют:*

(i) *такое $\Delta^0_1(p)$-дерево $W \subseteq (\mathbb{N}^{\ell+1})^{<\omega}$, что $A = \mathtt{pr}[W]$;*

(ii) *такое $\Delta^0_1(p)$-измеримое отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbf{Tr}$, что $A = f^{-1}[\mathbf{IFT}]$ и $C = f^{-1}[\mathbf{WFT}]$, а также*

(iii) *регулярная система $\mathfrak{F} = \{F_s\}_{s\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ класса $\Delta^0_1(p)$, для которой $A = \boldsymbol{A}[\mathfrak{F}]$ и $C = \boldsymbol{C}[\mathfrak{F}]$,*

(iv) *и при этом если $\xi < \omega_1$, то конституанты $A_\xi = \boldsymbol{A}_\xi[\mathfrak{F}]$ и $C_\xi = \boldsymbol{C}_\xi[\mathfrak{F}]$ множеств A и C* (см. определение 4.3.1) *удовлетворяют условиям $A_\xi = f^{-1}[\mathbf{IFT}_\xi]$ и $C_\xi = f^{-1}[\mathbf{WFT}_\xi]$;*

(v) *Σ^1_1-формула $\sigma_W(T, x)$ и Π^1_1-формула $\pi_W(T, x)$, обе с единственным параметром p и такие, что для любых $x \in \mathbb{X}$, $\xi < \omega_1$ и дерева $T \in \mathbf{WFT}_\xi$ выполнено условие $x \in C_\xi \iff \sigma_W(T, x) \iff \pi_W(T, x)$ — и обе эти формулы, как и формулы из* (vi), *зависят только от дерева W из* (i);

(vi) *Σ^1_1-формула $\sigma'_W(T, x)$ и Π^1_1-формула $\pi'_W(T, x)$, обе с единственным параметром p и такие, что для любых $x \in \mathbb{X}$, $\xi < \omega_1$ и дерева $T \in \mathbf{WFT}_\xi$ выполнено условие $x \in A_\xi \iff \sigma'_W(T, x) \iff \pi'_W(T, x)$.*

Следствие 7.4.2 (из пункта (ii) теоремы)**.** *Если $X \subseteq \mathbb{X}$ есть $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-множество, соответственно $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-множество, то существует непрерывная функция $f\colon \mathbb{X} \to \mathbf{Tr}$ такая, что $X = f^{-1}[\mathbf{IFT}]$, соответственно $X = f^{-1}[\mathbf{WFT}]$.* □

Напомним, что все даже $\mathbf{\Sigma}^0_1$-измеримые функции непрерывны. Это усиление (по сравнению с борелевскими отображениями, как в упражнении 4.3.6) объясняется особенностями топологической структуры бэровских произведений.

Доказательство (теорема)**.** (i) см. следствие 7.3.4.

(ii) Для экономии места, рассмотрим случай, когда $\mathbb{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и параметр p отсутствует. Согласно следствию 7.3.4 существует $\varDelta^0_1$-дерево $W \subseteq (\mathbb{N}^2)^{<\omega}$, для которого $A = \mathtt{pr}[W]$, т. е.

$$x \in A \iff \exists\, a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \forall\, m\, (\langle x \restriction m\,,\, a \restriction m \rangle \in W).$$

Положим $f(x) = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \langle x \restriction \mathtt{lh}\, s\,,\, s \rangle \in W\}$, для $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; это, очевидно, дерево в $\mathbb{N}^{<\omega}$. Более того, отображение $x \mapsto f(x)$ является $\varSigma^0_1$-измеримым, а тогда и $\varDelta^0_1$-измеримым согласно лемме 6.8.5. Проверим, что условие $x \in A$ равносильно тому, что $f(x) \in \mathbf{IFT}$.

Если $x \notin A$, то имеется такая точка $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $\langle x \restriction m\,,\, a \restriction m \rangle \in W$ для всех m. Тогда $a \restriction m \in f(x)$ для всех m, так что дерево $f(x)$ не фундировано. Обратно, пусть точка $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ показывает нефундированность дерева $f(x)$, т. е. $\langle x \restriction m\,,\, a \restriction m \rangle \in W$ для всех m. Тогда, очевидно, $x \notin A$.

(iii), (iv) Если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $m = \mathtt{lh}\, s$, то положим

$$X_s = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \langle x \restriction m, s \rangle \in W\} = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \in f(x)\}.$$

Легко видеть, что $\mathfrak{F} = \{X_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ является регулярной $\varDelta^0_1$-системой. О равенствах, требуемых в (iii) и (iv), см. упражнение 4.3.6.

(v) В качестве $\sigma_W(T,x)$ и $\pi_W(T,x)$ подойдут формулы

$$\exists\, S \in \mathbf{Tr}\, (S = f(x) \wedge \langle S, T \rangle \in L \wedge \langle T, S \rangle \in L) \quad \text{и}$$

$$\forall\, S \in \mathbf{Tr}\, (S = f(x) \implies (\langle S, T \rangle \in L_{\leq} \wedge \langle T, S \rangle \in L_{\leq}))$$

соответственно, где L и $L_{\leq}$ — множества из теоремы 7.2.1.

(vi) Для начала укажем такую $\varSigma^1_1$-формулу $\sigma^*(T,x)$ и такую $\varPi^1_1$-формулу $\pi^*(T,x)$, обе с параметром p, что для любых $x \in \mathbb{X}$, $\xi < \omega_1$ и дерева $T \in \mathbf{WFT}_\xi$ выполнено условие $x \in A_{<\xi} \iff \sigma^*(T,x) \iff \pi^*(T,x)$, где $A_{\leq\xi} = \bigcup_{\eta \leq \xi} A_\eta$. Согласно теореме 4.2.3 (iv), подойдут соответственно следующие формулы:

$$\exists\, S\, \big(S = f(x) \wedge S \in \mathbf{IFT} \wedge \forall\, s \in S_{\mathtt{wf}}\, \exists\, t \in T\, (T \neq \Lambda \wedge |s|_S \leq |t|_T)\big) \text{ и}$$

$$\forall\, S\, \big(S = f(x) \implies \forall\, s \in S\, \forall\, t \in T\, (|s|_S \leq |t|_T \implies s \neq \Lambda \wedge t \neq \Lambda)\big),$$

в которых переменная S ограничена пространством $\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$.

Что касается первой формулы, подформула $|s|_S \leq |t|_T$ равносильна формуле $|S{\restriction_s}| \leq |T{\restriction_t}|$, т. е. $\varSigma^1_1$-формуле $\langle S{\restriction_s}, T{\restriction_t} \rangle \in L$, где L —

множество из теоремы 7.2.1 (iv). Квантор по s имеет тип 0 и потому не играет роли (см. замечание 7.1.5). Квантор по t также имеет тип 0, однако нетривиально ограничен множеством $S_{\mathtt{wf}}$. Как быть? Расписываем этот фрагмент как $\forall\, s\, (s \in S_{\mathtt{wf}} \Longrightarrow \ldots)$. Здесь формула $s \in S_{\mathtt{wf}}$ есть Π^1_1 по теореме 7.2.1 (iii), но записано слева от импликации, следовательно, надо взять отрицание, что снова приводит к классу Σ^1_1. Далее, формула $S \in \mathbf{IFT}$ есть Σ^1_1 по теореме 7.2.1 (iii). Наконец, формула $S = f(x)$ есть $\Delta^1_1(p)$ (даже гораздо лучше). И совсем наконец, внешний квантор $\exists\, S$ сохраняет класс Σ^1_1. **Упражнение:** разберитесь в этом рассуждении!

Что касается второй формулы, подформула $|s|_S \le |t|_T$ есть Σ^1_1, как и выше, но она стоит слева от импликации, поэтому получаем класс Π^1_1. Остальные элементы формулы, в том числе внешний квантор $\forall\, S$, сохраняют Π^1_1.

Теперь, имея формулы $\sigma^*(T, x)$ и $\pi^*(T, x)$, в качестве $\sigma'_W(T, x)$ и $\pi'_W(T, x)$ мы можем взять формулы $\exists\, t \in T\; (t \ne \Lambda \wedge \sigma^*(T{\restriction}_t, x))$ и $\exists\, t \in T\; (t \ne \Lambda \wedge \pi^*(T{\restriction}_t, x))$ соответственно. □

Результаты, аналогичные изложенным в §§ 7.2–7.4, были известны в классической дескриптивной теории множеств не только в вариантах для A-операции, но и в вариантах для операции решета — см. основные определения в § 4.6. Напомним, что $\mathbf{WO}$ = все вполне упорядоченные множества $u \subseteq \mathbb{Q}$ и если $u \in \mathbf{WO}$ то $|u| = \mathtt{otp}\, u < \omega_1$ – порядковое число вполне упорядоченного множества u. Если же множество $u \subseteq \mathbb{Q}$ не вполне упорядочено, т. е. $u \in \mathbf{IO}$, то пусть $|u| = \infty$, но при этом надо понимать, что $\xi < \infty \le \infty$ для всех $\xi < \omega_1$.

Упражнение 7.4.3. Докажите следующие аналоги утверждений, полученных выше (теорема 7.2.1 и теорема 7.4.1).

1. Следующие множества принадлежат классу Σ^1_1: $\mathbf{IO}$, а также

$$\begin{aligned} L &= \{\langle u, v\rangle \in \mathscr{P}(\mathbb{Q})^2 : |u| \le |v|\}\,, \\ M &= \{\langle u, v\rangle \in \mathscr{P}(\mathbb{Q})^2 : v \notin \mathbf{WO} \vee |u| < |v|\}\,. \end{aligned}$$

2. Следующие множества принадлежат классу Π^1_1: $\mathbf{WO}$, а также

$$L_{\le} = \{\langle u, v\rangle \in \mathbf{WO}^2 : |u| \le |v|\} \quad \text{и} \quad L_{<} = \{\langle u, v\rangle \in \mathbf{WO}^2 : |u| < |v|\}\,.$$

3. Для любого $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества X в бэровском произведении $\mathbb{X}$ найдется такая непрерывная функция $f\colon \mathbb{X} \to \mathscr{P}(\mathbb{Q})$, что $X = f^{-1}[\mathbf{WO}]$.

§ 7.5 Принцип отражения[6]

Здесь мы покажем, как можно классифицировать не только точечные множества, но и *семейства* точечных множеств. Ключевым моментом будет использование универсальных множеств, в связи с чем см. § 6.7.

Фиксируем бэровское произведение $\mathbb{X}$ и универсальное Π^1_1-множество $U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$. *Кодом* Π^1_1-множества $X \subseteq \mathbb{X}$ (в смысле этого универсального множества U) можно тогда назвать любой индекс $e \in \mathbb{N}$, для которого $X = (U)_e$. Скажем, что семейство $\mathscr{A}$, состоящее из Π^1_1-множеств $X \subseteq \mathbb{X}$, является *семейством Π^1_1 в кодах*, если множество $\{e \in \mathbb{N} : (U)_e \in \mathscr{A}\}$ принадлежит классу Π^1_1. Аналогично, для фиксированного универсального Σ^1_1-множества $V \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$, семейство $\mathscr{A}$ Σ^1_1-множеств $X \subseteq \mathbb{X}$ является *семейством Π^1_1 в кодах*, если $\{e \in \mathbb{N} : V_e \in \mathscr{A}\}$ есть Π^1_1-множество.

Это понятие, т. е. «быть Π^1_1 в кодах» для семейств Π^1_1-множеств и семейств Σ^1_1-множеств, на первый взгляд зависит от выбора универсальных множеств U, V. Однако эта зависимость, очевидно, устраняется, если U, V выбраны среди *хороших* (см. определение 6.7.6) универсальных множеств. Точнее говоря, если $U, U' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$ — хорошие универсальные Π^1_1-множества, то понятия «быть Π^1_1 в кодах в смысле U» и «быть Σ^1_1 в кодах в смысле U'» (для семейств Π^1_1-множеств) равносильны. Таким образом, понятие «быть Π^1_1 в кодах» не зависит от выбора хорошего универсального Π^1_1-множества. То же верно и для семейств Σ^1_1-множеств.

Следующая теорема не выглядит столь понятной и мотивированной, как большинство теорем дескриптивной теории множеств. Но она полезна в ряде приложений, так как позволяет обойти сложные рассуждения с повторяющимися ссылками на теоремы **отделимости** и **выбора по Крайзелю**.

Теорема 7.5.1 (отражение). *Пусть $\mathbb{X}$ — бэровское произведение.*

Π^1_1-форма. *Если семейство $\mathscr{A}$, состоящее из Π^1_1-множеств $X \subseteq \mathbb{X}$, является семейством Π^1_1 в кодах, то для каждого $Y \in \mathscr{A}$ существует Δ^1_1-множество $D \in \mathscr{A}$, $D \subseteq Y$.*

Σ^1_1-форма. *Если семейство $\mathscr{A}$, состоящее из Σ^1_1-множеств $X \subseteq \mathbb{X}$, является семейством Π^1_1 в кодах, то для каждого $Y \in \mathscr{A}$ существует Δ^1_1-множество $D \in \mathscr{A}$, $Y \subseteq D$.*

Доказательство. Начнем с хорошего универсального Σ^0_1-множества $R \subseteq \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, даваемого теоремой 6.7.7. Положим $\widehat{R} = \{\langle e, \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_n\rangle : R(e,k,n)\}$ (множество в $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega}$). Тогда

$$U = \{\langle e, x\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall y\, \exists m\, \widehat{R}(e, x \restriction m, y \restriction m)\}$$

— универсальное Π^1_1-множество в $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ согласно следствию 7.3.4. Утверждается, что U — хорошее универсальное Π^1_1-множество. В самом деле, рассмотрим произвольное $P \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ из Π^1_1. Подходящий вариант следствия 7.3.4 дает Δ^0_1-множество $\widehat{S} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega}$, для которого

$$P = \{\langle e, x\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall y\, \exists m\, \widehat{S}(e, x \restriction m, y \restriction m)\}.$$

Тогда и $S = \{\langle e,k,n\rangle : \widehat{S}(e, \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_n)\}$ есть Δ^0_1, а поскольку R — хорошее универсальное множество, найдется такая Δ^0_1-функция $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $(S)_e = (R)_{a(e)}$ для всех $e \in \mathbb{N}$. Но тогда $(P)_e = (U)_{a(e)}$, $\forall e$, что и требовалось.

[6] Этот параграф содержит специальный материал, который можно пропустить при первом чтении.

После этого построения, мы докажем Π^1_1-форму теоремы для некоторого Π^1_1 в кодах семейства $\mathscr{A}$, состоящего из Π^1_1-множеств пространства $\mathbb{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Вдобавок к построенному множеству U мы используем еще и хорошее универсальное Π^1_1-множество $W \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. По теореме 7.4.1 мы можем ассоциировать дерево $T_{ne} \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ с каждой парой $\langle n, e\rangle \in \mathbb{N}^2$ и дерево $S_{my} \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ с каждой парой $\langle m, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ при помощи подходящих Δ^1_1-функций так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$U(m, y) \iff |S_{my}| < \omega_1 \quad \text{и} \quad W(n, e) \iff |T_{ne}| < \omega_1.$$

По определению множество $A = \{e : (U)_e \in \mathscr{A}\}$ есть Π^1_1, а потому можно подобрать индекс $\widehat{n}$ так, чтобы выполнялось равнство $A = (W)_{\widehat{n}}$, т. е. условие $(U)_e \in \mathscr{A}$ эквивалентно тому, что $W(\widehat{n}, e)$ для всех e. А поскольку Y является Π^1_1-множеством в $\mathbb{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, существует также и индекс $\widehat{m}$, для которого $Y = (U)_{\widehat{m}}$, т. е. условие $y \in Y$ эквивалентно $U(\widehat{m}, y)$. При этом множество $Q = \{\langle e, y\rangle \in \mathbb{N} \times Y : |S_{\widehat{m}y}| < |T_{\widehat{n}e}|\}$ принадлежит классу Π^1_1 по теореме 7.2.1; неравенство $|S_{\widehat{m}y}| < |T_{\widehat{n}e}|$ равносильно отрицанию неравенства $|T_{\widehat{n}e}| \le |S_{\widehat{m}y}|$. Раз U — хорошее универсальное множество, существует такая Δ^0_1-функция $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $(Q)_e = (U)_{a(e)}$ для всех $e \in \mathbb{N}$.

Теперь вернемся к тому универсальному множеству $R \subseteq \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, с которого началось доказательство. Выбранная выше Δ^0_1-функция $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ рекурсивна согласно упражнению 6.5.2. Поэтому из известной в теории рекурсивных функций теоремы рекурсии следует существование натурального числа ε, для которого $(R)_\varepsilon = (R)_{a(\varepsilon)}$. Тогда и $(Q)_\varepsilon = (U)_{a(\varepsilon)} = (U)_\varepsilon$.

Мы утверждаем, что множество $(U)_\varepsilon = (Q)_\varepsilon$ принадлежит семейству $\mathscr{A}$. В самом деле, если $(U)_\varepsilon \notin \mathscr{A}$, то $\langle \widehat{n}, \varepsilon\rangle \notin W$ по выбору n, и потому $|T_{\widehat{n}\varepsilon}| = \infty$. Отсюда следует, что $(Q)_\varepsilon = Y$: в самом деле,

$$y \in Y \iff U(\widehat{m}, y) \iff |S_{\widehat{m}y}| < \omega_1 \iff |S_{\widehat{m}y}| < |T_{\widehat{n}\varepsilon}| \iff \langle \varepsilon, y\rangle \in Q\,.$$

Поэтому $(Q)_\varepsilon = Y \in \mathscr{A}$. Но $(Q)_\varepsilon = (U)_\varepsilon$, противоречие. Итак, $(U)_\varepsilon \in \mathscr{A}$.

Однако по определению $(Q)_\varepsilon = \{y \in Y : |S_{\widehat{m}y}| < |T_{\widehat{n}\varepsilon}|\} \subseteq Y$. (Равенство $(Q)_\varepsilon = Y$, установленное выше в предположении $(U)_\varepsilon \notin \mathscr{A}$, может и не иметь места в общем случае.) И множество $(Q)_\varepsilon = (U)_\varepsilon$ принадлежит семейству $\mathscr{A}$. Осталось проверить, что $(Q)_\varepsilon$ есть Δ^1_1. Требуется убедиться, что $(Q)_\varepsilon \in \Sigma^1_1$, поскольку все множества из $\mathscr{A}$ принадлежат классу Π^1_1.

Заметим, что $\langle \widehat{n}, \varepsilon\rangle \in W$, поскольку $(U)_\varepsilon \in \mathscr{A}$. Следовательно, $|T_{\widehat{n}\varepsilon}| < \omega_1$. Отсюда вытекает, что $(Q)_\varepsilon = \{y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : |S_{\widehat{m}y}| < |T_{\widehat{n}\varepsilon}|\}$, так как из условия $y \notin Y = (U)_{\widehat{m}}$ следует, что $\langle \widehat{m}, y\rangle \notin U$ и $|S_{\widehat{m}y}| = \infty \not< |T_{\widehat{n}\varepsilon}|$. Однако по теореме 7.2.1 неравенство $|S_{\widehat{m}y}| < |T_{\widehat{n}\varepsilon}|$, как унарное отношение с натуральными числами $\widehat{m}, \widehat{n}, \varepsilon$ в роли фиксированных параметров, может быть выражено Σ^1_1-формулой при условии $|T_{\widehat{n}\varepsilon}| < \omega_1$. $\square$

Упражнение 7.5.2. Докажите, используя теорему, что множество всех кодов любого собственно Π^1_1-множества (т. е. не принадлежащего Δ^1_1) в смысле заданного хорошего универсального Π^1_1-множества не может принадлежать Π^1_1, и то же верно для множества всех кодов любого собственно Σ^1_1-множества.

Глава 8

Отделимость, редукция, униформизация и их следствия

В этой главе доказываются теоремы редукции, отделимости и униформизации, относящиеся (особенно в их эффективных вариантах) к числу наиболее важных, а также, в отношении теоремы униформизации для класса $\mathbf{\Pi}^1_1$, и наиболее сложных, теорем о множествах первого проективного уровня. Мы также рассмотрим понятие нормы и укажем их роль в доказательстве теорем редукции и отделимости.

Здесь будут рассматриваться только те пространства, которые являются бэровскими произведениями, см. соглашение 7.0.5.

§8.1 Отделимость и редукция

Мы уже видели, что любые два дизъюнктных A-множества в польском пространстве можно отделить подходящим борелевским множеством, или, в другой терминологии, два дизъюнктных $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества отделимы $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеством. (См. следствие 4.4.4 и замечание 3.7.1.) Здесь доказывается эффективный вариант этой теоремы, но мы выведем его из более сильного утверждения.

Теорема 8.1.1 (редукция). *Если $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то для любых множеств X, Y класса $\varPi^1_1(p)$ в бэровском произведении $\mathbb{X}$ существуют* **дизъюнктные** *множества $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$ того же класса $\varPi^1_1(p)$, для которых $X' \cup Y' = X \cup Y$. То же верно для класса $\mathbf{\Pi}^1_1$.*

О таких множествах X', Y', как в теореме, говорят, что они *сводят* (*редуцируют*) данную пару множеств X, Y.

Доказательство. По теореме 7.4.1 имеются $\varDelta^0_1(p)$-измеримые отображения $f, g \colon \mathbb{X} \to \mathbf{Tr}$, для которых $X = f^{-1}[\mathbf{WFT}]$ и $Y = g^{-1}[\mathbf{WFT}]$. Множества

$$X' = \{x \in X : |f(x)| < |g(x)|\} \quad \text{и} \quad Y' = \{y \in Y : |g(y)| \leq |f(y)|\},$$

очевидно, редуцируют данную пару множеств X, Y. В то же время X', Y' всё еще являются $\varPi^1_1(p)$-множествами по теореме 7.2.1. (Используется также предложение 6.10.1 (viii) о замкнутости классов относительно $\varDelta^0_1(p)$-измеримых подстановок.) □

Следствие 8.1.2 ($\varDelta^1_1$-отделимость). *Если $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и X, Y — дизъюнктные $\varSigma^1_1(p)$-множества в бэровском произведении $\mathbb{X}$, то существует такое $\varDelta^1_1(p)$-множество Z, что $X \subseteq Z$ и $Y \cap Z = \varnothing$. То же верно для $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств X, Y и $\mathbf{\Delta}^1_1$-множества Z.*

Доказательство. Применим теорему 8.1.1 к дополнительным множествам $\mathbb{X} \setminus X$ и $\mathbb{X} \setminus Y$, а затем возьмем дополнения тех $\varPi^1_1(p)$-множеств, которые даются теоремой. Получим пару взаимно дополнительных $\varSigma^1_1(p)$-множеств X' и Y', накрывающих X и Y соответственно. Каждое из них является множеством класса $\varDelta^1_1(p)$, так что можно взять $Z = X'$. □

Добавим следующий результат отрицательного характера.

Теорема 8.1.3. *Существуют дизъюнктные $\varPi^1_1$-множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, которые не отделимы никаким борелевским (т. е. класса $\mathbf{\Delta}^1_1$) множеством.*

Доказательство. Согласно теореме 6.7.2 существует Σ^1_1-множество $U \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, универсальное для класса $\mathbf{\Sigma}^i_n$. Множества

$$U' = \{\langle (a)^2_0, b\rangle : \langle a, b\rangle \in U\} \quad \text{и} \quad U'' = \{\langle (a)^2_1, b\rangle : \langle a, b\rangle \in U\}$$

также принадлежат классу Σ^1_1: например,

$$\langle a', b\rangle \in U' \iff \exists\, a\, (a' = (a)^2_1 \wedge \langle a, b\rangle \in U)$$

(см. определение 6.1.1 о точках $(a)^\ell_j$), так что речь идет о Δ^0_1-подстановке, и результат следует из предложения 6.10.1 (viii).

Далее, множества U', U'' образуют $\mathbf{\Sigma}^1_1$-универсальную пару в том смысле, что для любой пары $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств $X', X'' \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ существует такое значение $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которого одновременно выполняются равенства $X' = (U')_a$ и $X'' = (U'')_a$. (Именно, сначала выберем a', a'' так, что $X' = (U)_{a'}$ и $X'' = (U)_{a''}$, а затем возьмем такое a, для которого $(a)^2_0 = a'$ и $(a)^2_1 = a''$.) Поэтому дополнительные Π^1_1-множества $V' = (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2 \smallsetminus U'$ и $V'' = (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2 \smallsetminus U''$ образуют $\mathbf{\Pi}^1_1$-универсальную пару в том же смысле. Тогда по теореме 8.1.1 имеются такие дизънктные Π^1_1-множества $P' \subseteq V'$ и $P'' \subseteq V''$, что $P' \cup P'' = V' \cup V''$. Мы утверждаем, что эти множества P', P'' являются $\mathbf{\Delta}^1_1$-неотделимыми.

Предположим противное, т. е. пусть существует такое $\mathbf{\Delta}^1_1$-множество $B \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$, что $P' \subseteq B$ и $P'' \cap B = \varnothing$. Множество $X = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \langle a, a\rangle \notin B\}$ также принадлежит классу $\mathbf{\Delta}^1_1$ (из-за непрерывности отображения $a \mapsto \langle a, a\rangle$), так что X и его дополнение $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus X$ принадлежат $\mathbf{\Pi}^1_1$. По выбору P', P'' имеем $X = (P')_a = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus (P'')_a$ для подходящего параметра $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Получается противоречие, так как

$$a \in X \iff \langle a, a\rangle \notin B \iff \langle a, a\rangle \in P'' \iff a \in (P'')_a \iff a \notin X. \qquad \square$$

§ 8.2 Отделимость и редукция (продолжение)

Вопросы, связанные с редукцией и отделимостью, могут рассматриваться в более общем контексте. Принципом **редукции** для данного класса точечных множеств Γ называется утверждение о том, что для любой пары множеств X, Y из Γ в одном и том же польском пространстве существуют дизъюнктные множества $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$, также из класса Γ, для которых $X' \cup Y' = X \cup Y$. Таким образом, теорема 8.1.1 утверждает, что для бэровских произведений **редукция** выполнена для любого класса вида $\Pi^1_1(p)$, а также и для класса $\mathbf{\Pi}^1_1$. В отношении класса $\mathbf{\Pi}^1_1$ результат немедленно распространяется на все польские пространства из-за их борелевской изоморфности по теореме 2.6.2 и результата упражнения 3.7.2 об инвариантности проективных классов при борелевских изоморфизмах.

Соответственно, принципом **отделимости** для класса Γ называется утверждение о том, что для любой пары множеств X, Y из Γ в одном и том же польском пространстве $\mathbb{X}$ существует множество $Z \subseteq \mathbb{X}$, отделяющее X от Y и принадлежащее Γ вместе со своем дополнением $\mathbb{X} \smallsetminus Z$. Согласно следствию 8.1.2 **отделимость** выполнена для классов вида $\Sigma^1_1(p)$, а также и для класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Более того, доказательство следствия показывает, что из **редукции** для данного класса Γ следует **отделимость** для двойственного класса $\complement\Gamma$ (т. е. класса дополнительных множеств).

Принцип **редукции**, а следовательно, и принцип **отделимости** имеют место для всех Δ-классов, например, для классов $\mathbf{\Delta}^i_n$, — просто возьмем $X' = X$ и $Y' = Y \smallsetminus X$ и воспользуемся замкнутостью Δ-классов относительно разности множеств. В то же время, как мы видели, **редукция** выполнена для класса $\mathbf{\Pi}^1_1$ (и соответствующих эффективных подклассов), а **отделимость** — для $\mathbf{\Sigma}^1_1$, но из теоремы 8.1.3 легко следует, что **редукция** <u>не</u> выполнена для класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$, а **отделимость** <u>не</u> выполнена для $\mathbf{\Pi}^1_1$. Вообще, из доказательства теоремы 8.1.3 можно извлечь такой результат.

Предложение 8.2.1. *Если класс Γ точечных множеств удовлетворяет определенным требованиям, включая наличие универсального множества, то* **редукция** *и* **отделимость** *не могут одновременно выполняться для Γ. В частности, если Γ — один из классов $\Sigma^i_n(p)$, $\mathbf{\Sigma}^i_n$, $\Pi^i_n(p)$, $\mathbf{\Pi}^i_n$, то* **редукция** *и* **отделимость** *не могут одновременно выполняться для Γ.* □

Оказывается, при определенных достаточно естественных требованиях класс Γ удовлетворяет либо **редукции**, либо **отделимости** — это очень сложный результат, полученный в работе [75].

Теперь поговорим о свойствах **редукции** и **отделимости** для борелевских классов.

Теорема 8.2.2. *Принцип* **редукции** *выполнен для классов $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, $2 \le \xi < \omega_1$, во всех польских пространствах, а в бэровских произведениях — и для класса $\mathbf{\Sigma}^0_1$ открытых множеств. Поэтому* **отделимость** *выполнена для классов $\mathbf{\Pi}^0_\xi$.*

Доказательство. Рассмотрим пару $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-множеств $X = \bigcup_n X_n$ и $Y = \bigcup_n Y_n$ в польском пространстве $\mathbb{X}$, причем пусть множества X_n и Y_n принадлежат объединению $\bigcup_{\eta<\xi} \mathbf{\Pi}^0_\eta$ при $\xi \ge 2$ либо являются открыто-замкнутыми в случае, когда $\xi = 1$ и $\mathbb{X}$ — бэровское произведение, т. е. в обоих случаях множества X_n и Y_n принадлежат классу $\mathbf{\Delta}^0_\xi$. Для $x \in X$ пусть $f(x) = \mathtt{min}\{n : x \in X_n\}$, и $g(y)$ для $y \in Y$ определим аналогично. Также пусть $f(x) = \infty$ и $g(y) = \infty$ при $x \notin X$ и $y \notin Y$ соответственно. Множества

$$X' = \{x \in X : f(x) < g(x)\} \quad \text{и} \quad Y' = \{y \in Y : g(y) \le f(y)\}$$

редуцируют пару X, Y (ср. с определением в доказательстве теоремы 8.1.1) и имеют класс $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$: например, выполнено равенство $X' = \bigcup_n \big(X_n \cap \bigcap_{m \le n}(\mathbb{X} \smallsetminus Y_m)\big)$. □

Для демонстрации работы хороших универсальных множеств докажем следующую теорему о равномерной редукции сечений:

Предложение 8.2.3. *Пусть $\mathbb{X}$ — бэровское произведение, а $U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$ — хорошее универсальное $\varPi^1_1$-множество. Тогда для каждой пары $\varPi^1_1$-множеств $P, Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$ имеются такие $\varDelta^0_1$-функции $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$ пара сечений $(U)_{f(m,n)}$, $(U)_{g(m,n)}$ сводит пару $(P)_m$, $(Q)_n$.*

Доказательство. Рассмотрим такие $\varPi^1_1$-множества в $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{X}$:

$$\begin{aligned} A &= \{\langle m, n, x\rangle : \langle m, x\rangle \in P \wedge n \in \mathbb{N}\}, \\ B &= \{\langle m, n, x\rangle : \langle n, x\rangle \in Q \wedge m \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

По теореме 8.1.1 (**редукция** для $\varPi^1_1$) существует пара $\varPi^1_1$-множеств $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$, сводящая пару множеств A, B (т. е. $A' \cap B' = \varnothing$ и $A' \cup B' = A \cup B$). Соответственно, если $m, n \in \mathbb{N}$, то пара сечений $(A')_{mn}$, $(B')_{mn}$ сводит пару $(A)_{mn}$, $(B)_{mn}$. А по хорошей универсальности найдутся такие $\varDelta^0_1$-функции f, g, что $(A')_{mn} = (U)_{f(m,n)}$ и $(B')_{mn} = (U)_{g(m,n)}$ для всех m, n. □

§ 8.3 Нормы и нормированные классы

Конечные (т. е. натуральные числа) и счетные ординалы играют особую роль в дескриптивной теории множеств, например, как индексы в важных трансфинтных построениях вроде разложения на конституанты, рассмотренного в гл. 3. Ординалы также явно или неявно присутствуют в доказательствах ряда важных теорем. Достаточно вспомнить теорему редукции 8.1.1, доказательство которой основано на том, что функция, сопоставляющая каждому дереву $T \in \mathbf{WFT}$ его ранг $|T| < \omega_1$, удовлетворяет некоторым требованиям определимости, т. е. пунктам (iv) и (v) теоремы 7.2.1. Развитие этой идеи привело к следующему обобщающему определению.

Определение 8.3.1. Пусть Γ — любой класс точечных множеств, например $\mathbf{\Pi}^1_1$ или Π^1_1, а Z — множество в пространстве $\mathbb{X}$ (бэровском произведении). Норма $\varphi\colon Z \to \mathtt{Ord}$ называется Γ-*нормой*, если Z принадлежит Γ, и следующие два отношения на $\mathbb{X}$ также принадлежат Γ:

$$x <^*_\varphi y \iff x \in Z \wedge \bigl(y \in Z \Longrightarrow \varphi(x) < \varphi(y)\bigr);$$
$$x \leqslant^*_\varphi y \iff x \in Z \wedge \bigl(y \in Z \Longrightarrow \varphi(x) \le \varphi(y)\bigr).$$

Класс Γ называется *нормированным*, если на каждом множестве Z из Γ имеется Γ-норма. Эквивалентно можно потребовать, чтобы отношения

$$y \leqslant^-_\varphi x \iff x \notin Z \vee \bigl(x, y \in Z \wedge \varphi(y) \le \varphi(x)\bigr);$$
$$y <^-_\varphi x \iff x \notin Z \vee \bigl(x, y \in Z \wedge \varphi(y) < \varphi(x)\bigr)$$

принадлежали двойственному классу всех дополнений Γ-множеств.

Отношения $<^*_\varphi$ и $\le^*_\varphi$, ограниченные на множество $Z = \mathtt{dom}\,\varphi$, совпадают с отношениями, которые прямо определяются нормой, т. е.

$$x <^*_\varphi y \iff \varphi(x) < \varphi(y) \quad \text{и} \quad x \leqslant^*_\varphi y \iff \varphi(x) \le \varphi(y)$$

при $x, y \in Z$. На более широкой области $\mathbb{X}$ они остаются транзитивными, но отношение $\le^*_\varphi$ даже не удовлетворяет условию $x \le^*_\varphi x$ при $x \in \mathbb{X} \smallsetminus Z$. Еще один важный момент здесь состоит в том, что свойство «быть Γ-нормой» не локазизовано на область определения $Z = \mathtt{dom}\,\varphi$ данной нормы, но связано со всем пространством $\mathbb{X}$.

Теорема 8.3.2. *Классы Σ^0_1, $\Sigma^0_1(p)$ $(p \in \mathbb{N}^\mathbb{N})$ и $\mathbf{\Sigma}^0_1$ (открытые множества) нормированы, причем длины соответствующих норм не превосходят ω. Классы Π^1_1, $\Pi^1_1(p)$ $(p \in \mathbb{N}^\mathbb{N})$ и $\mathbf{\Pi}^1_1$ также нормированы, и длины соответствующих норм не превосходят ω_1.*

Доказательство. Для доказательства нормированности класса $\mathbf{\Sigma}^0_1$ рассмотрим открытое множество $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Оно является объединением некоторого множества бэровских интервалов $[s] = \{x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : s \subset x\}$, $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Поэтому если $X \ne \varnothing$ (а случай $X = \varnothing$ тривиален), то найдется такая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{<\omega}$, что $X = \bigcup_n [f(n)]$. Для каждой точки $x \in X$ через $\varphi(x)$ обозначим наименьшее число n, для которого $x \in [f(n)]$, т. е. условие $\varphi(x) = n$ равносильно тому, что $x \in [f(n)] \smallsetminus \bigcup_{m<n} [f(m)]$. Тогда φ будет $\mathbf{\Sigma}^0_1$-нормой на X. К примеру, условие $x <^*_\varphi y$ равносильно тому, что найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, что $x \in [f(n)]$, но $y \notin \bigcup_{m \le n} [f(m)]$. Отсюда принадлежность к классу $\mathbf{\Sigma}^0_1$ для $<^*_\varphi$ очевидна.

О второй группе классов. Идея состоит в том, чтобы заменить счетное объединение бэровских интервалов (для открытых множеств) ω_1-объединением борелевских конституант. Это приводит к нормам, введенным в примере 4.8.2, так что нашей задачей будет убедиться, что последние обеспечивают доказательство теоремы.

Для начала заметим, что норма $\rho(T) = |T|$ на множестве **WFT** является Π^1_1-нормой. В самом деле, $\mathbf{WFT} \in \Pi^1_1$ по теореме 7.2.1 (iii). А отношения $\leqslant^-_\rho$ и $<^-_\rho$ на **Tr** в точности совпадают с L и M из теореме 7.2.1 (iv),(v), причем их перенос на все пространство $\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ не составляет труда, поскольку **Tr** — множество класса Δ^1_1. Также понятно, что длина $|\rho|$ этой нормы в точности равна ω_1.

Теперь, для доказательства нормированности класса $\Pi^1_1(p)$ (где $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ произвольно), допустим, что X является $\Pi^1_1(p)$-множеством в бэровском произведении $\mathbb{X}$. Тогда по теореме 7.4.1 (ii) найдется $\Delta^0_1(p)$-измеримая функция $f\colon \mathbb{X} \to \mathbf{Tr}$, для которой $X = f^{-1}[\mathbf{WFT}]$. Рассмотрим норму $\varphi(x) = \rho(f(x))$, где $\rho(T) = |T|$ является Π^1_1-нормой на **WFT** по вышесказанному. Для $x, y \in \mathbb{X}$ имеем:

$$\begin{aligned} x <^*_\varphi y \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in X \wedge (y \in X \Longrightarrow \varphi(x) < \varphi(y)) \\ &\Longleftrightarrow \quad f(x) \in \mathbf{WFT} \wedge (f(y) \in \mathbf{WFT} \Longrightarrow \rho(f(x)) < \rho(f(y))) \\ &\Longleftrightarrow \quad f(x) <^*_\rho f(y)\,. \end{aligned}$$

Другими словами, $<^*_\varphi$ есть f-прообраз Σ^1_1-отношения $<^*_\rho$. Значит, само $<^*_\varphi$ является $\Sigma^1_1(p)$-отношением. □

Сама же теорема редукции становится следствием такой леммы.

Лемма 8.3.3. *Если класс* Γ *проективной или эффективной иерархии нормирован, то для* Γ *верна* **редукция***.*

Доказательство. Задавшись парой Γ-множеств X, Y в бэровском произведении $\mathbb{X}$, мы рассмотрим множество $P = (\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)$ пространства $\mathbb{N} \times \mathbb{X}$ (оно также является бэровским произведением). Это множество тоже принадлежит Γ. (**Упражнение**: докажите это на основе результатов гл. 6, в особенности § 6.10.) На нем существует Γ-норма $\pi\colon P \to \omega_1$. Пара множеств

$$X' = \{x \in X : \langle 0, x\rangle \leqslant^*_\pi \langle 1, x\rangle\}\,, \quad Y' = \{y \in Y : \langle 1, y\rangle <^*_\pi \langle 0, y\rangle\}$$

дает редукцию пары X, Y и принадлежит Γ, поскольку этому классу принадлежат отношения $\leqslant^*_\pi$ и $<^*_\pi$. □

В классической дескриптивной теории множеств свойство нормированности не было известно, однако был известен родственный и технически игравший ту же роль *принцип сравнения индексов* Новикова, см. [101]. Он состоит в том, что если два $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ канонически представлены в виде $X = f^{-1}[\mathbf{WO}]$ и $Y = g^{-1}[\mathbf{WO}]$, где функции $f, g \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathscr{P}(\mathbb{Q})$ непрерывны (см. упражнение 7.4.3), то множество

$$\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : y \notin Y \vee (x \in X \wedge y \in Y \wedge |f(x)| \le |f(y)|\}$$

имеет класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$, но это легко следует из упражнения 7.4.3 (1).

Упражнение 8.3.4. 1. Пусть $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ — множество класса $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ $(\xi < \omega_1)$, а все X_n — множества из $\mathbf{\Delta}^0_\xi$. Докажите, что $\varphi(x) = \mathtt{min}\{n : x \in X_n\}$ является $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$-нормой. Тем самым борелевские классы $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ нормированы.

2. Докажите, используя теорему 8.1.3, что класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$ не нормирован. Также ненормированы и борелевские классы $\mathbf{\Pi}^0_\xi$.

Упражнение 8.3.5. Докажите, слегка модифицировав рассуждения в доказательстве теоремы 8.3.2, что любая норма как в примере 4.8.2 является $\mathbf{\Pi}^1_1$-нормой.

Упражнение 8.3.6. Пусть X — множество класса $\mathbf{\Pi}^1_1$ и $\varphi : X \to \omega_1$ является $\mathbf{\Pi}^1_1$-нормой. Докажите, что все множества $X_\xi = \{x \in X : \varphi(x) = \xi\}$ $(\xi < \omega_1)$ — борелевские. Согласно упражнению 8.3.5 этот результат обобщает лемму 4.3.4, однако борелевость «конституант» X_ξ здесь получается как следствие теоремы Суслина (следствие 4.4.5), а не дается прямым построением, как в доказательстве леммы 4.3.4.

§ 8.4 Униформизация в классе $\mathbf{\Pi}^1_1$

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — произвольные пространства. Для упрощения обозначений при постоянной работе с множествами $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ используется реляционный стиль вместо явной принадлежности, т. е. запись $P(x, y)$ вместо $\langle x, y\rangle \in P$.

Напомним, что *проекцией* множества $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ на $\mathbb{X}$ является множество

$$\mathtt{pr}\, P = \mathtt{dom}\, P = \{x \in \mathbb{X} : \exists y\, P(x, y)\}$$

— подмножество пространства $\mathbb{X}$. Множество $Q \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ называется *униформным*, или *однозначным*, если для любой точки $x \in \mathtt{pr}\, Q$ имеется ровно одно такое $y \in \mathbb{Y}$, что $Q(x, y)$. Это на самом деле означает, что Q — график функции из $\mathtt{pr}\, \mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$. Если $Q \subseteq P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, множество Q однозначно и $\mathtt{pr}\, P = \mathtt{pr}\, Q$, то говорят, что множество Q *униформизует* множество P.

По аксиоме выбора каждое множество $P \subseteq \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ может быть униформизовано некоторым его подмножеством Q: достаточно выбрать по точке y_x в каждом непустом сечении $(P)_x = \{y : P(x,y)\}$ $(x \in \mathbb{X})$ и взять в качестве Q множество всех выбранных точек. Но настоящая проблема[1] состоит в «эффективном» построении униформизующего множества Q в определенном классе проективной иерархии при условии, что мы знаем класс униформизуемого множества P.

Например, любое замкнутое множество $P \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\mathbb{N}$ может быть униформизовано посредством выбора лексикографически наименьшей точки в каждом непустом сечении $(P)_x$, и результатом будет униформизующее $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество. Другими словами, каждое замкнутое множество в $P \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\mathbb{N}$, а также на самом деле в произведении $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ любых двух бэровских произведений $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$, может быть униформизовано $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеством. Известны гораздо менее тривиальные теоремы об униформизации, например, $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств, см. [68, 97]. Но следующая теорема считается наиболее важной из униформизационных теорем.

Теорема 8.4.1 (**униформизация**, теорема Новикова–Кондо–Аддисона). *Пусть $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — бэровские произведения. Тогда любое множество $P \subseteq \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ класса $\Pi^1_1(p)$ может быть униформизовано множеством того же класса. (И то же верно для $\mathbf{\Pi}^1_1$.)*

Понятно, что для униформизации данного $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества $P \subseteq \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ нужно организовать эффективный выбор точки в каждом непустом сечении $(P)_x$ множества P. Эта задача, без конкретной оценки класса униформизующего множества, была решена в работе Н. Н. Лузина и П. С. Новикова [77] на основе метода, разработанного П. С. Новиковым. Вскорости Кондо (см. [70]) установил, что эта конструкция в самом деле дает униформизующее $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество, а Аддисон (см. [34, 33]) перенес результат на эффективные классы.

Позднейшие исследования выделили из нижеследующего доказательства теоремы 8.4.1 важное понятие *лестницы* (это определенным образом организованная последовательность норм), связанное с униформизацией примерно так же, как и нормы со свойством редукции по лемме 8.3.3, но с более сложными техническими деталями. В этом контексте доказательство теоремы 8.4.1 может быть представлено как соединение двух утверждений: 1) класс $\mathbf{\Pi}^1_1$ и каждый класс вида $\Pi^1_1(p)$ имеет свойство лестницы, т. е. на любом, например, $\mathbf{\Pi}^1_1$-множестве имеется $\mathbf{\Pi}^1_1$-лестница, и 2) каждый (проективный или эффективный) класс со свойством лестницы удовлетворяет **унифор-**

[1] Проблема униформизации была впервые поставлена в контексте дескриптивной теории множеств Н. Н. Лузиным в работе [83].

мизации. См. об этом, например, книги [97] и [68], а на русском языке гл. 8 в [3], а также ниже главу 15 этой книги.

Доказательство. Доказательство основано на анализе деревьев, как и доказательство теоремы 8.1.1, но несколько сложнее. Пусть для простоты $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Рассмотрим $\varPi^1_1$-множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Согласно следствию 7.3.4 найдется такое $\varDelta^0_1$-дерево $T \subseteq (\mathbb{N}^3)^{<\omega}$, что $P = (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2 \smallsetminus \mathtt{pr}[T]$, т. е.

$$\langle a, b\rangle \in P \iff \forall c\, \exists m\, (\langle a \restriction m, b \restriction m, c \restriction m\rangle \notin T).$$

Множества вида $T(a,b) = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \langle a \restriction \mathtt{lh}\, s, b \restriction \mathtt{lh}\, s, s\rangle \in T\}$, где $a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, являются деревьями в $\mathbb{N}^{<\omega}$, и отношение $P(a,b)$ равносильно фундированности дерева $T(a,b)$, см. доказательство теоремы 7.4.1. Для $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ положим $T(a,b)_s = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : s^\wedge t \in T(a,b)\}$. В частности, если $s \notin T(a,b)$, то $T(a,b)_s = \varnothing$ и $|T(a,b)_s| = 0$, а если $s \in T(a,b)$, то $\Lambda \in T(x,b)_s$ и $|T(a,b)_s| \geq 1$.

Индукцией по n определим $\subseteq$-убывающую последовательность множеств $P_n \subseteq P$ так: $P_0 = P$, а P_{n+1} состоит из всех пар $\langle a, b\rangle$ из P_n, для которых

$$\forall b' \big(P_n(a,b') \Longrightarrow \\ [\, b(n) < b'(n) \vee (b(n) = b'(n) \wedge |T(a,b)_{\mathbf{s}_n}| \leq |T(a,b')_{\mathbf{s}_n}|)\,]\big).$$

Пусть $Q = \bigcap_n P_n$. Докажем, что Q есть множество класса $\varPi^1_1$ и Q унформизует P.

То, что множество Q принадлежит классу $\varPi^1_1$, на первый взгляд представляется довольно неожиданным. В самом деле, определение P_{n+1} через P_n имеет структуру $\forall b'\, (P_n(a,b') \Longrightarrow \ldots)$, что в случае $P_n \in \varPi^1_1$ дает класс не лучше, чем $\varPi^1_2$ для P_{n+1}. Для улучшения этой непосредственной оценки рассмотрим множество W всех троек $\langle n, a, b\rangle \in \mathbb{N}^1 \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$, для которых

$$\exists b' \big(\forall k < n\, (b(k) = b'(k) \wedge |T(a,b)_{\mathbf{s}_k}| = |T(a,b')_{\mathbf{s}_k}|) \wedge \\ [\, b'(n) < b(n) \vee (b'(n) = b(n) \wedge |T(a,b')_{\mathbf{s}_n}| < |T(a,b)_{\mathbf{s}_n}|)\,]\,\big). \qquad (*)$$

Мы утверждаем, что

$$Q(a,b)\,, \quad \text{если и только если} \quad P(a,b) \wedge \forall n\, \neg\, W(n,a,b). \qquad (\dagger)$$

В самом деле, допустим, что $\langle a, b\rangle \in P \smallsetminus Q$. Тогда $\langle a, b\rangle \in P_n \smallsetminus P_{n+1}$ для некоторого n, и потому найдется точка b', удовлетворяющая условиям $P_n(a,b')$, $b'(n) \leq b(n)$, и либо $b'(n) < b(n)$ строго, либо $|T(a,b)_{\mathbf{s}_n}| > |T(a,b')_{\mathbf{s}_n}|$. С этим b' выполнено отношение $W(n,a,b)$:

первая строка формулы $(*)$ выполнена, поскольку в этом случае мы имеем $P_{k+1}(a,b)$ и $P_{k+1}(a,b')$ для всех $k<n$.

Теперь допустим, что b' удовлетворяет условию $\langle n,a,b\rangle \in W$ для некоторого n и по-прежнему справедливо $P(a,b)$. В частности, $\langle a,b\rangle \in P_n$. Поскольку первая строка формулы $(*)$ выполнена для всех $k<n$, мы получаем и $\langle a,b'\rangle \in P_n$. Тогда условие $\langle a,b\rangle \notin P_{n+1}$ следует из второй строки, и потому $\langle a,b\rangle \notin Q$, что и требовалось.

Применим утверждение $(\dagger)$ для доказательства того, что Q является $\mathit{\Pi}^1_1$-множеством. Достаточно доказать, что в предположении $\langle a,b\rangle \in P$ отношение $W(n,a,b)$ эквивалентно некоторому тернарному $\mathit{\Sigma}^1_1$-отношению. Равенство $|T(a,b)_{\mathbf{s}_k}| = |T(a,b')_{\mathbf{s}_k}|$ имеет класс $\mathit{\Sigma}^1_1$ по теореме 7.2.1 (iv). Неравенство $|T(a,b')_{\mathbf{s}_n}| < |T(a,b)_{\mathbf{s}_n}|$ есть $\mathit{\Sigma}^1_1$ по теореме 7.2.1 (v), применимой, поскольку в предположении, что $\langle a,b\rangle \in P$, дерево $T(a,b)$ фундировано, а тогда фундированы и все деревья видов $T(a,b)_{\mathbf{s}_n}$. Итак, Q в самом деле принадлежит классу $\mathit{\Pi}^1_1$.

Остается проверить, что множество Q униформизует P. Для этого вернемся к индуктивному построению множеств P_n. Для $a \in \mathtt{pr}\, P_n$ обозначим через m^n_a наименьшее такое число m, что $b(n) = m$ для некоторого $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющего $\langle a,b\rangle \in P$, а через ξ^n_a обозначим наименьший ординал ξ, удовлетворяющий условиям $b(n) = m^n_a$ и $|T(a,b)_{\mathbf{s}_n}| = \xi$ для некоторого b, $\langle a,b\rangle \in P$. По определению P_{n+1} состоит из всех пар $\langle a,b\rangle \in P_n$, для которых $b(n) = m^n_a$ и $|T(a,b)_{\mathbf{s}_n}| = \xi^n_a$. Тем самым $\mathtt{pr}\, P_n = \mathtt{pr}\, P_{n+1}$ для всех n, и потому $\mathtt{pr}\, P_n = \mathtt{pr}\, P$, $\forall\, n$.

Кроме того, если $\langle a,b\rangle \in P_n$ и $k<n$, то мы имеем $\langle a,b\rangle \in P_{k+1}$ и $b(k) = m^k_a = b_a(k)$, откуда следует, что $b \restriction n = b_a \restriction n$.

Для $a \in \mathtt{pr}\, P$ определим $b_a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ так, что $b_a(n) = m^n_a$ для всех n. Но по определению мы имеем $b(n) = m^n_a$ при $\langle a,b\rangle \in P_{n+1}$. Поэтому из отношения $Q(a,b)$ следует равенство $b = b_a$, так что Q — униформное множество. Остается доказать, что $\mathtt{pr}\, Q = \mathtt{pr}\, P$, или, другими словами, $\langle a,b_a\rangle \in Q$ для всех $a \in \mathtt{pr}\, P$.

На самом деле сразу не видно, что пары вида $\langle a,b_a\rangle$, $a \in \mathtt{pr}\, P$, принадлежат хотя бы исходному множеству P! Мы выведем это при помощи следующей леммы.

Лемма 8.4.2. *Если $a \in \mathtt{pr}\, P$, $m,n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{s}_n \subset \mathbf{s}_m$ и $\mathbf{s}_m$ (а тогда и $\mathbf{s}_n$) принадлежит дереву $T(a,b_a)$, то $\xi^m_a < \xi^n_a$.*

Доказательство. Напомним, что $\mathtt{pr}\, P = \mathtt{pr}\, P_k$, $\forall\, k$. Поэтому имеется точка b, для которой выполнено включение $\langle a,b\rangle \in P_{m+1}$, а тогда и $\langle a,b\rangle \in P_{n+1}$ поскольку из того, что $\mathbf{s}_n \subset \mathbf{s}_m$ вытекает $n<m$. Тогда $\xi^m_a = |T(a,b)_{\mathbf{s}_m}|$ и $\xi^n_a = |T(a,b)_{\mathbf{s}_n}|$, см. выше. Заметим,

что $\mathbf{s}_m \in T(a,b)$. (Нужно вывести, что $\langle a \restriction \ell\,, b \restriction \ell\,, \mathbf{s}_m\rangle \in T$, где $\ell = \mathtt{lh}\,\mathbf{s}_m$. Но $b \restriction \ell = b_a \restriction \ell$, поскольку $\langle a,b\rangle \in P_m$ и $\ell = \mathtt{lh}\,\mathbf{s}_m \le m$. Однако $\langle a \restriction \ell\,, b_a \restriction \ell\,, \mathbf{s}_m\rangle \in T$, так как $\mathbf{s}_m \in T(a,b_a)$.) Отсюда следует, что $\mathbf{s}_n \in T(a,b)$ (ведь $\mathbf{s}_n \subset \mathbf{s}_m$). Но тогда $|T(a,b)_{\mathbf{s}_m}| < |T(a,b)_{\mathbf{s}_n}|$, что и требовалось. □ (лемма)

Следствие 8.4.3. *Если $a \in \mathtt{pr}\,P$ то $\langle a, b_a\rangle \in P$.*

Доказательство. В противном случае дерево $T(a,b_a)$ было бы не фундировано, т. е. имеелось бы такое $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $c \restriction j \in T(a,b_a)$ для всех j. Через $n(j) \in \mathbb{N}$ обозначим индекс кортежа $c \restriction j$, т. е. $c \restriction j = \mathbf{s}_{n(j)}$. Тогда $\xi_a^{n(j)} < \xi_a^{n(i)}$ для всех $i < j$ по лемме 8.4.2. Мы получаем бесконечную строго убывающую последовательность ординалов, противоречие. □ (следствие)

Для завершения доказательства теоремы нужна еще одна лемма.

Лемма 8.4.4. *Если $a \in \mathtt{pr}\,P$ и $\mathbf{s}_n \in T(a,b_a)$, то выполнено неравенство $|T(a,b_a)_{\mathbf{s}_n}| \le \xi_a^n$.*

Доказательство. Дерево $T(a,b_a)$ фундировано по следствию 8.4.3, поэтому мы можем рассуждать трансфинитной индукцией по рангу $|\mathbf{s}_n|_{T(a,b_a)}$. Если $\mathbf{s}_n$ — концевая вершина в $T(a,b_a)$, то мы имеем $|T(a,b_a)_{\mathbf{s}_n}| = 0$ и результат очевиден. Допустим, что $\mathbf{s}_n$ не является концевой вершиной. Если теперь предположить, что $|T(a,b_a)_{\mathbf{s}_n}| > \xi_a^n$, то можно найти такой кортеж $\mathbf{s}_m \in T(a,b_a)$, что $\mathbf{s}_n \subset \mathbf{s}_m$ и $|T(a,b_a)_{\mathbf{s}_m}| \ge \xi_a^n$. Но $\xi_a^m < \xi_a^n$ по лемме 8.4.2. Поэтому $|T(a,b_a)_{\mathbf{s}_m}| > \xi_a^m$, в противоречие с индуктивной гипотезой. □ (лемма)

Наконец, докажем индукцией по n, что $\langle a,b_a\rangle \in P_n$ для $a \in \mathtt{pr}\,P$, и следовательно, $\langle a,b_a\rangle \in Q$, что и завершит доказательство теоремы. Допустим, что $\langle a,b_a\rangle \in P_n$. Чтобы доказать, что $\langle a,b_a\rangle \in P_{n+1}$, достаточно проверить равенства $b_a(n) = m_a^n$ и $|T(a,b_a)_{\mathbf{s}_n}| = \xi_a^n$. Первое равенство выполнено по определению. Второе же следует из леммы 8.4.4: в самом деле, $|T(a,b_a)_{\mathbf{s}_n}| \ge \xi_a^n$, поскольку $\langle a,b_a\rangle \in P_n$ и $b_a(n) = m_a^n$. □ (теорема 8.4.1)

§8.5 Униформизация (продолжение)

Вопросы, связанные с униформизацией, также можно рассмотреть в более общем контексте. Принципом **униформизации**, или просто **униформизацией**, для данного класса точечных множеств Γ называется утверждение о том, что любое множество P из Γ в произведении $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ двух польских пространств можно униформизовать множеством $Q \subseteq P$ того же класса Γ. Теорема 8.4.1 утверждает, что для случая, когда $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — бэровские произведения, **униформизация** выполнена для любого класса вида $\mathit{\Pi}^1_1(p)$, а также и для класса $\mathbf{\Pi}^1_1$. Подобно **редукции** и **отделимости**, **униформизация** для класса $\mathbf{\Pi}^1_1$ распространяется на случай любых польских пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ из-за их борелевской изоморфности.

В отличие от **редукции** и **отделимости**, **униформизация** переходит на следующий проективный уровень!

Лемма 8.5.1. *Если принцип* **униформизации** *выполнен для класса $\mathit{\Pi}^1_n(p)$ или $\mathbf{\Pi}^1_n$, то он выполнен и для класса $\mathit{\Sigma}^1_{n+1}(p)$ или соответственно $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$.*

Доказательство. Опуская для простоты p, рассмотрим $\mathit{\Sigma}^1_{n+1}$-множество $P \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Найдется $\mathit{\Pi}^1_n$-множество $P' \subseteq (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2 \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$, проекция которого на $(\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$ совпадает с P. Коль скоро **униформизация** выполнена для класса $\mathit{\Pi}^1_n$, имеется множество $Q' \subseteq P'$, униформизующее P' как подмножество пространства $\mathbb{N}^\mathbb{N} \times (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$ (а не как подмножество пространства $(\mathbb{N}^\mathbb{N})^2 \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$), т. е. для любого $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ выполнено условие

$$\exists\, b\, \exists\, c\, P'(a,b,c) \implies \exists\,!\, b\, \exists\,!\, c\, Q'(a,b,c)\,.$$

Тогда проекция $Q = \mathtt{pr}\, Q' = \{\langle a,b\rangle : \exists\, c\, Q'(a,b,c)\}$ множества Q' на $(\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$ имеет класс $\mathit{\Sigma}^1_{n+1}$ и (докажите!) униформизует данное множество P. □

Любопытно, что и нормированность переходит на следующий уровень проективной иерархии!

Лемма 8.5.2. *Если класс $\mathit{\Pi}^1_n(p)$ или $\mathbf{\Pi}^1_n$ нормирован, то класс $\mathit{\Sigma}^1_{n+1}(p)$, соответственно $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$, также нормирован.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathit{\Sigma}^1_{n+1}$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Найдется $\mathit{\Pi}^1_n$-множество $P \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$, проекция $\mathtt{pr}\, P = \{a : \exists\, b\, P(a,b)\}$ которого на $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ совпадает с X. Пусть $\varphi\colon P \to \omega_1$ является $\mathit{\Pi}^1_n$-нормой. Докажите, что функция ψ, определенная на X условием[2] $\psi(a) = \mathtt{min}\{\varphi(a,b) : \langle a,b\rangle \in P\}$, является $\mathit{\Sigma}^1_{n+1}$-нормой на X. □

Теперь покажем, что из **униформизации** следует **редукция**!

Лемма 8.5.3. *Принцип* **униформизации** *для любого класса вида $\mathit{\Gamma}^i_n(p)$ или $\mathbf{\Gamma}^i_n$ влечет* **редукцию** *для того же класса.*

---

[2] В основе этого определения лежит открытый П. С. Новиковым *метод минимального индекса*. Новиков использовал его в работе [102] для прямого, не через **униформизацию** и лемму 8.5.3, доказательства **отделимости** для класса $\mathbf{\Pi}^1_2$. Используя этот метод, Куратовский [71] вывел и **редукцию** для класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$.

Доказательство. Рассмотрим пару $\varGamma^i_n$-множеств $X, Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Множество

$$P = \{\langle a, 0\rangle : a \in X\} \cup \{\langle b, 1\rangle : b \in Y\} = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$$

в бэровском произведении $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ принадлежит тому же классу $\varGamma^i_n$. (Упражнение для читателя: докажите!) Значит, имеется униформизующее $\varGamma^i_n$-множество $Q \subseteq P$. Множества $X' = \{a : Q(a, 0)\}$ и $Y' = \{b : Q(b, 1)\}$ снова принадлежат $\varGamma^i_n$ и, кроме того, дизъюнктны и удовлетворяют равенству $X' \cup Y' = X \cup Y$, так как множество Q униформно. $\square$

Соединяя эти леммы с предложением 8.2.1 и теоремами 8.1.3, 8.4.1, мы получаем следующую сводную теорему для второго проективного уровня.

Следствие 8.5.4. (i) *Принцип* **униформизации** *выполнен для классов* $\varSigma^1_2(p)$ *и* $\mathbf{\Sigma}^1_2$.

(ii) *Принцип* **редукции** *выполнен для классов* $\varSigma^1_2(p)$ *и* $\mathbf{\Sigma}^1_2$ *а принцип* **отделимости** *для классов* $\varPi^1_2(p)$ *и* $\mathbf{\Pi}^1_2$.

(iii) *Принципы* **униформизации** *и* **редукции** *не выполнены для классов* $\varPi^1_2(p)$ *и* $\mathbf{\Pi}^1_2$, *а принцип* **отделимости** *не выполнен для классов* $\varSigma^1_2(p)$ *и* $\mathbf{\Sigma}^1_2$.

(iv) *Принцип* **униформизации** *не выполнен для классов* $\varSigma^1_1(p)$ *и* $\mathbf{\Sigma}^1_1$, *и, более того, существует множество* $P \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ *класса* $\varPi^0_1$ *(тем самым, замкнутое), которое не униформизуется никаким множеством из* $\mathbf{\Sigma}^1_1$.

(v) *Классы* $\varSigma^1_2(p)$ *и* $\mathbf{\Sigma}^1_2$ *нормированы.*

Доказательство. (iv) Берем такие неотделимые $\varPi^1_1$-множества $X, Y \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, как в теореме 8.1.3, рассматриваем их дополнения $X' = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus X$, $Y' = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus Y$ — множества класса $\varSigma^1_1$, образуем из них $\varSigma^1_1$-множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$, не униформизуемое в классе $\mathbf{\Sigma}^1_1$, как в доказательстве леммы 8.5.3, и извлекаем $\varPi^1_0$-множество, не униформизуемое в классе $\mathbf{\Sigma}^1_1$, используя конструкцию из доказательства леммы 8.5.1. $\square$

Замечание 8.5.5. Сравнение следствия 8.5.4 с результатами, полученными выше в этой главе, показывает, что законы отделимости, редукции, и униформизации обращаются на втором проективном уровне по сравнению с первым уровнем. Так, **униформизация** и **редукция** выполнены для классов $\mathbf{\Pi}^1_1$ и $\mathbf{\Sigma}^1_2$ (а также для класса

$\mathbf{\Sigma}^1_0 = \mathbf{\Sigma}^0_1$ открытых множеств), но не для классов $\mathbf{\Pi}^1_2$ и $\mathbf{\Sigma}^1_1$, а **отделимость** — наоборот, для $\mathbf{\Pi}^1_2$, но не для $\mathbf{\Sigma}^1_2$, т. е. имеет место *осцилляция* законов отделимости, редукции и униформизации между $\mathbf{\Sigma}$-классами и $\mathbf{\Pi}$-классами для уровней 1 и 2.

Для более высоких проективных уровней вопросы отделимости и редукции можно исследовать только в плане доказательств независимости либо же с помощью дополнительных аксиом. См., в частности, гл. 15 настоящей книги, где будет показано, что *аксиома проективной детерминированности* делает все уровни $2n+1$ проективной иерархии подобными уровню 1, а уровни $2n+2$ — подобными уровню 2 в отношении свойств **униформизации**, **редукции**, **отделимости**, и, таким образом, продолжает указанное явление осцилляции на всю проективную иерархию.

Мы закончим еще одним важным следствием, которое, в отличие от большинства приведенных выше результатов, имеет смысл только для эффективных классов. Теоремы такого рода называются *теоремами о базисе*. Их общая формулировка такова: непустое множество определенного класса эффективной иерархии обязательно содержит точку, также принадлежащую определенному классу эффективной иерархии.

Следствие 8.5.6. *Если $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ класса $\Sigma^1_2(p)$ непусто, то оно содержит точку $a \in X$ класса $\Delta^1_2(a)$.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное $\Sigma^1_2(p)$-множество $P = \mathbb{N} \times X$ в пространстве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Согласно следствию 8.5.4 оно униформизуется (однозначным) $\Sigma^1_2(p)$-множеством $Q \subseteq P$. Ясно, что $\mathtt{pr}\, P = \mathtt{pr}\, Q = \mathbb{N}$, а потому имеется единственная точка $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которой $\langle 0, a\rangle \in Q$. Отсюда следует, что одноэлементное множество (синглет) $\{a\}$ имеет класс $\Sigma^1_2(p)$, поскольку

$$x \in \{a\} \iff x = a \iff \langle 0, a\rangle \in Q\,,$$

а Q принадлежит классу $\Sigma^1_2(p)$. Остается воспользоваться леммой 6.9.1. $\square$

Любопытно, что следствие 8.5.6 не имеет места на первом проективном уровне: например, существуют непустые Σ^1_1-множества, не содержащие Δ^1_1-точек. См. об этом ниже упражнение 9.2.4.

Глава 9

Класс $\varDelta^1_1$ и кодирование борелевских множеств

Продолжая изучение первого уровня проективной иерархии, мы переходим к более тонким и технически сложным разделам, которые так или иначе связаны с классом $\varDelta^1_1$ и борелевскими множествами.

В этой главе рассматриваются вопросы, так или иначе связанные с перечислением $\varDelta^1_1$-множеств и кодировкой (в сущности тоже «перечислением», но при помощи не натуральных чисел, а точек бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) борелевских множеств. Отправной точкой здесь будут универсальные множества для эффективных классов $\varSigma^1_1$ и $\varPi^1_1$, а потому перед чтением читателю следует освежить в памяти материал §6.7.

В качестве следствий этих теорем мы получим во второй части главы несколько важных результатов о множествах и точках класса $\varDelta^1_1$. Например, согласно следствию 9.2.5 квантор «$\exists\, x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ x \in \varDelta^1_1$» по своему действию относится к типу $\forall\, x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Также будет получено равномерное по $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ эффективное перечисление всех точек из $\varDelta^1_1(p)$. Заканчивается глава теоремой о выборе по Крайзелю — это фактически частный случай теоремы униформизации, имеющий многообразные применения.

§9.1 Перечисление $\boldsymbol{\Delta}^1_1$-множеств

Особенностью универсальных множеств является то, что они своими сечениями дают перечисление, или параметризацию, всех множеств соответствующего класса в данном пространстве. Например, универсальное Σ^1_1-множество $U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (а оно существует по теореме 6.7.2) перечисляет все Σ^1_1-множества $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, представляя их в виде *сечений* $X = (U)_e = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : U(e,a)\}$ множества U.[1] Если в действительности $X = (U)_e$, то число e называется *кодом* Σ^1_1-множества $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — конечно, по отношению к фиксированному универсальному Σ^1_1-множеству U. И в этом смысле каждое Σ^1_1-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет по крайней мере один код e, а на самом деле в типичном случае бесконечно много кодов.

Универсальных Δ^1_1-множеств нет, см. замечание 6.7.5. Однако универсальное Π^1_1-множество позволяет определить кодировку Δ^1_1-множеств, которая лишь немного более сложна, чем сам класс Δ^1_1.

Теорема 9.1.1 (**$\boldsymbol{\Delta}^1_1$-кодировка**). *Если $\mathbb{X}$ — бэровское произведение, то существуют такие Π^1_1-множества $\mathrm{Cod}(\Delta^1_1) \subseteq \mathbb{N}$ и $W \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$ и такое Σ^1_1-множество $W' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$, что*

(i) $(W)_e = (W')_e$ *для всех* $e \in \mathrm{Cod}(\Delta^1_1)$, *и*

(ii) *множество $X \subseteq \mathbb{X}$ имеет класс Δ^1_1, если и только если найдется число $e \in \mathrm{Cod}(\Delta^1_1)$, для которого $X = (W)_e = (W')_e$.*

Доказательство. Начнем с универсального Π^1_1-множества $U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X}$. Из него получается пара Π^1_1-множеств

$$A = \{\langle e, x\rangle : U((e)^2_0, x)\} \quad \text{и} \quad B = \{\langle e, x\rangle : U((e)^2_1, x)\},$$

дважды универсальная в том смысле, что для любой пары Π^1_1-множеств $X, Y \subseteq \mathbb{X}$ существует число e, для которого $X = (A)_e$ и $Y = (B)_e$. (См. определение кортежей $(e)^k_i$ в 6.1.1 (i) и доказательство теоремы 8.1.3 о дважды универсальной паре в несколько иной ситуации.) Согласно теореме редукции 8.1.1, существуют такие дизъюнктные Π^1_1-множества $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$, что $A' \cup B' = A \cup B$. Множество

$$D = \{e : (A')_e \cup (B')_e = \mathbb{X}\} = \{e : \forall x\, (\langle e, x\rangle \in A' \vee \langle e, x\rangle \in B'\}$$

также принадлежит классу Π^1_1. Но по свойству дважды универсальности для любого Δ^1_1-множества $X \subseteq \mathbb{X}$ существует такое число e,

[1] Мы продолжаем использовать реляционный стиль, т. е. запись $U(e,a)$ означает $\langle e, a\rangle \in U$.

что $X = (A)_e$ и $\mathbb{X} \smallsetminus X = (B)_e$, а тогда, очевидно, и $X = (A')_e$ и $\mathbb{X} \smallsetminus X = (B')_e$. Поэтому $\mathrm{Cod}(\Delta^1_1) = D$, $W = A'$ и $W' = (\mathbb{N} \times \mathbb{X}) \smallsetminus B'$ — искомые множества. □

Следующее обобщение пригодно для кодировки множеств в классах вида $\Delta^1_1(p)$, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Доказательство (незначительная модификация доказательства теоремы 9.1.1) оставляется читателю.

Теорема 9.1.2 (релятивизованная $\boldsymbol{\Delta^1_1}$-кодировка). *Если $\mathbb{X}$ — бэровское произведение, то существуют такие Π^1_1-множества $\mathrm{Cod}(\Delta^1_1) \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ и $W \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times \mathbb{X}$ и такое Σ^1_1-множество $W' \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times \mathbb{X}$, что*

(i) $(W)_{pe} = (W')_{pe}$ *для всех* $\langle p, e\rangle \in \mathrm{Cod}(\Delta^1_1)$, *и*

(ii) *для любого $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, множество $X \subseteq \mathbb{X}$ принадлежит классу $\Delta^1_1(p)$, если и только если найдется такое число e, что $\langle p, e\rangle \in \mathrm{Cod}(\Delta^1_1)$ и $X = (W)_{pe} = (W')_{pe}$.*

(Здесь $(W)_{pe} = \{x \in \mathbb{X} : W(p,e,x)\}$ и аналогично $(W')_{pe}$.) □

§ 9.2 Следствия

Укажем несколько следствий из теорем о перечислении Δ^1_1-множеств. Первое из них раскрывает природу множества всех Δ^1_1-точек пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Следствие 9.2.1. *Существуют такие Π^1_1-множества $E \subseteq \mathbb{N}$ и $W \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^2$ и такое Σ^1_1-множество $W' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^2$, что при любом $e \in E$ сечения*

$$(W)_e = \{\langle k, n\rangle : W(e,k,n)\} \quad \textit{и} \quad (W')_e = \{\langle k, n\rangle : W'(e,k,n)\}$$

совпадают с некоторой (одной и той же) точкой $u_e \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и множество $\{u_e : e \in E\}$ в точности совпадает с множеством всех Δ^1_1-точек в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Доказательство. Отправляясь от множеств $D = \mathrm{Cod}(\Delta^1_1)$, W, W', даваемых теоремой 9.1.1 для $\mathbb{X} = \mathbb{N}^2$, заметим, что множество

$$\begin{aligned} E &= \{e \in D : (W)_e \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} \\ &= \{e \in D : \forall k \,\exists n \, W(e,k,n) \;\wedge \\ &\qquad\qquad \wedge\; \forall k \,\forall n \neq m \,(W'(e,k,n) \Longrightarrow \neg\, W'(e,k,m))\} \end{aligned}$$

всё еще принадлежит Π^1_1, что и завершает доказательство. □

Приведем и более общий релятивизованный вариант.

Следствие 9.2.2. *Имеются такие Π^1_1-множества $E \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $W \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^2$ и такое Σ^1_1-множество $W' \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^2$, что для всех $\langle p, e\rangle \in E$ сечения*

$$W_{pe} = \{\langle k, n\rangle : W(p, e, k, n)\} \quad \text{и} \quad W'_{pe} = \{\langle k, n\rangle : W'(p, e, k, n)\}$$

совпадают с некоторой (одной и той же) точкой $u_{pe} \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и для любого $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ множество $\{u_{pe} : \langle p, e\rangle \in E\}$ в точности совпадает с множеством всех $\Delta^1_1(p)$-точек в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. □

Укажем еще два приложения кодировки Δ^1_1-множеств из § 9.1, которые будут часто использоваться ниже. Согласно первому из них, «принадлежать классу Δ^1_1» — это Π^1_1-понятие.

Следствие 9.2.3. *Множество*

$$D = \{\langle p, a\rangle \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N} : a \text{ есть } \Delta^1_1(p)\text{-точка}\}$$

имеет класс Π^1_1. Поэтому множество $\{a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : a \text{ есть } \Delta^1_1\text{-точка}\}$ также принадлежит классу Π^1_1.

Доказательство. Возьмем E, W, W', u_{ae}, как указано в следствии 9.2.2. Тогда

$$\begin{aligned} \langle p, a\rangle \in D &\iff \exists e\,(\langle p, e\rangle \in E \wedge a = u_{pe}) \iff \\ &\iff \exists e\,(\langle p, e\rangle \in E \wedge \forall k\, W(p, e, k, a(k)))\,. \end{aligned}$$ □

Упражнение 9.2.4. Согласно следствию 9.2.3 непустое множество A всех точек $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ **не** класса Δ^1_1 само является Σ^1_1-множеством. Итак, мы имеем пример непустого Σ^1_1-множества $A \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$, не имеющего ни одной Δ^1_1-точки. (Ср. со следствием 8.5.6.) Выведите отсюда, что существует и непустое множество $A \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ класса Π^0_1 (т. е. эффективно замкнутое!), не имеющее ни одной Δ^1_1-точки.

Приведем еще одно важное следствие кодировки из следствия 9.2.2. Квантор $\exists a$ (где a пробегает множество $\mathbb{N}^\mathbb{N}$), приложенный к Δ^1_1-отношению, очевидно, дает нам Σ^1_1-отношение. Но квантор $\exists a \in \Delta^1_1$ имеет другой эффект!

Следствие 9.2.5. *Если $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и $A \subseteq (\mathbb{N}^\mathbb{N})^3$ является $\Pi^1_1(p)$-множеством, то следующее множество B имеет класс $\Pi^1_1(p)$:*

$$B = \{\langle x, a\rangle \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2 : \exists b\,(b \text{ принадлежит классу } \Delta^1_1(x) \wedge A(x, a, b))\}.$$

Доказательство. Снова возьмем такие множества E, W, W', u_{pe}, как в следствии 9.2.2. Тогда

$$\begin{aligned}\langle x, a\rangle \in B \iff& \exists e\,(\langle x, e\rangle \in E \wedge A(x, a, u_{xe})) \iff \\ \iff& \exists e\,(\langle x, e\rangle \in E \wedge \forall b\,(b = u_{xe} \Longrightarrow A(x, a, b)))\,.\end{aligned}$$

Заменим здесь равенство $b = u_{xe}$ формулой $\forall k\, W'(x, e, k, b(k))$ и воспользуемся преобразованиями из таблицы на с. 118 (или предложением 6.10.1). □

§ 9.3 Выбор по Крайзелю

Под этим общим названием известно несколько результатов об униформизации Π^1_1-множеств, объединенных тем условием, что каждое сечение $(P)_x$ униформизуемого множества содержит точку из $\Delta^1_1(x)$. Отсюда получается и важный подкласс Δ^1_1-множеств, имеющих Δ^1_1-проекции и допускающих Δ^1_1-униформизацию, чего нет для Δ^1_1-множеств общего вида. Результат для начала формулируется в несколько более общей форме, о следствиях именно для Δ^1_1 см. ниже замечание 9.3.2.

Теорема 9.3.1 (выбор по Крайзелю). *Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — бэровские произведения, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ является $\Pi^1_1(p)$-множеством, причем если $x \in X$, то сечение $(P)_x$ имеет точку из $\Delta^1_1(p, x)$. Тогда*

(i) $\mathtt{pr}\, P$ *есть $\Pi^1_1(p)$-множество;*

(ii) *P допускает униформизацию $\Pi^1_1(p)$-множеством $Q \subseteq P$, которое является также и «$\Sigma^1_1(p)$-множеством на $\mathtt{pr}\, P$» в том смысле, что найдется такое $\Sigma^1_1(p)$-множество $A \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, что $Q = A \cap (\mathtt{pr}\, P \times \mathbb{Y})$, т. е. условие $\langle x, y\rangle \in A$ равносильно тому, что $\langle x, y\rangle \in Q$ при $x \in \mathtt{pr}\, P$;*

(iii) *если известно, что $\mathtt{pr}\, P$ принадлежит классу $\Delta^1_1(p)$ то найдётся такая $\Delta^1_1(p)$-функция $f \colon \mathtt{pr}\, P \to \mathbb{Y}$, что $\langle x, f(x)\rangle \in P$ для всех $x \in \mathtt{pr}\, P$.*

Доказательство. Докажем утверждения (i), (ii). Множество $P' = \{\langle x, y\rangle \in P : y$ есть $\Delta^1_1(x, p)$-точка$\}$ остается в классе $\Pi^1_1(p)$ согласно следствию 9.2.3, причем $\mathtt{pr}\, P' = \mathtt{pr}\, P$ согласно условию. Униформизуем P' каким-нибудь $\Pi^1_1(p)$-множеством $Q \subseteq P'$. Заметим, что $Y = \mathtt{pr}\, Q = \mathtt{pr}\, P' = \mathtt{pr}\, P$ имеет класс $\Pi^1_1(p)$ согласно следствию 9.2.5, поскольку условие $x \in Y$ равносильно тому, что $\exists y \in \Delta^1_1(p, x)\, Q(x, y)$. Но если $x \in \mathtt{pr}\, P$, то

$$Q(x, y) \iff \forall y' \in \Delta^1_1(p, x)\, (Q(x, y') \Longrightarrow y = y')\,,$$

причем множество $A = \{\langle x, y\rangle : \forall y' \in \varDelta^1_1(p, x)\,(Q(x, y') \Longrightarrow y = y')\}$ имеет класс $\varSigma^1_1(p)$ опять согласно следствию 9.2.5.

(iii) Если $\mathtt{pr}\,P$ есть $\varDelta^1_1(p)$-множество, то Q также имеет класс $\varDelta^1_1(p)$, поскольку $\langle x, y\rangle \in Q \iff x \in \mathtt{pr}\,P \wedge \langle x, y\rangle \in A$. Поэтому остается определить функцию f так: $f(x) = y$, если $\langle x, y\rangle \in Q$. □

Замечание 9.3.2 (к теореме 9.3.1)**.** Имеется несколько типичных более простых случаев для этой теоремы, которые мы сейчас рассмотрим.

1. Прежде всего, для простоты можно выбросить параметр p.

2. Одно возможное упрощение состоит в том, что берется $\mathbb{Y} = \mathbb{N}$, т. е. рассматриваются множества $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{N}$. В этом случае условие, чтобы непустые сечения $(P)_x$ содержали элементы из $\varDelta^1_1(x)$, выполняется автоматически.

3. Еще одно возможное упрощение состоит в том, чтобы P являлось $\varDelta^1_1$-множеством. В этом случае результат приобретает такую более компактную формулировку: *если $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ есть $\varDelta^1_1(p)$-множество, причем для каждого $x \in \mathtt{pr}\,P$ сечение $(P)_x$ имеет точку из $\varDelta^1_1(p, x)$, то $\mathtt{pr}\,P$ есть $\varDelta^1_1(p)$-множество, а само P униформизуется $\varDelta^1_1(p)$-множеством.*

Упражнение 9.3.3 (Сакс)**.** Докажите следующий *принцип зависимого выбора* для класса $\varDelta^1_1$. Предположим, что множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет класс $\varDelta^1_1$, причем каждая $\varDelta^1_1$-точка $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит $\mathtt{dom}\,P$. Тогда для любой $\varDelta^1_1$-точки $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ найдется такая $\varDelta^1_1$-последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ точек $x_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $x_0 = x$ и $\langle x_n, x_{n+1}\rangle \in P$ для каждого n.

§ 9.4 Первое кодирование борелевских множеств

Напомним, что борелевские множества в пространствах, являющихся бэровскими произведениями, — это то же самое, что и множества класса $\boldsymbol{\Delta}^1_1 = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \varDelta^1_1(p)$. Это позволяет ввести кодировку борелевских множеств, опираясь на теорему 9.1.2. Разумеется, коды здесь не могут быть натуральными числами по простому соображению: имеется несчетно много борелевских (даже несчетно много открытых) множеств. Но можно взять точки пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в качестве кодов, так что будет кодироваться не только сам код $e \in \mathbb{N}$, но и параметр $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$!

Для фиксированного бэровского произведения $\mathbb{X}$, рассмотрим такие $\varPi^1_1$-множества $\textsc{Cod}(\varDelta^1_1) \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ и $W \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times \mathbb{X}$ и такое

$\varSigma^1_1$-множество $W' \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{X}$, как в теореме 9.1.2. Определим

$$\begin{aligned} C &= \{c \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \langle c^-, c(0)\rangle \in \textsc{Cod}(\varDelta^1_1)\}\,, \text{ где } c^-(k) = c(k+1),\ \forall k\,, \\ V &= \{\langle c, x\rangle \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{X} : \langle c^-, c(0), x\rangle \in W\}\,, \\ V' &= \{\langle c, x\rangle \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{X} : \langle c^-, c(0), x\rangle \in W'\}\,. \end{aligned}$$

Мы немедленно получаем:

Предложение 9.4.1. *Множества C и V принадлежат классу $\varPi^1_1$, а множество V' — классу $\varSigma^1_1$. Если $c \in C$, то*

(i) *множества $(V)_c = \{x \in \mathbb{X} : \langle c, x\rangle \in V\}$ и $(V')_c$ совпадают, и*

(ii) *$(V)_c$ — борелевское множество в $\mathbb{X}$, и обратно, для любого борелевского множества $X \subseteq \mathbb{X}$ существует такой код $c \in C$, что $X = (V)_c$.* □

§ 9.5 Второе кодирование борелевских множеств

Имеется еще один метод кодировки борелевских множеств, который, в отличие от кодировки из § 9.4, в явном виде опирается на их индуктивное построение. Мы приведем его для пространства $\mathbb{X} = \mathbb{N}^\mathbb{N}$. (Для других польских пространств нужны свои достаточно очевидные модификации.)

Напомним, что бэровские интервалы, т. е. множества вида $[s] = \{a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : s \subset a\}$, $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, образуют базу топологии $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, а перечисление $\mathbb{N}^{<\omega} = \{\mathbf{s}_n : n \in \mathbb{N}\}$ вводится в определении 6.1.1 (ii).

Определение 9.5.1. Через **BC** обозначим множество всех таких пар $c = \langle T, F\rangle$, что $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ — непустое фундированное дерево, а $F \colon \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}^{<\omega}$. Если $c = \langle T, F\rangle \in \mathbf{BC}$, то мы определяем индукцией по рангу $|s|_T$ борелевское множество $\boldsymbol{B}_c(s) \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ для каждого кортежа $s \in T$ так:

(I) если $s \in \mathtt{Max}\,T$ (т. е. s — концевая вершина), то $\boldsymbol{B}_c(s) = [F(s)]$;

(II) если $s \in T \smallsetminus \mathtt{Max}\,T$, то $\boldsymbol{B}_c(s) = \mathbb{N}^\mathbb{N} \smallsetminus \bigcup_{s^\wedge n \in T} \boldsymbol{B}_c(s^\wedge n)$.

Наконец, полагаем $\boldsymbol{B}_c = \boldsymbol{B}_c(\Lambda)$, где Λ — пустая последовательность. Пары $c = \langle T, F\rangle \in \mathbf{BC}$ называются *борелевскими кодами*.

Полагаем $\boldsymbol{\pi}_\xi = \{c = \langle T, F\rangle \in \mathbf{BC} : |T| = \xi\}$ для каждого ординала $\xi < \omega_1$. *Рангом* $\mathtt{rk}\,c$ борелевского кода $c \in \mathbf{BC}$ называется тот ординал ξ, для которого $c \in \boldsymbol{\pi}_\xi$, так что $\mathtt{rk}\,c = |T|$ при $c = \langle T, F\rangle \in \mathbf{BC}$.

Определение может быть сформулировано и в несколько иной форме, в зависимости от выбора операции или операций в п. (II), но результат будет похожий. Выбранная нами операция дополнения к (счетному) объединению имеет то преимущество, что её итеративного действия достаточно для построения всех борелевских множеств из базовых множеств.

Замечание 9.5.2. По определению борелевские коды являются точками польского пространства $\mathbb{X} = \mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \times (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$, которое хотя формально и не является бэровским произведением, но может быть отождествлено с одним из них и тем самым находится в области действия рассматриваемых иерархий, см. определение 7.1.3. Впрочем, иногда бывает полезно иметь и конкретный гомеоморфизм $H : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{X}$.

Чтобы его определить, заметим, что биекция $n \mapsto \mathbf{s}_n : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}^{<\omega}$, введенная определением 6.1.1, индуцирует гомеоморфизм пространства $2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $\mathbb{X}$, а биекция $b : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} 2 \times \mathbb{N}$, определенная соотношениями $b(2n) = \langle 0, n\rangle$ и $b(2n+1) = \langle 1, n\rangle$, — гомеоморфизм $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Обозначим через $H : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{X}$ тот гомеоморфизм, который равен суперпозиции двух указанных.

Упражнение 9.5.3. (1) Пусть $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Определим $c[s] = \langle T, F\rangle$, где $T = \{\Lambda\}$ и $F(\Lambda) = s$ (а значения $F(t)$, $t \neq \Lambda$, роли не играют, например, пусть $F(t) = \Lambda$ при $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $t \neq \Lambda$). Докажите, что $c[s] \in \mathbf{BC}$ и $\boldsymbol{B}_{c[s]} = [s]$.

(2) Пусть $c = \langle T, F\rangle \in \mathbf{BC}$ и $\mathtt{rk}\, c \geq 1$, т. е. $\{\Lambda\} \subsetneqq T$. Положим $N = \{n \in \mathbb{N} : \langle n\rangle \in T\}$, где $\langle n\rangle$ — кортеж с одним членом n, и далее $T_n = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : n^\wedge t \in T\}$ и $F_n(t) = F(n^\wedge t)$ для $n \in N$. Докажите, что $c_n = \langle T_n, F_n\rangle \in \mathbf{BC}$ и $\mathtt{rk}\, c_n < \mathtt{rk}\, c$ для всех n и, кроме того $\boldsymbol{B}_c = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \bigcup_{n\in N} \boldsymbol{B}_{c_n}$.

Следующий пример показывает, как получать борелевские коды более сложных множеств из кодов исходных, более простых множеств.

Пример 9.5.4. Пусть $c_n = \langle T_n, F_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, и отдельно $c = \langle T, F\rangle$ являются кодами (из $\mathbf{BC}$) множеств $X_n = \boldsymbol{B}_{c_n}$ и $X = \boldsymbol{B}_c$ соответственно.

Определим $\nabla_{n\in\mathbb{N}}\, c_n = \langle T', F'\rangle$, где $T' = \{\Lambda\} \cup \{n^\wedge t : n \in \mathbb{N} \wedge t \in T_n\}$, и $F'(n^\wedge t) = F_n(t)$ для всех n и $t \in \mathtt{Max}\, T_n$. Понятно, что $d = \langle T', F'\rangle \in \mathbf{BC}$ и $\boldsymbol{B}_d = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \bigcup_n \boldsymbol{B}_{c_n}$. Эта операция будет использована и в случае неполной области индексов: именно, если $u \subseteq \mathbb{N}$, то $\nabla_{n\in u}\, c_n = d$, где $d = \langle T', F'\rangle \in \mathbf{BC}$, $T' = \{\Lambda\} \cup \{n^\wedge t : n \in u \wedge t \in T_n\}$ и $F'(n^\wedge t) = F_n(t)$ для всех $n \in u$ и $t \in \mathtt{Max}\, T_n$. В этом случае снова $\boldsymbol{B}_d = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \bigcup_{n\in u} \boldsymbol{B}_{c_n}$.

Положим $\neg\, c = \nabla_{n\in\mathbb{N}}\, e_n$, где $e_n = c$, $\forall\, n$; тогда $\boldsymbol{B}_{\neg\, c} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \boldsymbol{B}_c$.

Наконец, мы определяем коды $\bigwedge_{n\in u} c_n = \nabla_{n\in u} d_n$ и $\bigvee_{n\in u} c_n = \neg \bigwedge_{n\in u} d_n$, где $d_n = \neg c_n$ для всех n. Понятно, что $\boldsymbol{B}_{\bigwedge_n c_n} = \bigcap_n \boldsymbol{B}_{c_n}$ и $\boldsymbol{B}_{\bigvee_n c_n} = \bigcup_n \boldsymbol{B}_{c_n}$.

Упражнение 9.5.5. (1) Докажите, что все борелевские множества и только они допускают представление в виде $\boldsymbol{B}_c$, $c \in \mathbf{BC}$, причем для любого ординала ξ, $1 \le \xi < \omega_1$, класс всех $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множеств $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ тождествен классу всех множеств вида $\boldsymbol{B}_c$, $c \in \boldsymbol{\pi}_\xi$.

(2) Докажите индукцией по ξ, что множества $\boldsymbol{\pi}_\xi$ сами борелевские (в пространстве $\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \times (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$).

Несколько более сложной по сравнению с кодировкой из § 9.4 становится проверка свойств типа указанных в предложении 9.4.1 для этой кодировки.

Теорема 9.5.6. *Следующие множества принадлежат* $\varPi^1_1$:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{BC}, & & \\ W & = & \{\langle c, x\rangle : c \in \mathbf{BC} \wedge x \in \boldsymbol{B}_c\}, \\ W' & = & \{\langle c, x\rangle : c \in \mathbf{BC} \wedge x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \smallsetminus \boldsymbol{B}_c\}. \end{array}$$

Доказательство. Если $c = \langle T, F\rangle \in \mathbf{BC}$ и $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, то определим функцию $h_{cx} \colon \mathbb{N}^{<\omega} \to 2$ следующим образом: если $s \notin T$, то $F(s) = 0$ (фактически, это не имеет значения), и далее, применим трансфинитную индукцией по $|s|_T$:

(i) если $s \in \mathtt{Max}\, T$ (тогда s — концевая вершина T и $|s|_T = 0$), то $h_{cx}(s) = 1$ при $x \in [s]$, а иначе $h_{cx}(s) = 0$;

(ii) если $s \in T \smallsetminus \mathtt{Max}\, T$, то $h_{cx}(s) = 1$ в том и только в том случае, когда $h_{cx}(s^\wedge n) = 0$ для всех таких n, что $s^\wedge n \in T$.

Упражнение 9.5.7. Докажите, что условие $h_{cx}(s) = 1$ равносильно тому, что $x \in \boldsymbol{B}_s(c)$, в частности, равенство $h_{cx}(\Lambda) = 1$ равносильно тому, что $x \in \boldsymbol{B}_c$.

Теперь начинаем собственно доказательство теоремы. Множество $\mathbf{BC}$ всех кодов принадлежит классу $\varPi^1_1$ по теореме 7.2.1, согласно которой этот класс имеет множество $\mathbf{WFT}$ всех фундированных деревьев.

Теперь рассмотрим множество W. Из упражнения 9.5.7 следует, что при $c \in \mathbf{BC}$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \langle c, x\rangle \in W \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, h\, (h = h_{cx} \wedge h(\Lambda) = 1) \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall\, h\, (h = h_{cx} \Longrightarrow h(\Lambda) = 1)\,. \end{aligned}$$

Нас здесь интересует самая правая формула, которая, очевидно, является арифметической (это доказывается подходящей комбинацией условий, записанных в (i) и (ii)). Отсюда следует, что W принадлежит классу $\varPi^1_1$. Доказательство для W' аналогично. □

Замечание 9.5.8. Доказательство теоремы 9.5.6 может быть уточнено в том смысле, что мы получаем некоторую конкретную $\varPi^1_1$-формулу, скажем $\mathbf{bc}(c)$, которая выполнена, если и только если $c \in \mathbf{BC}$, и также такие $\varPi^1_1$-формулы $\pi(c,x)$ и $\pi'(c,x)$, для которых

$$\pi(c,x) \iff c \in \mathbf{BC} \wedge x \in \boldsymbol{B}_c\,, \quad \text{и} \quad \pi'(c,x) \iff c \in \mathbf{BC} \wedge x \notin \boldsymbol{B}_c\,.$$

Определим также и $\varSigma^1_1$-формулу $\sigma(c,x) := \neg\,\pi'(c,x)$. Понятно, что если $c \in \mathbf{BC}$, то для любой точки x формула $\sigma(c,x)$ выполнена в том и только в том случае, когда $x \in \boldsymbol{B}_c$.

§9.6 Ординалы Чёрча—Клини

Напомним, что каждому дереву $T \in \mathbf{WFT}$, т. е. фундированному дереву $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, сопоставляется его *ранг* — конечный либо счетный ординал $|T| < \omega_1$, так что $\{|T| : T \in \mathbf{WFT}\} = \omega_1 = \{\xi : \xi < \omega_1\}$. Ограничившись деревьями из $\varDelta^1_1$, которых счетно много, мы получим, естественно, лишь счетное число ординалов, и поэтому их точная верхняя грань будет меньше ω_1. Таким образом,

$$\omega_1^{\mathrm{CK}} = \mathtt{sup}\{|T| : T \in \mathbf{WFT} \cap \varDelta^1_1\} < \omega_1\,.$$

Определяется и вариант с параметром: $\omega_1^{\mathrm{CK}(p)} = \mathtt{sup}\{|T| : T \in \mathbf{WFT} \cap \varDelta^1_1(p)\}$ для $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и снова, очевидно, $\omega_1^{\mathrm{CK}(p)} < \omega_1$.

Упражнение 9.6.1. Докажите, что ω_1^{CK} и все ординалы вида $\omega_1^{\mathrm{CK}(p)}$ — счетные предельные ординалы.

Лемма 9.6.2. *Если $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\xi < \omega_1^{\mathrm{CK}(p)}$, то найдется такая $\varDelta^1_1(p)$-функция $f : \mathbb{N} \to \mathbf{WFT}$, что $\xi = \{|f(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ и $|f(n)| \neq |f(m)|$ при $m \neq n$.*

Следовательно (просто перейдем от ξ к $\xi + 1$!), найдется такое $\varDelta^1_1(p)$-дерево $T \in \mathbf{WFT}$, что $\xi = |T|$.

Таким образом, среди $\varDelta^1_1(p)$-ординалов нет пропусков.

Доказательство (набросок)**.** Поскольку $\xi < \omega_1^{\mathrm{CK}}$, существует фундированное $\varDelta^1_1$-дерево T, для которого $\xi \le |T|$. Далее доказываем $|T| = \{|s|_T : s \in T \smallsetminus \{\Lambda\}\}$ индукцией по $|T|$. Отсюда следует, что $\xi = |\sigma|_T$ для некоторого кортежа $\sigma = \mathbf{s}_m \in T$. Доказываем, что множество $D = \{n : |\mathbf{s}_n|_T < |\sigma|_T \wedge \forall\, k < n\, (|\mathbf{s}_n|_T \neq |\mathbf{s}_k|_T)\}$ принадлежит классу $\varDelta^1_1$, при помощи пп. (iii), (iv) теоремы 7.2.1 и того факта, что $|s|_T = |T{\restriction}_s|$, а отображение $T, s \mapsto T{\restriction}_s$ является $\varDelta^1_1$-измеримым (на самом деле даже более простым). При этом $\xi = \{|\mathbf{s}_n|_T : n \in D\}$. Остается довольно рутинная работа по 1) доказательству того, что отображение $f(n) = T{\restriction}_{\mathbf{s}_n}$ принадлежит классу $\varDelta^1_1$, и 2) переводу f в функцию, заданную на $\mathbb{N}$ с помощью $\varDelta^1_1$-инъекции $i(k)=$ kй элемент множества D. $\square$

Ординалы вида $\omega_1^{\mathrm{CK}(p)}$ имеют, разумеется, счетную конфинальность, но, согласно следующей лемме, не при помощи последовательностей из $\varDelta^1_1(p)$!

Лемма 9.6.3. *Если* $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *и* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbf{WFT}$ *является* $\varDelta^1_1(p)$-*функцией, то* $\mathtt{sup}_n\, |\tau(n)| < \omega_1^{\mathrm{CK}(p)}$ *строго.*

Доказательство. Дерево $T = \{\Lambda\} \cup \{n^\wedge t : n \in \mathbb{N} \wedge t \in \tau(n)\}$ принадлежит множеству $\mathbf{WFT}$, причем $|T| = \mathtt{sup}_n\, |\tau(n)|$ и T имеет класс $\varDelta^1_1(p)$ вместе с τ, откуда следует, что $|T| < \omega_1^{\mathrm{CK}(p)}$. $\square$

Ординал ω_1^{CK} называют *первым несчетным ординалом по Чёрчу–Клини*, либо просто ω_1 *по Чёрчу–Клини*. Ординалы вида $\omega_1^{\mathrm{CK}(p)}$ изучаются в теории рекурсивных функций, см., например, [32]. Один из наиболее любопытных результатов состоит в том, что все $\varDelta^1_1$-ординалы являются и рекурсивными ординалами (т. е. имеют вид $|T|$, где $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ — дерево из $\varDelta^0_1$). Мы же используем ординалы $\omega_1^{\mathrm{CK}(p)}$ в доказательстве важной теоремы из следующего параграфа.

§ 9.7 Гиперарифметические множества

Гиперарифметическими называются борелевские множества вида $\boldsymbol{B}_c$, где $c \in \mathbf{BC} \cap \varDelta^1_1$, т. е. борелевские множества с $\varDelta^1_1$-кодами. Соответственно множества с кодами из $\mathbf{BC} \cap \varDelta^1_1(p)$ (где $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) называются гиперарифметическими *относительно* p.

Теорема 9.7.1. *Пусть* $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. *Множества, гиперарифметические относительно* p, *и множества класса* $\varDelta^1_1(p)$ *— это одно и то же.*

Более точный результат будет получен в § 11.6: коды для множеств класса $\varDelta^1_1(p) \cap \mathbf{\Pi}^0_\xi$ можно выбирать в классе $\varDelta^1_1(p) \cap \boldsymbol{\pi}_\xi$.

Доказательство. Для простоты опустим параметр p. То, что каждое множество вида $\boldsymbol{B}_c$, где $c \in \mathbf{BC} \cap \varDelta^1_1$, само принадлежит классу $\varDelta^1_1$, следует из теоремы 9.5.6. Для вывода импликации в обратную, нетривиальную сторону докажем большее: если $\varSigma^1_1$-множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не пересекаются, то их можно отделить борелевским множеством с кодом из $\mathbf{BC} \cap \varDelta^1_1$. (Ср. со следствием 4.4.4.)

По теореме 7.4.1 имеются $\varDelta^0_1$-измеримые (а значит, непрерывные и класса $\varDelta^1_1$) отображения $f, g \colon \mathbb{X} \to \mathbf{Tr}$, для которых $X = f^{-1}[\mathbf{IFT}]$ и $Y = g^{-1}[\mathbf{IFT}]$. Понятно, что тогда $Y \subseteq C = f^{-1}[\mathbf{WFT}]$, а потому по теореме 4.4.1 (принцип ограничения индексов) найдется такой ординал $\lambda < \omega_1$, что Y накрывается борелевским множеством $C_{<\lambda} = f^{-1}[\mathbf{WFT}_{<\lambda}]$, где $\mathbf{WFT}_{<\lambda} = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathbf{WFT}_\xi = \{T \in \mathbf{WFT} : |T| < \lambda\}$. Мы докажем теперь, что

1) такой ординал λ можно взять среди ординалов $\lambda < \omega_1^{\mathrm{CK}}$, и

2) если $\lambda < \omega_1^{\mathrm{CK}}$, то множества $C_{<\lambda}$ и C_λ имеют коды из $\mathbf{BC} \cap \varDelta^1_1$.

Доказательство утверждения 1 возвращает нас к доказательству теоремы 4.4.1. Предположим противное, т. е. нет такого ординала $\lambda < \omega_1^{\mathrm{CK}}$, что $Y \subseteq C_{<\lambda}$, или, что эквивалентно, множество $\Omega = \{|f(x)| : x \in Y\}$ удовлетворяет условию $\mathtt{sup}\,\Omega \geq \omega_1^{\mathrm{CK}}$. (Здесь $f(x)$ соответствует F^x в доказательстве теоремы 4.4.1.) Для $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ пусть $Y_t = g^{-1}[\mathbf{IFT}_t]$, где $\mathbf{IFT}_t$ есть множество всех деревьев $T \in \mathbf{IFT}$, имеющих бесконечную ветвь b, для которой $t \subset b$. Например, $Y = Y_\Lambda$. Обозначим через U множество всех пар $\langle s, t\rangle$, где $s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и множество ординалов $\Omega_{st} = \{|s|_{f(x)} : x \in Y_t\}$ удовлетворяет условию $\mathtt{sup}\,\Omega_{st} \geq \omega_1^{\mathrm{CK}}$. Скажем, пара $\langle \Lambda, \Lambda\rangle$ принадлежит U по предположению, поскольку $|f(x)| = |\Lambda|_{f(x)}$.

Аналогично доказательству теоремы 4.4.1 достаточно проверить, что если $\langle s, t\rangle \in U$, то найдутся такие числа k и n, что продолженная пара кортежей $\langle s^\wedge k, t^\wedge n\rangle$ также принадлежит U. Пусть напротив, таких k, n нет, т. е. $\mathtt{sup}\,\Omega_{s^\wedge k,\, t^\wedge n} < \omega_1^{\mathrm{CK}}$ для всех k, n. Это означает, что множество

$$P = \{\langle k, n, T\rangle : T \in \mathbf{WFT} \cap \varDelta^1_1 \wedge \mathtt{sup}\,\Omega_{s^\wedge k,\, t^\wedge n} \leq |T|\}$$

удовлетворяет условию $\mathtt{pr}\,P = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (проекция в смысле произведения $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbf{WFT}$).

Упражнение 9.7.2. Докажите, что P есть $\varPi^1_1$. Для выражения неравенства $\mathtt{sup}\,\Omega_{s^\wedge k,\, t^\wedge n} \leq |T|$ в классе $\varPi^1_1$ используйте теорему 7.2.1.

Теперь по теореме 9.3.1 (iii) найдется такая $\varDelta^1_1$-функция $\tau \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbf{WFT}$, что $\langle k, n, \tau(k, n)\rangle \in P$ для всех k, n. Но тогда выполнено равенство $\mathtt{sup}_{k,n\in\mathbb{N}} |\tau(k, n)| = \mu < \omega_1^{\mathrm{CK}}$ согласно лемме 9.6.3. Отсюда следует, что $|\Omega_{st}| = \mathtt{sup}_{k,n}\, \mathtt{sup}\,\Omega_{s^\wedge k,\, t^\wedge n} < \omega_1^{\mathrm{CK}}$, и мы получаем противоречие с предположением $\langle s, t\rangle \in U$.

Этим закончено доказательство утверждения 1.

Докажем утверждение 2: множества $C_{<\lambda}$ ($\lambda < \omega_1^{\mathrm{CK}}$) имеют борелевские коды из $\mathbf{BC} \cap \varDelta^1_1$. Этот вывод рассыпается в длинную цепочку микрошагов, аналогичных сделанным (либо явно, либо лишь подразумевавшимся) в доказательстве леммы 4.3.4, но здесь требующих внимания и обоснования.

В сущности, здесь имеет место частный случай следующего общего принципа: если трансфинитная конструкция борелевских кодов имеет длину меньше ω_1^{CK} и ее шаги допускают общее $\varDelta^1_1$-описание, то все коды по ходу конструкции принадлежат $\varDelta^1_1$. Но мы не будем ставить этот вопрос в такой общности.

Рассмотрим множества $C_\xi(s) = \{x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : |s|_{f(x)} < \xi\}$, где $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $\xi < \omega_1^{\mathrm{CK}}$. Понятно, что $C_{<\xi} = C_\xi(\Lambda)$, и потому задача свелась к нахождению $\varDelta^1_1$-кодов для множеств $C_\xi(s)$.

Зафиксируем ординал $\xi < \omega_1^{\mathrm{CK}}$.

Идея состоит в следующем. Мы собираемся определить «матрицу кодов» $\{d_\eta(s)\}^{s\in\mathbb{N}^{<\omega}}_{\eta\le\xi}$, удовлетворяющих условию $C_\eta(s) = \boldsymbol{B}_{d_\eta(s)}$, и при этом так, чтобы мы могли бы получить каждый код $d_\eta(s)$ из кодов с меньшими индексами η при помощи операций из примера 9.5.4, следуя индуктивному равенству $C_\xi(s) = \bigcup_{\eta<\xi} \bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} C_\eta(s^\wedge \ell)$, а начальная колонка $\{d_0(s)\}^{s\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ получалась бы из отдельных соображений.

Первый технический момент здесь состоит в том, что операции из примера 9.5.4 требуют, чтобы индексы пробегали $\mathbb{N}$. Для индекса $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ всё достаточно просто: мы имеем рекурсивное перечисление кортежей $\mathbb{N}^{<\omega} = \{\mathbf{s}_n : n \in \mathbb{N}\}$, введенное определением 6.1.1. Чтобы определить подходящее перечисление ординалов $\eta \le \xi$, придется немного поработать. Фиксируем какую-то $\varDelta^1_1$-функцию $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbf{WFT}$, для которой $\{\eta : \eta \le \xi\} = \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$, где $\xi_n = |\tau(n)|$ и $\xi_m \ne \xi_n$ при $m \ne n$; такие τ существуют согласно лемме 9.6.2. Введем на $\mathbb{N}$ порядок: $i \prec j$, если $\xi_i < \xi_j$. Таким образом, $\prec$ есть $\varDelta^1_1$-отношение (поскольку τ принадлежит классу $\varDelta^1_1$ и по теореме 7.2.1) и полное упорядочение множества $\mathbb{N}$ по типу $\xi + 1$. Через μ и M обозначим $\prec$-наименьший и $\prec$-наибольший элементы соответственно, т. е. $\xi_\mu = 0$ и $\xi_M = \xi$.

Второй момент состоит в правильном выборе кодов для начальных множеств $C_0(s)$. Понятно, что $C_0(s) = \{x : s \notin f(x)\}$ для всех s, так что множества вида $C_0(s)$ все открыто-замкнуты и класса $\varDelta^1_1$. Покажем, что для любого $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ множество $U_s = \{u \in \mathbb{N}^{<\omega} : [u] \cap C_0(s) = \varnothing\}$ всех индексов бэровских интервалов, включенных в

$C_0(s)$, принадлежит классу $\varDelta^1_1$. Действительно,

$$\begin{aligned} u \in U_s \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, x\, (x \in [u] \Longrightarrow x \in C_0(s)) \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall\, x \in \varDelta^1_1\, (x \in [u] \Longrightarrow x \in C_0(s))\,, \end{aligned}$$

и из первой эквивалентности следует принадлежность к классу $\varPi^1_1$, а из второй к классу $\varSigma^1_1$ по следствию 9.2.5. (Объяснение ко второй эквивалентности: если открытое множество непусто, то оно обязательно содержит точку из $\varDelta^1_1$.) Так что и множества $J_n = \{j : \mathbf{s}_j \in U_{\mathbf{s}_n}\}$ принадлежат классу $\varDelta^1_1$. При этом, очевидно, $C_0(\mathbf{s}_n) = \bigcup_{j \in J_n} [\mathbf{s}_j]$ для всех n. Теперь определим $e_n = \bigvee_{j \in J_n} c[\mathbf{s}_j]$ для каждого n. (Определение этой операции см. в примере 9.5.4, определение кодов $c[s]$ в упражнении 9.5.3.) Таким образом, $e_n \in \mathbf{BC}$ и

$$\boldsymbol{B}_{e_n} = \bigcup_{j \in J_n} \boldsymbol{B}_{c[\mathbf{s}_j]} = \bigcup_{j \in J_n} [\mathbf{s}_j] = C_0(\mathbf{s}_n)\,.$$

Заметим, что по построению отображение $n \mapsto e_n$ имеет класс $\varDelta^1_1$.

Теперь переформулируем нашу цель таким образом:

> построить матрицу кодов $\{c_k(n)\}^{n \in \mathbb{N}}_{k \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющих условию $C_\eta(s) = \boldsymbol{B}_{c_{\eta_k}(\mathbf{s}_n)}$ для всех k, n.

Разумеется, решение неоднозначно, но его можно сделать единственным. Именно, рассмотрим множество $\mathscr{C}$ всех матриц указанного вида, т. е. фактически точек пространства $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, удовлетворяющих таким двум условиям:

(a) $c_\mu(n) = e_n$ для всех n (напомним, что μ есть $\prec$-минимальное число).

(b) Если $k \neq \mu$ (т. е. $\mu \prec k$), то $c_k(n) = \bigvee_{k' \prec k} \bigwedge_{n'} c_{k'}(n')$, где операция $\bigwedge$ берется над всеми такими n', что $\mathbf{s}_{n'} = \mathbf{s}_n{}^\wedge \ell$ для некоторого $\ell \in \mathbb{N}$.

В этом случае, если мы переобозначим $d_{\eta_k}(\mathbf{s}_n) = c_k(n)$, то матрица кодов $\{d_\eta(s)\}^{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}_{\eta \leq \xi}$ будет удовлетворять условию $d_0(\mathbf{s}_n) = e_n$ для всех n, т. е. $\boldsymbol{B}_{d_0(s)} = C_0(s)$ для всех $s = \mathbf{s}_n \in \mathbb{N}^{<\omega}$, и при $0 < \eta \leq \xi$ будет выполняться равенство $\boldsymbol{B}_{d_\xi(s)} = \bigcup_{\eta < \xi} \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} C_\eta(s^\wedge \ell)$. Отсюда по индукции получаем, что $\boldsymbol{B}_{d_\eta(s)} = C_\eta(s)$ для всех $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $\eta \leq \xi$.

Короче говоря, мы приходим к следующим выводам.

1) Множество $\mathscr{C}$ содержит единственную матрицу $\{c_k(n)\}^{n \in \mathbb{N}}_{k \in \mathbb{N}}$, поскольку $\prec$-наименьшая колонка $\{c_k(0)\}^{n \in \mathbb{N}}$ заполняется согласно условию (a), а последующие колонки по индукции (по полному порядку $\prec$) согласно условию (b).

2) множество $\mathscr{C}$ принадлежит классу Δ^1_1 в соответствующем пространстве $\mathbb{X}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, где $\mathbb{X} = \mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \times (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$ — пространство, точками которого являются борелевские коды из $\mathbf{BC}$, а потому его единственный элемент, т. е. матрица $\{c_k(n)\}^{n\in\mathbb{N}}_{k\in\mathbb{N}}$, принадлежит классу Δ^1_1 согласно лемме 6.9.1.

3) Следовательно, каждый код $c_k(n)$ принадлежит классу Δ^1_1.

4) Для любой пары k, n выполнено равенство $C_{\eta_k}(\mathbf{s}_n) = \boldsymbol{B}_{c_k(n)}$, в частности, при $k = M$ (тогда $\eta_M = \xi$) получаем $C_\xi(\mathbf{s}_n) = \boldsymbol{B}_{c_M(n)}$.

Тем самым, согласно пп. 3 и 4, каждое множество $C_\xi(s)$, $s = \mathbf{s}_n \in \mathbb{N}^{<\omega}$, имеет код $c_k(n) \in \mathbf{BC} \cap \Delta^1_1$. □ (теорема 9.7.1)

Следствие 9.7.3. *Если $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, а $P \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ является $\Delta^1_1(p)$-множеством, то найдется такая $\Delta^1_1(p)$-функция $f\colon \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbf{BC}$, что $(P)_x = \boldsymbol{B}_{f(x)}$ для каждого $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$.*

Доказательство. Множество

$$W = \{\langle x, c\rangle : x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \wedge c \in \mathbf{BC} \cap \Delta^1_1(p, x) \wedge (P)_x = \boldsymbol{B}_c\}$$

есть $\Pi^1_1(p)$ по теореме 9.5.6 и согласно следствию 9.2.3 и удовлетворяет условию $\mathtt{pr}\, W = \mathbb{N}^\mathbb{N}$ по теореме 9.7.1. Остается применить теорему 9.3.1 (iii). □

Таким образом, борелевские коды сечений данного борелевского множества допускают задание через борелевскую функцию. Этот результат можно получить и более громоздким рассуждением, которое начинается с определения аналогичной кодировки для борелевских множеств в $\mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$, после чего мы замечаем, что «сечение» кода дает код для сечения кодируемого множества.

Глава 10

Топология Ганди–Харрингтона и ее приложения

Топология Ганди–Харрингтона, или топология, порожденная непустыми Σ^1_1-множествами, например, бэровского пространства $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, обладает некоторыми любопытными свойствами. Например, она не польская и вообще не метризуема, но является бэровской. Но самое важное состоит в том, что эта топология позволила доказать несколько замечательных теорем эффективной и классической теории множеств.

В этой главе излагаются следующие приложения этой топологии.

1. Если Σ^1_1-множество содержит точку не из Δ^1_1, то оно включает совершенное подмножество, а потому несчетно. Следовательно, любое счетное Σ^1_1-множество состоит из Δ^1_1-точек.

2. Любое Δ^1_1-множество либо является (счетным) объединением множеств вида $[T]$, где T есть Δ^1_1-дерево в $\mathbb{N}^{<\omega}$ с конечными ветвлениями и без концевых вершин, и тогда оно σ-компактно, либо содержит относительно замкнутое подмножество, гомеоморфное $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

3. Любое Σ^1_1-множество либо накрывается объединением множеств вида $[T]$, где T является Δ^1_1-деревом в $\mathbb{N}^{<\omega}$ с конечными ветвлениями и без концевых вершин, и тогда оно σ-компактно, либо содержит абсолютно замкнутое подмножество, гомеоморфное $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

4. Любое σ-компактное Δ^1_1-множество является счетным объединением компактных Δ^1_1-множеств и содержит Δ^1_1-точку.

§10.1 Пространства Шоке

В некоторых случаях бывает полезно иметь такой механизм построения бесконечных убывающих последовательностей множеств, который, имея достаточно общий характер, гарантировал бы непустоту пересечения всех множеств строящейся последовательности. Например, любая убывающая последовательность замкнутых множеств некоторого полного метрического пространства с диаметрами, стягивающимися к 0, имеет непустое пересечение. Это свойство не имеет, вообще говоря, места уже для последовательностей открытых множеств, не говоря о борелевских и более сложных множествах. Однако иногда непустоту можно получить при помощи подходящего условия, связывающего предыдущее множество с последующим. Например, если $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — убывающая последовательность непустых открытых множеств полного пространства с диаметрами, стремящимися к 0, то для непустоты множества $\bigcap X_n$ достаточно потребовать, чтобы каждое множество X_n включало не только само множество X_{n+1}, но и его замыкание.

Оказывается, убывающие последовательности борелевских и даже более сложных множеств можно также сделать непустыми, наложив некоторое другое условие!

Определение 10.1.1. В *игре Шоке* $C_{\mathbb{X}}$ для топологического пространства $\mathbb{X}$ участвуют два игрока, обозначаемых I и II. Игра проходит так, что игрок I начинает и делает ход, выбирая непустое открытое множество $U_1 \subseteq \mathbb{X}$, игрок II отвечает, выбирая опять непустое открытое множество $V_1 \subseteq U_1$, затем снова игрок I делает ход непустым открытым множеством $U_2 \subseteq V_1$, игрок II отвечает непустым открытым $V_2 \subseteq U_2$, и т. д. до бесконечности. Результат такой *партии* определяется следующим образом: игрок II выиграл, если пересечение $\bigcap_n U_n = \bigcap_n V_n$ непусто, а иначе выиграл игрок I. Пространство $\mathbb{X}$ называется *пространством Шоке*, если игрок II имеет в этой игре $C_{\mathbb{X}}$ выигрывающую стратегию.

Более подробно, стратегия — это правило, предписывающее данному игроку определенные ходы в определенных позициях. Точнее, *стратегией* для игрока I в игре $C_{\mathbb{X}}$ называется любая функция σ, определенная на множестве всех кортежей вида $u = \langle U_1 \supseteq V_1 \supseteq \ldots \supseteq U_n \supseteq V_n\rangle$ ($n \in \mathbb{N}$; $u = \Lambda$ — пустой кортеж при $n = 0$), где все U_i, V_i — непустые открытые множества в $\mathbb{X}$ и требуется, чтобы $\sigma(u)$ было непустым открытым подмножеством множества $\mathbb{X}$, удовлетворяющим условию $\sigma(u) \subseteq V_n$. Другими словами, $\sigma(u)$ — легитимный ход игрока I в позиции u. Стратегия σ для игрока I называется *выигрывающей*, если для любой *партии* в игре $C_{\mathbb{X}}$, т. е. любой бесконечной убывающей последовательности $U_1 \supseteq V_1 \supseteq \ldots \supseteq U_n \supseteq V_n \supseteq \ldots$ непустых открытых подмножеств пространства $\mathbb{X}$, где игрок I придерживается стратегии σ в том смысле, что $U_{n+1} = \sigma(\langle U_1, V_1, \ldots, U_n, V_n \rangle)$ для всех n (в частности, $U_1 = \sigma(\Lambda)$ при $n = 0$), мы имеем $\bigcap_n U_n = \bigcap_n V_n = \varnothing$, т. е. получаем выигрыш игрока I.

Соответственно, *стратегией* для игрока II называется любая функция τ, определенная на множестве всех кортежей вида $v = \langle U_1 \supseteq V_1 \supseteq \ldots \supseteq U_n \rangle$ $(n \geq 1)$, где все U_i, V_i — непустые открытые множества в $\mathbb{X}$ и требуется, чтобы $\tau(v)$ было снова непустым открытым подмножеством $\mathbb{X}$, удовлетворяющим условию $\tau(v) \subseteq U_n$, т. е. $\tau(v)$ — легитимный ход игрока I в позиции v. Стратегия τ для игрока II называется *выигрывающей*, если для любой партии $U_1 \supseteq V_1 \supseteq \ldots \supseteq U_n \supseteq V_n \supseteq \ldots$ в игре $C_{\mathbb{X}}$, где игрок II придерживается стратегии τ в том смысле, что $V_n = \tau(\langle U_1, V_1, \ldots, U_n \rangle)$ для всех n, мы имеем $\bigcap_n U_n = \bigcap_n V_n \neq \varnothing$, т. е. получаем выигрыш для игрока II.

Упражнение 10.1.2. Докажите, что любое полное метрическое пространство есть пространство Шоке. (Игрок II может играть, выбирая непустое открытое множество V_n диаметра меньше n^{-1}, замыкание которого включено в U_n.)

Пример § 10.2 покажет, что обратное неверно. В частности, существует топология τ на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, которая усиливает обычную польскую топологию, делает $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \tau \rangle$ пространством Шоке, имеет счетную базу, но не метризуема. Однако пространства Шоке разделяют следующее общее свойство полных пространств.

Предложение 10.1.3. *Каждое пространство Шоке $\mathbb{X}$ удовлетворяет теореме Бэра, т. е. в нем все котощие множества (всюду) плотны.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное семейство открытых плотных множеств $D_n \subseteq \mathbb{X}$. Пусть $U \subseteq \mathbb{X}$ — непустое открытое множество. Рассмотрим партию в игре $C_{\mathbb{X}}$, в которой игрок II следует своей выигрывающей стратегии, а игрок I начинает с хода $U_0 = U$ и играет так, что $U_{n+1} \subseteq V_n \cap D_n$ для каждого n. Это возможно вследствие открытости и плотности множества D_n. Выигрывая эту партию, игрок II получает точку в пересечении $U \cap \bigcap_n D_n$. $\square$

§ 10.2 Топология Ганди–Харрингтона

Мы начинаем с формального определения топологии.

Определение 10.2.1. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell}$ — бэровское произведение. *Топология Ганди–Харрингтона* на $\mathbb{X}$ состоит из всех объединений произвольных Σ^1_1-множеств $S \subseteq \mathbb{X}$.

Эта топология включает польскую топологию $\mathbb{X}$, но сама не является польской. В самом деле, согласно следствию 6.7.4 существует $\varPi^1_1$-множество $P \subseteq \mathbb{X}$, не являющееся $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством. По определению P замкнуто в топологии Ганди—Харрингтона. Допустим, что эта топология польская. Но в польских пространствах все замкнутые множества являются множествами класса $\mathbf{G}_\delta$ ($\mathbf{\Pi}^0_1 \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2$ по лемме 2.2.1). Значит, $P = \bigcap_n \bigcup_m S_{mn}$, где все S_{mn} являются $\varSigma^1_1$-множествами. Однако класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$ замкнут относительно счетных объединений и пересечений согласно предложению 6.10.1 (vii). Таким образом, P оказывается $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством, и мы получаем противоречие.

Доказательство свойства Шоке для топологии Ганди—Харрингтона мы проведем, опираясь на другое свойство этой топологии, не связанное с играми.

Определение 10.2.2. *Польской сетью* для семейства множеств $\mathscr{F}$ называется такая совокупность $\{\mathscr{D}_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых плотных множеств $\mathscr{D}_n \subseteq \mathscr{F}$, для которой имеет место следующее: для любой последовательности множеств $F_n \in \mathscr{D}_n$, удовлетворяющей условию непустоты конечных пересечений (т. е. $\bigcap_{k \le n} F_k \neq \varnothing$ для каждого натурального n), выполнено неравенство $\bigcap_n F_n \neq \varnothing$.

Здесь множество $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{F}$ называется *открытым плотным*, если соблюдены такие два условия[1] : $\forall F \in \mathscr{F}\ \exists D \in \mathscr{D}\,(D \subseteq F)$, и

$$\forall F \in \mathscr{F}\ \forall D \in \mathscr{D}\,(F \subseteq D \Longrightarrow F \in \mathscr{D})\,. \qquad \square$$

Например, польская сеть имеется для семейства всех непустых замкнутых множеств любого полного метрического пространства $\mathbb{X}$: возьмем в качестве $\mathscr{D}_n$ все замкнутые множества диаметра меньше n^{-1} в $\mathbb{X}$. Следующая теорема, установленная в работах [52, 9, 59], не столь элементарна.

Теорема 10.2.3. (i) *Пусть $\mathbb{X}$ — бэровское произведение. Найдется польская сеть для совокупности $\mathbb{P}$ всех непустых $\varSigma^1_1$-множеств в $\mathbb{X}$.*

(ii) *Следовательно, $\mathbb{X}$ с топологией Ганди—Харрингтона является пространством Шоке и удовлетворяет теореме Бэра.*

Доказательство. (i) Для простоты рассмотрим случай $\mathbb{X} = \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Напомним, что $\mathtt{pr}\,P = \{a : \exists\, b\, P(a, b)\}$ есть проекция множества $P \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$.

---

[1] Множества $\mathscr{D}$, удовлетворяющие только первому требованию, называются *плотными*. Если множество $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{F}$ плотно, то множество $\mathscr{D}' = \{F \in \mathscr{F} : \exists\, D \in \mathscr{D}\,(F \subseteq D)\}$ открыто плотно. Эти понятия открытости и плотности можно связать с определенной топологией, чего мы не будем делать, оставив их чисто комбинаторными.

Положим $P_{st} = \{\langle a, b\rangle \in P : s \subset a \wedge t \subset b\}$ для $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и s, $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и через $\mathscr{D}(P, s, t)$ обозначим семейство всех таких непустых Σ^1_1-множеств $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что либо $X \cap \mathtt{pr}\, P_{st} = \varnothing$, либо $X \subseteq \mathtt{pr}\, P_{s^\wedge i\,,t^\wedge j}$ для каких-то $i, j \in \mathbb{N}$. (Заметим, что во втором случае число i единственное, но j не обязательно единственное.) Зафиксируем произвольное перечисление $\{\mathscr{D}_n : n \in \mathbb{N}\}$ всех семейств вида $\mathscr{D}(P, s, t)$, где $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — множество класса Π^0_1. Докажем, что совокупность всех $\mathscr{D}_n$ образует польскую сеть для $\mathbb{P}$.

Упражнение 10.2.4. Покажите, что если $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ есть множество класса Π^0_1, то $\mathscr{D}(P, s, t)$ являтся открытым плотным множеством в $\mathbb{P}$ в смысле определения 10.2.2, так что все семейства $\mathscr{D}_n$ открыты и плотны в семействе $\mathbb{P}$ всех непустых Σ^1_1-множеств $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Теперь рассмотрим последовательность непустых Σ^1_1-множеств $X_n \in \mathscr{D}_n$, удовлетворяющую условию непустоты конечных пересечений. Докажем, что $\bigcap_n X_n \neq \varnothing$. Множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ назовем *позитивным*, если найдется такой индекс m, что $X_m \subseteq X$. Для каждого n зафиксируем Π^0_1-множество $P^n \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которого $X_n = \mathtt{pr}\, P^n$. Если $s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и проекция $\mathtt{pr}\, P^n_{st}$ позитивна, то по выбору последовательности множеств X_n найдутся единственное i и некоторое j, для которых проекция $\mathtt{pr}\, P^n_{s^\wedge i\,,t^\wedge j}$ также позитивна. (В самом деле, пусть в силу позитивности $X_m \subseteq \mathtt{pr}\, P^n_{st}$. Семейство $\mathscr{D}(P^n, s, t)$ совпадает с некоторым $\mathscr{D}_k$, так что найдется индекс k, для которого $X_k \in \mathscr{D}(P^n, s, t)$. Тогда либо $X_k \cap \mathtt{pr}\, P^n_{st} = \varnothing$, либо $X_k \subseteq \mathtt{pr}\, P^n_{s^\wedge i\,,t^\wedge j}$ для каких-то $i, j \in \mathbb{N}$. Но первое невозможно, поскольку $X_m \subseteq \mathtt{pr}\, P^n_{st}$, а множества X_j вложены одно в другое. Значит, $X_k \subseteq \mathtt{pr}\, P^n_{s^\wedge i\,,t^\wedge j}$ для каких-то $i, j \in \mathbb{N}$. Но тогда проекция $P^n_{s^\wedge i\,,t^\wedge j}$ позитивна.) Отсюда следует, что существует единственная такая точка $a = a_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и некоторая (не обязательно единственная) такая точка $b = b_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что проекция $\mathtt{pr}\, P^n_{a\restriction k\,,b\restriction k}$ позитивна для каждого k. Из замкнутости множеств P^n следует, что $\langle a_n, b_n\rangle \in P^n$, а значит, $a_n \in X_n$ для каждого n.

Остается доказать, что все эти точки a_n совпадают друг с другом, т. е. $a_m = a_n$ даже при $m \neq n$. Для этого просто заметим, что если проекции $\mathtt{pr}\, P_{st}$ и $\mathtt{pr}\, Q_{s't'}$ обе позитивны (даже для двух разных множеств P, Q!), то, согласно тому же условию непустоты конечных пересечений выполнено либо условие $s \subseteq s'$, либо $s' \subseteq s$.

(ii) Зафиксируем польскую сеть $\{\mathscr{D}_n : n \in \mathbb{N}\}$ для $\mathbb{P}$. Каждое семейство $\mathscr{D}_n$ плотно в $\mathbb{P}$, что позволяет игроку II играть так, что $V_n \in \mathscr{D}_n$ для каждого n. □

§ 10.3 Следствия

Результаты этого параграфа будут использованы ниже в гл. 12 для исследования борелевских и более сложных отношений эквивалентности. Для краткости через T обозначим топологию Ганди – Харрингтона на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и для каждого $n \geq 1$ через T_n — топологию Ганди – Харрингтона на $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n$. Пространство $\langle (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n ; \mathsf{T}_n \rangle$, очевидно, гомеоморфно пространству $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}} ; \mathsf{T} \rangle$ при любом n.

Далее, через T^n обозначается топология произведения n копий топологии $\mathsf{T} = \mathsf{T}_1$ на множестве $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n$. Наконец, $\mathsf{T}_{n,m}$ будет произведением $\mathsf{T}_n \times \mathsf{T}_m$; это топология на $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{n+m}$.

Следствие 10.3.1. *Все топологии T_n и T^n имеют польские сети и удовлетворяют теореме Бэра в смысле предложения 10.1.3.*

Доказательство. Результат для топологий T_n прямо следует из теоремы 10.2.3. Что касается топологий T^n, то здесь следует отметить, что произведение двух топологий, обладающих польской сетью, само имеет польскую сеть: она состоит из декартовых произведений множеств, принадлежащих исходным сетям. □

При любом n топология T_n содержит T^n и на самом деле строго сильнее, чем T^n. Например, диагональ $\Delta(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \{\langle x, x \rangle : x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ открыта в T_2, но не в T^2. Однако произведение топологий достаточно плотно в топологии произведения.

Лемма 10.3.2. *Предположим, что множество $V \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ непусто и T-открыто, а множество $D \subseteq V$ является котощим в V в смысле топологии T. Тогда произведение $D \times D$ плотно в $V \times V$ в смысле топологии T_2.*

Доказательство. Считаем для простоты, что $V = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Пусть по предположению $\bigcap_n D_n \subseteq D$, где все множества $D_n \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ являются T-открытыми и плотными в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Понятно, что каждое из множеств $D'_n = D_n \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ открыто и плотно в топологии T_2. (В самом деле, проекция $\mathtt{pr}\, A$ любого Σ^1_1-множества $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ есть снова Σ^1_1-множество в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.) Аналогично каждое из множеств $D''_n = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times D_n$ открыто и плотно. В то же время мы имеем $\bigcap_n (D'_n \cap D''_n) \subseteq D \times D$. Остается сослаться на теорему 10.2.3. □

Если R — отношение эквивалентности на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то для $n \geq 2$ пусть

$$\mathsf{R}^{(n)} = \{\langle x_1, ..., x_n \rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n : \forall i\, (x_i \,\mathsf{R}\, x_{i+1})\}$$

— множество всех R-цепочек длины n; в частности, $\mathsf{R}^{(2)} = \mathsf{R}$. Для любых n и m через $\langle \mathsf{R}^{(n+m)} ; \mathsf{T}_{n+m} \rangle$ обозначим множество $\mathsf{R}^{(n+m)} \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{n+m}$ с топологией, унаследованной из $\langle (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{n+m} ; \mathsf{T}_{n,m} \rangle$.

Лемма 10.3.3. *Пусть* R *есть* Σ^1_1*-отношение эквивалентности на* $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, $n' \le n$ *и* $m' \le m$. *Тогда проектирование* $\pi : (\mathbb{N}^\mathbb{N})^n \times (\mathbb{N}^\mathbb{N})^m$ *на* $(\mathbb{N}^\mathbb{N})^{n'} \times (\mathbb{N}^\mathbb{N})^{m'}$ *является открытым непрерывным отображением пространства* $\langle \mathsf{R}^{(n+m)}; \top_{n,m} \rangle$ *на* $\langle \mathsf{R}^{(n'+m')}; \top_{n',m'} \rangle$.

Доказательство. Пусть для простоты $m = n = 2$, $m' = n' = 1$; таким образом, $\pi(x_1, x_2; y_1, y_2) = \langle x_1, y_1 \rangle$ и $\top_{1,1} = \top^2$. Опуская элементарную проверку непрерывности, сосредоточимся на доказательстве открытости, где, в частности, будет важно особое строение множества $\mathsf{R}^{(n+m)}$. Рассмотрим пару $\top_2$-базовых, т. е. класса Σ^1_1, множеств $U, V \subseteq (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$. Докажем, что проекция $O = \pi((U \times V) \cap \mathsf{R}^{(4)})$ является $\top^2$-открытой в пространстве $\mathsf{R}^{(2)} = \mathsf{R}$. Множества

$$\begin{aligned} U' &= \{x_1 : \exists\, x_2\, (U(x_1, x_2) \wedge x_1 \mathrel{\mathsf{R}} x_2)\} \text{ и} \\ V' &= \{y_1 : \exists\, y_2\, (V(y_1, y_2) \wedge y_1 \mathrel{\mathsf{R}} y_2)\} \end{aligned}$$

принадлежат классу Σ^1_1, а значит, $\top$-открыты. Однако выполнено равенство $O = (U' \times V') \cap \mathsf{R}$. □

§ 10.4 Приложение к счетным Σ^1_1-множествам

Следующая теорема относится к типу дихотомических теорем.

Теорема 10.4.1. *Пусть* $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. *Для любого* $\Sigma^1_1(p)$*-множества* $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ *возможно одно и только одно из следующих двух утверждений*:

(I) X *состоит только из* $\Delta^1_1(p)$*-точек и, следовательно, счетно*;

(II) *имеется замкнутое множество* $Y \subseteq X$, *гомеоморфное пространству* $2^\mathbb{N}$, *и тогда само множество* X *имеет мощность континуума, формально* $\mathtt{card}\, X = \mathfrak{c}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда параметр p отсутствует, т. е. мы имеем Σ^1_1-множество $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Допустим, что условие (I) не выполнено, т. е. X содержит точку не из Δ^1_1. Согласно следствию 9.2.3 можно предполагать, что X не имеет Δ^1_1-точек. (Иначе просто вычитаем из X Π^1_1-множество всех Δ^1_1-точек.) Тогда любое непустое Σ^1_1-множество $Y \subseteq X$ содержит по крайней мере две точки $y_1 \ne y_2$. (В самом деле, единственная точка одноэлементного Σ^1_1-множества есть Δ^1_1 согласно лемме 6.9.1.) Поэтому такое множество Y содержит пару дизъюнктных непустых Σ^1_1-подмножеств, например

$$Y' = \{y \in Y : y(n) = y_1(n)\} \quad \text{и} \quad Y'' = \{y \in Y : y(n) = y_2(n)\}\,,$$

где $n \in \mathbb{N}$ таково, что $y_1(n) \neq y_2(n)$. Это дает возможность построить регулярную дизъюнктную канторову систему $\{X_s\}_{s \in 2^{<\omega}}$ непустых Σ^1_1-множеств $X_s \subseteq X$, удовлетворяющую таким условиям:

1) $X_{s^\wedge i} \subseteq X_s$ при $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $i = 0, 1$;
2) диаметр множества X_s в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ не превосходит $2^{-\mathtt{lh}\, s}$;
3) $X_{s^\wedge 0} \cap X_{s^\wedge 1} = \varnothing$;
4) $X_s \in \mathscr{D}_{\mathtt{lh}\, s}$, где по теореме 10.2.3 семейство $\{\mathscr{D}_n : n \in \mathbb{N}\}$ — польская сеть для совокупности $\mathbb{P}$ всех непустых Σ^1_1-множеств $Y \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$.

То, что эта система неисчезающая, т. е. для каждого $a \in 2^\mathbb{N}$ пересечение $X_a = \bigcap_n X_{a \restriction n}$ непусто, следует из п. 4 и определения польской сети. Остальные требования регулярности и дизъюнктность системы множеств X_s очевидны. Поэтому ассоциированная функция f является гомеоморфизмом пространства $2^\mathbb{N}$ на множество $Y = \mathtt{ran}\, f = \{f(a) : a \in 2^\mathbb{N}\} \subseteq X$ по лемме 1.5.2.

Для доказательства p-варианта теоремы используется соответствующий p-вариант топологии Ганди—Харрингтона: топология, порожденная непустыми $\Sigma^1_1(p)$-множествами. □

Следствие 10.4.2. *Любое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество либо счетно, либо содержит подмножество, гомеоморфное канторову дисконтинууму $2^\mathbb{N}$. Это верно также для $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств любого бэровского произведения.* □

Это следствие уже было доказано выше (теорема 3.4.1), и даже для всех польских пространств, а не только для бэровских произведений.

§10.5 Приложение к компактным Δ^1_1-множествам

Назовем *компактным деревом* любое дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, которое 1) не имеет концевых вершин и 2) имеет лишь конечные ветвления. Понятно, что в этом случае множество $[T] = \{a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \forall\, m (a \restriction m \in T)\}$ компактно. А если, кроме того, T принадлежит классу $\Delta^1_1(p)$ (как подмножество множества $\mathbb{N}^{<\omega}$, см. определение 7.1.3), то тому же классу принадлежит и $[T]$, поскольку $a \in [T] \Longleftrightarrow \forall\, m\, (a \restriction m \in T)$.

Лемма 10.5.1. *Пусть $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Если $F \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ — замкнутое $\Delta^1_1(p)$-множество, а $X \subseteq F$ — компактное $\Sigma^1_1(p)$-множество, то найдется такое компактное $\Delta^1_1(p)$-дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, что $X \subseteq [T] \subseteq$*

F. В частности, при $X = F$ любое компактное $\varDelta^1_1(p)$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ имеет вид $X = [T]$ для некоторого компактного $\varDelta^1_1(p)$-дерева $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$.

Доказательство. Как обычно, считаем, что параметр p отсутствует, т. е. вместо классов $\varSigma^1_1(p)$, $\varDelta^1_1(p)$ рассматриваются $\varSigma^1_1$, $\varDelta^1_1$.

Часть 1. Сначала попробуем подобрать $\varDelta^1_1$-дерево S, для которого $F = [S]$. Коль скоро дополнительное $\varDelta^1_1$-множество $G = \mathbb{N}^\mathbb{N} \smallsetminus F$ открыто, множество

$$P = \{\langle x, t\rangle : x \in G \wedge t \in \mathbb{N}^{<\omega} \wedge x \in [t] \subseteq G\}$$

удовлетворяет условию $\mathtt{dom}\, P = G$. Кроме того, P имеет класс $\varPi^1_1$, так как ключевое соотношение $[t] \subseteq G$ можно выразить $\varPi^1_1$-формулой $\forall\, x\, (t \subset x \Longrightarrow x \in G)$. Поэтому теорема 9.3.1 (iii) дает нам такую $\varDelta^1_1$-функцию $f\colon G \to \mathbb{N}^{<\omega}$, что $x \in [f(x)] \subseteq G$ для всех $x \in G$. Множество

$$U = \{f(x) : x \in G\} = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : \exists\, x \in G\, (f(x) = t)\}$$

тогда принадлежит классу $\varSigma^1_1$ и удовлетворяет условию $G = \bigcup_{t \in U} [t]$. Однако

$$V = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : [t] \subseteq G\} = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : \forall\, x\, (x \in [t] \Longrightarrow x \in G)\}$$

есть $\varPi^1_1$-множество, причем $U \subseteq V$ и $G = \bigcup_{t \in U} [t]$. По теореме отделимости найдется такое $\varDelta^1_1$-множество W, что $U \subseteq W \subseteq V$, и тогда всё еще $G = \bigcup_{t \in W} [t]$. Положим теперь $S = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \forall\, t\, (t \in W \Longrightarrow t \not\subseteq s)\}$.

Легко видеть, что S является $\varDelta^1_1$-деревом (возможно, с концевыми вершинами) и $[S] = F$, что и заканчивает часть 1 доказательства.

Часть 2. Заметим, что множество P всех таких пар $\langle s, u\rangle$, что $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $u \subseteq \mathbb{N}$ конечно и непусто, и выполнено

$$\forall\, x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\, \big((x \in X \wedge s \subset x) \Longrightarrow \exists\, k \in u\, (s^\wedge k \subset x) \wedge \forall\, k \in u\, (s^\wedge k \in S)\big),$$

есть $\varPi^1_1$-множество в пространстве $\mathbb{N} \times \mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{N})$, где второй множитель отождествляется с $\mathbb{N}$ с помощью какой-нибудь подходящей рекурсивной биекции так, как это сделано для $\mathbb{N}^{<\omega}$. При этом $\mathtt{dom}\, P = \mathbb{N}^{<\omega}$. (В самом деле, если s таково, что нет точек $x \in X$, для которых $s \subset x$, то $\langle s, u\rangle \in P$ для любого конечного u. Если же такая точка x есть, то множество $u = \{x(n) : s \subset x \in X\}$, где $n = \mathtt{lh}\, u$, конечно в силу компактности — его мы и выбираем.) Значит, снова имеется такая $\varDelta^1_1$-функция $f\colon \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathscr{P}_{\mathtt{fin}}(\mathbb{N})$, что $\langle s, f(s)\rangle \in P$ для всех $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Остается взять $T = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \forall\, n < \mathtt{lh}\, s\, (s(n) \in f(s \restriction n))\}$. $\square$

Следствие 10.5.2. *Любое компактное $\Delta^1_1(p)$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ содержит точку $x \in X$ класса $\Delta^1_1(p)$.*

Доказательство. Опуская параметр p, имеем $X = [T]$ для подходящего компактного Δ^1_1-дерева $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ по лемме 10.5.1. Возьмем в качестве x самую лексикографически левую ветвь дерева T, так что равенство $x(n) = \mathtt{min}\{y(n) : y \in X \wedge y \restriction n = x \restriction n\}$ выполнено для каждого n. □

§10.6 Приложение к σ-компактным Δ^1_1-множествам

Теперь перейдем к σ-компактным множествам. Следующая дихотомическая теорема может считаться эффективным вариантом теоремы 3.5.3.

Теорема 10.6.1. *Пусть $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Для любого $\Delta^1_1(p)$-множества $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ выполнено одно и только одно из следующих двух утверждений*:

(I) *X совпадает с объединением U всех множеств вида $[T]$, где $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ — компактное дерево класса $\Delta^1_1(p)$ (и тогда множество X σ-компактно)*;

(II) *имеется множество $Y \subseteq X$, гомеоморфное пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и замкнутое в X.*

Следовательно, любое σ-компактное $\Delta^1_1(p)$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является счетным объединением компактных $\Delta^1_1(p)$-множеств.

Несовместность условий (I) и (II) здесь очевидна.

Доказательство. Опуская параметр p, мы первым делом докажем, что множество U из утверждения (I) (т. е. просто объединение всех компактных Δ^1_1-множеств $K \subseteq X$) есть Π^1_1. Учитывая биекцию $n \mapsto \mathbf{s}_n$ из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^{<\omega}$, мы можем применить теорему 9.1.1 для пространства $\mathbb{X} = \mathbb{N}^{<\omega}$. Получаем такие Π^1_1-множества $E \subseteq \mathbb{N}$ и $W \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$ и такое Σ^1_1-множество $W' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$, что

1) $(W)_e = (W')_e$ для всех $e \in E$, и

2) множество $X \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ принадлежит классу Δ^1_1, если и только если найдется число $e \in E$, для которого $X = (W)_e = (W')_e$.

Как обычно, мы определяем $(W)_e = \{s : \langle e, s\rangle \in W\}$ для множеств $W \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$. Теперь

$$x \in U \iff \exists\, e\, \big(e \in E \wedge (W)_e - \text{компактное дерево} \wedge x \in [(W)_e] \subseteq X\big).$$

Свойство «быть компактным деревом» выражается занудно длинной арифметической формулой, которую мы не хотим здесь выписывать на несколько строк, а свойство $[(W)_e] \subseteq X$ выражается $\varPi^1_1$-формулой

$$\forall\, y\, (\forall\, n\, (y \restriction n \in (W)_e) \Longrightarrow y \in X),$$

где $y \restriction n \in (W)_e$ можно заменить на $\langle e, y \restriction n \rangle \in W$. Имеем арифметический квантор $\exists\, e$ на $\varPi^1_1$-формуле, т. е. $\varPi^1_1$-формулу. Итак, $U \in \varPi^1_1$. Это значит, что множество $X' = X \smallsetminus U$ принадлежит классу $\varSigma^1_1$. Остается доказать, что если $X' \neq \varnothing$, то имеется множество $Y \subseteq X'$, гомеоморфное $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и замкнутое в X'.

Лемма 10.6.2. *Множество X' не имеет непустых замкнутых σ-компактных подмножеств класса $\varSigma^1_1$.*

Доказательство. Докажем вначале, что X' не имеет непустых компактных подмножеств класса $\varSigma^1_1$. Пусть, напротив, $\varnothing \neq Z \subseteq X'$ — компактное $\varSigma^1_1$-множество. Найдем замкнутое $\varDelta^1_1$-множество F, для которого $Z \subseteq F \subseteq X$ — отсюда и из леммы 10.5.1 немедленно следует, что $Y \subseteq U$, и мы получаем противоречие.

Поскольку дополнение $C = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus Z$ открыто, множество

$$H = \{\langle x, s \rangle : x \in C \cap [s] \wedge [s] \cap Z = \varnothing\}$$

принадлежит классу $\varPi^1_1$ и удовлетворяет условию $\mathtt{pr}\, H = C$. В частности, $\varDelta^1_1$-множество $D = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus X$ включено в $\mathtt{pr}\, H$. Отсюда по теореме 9.3.1 (iii) найдется $\varDelta^1_1$-функция $f : D \to \mathbb{N}^{<\omega}$, для которой $x \in D \Longrightarrow \langle x, f(x) \rangle \in H$, или, другими словами, $x \in [f(x)] \subseteq C$ для всех $x \in D$. Тогда множество $\Sigma = \mathtt{ran}\, f = \{f(x) : x \in D\} \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ имеет класс $\varSigma^1_1$ и $D \subseteq \bigcup_{s \in \Sigma} [s] \subseteq C$.

Однако $\Pi = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : [s] \subseteq C\}$ есть $\varPi^1_1$-множество, и $\Sigma \subseteq \Pi$. Значит, по теореме отделимости 8.1.2, найдется $\varDelta^1_1$-множество Δ, для которого $\Sigma \subseteq \Delta \subseteq \Pi$. Тогда всё еще выполняется условие $D \subseteq \bigcup_{s \in \Delta} [s] \subseteq C$, так что замкнутое множество $F = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \bigcup_{s \in \Delta} [s]$ удовлетворяет соотношению $Z \subseteq F \subseteq X$. Однако условие $x \in F$ равносильно условию $\forall\, s\, (s \in \Delta \Longrightarrow x \notin [s])$, так что F имеет класс $\varDelta^1_1$ вместе с Δ, что и требовалось.

Теперь докажем полное утверждение леммы. Пусть, напротив, непустое замкнутое $\varSigma^1_1$-множество $F = \bigcup_n F_n \subseteq X'$ является σ-компактным, а все F_n компактны. Тогда следствие 1.2.3 (vi) дает такое базовое открыто-замкнутое множество $U \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что пересечение $Z = U \cap F$ непусто и целиком включено в одно из множеств F_n. Таким образом, Z — непустое компактное $\varSigma^1_1$-множество, и мы получаем противоречие с уже доказанным. □ (лемма)

Возвращаясь к теореме, мы предположим, что утверждение (I) не имеет места, так что Σ^1_1-множество $X' \subseteq X$ непусто, и выведем отсюда утверждение (II). Имеются два случая.

Случай 1. Существует замкнутое, но не σ-компактное Σ^1_1-множество $F \subseteq X'$. В этом случае теорема 1.6.5 сразу дает замкнутое множество $Y \subseteq F$, гомеоморфное пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что и требовалось.

Случай 2. Замкнутых, но не σ-компактных Σ^1_1-множеств $F \subseteq X'$ нет. Тогда по лемме 10.6.2 вообще любое непустое Σ^1_1-множество $Y \subseteq X'$ незамкнуто в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. В этом предположении, чтобы получить искомое *относительно* замкнутое множество $Y \subseteq X$, гомеоморфное $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, мы построим регулярную и открыто-отделимую суслинскую систему непустых Σ^1_1-множеств $Y_s \subseteq X'$, удовлетворяющую таким техническим условиям:

1) $Y_{s^\wedge i} \subseteq Y_s$ при $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $i \in \mathbb{N}$;
2) диаметр множества Y_s не превосходит $2^{-\mathtt{lh}\, s}$;
3) $Y_{s^\wedge k} \cap Y_{s^\wedge n} = \varnothing$ для всех s и $k \neq n$, и, более того, $Y_{s^\wedge k}$ можно заключить в открытое множество $Y'_{s^\wedge k}$, которое не пересекается с $\bigcup_{n \neq k} Y_{s^\wedge n}$;
4) условие, аналогичное условию 4 из доказательства теоремы 10.4.1 и обеспечивающее непустоту каждого пересечения вида $\bigcap_m Y_{a^\wedge m}$, где $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;
5) если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $x_k \in Y_{s^\wedge k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то последовательность точек x_k сходится к точке из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus X'$.

Если такое построение выполнено, то из леммы 1.5.2 следует, что ассоциированная функция $f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} Y = \mathtt{ran}\, f = \{f(a) : a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ — гомеоморфизм. Но надо еще доказать замкнутость множества Y в X'. Пусть $y \in \overline{Y}$. Тогда $y \in \overline{Y_\Lambda}$, поскольку $Y \subseteq Y_\Lambda$. Далее, предположим, что $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $y \in \overline{Y_s}$. Тогда в наших предположениях $y \in \overline{\bigcup_k Y_{s^\wedge k}}$. Следовательно, согласно условию 5, либо $y \notin X'$, либо $y \in \overline{Y_{s^\wedge k}}$ для некоторого (на самом деле единственного) k. Из этого рассуждения следует, что если $y \in \overline{Y} \cap X'$, то существует точка $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которой $y \in \overline{Y_{a \restriction m}}$ для всех m. Но тогда $y = f(a)$ согласно условию 2, так что $y \in Y$. Это завершает доказательство замкнутости множества Y в X' в топологии подпространства.

Наконец, перейдем к построению множеств Y_s. Если мы уже имеем непустое Σ^1_1-множество $Y_s \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то его замыкание $\overline{Y_s}$ также множество из Σ^1_1, откуда следует, что $\overline{Y_s} \not\subseteq X'$ согласно гипотезе случая 2. Возьмем любую точку $y \in \overline{Y_s} \smallsetminus X'$ и сходящуюся к ней последовательность попарно различных точек $y_n \in Y_s$. Пусть U_n —

окрестность точки y_n (т. е. бэровский интервал) диаметра не больше $\frac{1}{3}$ от наименьшего из расстояний от y_n до точек y_k, $k \neq n$. Положим $Y_{s^\wedge n} = Y_s \cap U_n$, а затем еще сузим эти множества $Y_{s^\wedge n}$, чтобы выполнить требования 2 и 4.

□ (теорема 10.6.1)

Следствие 10.6.3. *Любое принадлежащее классу* $\mathbf{\Delta}^1_1$ *(= борелевское) не σ-компактное множество* $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ *имеет подмножество, гомеоморфное* $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ *и замкнутое в* X. □

Разумеется, этот результат имеет место для множеств в любом бэровском произведении. На самом деле чисто топологическими методами его можно распространить на борелевские множества X любого польского пространства $\mathbb{X}$. Но это не так просто, и мы не будем этого делать, поскольку следствие 3.5.3 приносит более сильный результат: для всех польских пространств и для $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств. Интересная **проблема** состоит в том, чтобы соответственно распространить теорему 10.6.1 на класс $\Sigma^1_1(p)$.

Следствие 10.6.4 (из теоремы 10.6.1 и следствия 10.5.2)**.** *Если* $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, *то каждое непустое* σ-*компактное* $\Delta^1_1(p)$*-множество* $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ *является счетным объединением компактных* $\Delta^1_1(p)$*-множеств и содержит* $\Delta^1_1(p)$*-точку.* □

§ 10.7 Приложение к множествам, накрываемым σ-компактными множествами

Следующая дихотомическая теорема охватывает и класс Σ^1_1, в отличие от теоремы 10.6.1, для которой такое обобщение с Δ^1_1 на Σ^1_1 неизвестно.

Теорема 10.7.1. *Пусть* $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. *Для любого* $\Sigma^1_1(p)$*-множества* $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ *выполнено одно и только одно из следующих двух утверждений*:

(I) X *включено в объединение* U *всех множеств вида* $[T]$, *где* $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ *есть компактное дерево класса* $\Delta^1_1(p)$ *(и тогда* U *является* σ*-компактным)*;

(II) *имеется замкнутое в* $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ *множество* $Y \subseteq X$, *гомеоморфное пространству* $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

Следовательно, если $\Sigma^1_1(p)$*-множество* $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ *не накрывается* σ*-компактным множеством, то оно содержит подмножество, гомеоморфное* $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ *и замкнутое в* $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

Условия (I) и (II) несовместимы по той простой причине, что само $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а тогда и гомеоморфное ему замкнутое множество Y в условии (II), не σ-компактны.

Доказательство. Как обычно, считаем, что параметр p отсутствует. Множество U из утверждения (I) имеет класс Π^1_1: это легко вытекает из следствия 9.2.3. Таким образом, разность $X \smallsetminus U$ есть Σ^1_1-множество. Докажем следующий результат.

Лемма 10.7.2. *В условиях теоремы если $Y \subseteq X \smallsetminus U$ — непустое Σ^1_1-множество, то его топологическое замыкание в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ некомпактно, т. е. дерево $T(Y) = \{y \restriction n : y \in Y \land n \in \mathbb{N}\}$ имеет хотя бы одно бесконечное ветвление.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда множество

$$H = \{\langle t, n\rangle : t \in \mathbb{N}^{<\omega} \land n \in \mathbb{N} \land \forall k \, (t^\wedge k \in T(Y) \Longrightarrow k \le n)\}$$

класса Π^1_1 (так как Σ^1_1-фрагмент $T(Y)$ встречается слева от импликации) удовлетворяет равенству $\mathtt{dom}\, H = \mathbb{N}^{<\omega}$. Из теоремы 9.3.1 (iii) следует, что существует Δ^1_1-функция $f\colon \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющая $\langle t, f(t)\rangle \in H$ для всех $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Отсюда по определению множества H получаем: $y(n) \le f(y \restriction n)$ для всех $y \in Y$ и n, так что $Y \subseteq [T']$, где T' есть дерево из всех конечных последовательностей $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющих неравенству $t(n) \le f(t \restriction n)$ для каждого $n < \mathtt{lh}\, t$. Но T', очевидно, компактное дерево, и легко видеть, что T' принадлежит классу Δ^1_1 вместе с f. Отсюда следует, что $[T'] \subseteq U$, и мы получаем противоречие. □ (лемма)

Возвращаясь к доказательству теоремы, предположим, что условие (I) не имеет места, т. е. множество $X \smallsetminus U$ непусто. В этом предположении существует регулярная и открыто-отделимая суслинская система непустых Σ^1_1-множеств $Y_s \subseteq X \smallsetminus U$, удовлетворяющая таким техническим условиям:

1) $Y_{s^\wedge i} \subseteq Y_s$ при $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $i \in \mathbb{N}$;

2) диаметр множества Y_s не превосходит $2^{-\mathtt{lh}\, s}$;

3) $Y_{s^\wedge k} \cap Y_{s^\wedge n} = \varnothing$ для всех s и $k \ne n$, и, более того, $Y_{s^\wedge k}$ можно заключить в открытое множество $Y'_{s^\wedge k}$, которое не пересекается с $\bigcup_{n \ne k} Y_{s^\wedge n}$;

4) условие, аналогичное условию 4 из доказательства теоремы 10.4.1 и обеспечивающее непустоту каждого пересечения вида $\bigcap_m Y_{a^\wedge m}$, где $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;

5) если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $x_k \in Y_{s^\wedge k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то последовательность точек x_k не имеет сходящихся подпоследовательностей в пространстве $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

Если такая система множеств построена, то по тем же причинам что и в доказательстве теоремы 10.6.1, ассоциированная функция $f : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to X \smallsetminus U$ взаимно однозначна и является гомеоморфизмом из $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ на свой полный образ $Y = \mathtt{ran}\, f = \{f(a) : a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\} \subseteq X \smallsetminus U$. Проверка абсолютной замкнутости множества Y в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ подобна проверке относительной замкнутости в доказательстве теоремы 10.6.1, но здесь условие 5 сильнее. Таким образом, мы пришли к условию (II).

Теперь перейдем к построению множеств Y_s. Если $\varSigma^1_1$-множество $Y_s \subseteq X \smallsetminus U$ уже построено, то согласно лемме 10.7.2 можно подобрать $t \in T(Y_s)$ так, что $t^\wedge k \in T(Y_s)$ для всех k из бесконечного множества $K_s \subseteq \mathbb{N}$. Это позволяет выбрать последовательность попарно различных точек $y_k \in Y_s$ $(k \in \mathbb{N})$, не имеющую сходящихся подпоследовательностей. Накрываем эти точки достаточно малыми бэровскими интервалами U_k, с тем чтобы для полученных $\varSigma^1_1$-множеств $Y_{s^\wedge i} = Y_s \cap U_s$ было верно условие 5, а затем при необходимости сжимаем эти множества, чтобы удовлетворить требования 2 и 4.

□ (теорема 10.7.1)

Следствие 10.7.3. *Любое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ либо накрывается σ-компактным множеством, либо содержит подмножество, гомеоморфное $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ и замкнутое в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.* □

Похожий классический результат (теорема 3.5.4) имеет место для любого польского пространства. Его можно вывести из следствия 10.7.3 чисто топологическими рассуждениями, однако это непросто.

Упражнение 10.7.4. Непустые деревья $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ без концевых вершин, обладающие тем свойством, что выше каждого $t \in T$ имеется точка бесконечного ветвления, как и соответствующие замкнутые множества $[T] \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$, называются *суперсовершенными*. Докажите, что суперсовершенные множества — это в точности те замкнутые множества $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$, которые не имеют непустых открыто-замкнутых σ-компактных подмножеств.

Глава 11

Множества со специальными сечениями

Эта тема относится к тому направлению в дескриптивной теории множеств, которое можно назвать теорией *множеств со специальными сечениями*. Рассматриваются «плоские» множества, т. е. те, которые расположены в пространствах вида $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, где $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — польские пространства или, в более узком плане, бэровские произведения. Напомним, что *сечением* множества $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ называется любое множество вида

$$(P)_x = \{y \in \mathbb{Y} : P(x,y)\}\,, \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{X}\,.$$

Понятно, что сечение $(P)_x$ непусто, если и только если

$$x \in \mathtt{pr}\, P = \{x \in \mathbb{X} : \exists\, y\, P(x,y)\}.$$

«Множества со специальными сечениями» — это общее название для разных категорий плоских множеств, выделенных тем или иным свойством их сечений. Например, что можно сказать о плоских множествах P первого проективного уровня, имеющих не более чем счетные сечения $(P)_a$ для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$? Мы увидим, что достаточно много — например, если этим свойством обладает борелевское множество, то оно допускает униформизацию борелевским множеством и его проекция тоже будет борелевским множеством.

Будут рассмотрены и другие типы сечений, например компактные и σ-компактные, а также удовлетворяющие разным требованиям в контексте меры и категории, а также сечения из определенного борелевского класса.

§ 11.1 Счетные сечения

Требование, чтобы каждое сечение $(P)_x$ содержало не более одной точки y, характеризует однозначные, или униформные множества, которые рассматривались в § 8.4 в связи с проблемой униформизации. Также рассматриваются множества со счетными, компактными, σ-компактными сечениями. Например, *счетнозначным* называется любое множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, все сечения $(P)_x$ которого не более чем счетны. Другую категорию образуют множества с «большими» сечениями — например, требуется, чтобы все непустые сечения $(P)_x$ были множествами ненулевой меры. Здесь рассматриваются лишь некоторые типы этих множеств. Книга [68] дает более полный обзор.

Чтобы не повторяться, зафиксируем в этом параграфе польские пространства $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$, являющиеся бэровскими произведениями. Напомним, что к последним относятся пространства вида $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\ell$. Также фиксируем произвольный параметр $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Нижеследующие четыре теоремы, т. е. теоремы 11.1.1, 11.1.3, 11.1.5 и 11.1.7, составляют основу теории однозначных и счетнозначных плоских множеств в классах $\mathbf{\Sigma}^1_1$ и $\mathbf{\Delta}^1_1$ (= борелевские множества). Эти теоремы принадлежат Н. Н. Лузину и П. С. Новикову.

Теорема 11.1.1 (счетноформная проекция). *Если $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ — счетнозначное $\Delta^1_1(p)$-множество, то $\mathtt{pr}\, P$ является также $\Delta^1_1(p)$-множеством.*

Следовательно, проекция $\mathtt{pr}\, P$ любого счетнозначного борелевского (т. е. $\mathbf{\Delta}^1_1$) множества является борелевским множеством.

Итак, проекции борелевских счетнозначных множеств — это снова борелевские множества. Это можно сравнить с тем фактом, что проекции *произвольных* борелевских множеств составляют более широкий класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Следующий результат обобщает теорему 11.1.1 в том плане, что проектирование $\langle x, y\rangle \mapsto x$ есть частный случай непрерывного отображения. Из него вытекает, что прообразы борелевских (= $\mathbf{\Delta}^1_1$) множеств при борелевских отображениях, равно как и образы борелевских множеств при счетнозначных, в частности при однозначных, борелевских отображениях не выходят за пределы того же класса борелевских множеств. (Но образы борелевских множеств при произвольных борелевских отображениях образуют более широкий класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$.)

Следствие 11.1.2. *Предположим, что X, Y — множества в бэровских произведениях $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, а $f \colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ есть $\Delta^1_1(p)$-отображение (т. е. его график есть $\Delta^1_1(p)$-множество в $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$). Тогда множество $X = \mathtt{dom}\, f$ принадлежит классу $\Delta^1_1(p)$, и, более того,* *если $Y' \subseteq Y$ является $\varDelta^1_1(p)$-множеством, то к этому же классу принадлежит и прообраз $f^{-1}[Y'] = \{x \in X : f(x) \in Y'\}$.*

Если же функция f является счетнозначной, т. е. прообраз каждой точки не более чем счетен, то $Y = \mathtt{ran}\, f$ принадлежит классу $\varDelta^1_1(p)$, и вообще образ $f[X'] = \{f(x) : x \in X'\}$ любого $\varDelta^1_1(p)$-множества $X' \subseteq X$ имеет класс $\varDelta^1_1(p)$.

То же верно для класса $\mathbf{\Delta}^1_1$ вместо $\varDelta^1_1(p)$ во всех случаях.

Здесь уместно указать на то обращение следствия 11.1.2, которое уже было получено выше, а именно, каждое борелевское множество в польском пространстве $\mathbb{X}$ есть непрерывный однозначный образ некоторого замкнутого множества $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ по теореме 2.6.2 и, следовательно, как нетрудно проверить, проекция некоторого однозначного множества $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Доказательство (следствие)**.** Для доказательства первой части применим теорему 11.1.1 к множеству $P = \{\langle x, y\rangle : x \in X \wedge f(x) = y\}$ — графику функции f. Для доказательства второй части достаточно применить теорему к инвертированному графику той же функции $P^{-1} = \{\langle y, x\rangle : x \in X \wedge f(x) = y\}$. □

Теорема 11.1.3 (**счетноформное перечисление**)**.** *Если $\varDelta^1_1(p)$-множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ счетнозначно то существует такое $\varDelta^1_1(p)$-отображение $F : \mathbb{N} \times \mathtt{pr}\, P \to \mathbb{Y}$, что $(P)_x = \{F(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ для всех $x \in \mathtt{pr}\, P$. То же верно для класса $\mathbf{\Delta}^1_1$ всех борелевских множеств вместо класса $\varDelta^1_1(p)$.*

Следствие 11.1.4. *Любое счетнозначное борелевское множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ есть счетная сумма однозначных борелевских множеств.* □

Доказательство. В обозначениях теоремы возьмем все множества вида $P_n = \{F(n, x) : x \in \mathtt{pr}\, P\}$. □

Теорема 11.1.5 (**борелевское продолжение**)**.** *Каждое счетнозначное $\varSigma^1_1(p)$-множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ имеет счетнозначное $\varDelta^1_1(p)$-надмножество $Q \supseteq P$. Каждое однозначное $\varSigma^1_1(p)$-множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ имеет однозначное $\varDelta^1_1(p)$-надмножество $Q \supseteq P$.*

Аналогично, каждое счетнозначное (однозначное) $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество P имеет счетнозначное (соответственно однозначное) $\mathbf{\Delta}^1_1$-надмножество $Q \supseteq P$.

Следствие 11.1.6 (из теоремы 11.1.5 и следствия 11.1.4)**.** *Любое счетнозначное $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ есть счетная сумма однозначных $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств.* □

Теорема 11.1.7 (**счетноформная униформизация**). *Любое счетнозначное $\varDelta^1_1(p)$-множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ может быть униформизовано множеством того же класса $\varDelta^1_1(p)$. Соответственно, любое счетнозначное $\mathbf{\Delta}^1_1$-множество может быть униформизовано $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеством.*

Напомним, что согласно следствию 8.5.4 борелевские множества общего вида не обязательно униформизуемы борелевскими же множествами, и даже существует $\varPi^0_1$-множество (следовательно, замкнутое), не униформизуемое никаким $\varSigma^1_1$-множеством.

§ 11.2 Доказательства теорем

Классические доказательства теорем из § 11.1 (точнее, их вариантов для проективных классов $\mathbf{\Sigma}^1_1$ и $\mathbf{\Delta}^1_1$), были найдены Н. Н. Лузиным и П. С. Новиковым во второй половине 1920-х годов. Эти первоначальные доказательства, выполненные в стиле геометрических рассуждений, были довольно сложны.[1] Методы же эффективной дескриптивной теории позволят нам здесь получить те же результаты короткими и совершенно прозрачными рассуждениями.

Доказательство (теоремы 11.1.1 и 11.1.7). Достаточно применить теорему 9.3.1 в упрощенном варианте 3 из замечания 9.3.2. □

Доказательство (теорема 11.1.5 для счетных сечений). Снова предполагаем, что $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Каждое из сечений $(P)_a$ не более чем счетно, поэтому согласно теореме 10.4.1 мы имеем $b \in \varDelta^1_1(a)$, если $\langle a, b\rangle \in P$. Таким образом, P есть подмножество множества

$$W = \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : b \text{ имеет класс } \varDelta^1_1(a)\}.$$

Однако W есть $\varPi^1_1$-множество по следствию 9.2.3. Значит, согласно теореме **отделимости** 8.1.2, существует такое $\varDelta^1_1$-множество Q, что $P \subseteq Q \subseteq W$. Это множество является искомым. □

Доказательство (теорема 11.1.5 для однозначных множеств). Если $\varSigma^1_1$-множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ однозначно, то

$$A = \{\langle x, y\rangle : \forall z\, (P(x, z) \Longrightarrow y = z)\}$$

принадлежит классу $\varPi^1_1$ и $P \subseteq A$. Поэтому благодаря следствию 8.1.2 существует $\varDelta^1_1$-множество B, для которого $P \subseteq B \subseteq A$. Более того,

$$C = \{\langle x, y\rangle \in B : \forall z\, (B(x, z) \Longrightarrow y = z)\}$$

[1] См., например, монографию Н. Н. Лузина [85]. Упрощенные классические доказательства см. в обзорной статье В. Я. Арсенина и А. А. Ляпунова [2].

снова есть Π^1_1, и всё еще выполнено условие $P \subseteq C$. Опять найдется Δ^1_1-множество Q, для которого $P \subseteq Q \subseteq C$. Это множество Q и является искомым. □

Доказательство (теорема 11.1.3)**.** Как и выше, предполагаем, что P есть Δ^1_1-множество в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. В этом предположении выполнено условие $b \in \Delta^1_1(a)$ для любой точки $\langle a, b\rangle \in P$. Возьмем множества E, W, W', u_{pe} из следствия 9.2.2. Тогда для каждой точки $\langle a, b\rangle \in P$ существует индекс $e \in \mathbb{N}$, для которого $\langle a, e\rangle \in E$ и $b = u_{ae}$. Поэтому P совпадает с объединением всех множеств вида

$$Q(e) = \{\langle a, b\rangle \in P : \langle a, e\rangle \in E \wedge b = u_{ae}\}, \quad e \in \mathbb{N},$$

причем все эти множества $Q(e)$, очевидно, однозначны. Кроме того, все множества $Q(e)$, и даже множество $Q = \{\langle a, b, e\rangle : \langle a, b\rangle \in Q(e)\}$ имеют класс Π^1_1, поскольку этому классу принадлежит множество E, а равенство $b = u_{ae}$ равносильно формуле $\forall\, k\, W(a, e, k, b(k))$ при $\langle a, e\rangle \in E$.

По теореме 9.3.1 (iii) множество Q можно униформизовать Δ^1_1-множеством $R \subseteq Q$ в смысле $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \times \mathbb{N}$, так что для всех $a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ выполнено условие

$$\exists\, e\, Q(a, b, e) \Longrightarrow \exists!\, e\, R(a, b, e).$$

Тогда множества $R(e) = \{\langle a, b\rangle : R(a, b, e)\}$ попарно дизъюнктны и принадлежат классу Δ^1_1, причем $\bigcup_e R(e) = \bigcup_e Q(e) = P$. Кроме того, по построению $R(e) \subseteq Q(e)$, так что множества $R(e)$ все однозначны.

Отсюда следует, что множества $D(e) = \mathtt{pr}\, R(e)$ (подмножества пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) имеют класс Δ^1_1 по теореме 11.1.1, и $\bigcup_e D(e) = \mathtt{pr}\, P$. Определим теперь $F(e, a)$ для $e \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathtt{pr}\, P$ следующим образом. Если $a \in D(e)$, то $F(e, a)$ есть то единственное $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которого $\langle a, b\rangle \in R(e)$. Если же $a \in \mathtt{pr}\, P \smallsetminus D(e)$, то сначала возьмем наименьшее e', для которого $a \in D(e')$, а затем определим $F(e, a)$ как единственное b, удовлетворяющее условию $\langle a, b\rangle \in R(e')$.

Упражнение 11.2.1. Докажите, что определенное таким образом отображение $F \colon \mathbb{N} \times \mathtt{pr}\, P \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является Δ^1_1-отображением. Нужно аккуратно выписать формулу, выражающую определение $b = F(e, a)$ как тернарное отношение, и, используя разные преобразования из таблицы на с. 118, привести ее к Σ^1_1-виду и к Π^1_1-виду. Нужно учесть и то, что $\mathtt{pr}\, P$ принадлежит классу Δ^1_1 по теореме 11.1.1.

□ (теорема 11.1.3)

Упражнение 11.2.2. Докажите, что если $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\Delta^1_1(p)$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не более чем счетно, то $X \subseteq \Delta^1_1(p)$ и найдется такая $\Delta^1_1(p)$-последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (т. е. функция $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$), что $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. (Используйте теорему 10.4.1 и теорему 11.1.3 для $P = \{0\} \times X$ в пространстве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.)

Таким образом, любое счетное Δ^1_1-множество допускает прямое Δ^1_1-перечисление своих точек.

Упражнение 11.2.3 (Мазуркевич)**.** Докажите, используя следствие 9.2.3 и теорему 10.4.1, что если $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ есть $\Sigma^1_1(p)$-множество, то множество $X = \{x \in \mathbb{X} : (P)_x \text{ несчетно}\}$ имеет класс $\Sigma^1_1(p)$. Соответственно если P есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$, то X является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством.

Естественно, если проекция $\mathtt{pr}\, P$ (на $\mathbb{X}$) есть множество класса Δ^1_1, то множество $Y = \{x \in \mathtt{pr}\, P : (P)_x \text{ не более чем счетно}\}$, дополнительное к множеству X, имеет класс Π^1_1.

Докажите, используя элементарные методы, что если $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ есть $\Sigma^1_1(p)$-множество, то множество $X = \{x \in \mathbb{X} : (P)_x \text{ бесконечно}\}$ принадлежит классу $\Sigma^1_1(p)$. То же верно для свойства $\mathtt{card}\,(P)_x \geq n$ для фиксированного n.

§ 11.3 Компактные и σ-компактные сечения

Некоторые результаты из § 11.1 имеют аналоги для этих более широких классов «плоских» множеств. Пусть, как и выше, $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — два бэровских произведения, а $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — произвольный параметр.

Теорема 11.3.1. *Предположим, что $\Delta^1_1(p)$-множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ таково, что все сечения $(P)_x$ $(x \in \mathbb{X})$ σ-компактны. Тогда*

(i) $\mathtt{pr}\, P$ *есть $\Delta^1_1(p)$-множество*;

(ii) P *допускает униформизацию $\Delta^1_1(p)$-множеством.*

(iii) *существует такое $\Delta^1_1(p)$-множество $G \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, что $P = \bigcup_n Q^n$, где $Q^n = \{\langle x, y\rangle : \langle n, x, y\rangle \in G\}$ и все сечения $(Q^n)_x$ каждого из множеств Q^n компактны.*

В частности[2]*, любое борелевское множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ с σ-компактными сечениями имеет борелевскую проекцию, равно счетному объединению борелевских множеств с компактными сечениями, и униформизуемо борелевским множеством.*

[2] Эти классические результаты получены в работах П. С. Новикова, А. Я. Арсенина, Кунугуи, Е. А. Щеголькова, Сан-Раймона.

Доказательство. Для простоты будем считать, что $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и что параметра p нет, т. е. $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является $\varDelta^1_1$-множеством.

Доказательства утверждений (i) и (ii) не представляют больших затруднений. Именно, если $x \in \mathbb{X}$, то в наших предположениях сечение $(P)_x$ является σ-компактным множеством класса $\varDelta^1_1(x)$, а потому оно содержит $\varDelta^1_1(x)$-точку согласно следствию 10.6.4 (либо пусто). Теперь для получения искомого результата остается обратиться к замечанию 9.3.2, часть 3.

Доказательства утверждения (iii) требует бо́льших усилий. Напомним, что если множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ замкнуто, то существует дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ без концевых вершин, для которого $X = [T] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall\, n\, (a \restriction n \in T\}$. При этом для *компактности* множества $[T]$ необходимо и достаточно, чтобы дерево T было компактным (т. е. имело лишь конечные ветвления).

Рассмотрим множество H всех таких пар $\langle x, T\rangle$, что $x \in \mathbb{X}$, $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ — дерево без концевых вершин и с конечными ветвлениями и $T \in \varDelta^1_1(x)$. Множество H имеет класс $\varPi^1_1$ согласно следствию 9.2.3. А из теоремы 10.7.1 следует, что если $\langle x, y\rangle \in P$, то найдется такое дерево T, что $\langle x, T\rangle \in H$ и $y \in [T]$. Поэтому $\varPi^1_1$-множество

$$E = \{\langle x, y, T\rangle : \langle x, y\rangle \in P \wedge \langle x, T\rangle \in H \wedge y \in [T]\}$$

удовлетворяет условию $\mathtt{pr}_{xy}\, E = P$, т. е. если $\langle x, y\rangle \in P$, то найдется дерево T, для которого $\langle x, y, T\rangle \in E$. Униформизуем E множеством $D \subseteq E$ класса $\varPi^1_1$. Тогда, если $\langle x, y\rangle \in P$ то существует единственное T, для которого $\langle x, y, T\rangle \in D$. Но D также принадлежит и классу $\varSigma^1_1$, так как соотношение $\langle x, y, T\rangle \in D$ равносильно формуле

$$\langle x, y\rangle \in P \wedge y \in [T] \wedge \forall T' \in \varDelta^1_1(x)\, (\langle x, y, T'\rangle \in D \Longrightarrow T = T')\,.$$

Итак, $\varSigma^1_1$-множество $F = \{\langle x, T\rangle : \exists\, y\, (\langle x, y, T\rangle \in D)\}$ включено в $\varPi^1_1$-множество H. По теореме отделимости найдется $\varDelta^1_1$-множество V, для которого $F \subseteq V \subseteq H$. При этом по построению выполнено условие

$$\langle x, y\rangle \in P \implies \exists\, T\, (\langle x, T\rangle \in V \wedge y \in [T])\,.$$

Наконец, множество V счетнозначно: если $\langle x, T\rangle \in V$, то $T \in \varDelta^1_1(x)$ (так как $V \subseteq H$). Сразу заметим, что $\mathtt{pr}\, P = \mathtt{pr}\, V$. Далее, теорема 11.1.3 дает $\varDelta^1_1$-функцию F, заданную на $\mathbb{N} \times \mathtt{pr}\, P$ и такую, что $(V)_x = \{F(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ для всех $x \in \mathtt{pr}\, P$. Остается положить

$$G = \{\langle n, x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : x \in \mathtt{pr}\, P \wedge y \in [F(n, x)]\}\,. \qquad \square$$

Очевидная аналогия между теоремами 11.3.1 и 10.7.1 с одной стороны и результатами для одно- и счетнозначных множеств с другой стороны, неудивительна, если вспомнить, что компактные множества польского пространства сами образуют польское пространство (см. § 1.8), а σ-компактные множества могут в известном смысле отождествляться со счетными семействами компактных множеств (к которым применяется объединение). На этом пути можно получить другое доказательство «неэффективной» части теоремы 11.3.1, см. [68]. В рамках же нашего подхода аналогия распространяется и на некоторые другие результаты.

Упражнение 11.3.2. Докажите, что если $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ есть $\Sigma^1_1(p)$-множество, то множество $X = \{x \in \mathbb{X} : (P)_x$ не σ-компактно$\}$ принадлежит классу $\Sigma^1_1(p)$. Соответственно, если P есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$, то и X является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством. То же (с другим доказательством) верно для некомпактных сечений.

§ 11.4 Большие сечения (мера)

Одноэлементные, счетные, компактные, σ-компактные множества в польских пространствах можно понимать как в определенном смысле «малые» множества. И результаты, приведенные выше в этой главе, показывают, что плоские (т. е. расположенные в пространстве вида $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$), например борелевские, множества с такими сечениями имеют такие особые свойства, как борелевская проекция или возможность униформизации борелевским же множеством. Неожиданно подобными же свойствами обладают и множества с «большими» сечениями в смысле меры либо категории. В этом параграфе рассматривается случай меры.

Для простоты условимся рассматривать множества в бэровском произведении $\mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$; случай произвольного бэровского произведения вида $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ ничем не отличается. О других польских пространствах см. ниже.

Определение 11.4.1. Конечная борелевская мера μ на $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ называется *мерой класса* K или просто K*-мерой*, если ее *код* $\mathtt{cod}_\mu$, т. е. функция $\mathtt{cod}_\mu(n) = \mu([\mathbf{s}_n])$ из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$, определяющая меры бэровских интервалов $[s] = \{a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : s \subset a\}$, является K-измеримой функцией.

Упражнение 11.4.2. Исходя из определения вещественных чисел в примере 7.1.6 как собственных начальных сегментов в $\mathbb{Q}$, выведите, что для K-измеримости функции $\mathtt{cod}_\mu$ необходимо и достаточно, чтобы множество

$$X_<(\mu) = \{\langle s, r\rangle \in \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{Q} : \mu([s]) < r\}$$

принадлежало классу K. Докажите, что если $X_<(\mu)$ принадлежит классу $\varDelta^1_1(p)$, $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, то этому же классу принадлежит и множество

$$X_{\le}(\mu) = \{\langle s, m, n\rangle \in \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^2 : \mu([s]) \le \frac{m}{n}\},$$

а также аналогично определяемые множества $X_>(\mu)$ и $X_{\ge}(\mu)$. (Уточнение: мера μ конечна.)

Теорема 11.4.3. *Пусть μ — произвольная конечная*[3] *борелевская мера на $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Допустим, что $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и μ является мерой класса $\varDelta^1_1(p)$. Предположим, что $\varDelta^1_1(p)$-множество $P \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ обладает тем свойством, что все непустые сечения $(P)_x$ суть множества ненулевой μ-меры.*

Тогда проекция $\mathtt{pr}\,P$ есть множество из $\varDelta^1_1(p)$ и, кроме того, множество P униформизуется множеством класса $\varDelta^1_1(p)$.

Достаточно доказать, что в условиях теоремы каждое непустое сечение $(P)_x$ содержит точку из $\varDelta^1_1(p,x)$ — после чего применение замечания 9.3.2 (пункт 3) немедленно дает искомый результат. Очевидно такоее дальнейшее упрощение формулировки теоремы: если $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, то любое $\varDelta^1_1(p,x)$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$, удовлетворяющее неравенству $\mu(X) > 0$, содержит точку из $\varDelta^1_1(p,x)$. Понятно, что это сводится к следующей теореме, имеющей и самостоятельный интерес. Её мы и будем доказывать.

Теорема 11.4.4. *В условиях теоремы 11.4.3 любое $\varDelta^1_1(p)$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$, удовлетворяющее условию $\mu(X) > 0$, содержит точку из $\varDelta^1_1(p)$.*

Доказательство. Посредством очевидного нормирования задача сводится к случаю *вероятностной* меры μ, т. е. просто $\mu(\mathbb{N}^\mathbb{N}) = 1$.

Напомним, что компактное дерево — это любое дерево $S \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ с конечными ветвлениями и без концевых вершин. В этом случае множество $[S] = \{a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \forall m\ (a \restriction m \in S)\}$ является компактным множеством в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Назовем *системой μ-аппроксимации* любую пару отображений $c, k \mapsto S^c_k$ и $c, k \mapsto T^c_k$, определенных на множестве $\mathbf{BC} \times \mathbb{N}$ так, что все S^c_k и T^c_k — компактные деревья в $\mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющие условиям

$$[S^c_k] \subseteq \boldsymbol{B}_c\,, \quad [T^c_k] \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \smallsetminus \boldsymbol{B}_c\,, \quad \text{и} \quad \mu([S^c_k] \cup [T^c_k]) > 1 - 2^{-k}\,. \qquad (1)$$

Главный момент доказательства теоремы состоит в следующей лемме.

[3] См. ниже о случае σ-конечных мер.

Лемма 11.4.5. *В этих предположениях, т. е. если $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и μ — вероятностная мера класса $\Delta^1_1(p)$ на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, верно следующее: существует такая система μ-аппроксимации $c, k \mapsto S^c_k$, $c, k \mapsto T^c_k$, что множества*

$$A = \{\langle c, k, S^c_k\rangle : c \in \mathbf{BC} \wedge k \in \mathbb{N}\} \quad \text{и} \quad B = \{\langle c, k, T^c_k\rangle : c \in \mathbf{BC} \wedge k \in \mathbb{N}\}$$

принадлежат классу $\Pi^1_1(p)$ и являются $\Sigma^1_1(p)$-множествами на $\mathbf{BC}$, *т. е. пересечениями Π^1_1-множества $\mathbf{BC} \times \mathbb{N} \times \mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ с подходящими $\Sigma^1_1(p)$-множествами A' и B' соответственно.*

Замечание 11.4.6. Докажите, что в условиях леммы 11.4.5 если $c \in \mathbf{BC}$ и $k \in \mathbb{N}$, то S^c_k и T^c_k принадлежат классу $\Delta^1_1(p, c)$ — поскольку, например,

$$S = S^c_k \iff \langle c, k, S\rangle \in A \iff \langle c, k, S\rangle \in A'. \qquad \square$$

Возвращаясь к теореме 11.4.4, заметим, что если $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ есть $\Delta^1_1(p)$, то согласно теореме 9.7.1 найдется такой код $c \in \mathbf{BC}$, $c \in \Delta^1_1(p)$, что $X = \boldsymbol{B}_c$. А если при этом $\mu(X) > 0$, то согласно лемме 11.4.5 найдется такое компактное дерево $S = S^c_k$ для подходящего k, что $[S] \subseteq X$ и $\mu(S) > 0$ — в частности $S \neq \varnothing$. При этом $S \in \Delta^1_1(p, c)$ согласно замечанию 11.4.6, так что $S \in \Delta^1_1(p)$, поскольку $c \in \Delta^1_1(p)$. Значит, в силу следствия 10.6.4 множество $[S]$, а тогда и само X, содержит точку класса $\Delta^1_1(p)$, что и доказывает теорему 11.4.4.

$\square$ (теоремы 11.4.4 и 11.4.3 из леммы 11.4.5)

Доказательство (лемма 11.4.5)**.** Как обычно, для уменьшения громоздкости опустим параметр p, так что пусть μ — вероятностная мера класса Δ^1_1. Пусть $c = \langle T, F\rangle \in \mathbf{BC}$. Для построения искомых деревьев S^c_k и T^c_k мы определим вспомогательные деревья $S^c_k(t)$ и $T^c_k(t)$ для $t \in T$ так, чтобы выполнялись условия

$$[S^c_k(t)] \subseteq \boldsymbol{B}_c(t), \ \ [T^c_k(t)] \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \boldsymbol{B}_c(t), \ \ \mu([S^c_k(t)] \cup [T^c_k(t)]) > 1 - 2^{-k}. \tag{2}$$

(О множествах $\boldsymbol{B}_c(t)$ см. определение 9.5.1.)

Это определение происходит индукцией по рангу $|t|_T$.

Случай концевого элемента. Пусть $|t|_T = 0$, так что $t \in \mathtt{Max}\, T$ — и тогда $\boldsymbol{B}_c(t)$ есть бэровский интервал $I_s = [s]$, где $s = F(t)$. Пусть $m = \mathtt{lh}\, s$.

Зададимся числом $k \in \mathbb{N}$. Положим $Y_i = \{x \in I_s : x(m) < i\}$. Понятно, что $I_s = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$, так что найдется такое число i, что

$\mu(I_s \smallsetminus Y_i) < 2^{-k-2}$. Наименьшее из таких чисел обозначим через i_0 и положим $X_0 = Y_{i_0}$.

Пусть теперь $Y_i = \{x \in X_0 : x(m+1) < i\}$. Наименьшее из таких чисел i, что $\mu(X_0 \smallsetminus Y_i) < 2^{-k-3}$, обозначим через i_1 и положим $X_1 = Y_{i_1}$.

Продолжая это построение, мы получаем такую последовательность натуральных чисел $i_0, i_1, i_2, \ldots$, что множества

$$X_n = \{x \in I_s : x(m) < i_0 \wedge x(m+1) < i_1 \wedge \ldots \wedge x(m+n-1) < i_{n-1}\}$$

удовлетворяют условию $\mu(X \smallsetminus X_n) \le 2^{-k-1} - 2^{-n-2}$. Тогда компактное множество $X_\infty = \bigcap_n X_n$ удовлетворяет неравенству $\mu(I_s \smallsetminus X_\infty) < 2^{-k-1}$. В то же самое время, $X_\infty = [S]$, где $S = \{u \in \mathbb{N}^{<\omega} : \forall \nu < \mathtt{lh}\, u\, (u(\nu) < i_\nu)\}$ — компактное дерево в $\mathbb{N}^{<\omega}$. Это дерево S мы и обозначим через $S^c_k(t)$.

Для построения комплементарного компактного дерева $T^c_k(t)$ положим $\Sigma = \{\sigma \in \mathbb{N}^{<\omega} : \mathtt{lh}\, \sigma = \mathtt{lh}\, s\} \smallsetminus \{s\}$ и зафиксируем рекурсивное перечисление $\Sigma = \{\sigma_j : j \in \mathbb{N}\}$ без повторений. (Если $s = \Lambda$, т. е. $I_s = [s] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то можно сразу определить $T^c_k = \varnothing$.) Положим $I_j = [\sigma_j]$. Поскольку мы согласились, что μ — вероятностная мера, найдется такое число J, что $\mu(\bigcup_{j \ge J} I_j) < 2^{-k-2}$. Берем наименьшее из таких чисел J. Это позволяет сконцентрироваться на бэровских интервалах I_j, $j < J$. Для каждого $j < J$ и каждого натурального числа κ, абсолютно тем же способом, что и выше, мы строим определенное компактное дерево, скажем, $S_\kappa(j)$ такое, что $[S_\kappa(j)] \subseteq I_j$ и $\mu(I_j \smallsetminus [S_\kappa(j)]) < 2^{-\kappa-2}$. Тогда

$$T^c_k(t) = S_{k+2}(0) \cup S_{k+3}(1) \cup \ldots \cup S_{J+k+1}(J-1)$$

является компактным деревом, причем $[T^c_k(t)] \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \boldsymbol{B}_c$ и выполнено неравенство $\mu((\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \boldsymbol{B}_c) \smallsetminus [T^c_k(t)]) < 2^{-k-1}$, так что мы имеем $\mu([S^c_k(t)] \cup [T^c_k(t)]) > 1 - 2^{-k}$.

Индуктивный шаг. Теперь предположим, что $|t|_T > 0$. По определению имеем $\boldsymbol{B}_c(t) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \bigcup_{n \in N(t)} \boldsymbol{B}_c(t^\wedge n)$, где $N = \{n : t^\wedge n \in T\}$. По индуктивному предположению уже построены компактные деревья $S^c_k(t^\wedge n)$ и $T^c_k(t^\wedge n)$, для которых условие (2) выполнено для всех $t^\wedge n$, $n \in N(t)$. Строим из них деревья $S^c_k(t)$ и $T^c_k(t)$ следующим образом. Множества

$$Y = \bigcap\nolimits_{n \in N(t)} [T^c_{k+n+1}(t^\wedge n)] \quad \text{и} \quad X = \bigcup\nolimits_{n \in N(t)} [S^c_{k+n+1}(t^\wedge n)]$$

удовлетворяют соотношениям

$$Y \subseteq \boldsymbol{B}_c, \;\; X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \boldsymbol{B}_c \;\text{ и }\; \mu(X \cup Y) > 1 - \sum\nolimits_{n \ge 1} 2^{-k-n-1} = 2^{-k-1}.$$

Мы можем сразу взять компактное дерево $\bigcap_{n\in N(t)} T^c_{k+n+1}(t^\wedge n)$ в качестве $S^c_k(t)$: понятно, что $[S^c_k(t)] = B$. Однако множество X не обязательно компактно. Тем не менее, поскольку μ предполагается вероятностной мерой, найдется такое число J, что

$$\mu(\bigcup_{n\in N(t)}[S^c_{k+n+1}(t^\wedge n)] \smallsetminus \bigcup_{n\in N(t),\, n\ge J}[S^c_{k+n+1}(t^\wedge n)]) < 2^{-k-1}.$$

Пусть $T^c_k(t) = \bigcup_{n\in N(t),\, n\ge J} S^c_{k+n+1}(t^\wedge n)$, где J — наименьшее из чисел указанного вида. Тогда $[T^c_k(t)] \subseteq X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \boldsymbol{B}_c$ и мы имеем $\mu([S^c_k(t)] \cup [T^c_k(t)]) > 1 - 2^{-k}$, что и требовалось.

Индуктивное построение деревьев, удовлетворяющих условию (2), закончено. Понятно, что система деревьев $S^c_k = S^c_k(\Lambda)$ и $T^c_k = T^c_k(\Lambda)$ удовлетворяет условию (1).

Теперь перейдем к определимости всей конструкции в классе $\varDelta^1_1$. Если $c = \langle T, F\rangle \in \mathbf{BC}$ то определим функции $\sigma_c, \tau_c \colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}^{<\omega} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ так, что $\sigma_c(k,t) = S^c_k(t)$ и $\tau_c(k,t) = T^c_k(t)$ при $t \in T$, но $\sigma_c(k,t) = \tau_c(k,t) = \varnothing$ при $t \notin T$. Тот факт, что пара $\langle\sigma,\tau\rangle$ функций $\sigma,\tau\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}^{<\omega} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ совпадает с парой $\langle\sigma_c, \tau_c\rangle$, выражается посредством некоторой арифметической формулы, скажем $\Phi_\mu(\sigma,\tau,c)$, протоколирующей индуктивное построение деревьев $S^c_k(t)$ и $T^c_k(t)$, в которую c (т. е. T и F) входит как параметр, а мера μ входит посредством ссылки на множества

$$K_<(\mu) = \{\langle T, r\rangle : r\in\mathbb{Q} \wedge T \text{— компактное дерево } \wedge \mu([T]) < r\},$$

и аналогично определяемые множества $K_\le(\mu)$, $K_>(\mu)$, $K_\ge(\mu)$, которые, как нетрудно проверить, принадлежат классу $\varDelta^1_1$ по выбору μ. Отсюда и следуют требования определимости в лемме 11.4.5. Например, для множеств A и A' имеем

$$\begin{aligned}\langle c,k,S\rangle \in A \quad&\Longleftrightarrow\quad \forall\,\sigma\,\forall\,\tau\,(\Phi_\mu(\sigma,\tau,c) \Longrightarrow S = \sigma(k,\Lambda))\,;\\ \langle c,k,S\rangle \in A' \quad&\Longleftrightarrow\quad \exists\,\sigma\,\exists\,\tau\,(\Phi_\mu(\sigma,\tau,c) \wedge S = \sigma(k,\Lambda))\,.\end{aligned}$$

□ (лемма и теоремы 11.4.4 и 11.4.3)

Получим еще несколько интересных результатов в связи с мерой.

Следствие 11.4.7. *Если $p\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и μ — вероятностная мера класса $\varDelta^1_1(p)$ на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то множество $C_<(\mu) = \{\langle c,r\rangle \in \mathbf{BC}\times\mathbb{Q} : \mu(\boldsymbol{B}_c) < r\}$ и аналогично определяемые множества $C_\le(\mu)$, $C_>(\mu)$, $C_\ge(\mu)$ принадлежат классу $\varPi^1_1(p)$, а потому, в силу попарной дополнительности, являются и $\varSigma^1_1(p)$-множествами на $\varPi^1_1$-множестве $\mathbf{BC}\times\mathbb{N}^2$, т. е. пересечениями $\varSigma^1_1(p)$-множеств с $\mathbf{BC}\times\mathbb{N}^2$.*

Доказательство. Рассмотрим систему μ-аппроксимации $c, k \mapsto S_k^c, T_k^c$, даваемую леммой 11.4.5. Если $c \in \mathbf{BC}$, то условие $\mu(\boldsymbol{B}_c) < r$ равносильно тому, что найдется число k, для которого $\mu([T_k^c]) > 1 - r$. Поэтому

$$\langle c, r\rangle \in C_<(\mu) \Longleftrightarrow c \in \mathbf{BC} \wedge \exists\, k\, \forall\, T\, \big(\langle c, k, T\rangle \in B' \Longrightarrow \mu([T]) > 1 - r\big),$$

где $\Sigma_1^1(p)$-множество B' таково, как в лемме 11.4.5. Отсюда и следует результат. □

Следствие 11.4.8. *Пусть $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и μ — вероятностная мера класса $\Delta_1^1(p)$ на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Если множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит классу $\Delta_1^1(p)$, и $r \in \mathbb{Q}$, то множество $D_< = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \mu((P)_x) < r\}$ и аналогично определяемые множества $D_\leq$, $D_>$, $D_\geq$ принадлежат этому же классу $\Delta_1^1(p)$.*

Доказательство. Следствиt 9.7.3 приносит такую $\Delta_1^1(p)$-функцию $f \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{BC}$, что $(P)_x = \boldsymbol{B}_{f(x)}$ для всех $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда $\Sigma_1^1(p)$-множество $R = \{f(x) : x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ включено в $\Delta_1^1(p)$-множество $\mathbf{BC}$. По теореме отделимости имеется $\Delta_1^1(p)$-множество U, для которого $R \subseteq U \subseteq \mathbf{BC}$. Согласно следствию 11.4.7, $U' = \{c \in U : \mu(\boldsymbol{B}_c) < r\}$ всё еще является $\Delta_1^1(p)$-множеством. Но $D_< = \{x : f(x) \in U'\}$, а класс $\Delta_1^1(p)$ замкнут относительно $\Delta_1^1(p)$-прообразов. □

Теперь приведем следствие для проективных классов. Понятно, что любая вероятностная мера на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит одному из классов $\Delta_1^1(p)$, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Поэтому из теоремы 11.4.3 и следствий 11.4.7, 11.4.8 вытекает такой результат.

Следствие 11.4.9. *Пусть μ — вероятностная мера на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда множества $C_<(\mu)$ и др. из следствия 11.4.7 принадлежат классу $\mathbf{\Pi}_1^1$ и являются $\mathbf{\Sigma}_1^1$-множествами на множестве $\mathbf{BC} \times \mathbb{N}^2$. Кроме того, для любого* ***борелевского*** *множества $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ выполняются следующие утверждения*:

(i) *если все непустые сечения $(P)_x$ — множества ненулевой μ-меры, то проекция $\mathtt{pr}\, P$ есть борелевское множество, а само P допускает униформизацию борелевским множеством*;

(ii) *множества $D_<$ и др. из 11.4.8 также борелевские.* □

Замечание 11.4.10. Утверждения (i) и (ii) следствия 11.4.9 имеют место для любого борелевского множества $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, где $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ — произвольные несчетные польские пространства, и любой вероятностной меры на $\mathbb{Y}$. В самом деле, достаточно просто воспользоваться борелевской изоморфностью $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ с пространством $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ по теореме 2.6.2.

Упражнение 11.4.11. Докажите, что следствие 11.4.9 в обобщенной форме из замечания 11.4.10 имеет место для любой конечной борелевской меры μ (что элементарно) и даже для σ-конечных мер μ на $\mathbb{Y}$. В последнем случае пространство $\mathbb{Y}$ следует разбить на счетное число борелевских множеств конечной меры и свести задачу к конечным борелевским мерам на этих множествах. На самом деле здесь всё не совсем просто, в частности, придется ссылаться на некоторые теоремы из §11.1.

§11.5 Большие сечения (категория)

Мера и категория известны в математике как понятия, находящиеся в отношениях определенной двойственности. Именно, некоторые теоремы о мерах допускают похожие аналоги для категории, в которых множества меры 0 заменяются тощими множествами, а множества полной меры — соответственно, котощими. Разумеется, о полной двойственности речи не идет, поскольку действительно хорошей аналогии для множеств промежуточной меры подобрать не удается. Всё же для некоторых результатов §11.4 существуют аналоги в терминах категории, такие, как следующая теорема.

Теорема 11.5.1. *Допустим, что $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\Delta^1_1(p)$-множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ обладает тем свойством, что все непустые сечения $(P)_x$ суть нетощие множества. Тогда проекция $\mathtt{pr}\, P$ есть множество из $\Delta^1_1(p)$ и, кроме того, P допускает униформизацию множеством класса $\Delta^1_1(p)$.*

Как и для случая меры, эта теорема вытекает из следующей.

Теорема 11.5.2. *Если $\Delta^1_1(p)$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не является тощим, то оно содержит точку из $\Delta^1_1(p)$.*

Доказательство. Для случая меры главным моментом доказательства была аппроксимация борелевских множеств компактными. Для случая категории аппроксимирующие множества носят несколько более сложную природу. Напомним, что множество X имеет свойство Бэра, если оно совпадает с некоторым открытым в данном пространстве множеством U с точностью до тощего множества. Другими словами, требуется, чтобы симметрическая разность $X \bigtriangleup U$ накрывалась счетным объединением нигде не плотных замкнутых множеств. Это приводит нас к такому определению.

Определение 11.5.3. *Кодом K-аппроксимации* (K от слова «категория») называется любая пара вида $a = \langle E, \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$, где

$E \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, а каждое T_n является непустым деревом в $\mathbb{N}^{<\omega}$ без концевых вершин, *нигде не плотным* в том смысле, что если $s \in T_n$, то найдется такой кортеж $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, что $s \subset t \notin T_n$ (тогда множество $[T_n]$, очевидно, нигде не плотно в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$).

Множество всех кодов К-аппроксимаций обозначим через $\mathbf{KA}$.

Если $a = \langle E, \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle \in \mathbf{KA}$, то положим $U_a = \bigcup_{s\in E}[s]$ (открытое множество в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$), $F_{cn} = [T_n]$ (замкнутое нигде не плотное множество) и $F_c = \bigcup_n F_{cn}$ (тощее множество класса $\mathbf{F}_\sigma$). Скажем, что a *аппроксимирует* некоторое множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, если $U_a \bigtriangleup X \subseteq F_a$.

Таким образом, коды из $\mathbf{KA}$ являются точками польского пространства $\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \times (\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega}))^{\mathbb{N}}$, которое отождествляется с $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \times (\mathscr{P}(\mathbb{N}))^{\mathbb{N}}$ посредством биекции $n \mapsto \mathbf{s}_n$, далее, с $2^{\mathbb{N}} \times (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ через характеристические функции подмножеств $\mathbb{N}$, с $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ при помощи биекции $x \mapsto \{(x)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (см. определение 6.1.1 (iv)) — а это пространство является замкнутым множеством в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Это отождествление позволяет переносить обозначения типа $\varDelta^1_1$ и т. п., связанные с иерархиями, на точки и множества в исходном пространстве $\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \times (\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega}))^{\mathbb{N}}$.

Упражнение 11.5.4. Докажите, что $\mathbf{KA}$ — борелевское множество в этом пространстве.

Следующее утверждение показывает, в каком направлении нам нужно работать для доказательства теоремы 11.5.2

Лемма 11.5.5. *Если $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, код $a \in \mathbf{KA}$ аппроксимирует множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $U_a \neq \varnothing$ и $a \in \varDelta^1_1(p)$, то X содержит точку из $\varDelta^1_1(p)$.*

Доказательство (лемма). Пусть $a = \langle E, \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$. Достаточно доказать, что разность $U_a \smallsetminus F_a$ содержит точку из $\varDelta^1_1(p)$. Поскольку $U_a \neq \varnothing$, найдется кортеж $s \in E$. Используя нигде не плотность деревьев F_n, мы строим последовательность $s \subset s_0 \subset s_1 \subset s_2 \subset \ldots$, где $s_n \in \mathbb{N}^{<\omega}$, но $s_n \notin F_n$ для всех n, причем на каждом шаге в качестве s_{n+1} берем просто кортеж $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ наименьшей длины, удовлетворяющий условию $s_n \subset s \notin F_{n+1}$, а если таких s несколько — то лексикографически самый левый из них. $\square$ (лемма)

Назовем *системой К-аппроксимации* любое такое отображение $c \mapsto a^c$ из множества борелевских кодов $\mathbf{BC}$ в $\mathbf{KA}$, что a^c аппроксимирует $\boldsymbol{B}_c$ в смысле определения 11.5.3. Доказывается следующий аналог леммы 11.4.5:

Лемма 11.5.6. *Существует такая система K-аппроксимации $c \mapsto a^c$, что множество $W = \{\langle c, a^c\rangle : c \in \mathbf{BC}\}$ принадлежит классу Π^1_1 и является Σ^1_1-множеством на* $\mathbf{BC}$, *т. е. пересечением Π^1_1-множества $\mathbf{BC} \times (\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \times (\mathscr{P}(\mathbb{N}^{<\omega}))^{\mathbb{N}})$ с подходящим Σ^1_1-множеством, скажем W'.*

Замечание 11.5.7. В условиях леммы 11.5.6 если $c \in \mathbf{BC}$, то a^c принадлежит классу $\Delta^1_1(c)$ (аналогично замечанию 11.4.6).

Вывод теоремы 11.5.2 из леммы 11.5.6 при помощи леммы 11.5.5 и замечания 11.5.7 совершенно аналогичен выводу теоремы 11.4.4 из леммы 11.4.5 в § 11.4.

$\square$ (теоремы 11.5.2 и 11.5.1 из леммы 11.5.6)

Доказательство (лемма 11.5.6)**.** Пусть $c = \langle T_c, F_c\rangle \in \mathbf{BC}$. Чтобы определить a^c, мы строим K-аппроксимации

$$a^c(t) = \langle E_c(t), \{F_{cn}(t)\}_{t \in T_c}\rangle \in \mathbf{KA},$$

где $t \in T_c$, для соответствующих борелевских множеств $\boldsymbol{B}_c(t)$ согласно следующим правилам.

1. Если $t \in \mathtt{Max}\, T$, то по определению $\boldsymbol{B}_c(t)$ есть бэровский интервал $[s]$, где $s = F_c(t)$, так что достаточно определить $E_c(t) = \{s\}$ и $F_{cn}(t) = \varnothing$ для всех n, и тогда $U_{a^c(t)} = [s]$ и $F_{a^c(t)} = \varnothing$.

2. Пусть $t \in T \smallsetminus \mathtt{Max}\, T$, так что $\boldsymbol{B}_c(t) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \bigcup_{n \in N(t)} \boldsymbol{B}_c(t^\wedge n)$, где $N(t) = \{n : t^\wedge n \in T\}$. Определим $E_c(t)$ как множество всех таких кортежей $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, что $[s]$ не пересекается ни с одним бэровским интервалом $[u]$, где $u \in \bigcup_{n \in N(t)} E_c(t^\wedge n)$; тогда множество $U_{a^c(t)} = \bigcup_{s \in E_c(t)} [s]$ есть внутренность замкнутого дополнения к открытому множеству $\bigcup_{n \in N(t)} U_{a^c(t^\wedge n)}$. Далее, определим $F_{cn}(t) = F_{cm}(t^\wedge k)$ в случае, когда $m \in N(t)$, $n = 2^m(2k+1) - 1$ и $F_{cn}(t) = \varnothing$ для всех прочих n — этим обеспечивается равенство $F_{a^c(t)} = \bigcup_{n \in N(t)} F_{a^c(t^\wedge n)}$.

Понятно, что код $a^c(t)$ аппроксимирует множество $\boldsymbol{B}_c(t)$ при любом $t \in T_c$. В частности, положив $a^c = a^c(\Lambda)$, получаем, что $a^c \in \mathbf{KA}$ и a^c аппроксимирует множество $\boldsymbol{B}_c$, каков бы ни был борелевский код $c \in \mathbf{BC}$. Наконец, определимость всего отображения, требуемая в лемме 11.5.6, легко проверяется тем же методом, что и в доказательстве леммы 11.5.6; мы это оставим читателю.

$\square$ (лемма 11.5.6 и теоремы 11.5.1 и 11.5.2)

Несколько следствий, приведенных ниже, аналогичны результатам для меры.

Следствие 11.5.8. *Множества*

$$\begin{aligned}
C^+_{\smallsetminus} &= \{\langle c,s\rangle \in \mathbf{BC}\times\mathbb{N}^{<\omega} : [s]\smallsetminus \boldsymbol{B}_c \text{— тощее множество}\}\,;\\
C^-_{\smallsetminus} &= \{\langle c,s\rangle \in \mathbf{BC}\times\mathbb{N}^{<\omega} : [s]\smallsetminus \boldsymbol{B}_c \text{— не тощее множество}\}\,;\\
C^+_{\cap} &= \{\langle c,s\rangle \in \mathbf{BC}\times\mathbb{N}^{<\omega} : [s]\cap \boldsymbol{B}_c \text{— тощее множество}\}\,;\\
C^-_{\cap} &= \{\langle c,s\rangle \in \mathbf{BC}\times\mathbb{N}^{<\omega} : [s]\cap \boldsymbol{B}_c \text{— не тощее множество}\}
\end{aligned}$$

принадлежат классу Π^1_1, а потому, в силу дополнительности в парах, являются и Σ^1_1-множествами на Π^1_1-множестве $\mathbf{BC}\times\mathbb{N}^{<\omega}$, т. е. пересечениями некоторых Σ^1_1-множеств с $\mathbf{BC}\times\mathbb{N}^{<\omega}$.

Доказательство. Рассмотрим систему K-аппроксимации $c \mapsto a^c$, даваемую леммой 11.5.6. Если $c \in \mathbf{BC}$, то условие $\langle c,s\rangle \in C^+_{\smallsetminus}$ равносильно тому, что открытое множество U_{a^c} плотно в $[s]$. Отсюда и следует результат; см. доказательство следствия 11.5.8. □

Следствие 11.5.9. *Если множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит классу $\Delta^1_1(p)$, то этому же классу $\Delta^1_1(p)$ принадлежат множества*

$$\begin{aligned}
H^+_{\smallsetminus} &= \{\langle x,s\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{<\omega} : [s]\smallsetminus (P)_x \ \text{— \textit{тощее множество}}\}\,;\\
H^-_{\smallsetminus} &= \{\langle x,s\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{<\omega} : [s]\smallsetminus (P)_x \ \text{— \textit{не тощее множество}}\}\,;\\
H^+_{\cap} &= \{\langle x,s\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{<\omega} : [s]\cap (P)_x \ \text{— \textit{тощее множество}}\}\,;\\
H^-_{\cap} &= \{\langle x,s\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{<\omega} : [s]\cap (P)_x \ \text{— \textit{не тощее множество}}\}\,.
\end{aligned}$$

Доказательство. Выводится из предыдущего следствия подобно доказательству следствия 11.4.8 для меры. □

Теперь приведем следствие для проективных классов.

Следствие 11.5.10. *Множества $C^+_{\smallsetminus}$ и др. из следствия 11.5.8 принадлежат классу $\mathbf{\Pi}^1_1$ и являются $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множествами на $\mathbf{BC}\times\mathbb{N}^{<\omega}$. Кроме того, для любого борелевского множества $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ выполнены следующие утверждения*:

(i) *если ни одно из непустых сечений $(P)_x$ не является тощим множеством, то проекция $\mathtt{pr}\,P$ есть борелевское множество, а само P униформизуется борелевским множеством*;

(ii) *множества $H^+_{\smallsetminus}$ и др. из 11.5.9 также борелевские.* □

Замечание 11.5.11. Утверждения (i) и (ii) следствия 11.5.10 имеют место для любого борелевского множества $P \subseteq \mathbb{X}\times\mathbb{Y}$, где $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ — произвольные несчетные польские пространства.

В отличие от случая меры, борелевская изоморфность пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ с пространством $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не решает проблемы: борелевские изоморфизмы не обязательно сохраняют понятия, связанные с категорией. Однако по теореме 1.6.4 любое несчетное польское пространство $\mathbb{X}$ содержит плотное $\mathbf{G}_\delta$-множество $U \subseteq \mathbb{X}$, гомеоморфное бэровскому пространству. Дополнение $\mathbb{X} \smallsetminus U$ такого множества является тощим в $\mathbb{X}$, т. е. с точки зрения рассматриваемых вопросов им можно пренебречь. Отсюда и следует упомянутое обобщение.

Закончим еще одним замечанием, точнее указанием на особую форму следствия 11.5.10 (ii). Пусть $P(x, y)$ — формула с двумя переменными либо просто бинарное отношение на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. *Квантор Воота* $\mathsf{W}y$ читается следующим образом: «для почти всех в смысле категории точек y», а формула $\mathsf{W}y\, P(x, y)$ (с одной свободной переменной x) понимается так: множество $\{y : P(x, y)\}$ котощее в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Следствие 11.5.12 (из следствий 11.5.9 и 11.5.10)**.** *Классы $\varDelta^1_1(p)$ и $\mathbf{\Delta}^1_1$ замкнуты относительно квантора Воота.* □

§ 11.6 Сечения из определенного борелевского класса

Мы видели, что любое борелевское множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, все сечения $(P)_x = \{y : \langle x, y\rangle \in P\}$ $(x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ которого счетны, есть счетное объединение борелевских множеств с одноэлементными сечениями, т. е. однозначных. Этот результат можно сопоставить с тем очевидным фактом, что каждое счетное множество есть счетное объединение одноэлементных множеств, в том смысле, что первый результат есть «одновременная» реализация второго сразу для всех сечений данного борелевского множества, где под одновременностью понимается то, что совокупный результат есть счетное семейство снова борелевских, а не любых множеств. Теперь вспомним, что по определению любое борелевское множество класса $\mathbf{\Sigma}^0_\lambda$ $(2 \le \lambda < \omega_1)$ есть счетное объединение множеств низших классов. Следующая теорема приносит соответствующую форму и для этого факта.

Теорема 11.6.1 (Луво, [74])**.** *Предположим, что $1 \le \lambda < \omega_1$ и все сечения $(P)_x$ борелевского множества $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежат классу $\mathbf{\Sigma}^0_\lambda$. Тогда найдется последовательность борелевских множеств P_n, для которой $P = \bigcup_n P_n$ и все сечения $(P_n)_x$ суть множества из $\mathbf{\Pi}^0_{<\lambda} = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathbf{\Pi}^0_\xi$.*

Мы получим эт теорему как следствие другой теоремы (теорема 11.6.3 ниже), которая имеет дело с кодами борелевских множеств, в смысле кодировки борелевских множеств из § 9.5. Напомним, что для всякого ординала $\xi < \omega_1$ была определена совокупность $\boldsymbol{\pi}_\xi$ *кодов* $c = \langle T, F \rangle$ для $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств $\boldsymbol{B}_c$. Теперь для каждого параметра $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ положим $\pi_\xi(p) = \boldsymbol{\pi}_\xi \cap \Delta^1_1(p)$, т. е. $\pi_\xi(p)$ состоит из всех тех кодов $c \in \boldsymbol{\pi}_\xi$, которые сами являются точками класса $\Delta^1_1(p)$.

Через $\Pi^*_\xi(p)$ обозначим совокупность всех множеств вида $\boldsymbol{B}_c$, $c \in \pi_\xi(p)$, а через $\Sigma^*_\xi(p)$ — совокупность всех дополнительных множеств. Как обычно, в случае, когда параметр p отсутствует, употребляем обозначения π_ξ, Π^*_ξ. Например, Π^*_0 состоит из всех бэровских интервалов $[s]$, $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, а Σ^*_0 — из всех дополнений бэровских интервалов.

Упражнение 11.6.2. Докажите, что если $c \in \pi_\xi(p)$, то кодируемое множество $\boldsymbol{B}_c$ принадлежит классам $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ и $\Delta^1_1(p)$.

При некоторых необременительных условиях имеет место и обратное.

Теорема 11.6.3 (Луво). *Если $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, $1 \le \lambda < \omega_1$ и совокупности кодов $\boldsymbol{\pi}_\xi$ и $\boldsymbol{\pi}_{<\xi}$, где $\xi \le \lambda$, все принадлежат $\Delta^1_1(p)$, то каждое множество $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ из $\mathbf{\Pi}^0_\lambda \cap \Delta^1_1(p)$ принадлежит $\Pi^*_\lambda(p)$. В этих же условиях если $X, Y \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ — непересекающиеся $\Sigma^1_1(p)$-множества и X отделимо от Y $\mathbf{\Pi}^0_\lambda$-множеством, то X отделимо от Y и множеством класса $\Pi^*_\lambda(p)$.*

Эту теорему можно понимать в том смысле, что при выполнении определенных условий если мы знаем, что данное $\mathbf{\Pi}^0_\lambda$-множество к тому же и «эффективно», т. е. принадлежит классу Δ^1_1, то мы можем найти код $\mathbf{\Pi}^0_\lambda$-построения этого множества, который также эффективен. Из второго, более сильного утверждения об отделимости следует первое: достаточно взять $Y = \mathbb{N}^\mathbb{N} \smallsetminus X$.

Покажем, как теорема 11.6.1 следует из второй теоремы. Будет удобнее рассмотреть $\mathbf{\Pi}^0_\lambda$-множество P и вывести его представимость в двойственном виде $P = (\mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}) \smallsetminus \bigcup_n P_n$, где все сечения $(P_n)_x$ суть множества из $\mathbf{\Sigma}^0_{<\lambda} = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathbf{\Sigma}^0_\xi$. Зафиксируем такой параметр $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, что как данное множество P, так и все множества вида $\boldsymbol{\pi}_\xi$ и $\boldsymbol{\pi}_{<\xi}$, где $\xi \le \lambda$, принадлежат $\Delta^1_1(p)$. (См. упражнение 9.5.5 (2).) Тогда каждое сечение $(P)_x$ принадлежит $\mathbf{\Pi}^0_\lambda \cap \Delta^1_1(p, x)$. Согласно теореме 11.6.3 найдется код $c \in \pi_\lambda(p, x) = \boldsymbol{\pi}_\lambda \cap \Delta^1_1(p, x)$, для которого $(P)_x = \boldsymbol{B}_c$. Мы заключаем, что множество

$$U = \{\langle x, c \rangle : c \in \pi_\lambda(p, x) \wedge \boldsymbol{B}_c = (P)_x\}$$

удовлетворяет условию $\mathtt{dom}\, U = \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Однако $U \in \Pi^1_1(p)$ согласно теореме 9.5.6 и выбору p. Значит, по теореме униформизации 9.3.1 (iii) найдется такая $\varDelta^1_1(p)$-функция H, что $U(x,H(x))$ для всех $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. В частности, H — борелевская функция, причем $H(x) \in \boldsymbol{\pi}_\lambda$ и $\boldsymbol{B}_{H(x)} = (P)_x$ для каждого x.

Согласно определению множества $\boldsymbol{\pi}_\lambda$ в этом случае можно задать последовательность борелевских функций F_n $(n \in \mathbb{N})$ так, чтобы выполнялись условия

$$F_n(x) \in \boldsymbol{\pi}_{<\lambda} \quad \text{и} \quad (P)_x = \boldsymbol{B}_{F(x)} = (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \smallsetminus \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{B}_{F_n(x)}$$

для каждого x. Теперь остается положить $P_n = \{\langle x,y\rangle : y \in \boldsymbol{B}_{F_n(x)}\}$, и этим вывод теоремы 11.6.1 из теоремы 11.6.3 закончен.

Перед тем как начать доказательство теоремы 11.6.3, приведем еще одно ее следствие. Сначала поясним мотивировку. Если код $c \in \mathbf{BC}$ принадлежит π_ξ, то кодируемое множество $\boldsymbol{B}_c$ имеет класс $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ согласно результату 9.5.5. Однако легко видеть, что в класс $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ попадают и множества вида $\boldsymbol{B}_c$ с кодами c из π_λ и с гораздо более высокими индексами. Поэтому возникает проблема оценки множества всех таких кодов c, что кодируемое множество $\boldsymbol{B}_c$ принадлежит данному классу $\mathbf{\Pi}^0_\xi$.

Следствие 11.6.4. *Если $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $1 \le \lambda < \omega_1$ и совокупности кодов $\boldsymbol{\pi}_\xi$ и $\boldsymbol{\pi}_{<\xi}$, $\xi \le \lambda$, все принадлежат $\varDelta^1_1(p)$, то множество $\{c \in \mathbf{BC} : \boldsymbol{B}_c \in \mathbf{\Pi}^0_\lambda\}$ всех борелевских кодов $\mathbf{\Pi}^0_\lambda$-множеств принадлежит классу $\varPi^1_1(p)$.*

Доказательство (следствие)**.** При любом $c \in \mathbf{BC}$ множество $\boldsymbol{B}_c$ принадлежит классу $\varDelta^1_1(c)$ согласно теореме 9.5.6. Поэтому если $\boldsymbol{B}_c \in \mathbf{\Pi}^0_\lambda$ то по теореме 11.6.3 получаем $\boldsymbol{B}_c = \boldsymbol{B}_{c'}$ для какого-то $c' \in \pi_\lambda(p,c) = \boldsymbol{\pi}_\lambda \cap \varDelta^1_1(p,c)$. Значит,

$$\boldsymbol{B}_c \in \mathbf{\Pi}^0_\lambda \iff \exists\, c' \in \varDelta^1_1(p,c)\ (c' \in \boldsymbol{\pi}_\lambda \wedge \boldsymbol{B}_c = \boldsymbol{B}_{c'})\,.$$

Равенство $\boldsymbol{B}_c = \boldsymbol{B}_{c'}$ выражается $\varPi^1_1$-формулой согласно теореме 9.5.6; затем ссылаемся на следствие 9.2.5. □

§11.7 Доказательство теоремы Луво

Этот параграф содержит доказательство теоремы 11.6.3. Как обычно в подобных случаях, теорема доказывается для случая, когда параметр p отсутствует, т. е. для классов $\varDelta^1_1$, $\varSigma^1_1$, $\varPi^*_\lambda$. Ординал λ остается фиксированным в ходе доказательства. Мы начинаем с леммы о том, что классы $\varPi^*_\xi$ мультипликативны относительно некоторого класса *определимых* счетных пересечений. В силу достаточно простых причин классы $\varPi^*_\xi$ не могут быть мультипликативными относительно *всех* счетных пересечений.

Лемма 11.7.1. *Пусть* $1 \le \xi \le \lambda$ *и* $C \subseteq \pi_\xi$ *есть* Δ^1_1*-множество. Тогда множество* $X = \bigcap_{c\in C} \boldsymbol{B}_c$ *принадлежит классу* Π^*_ξ.

Доказательство. Найдем для X код в π_ξ. Из 11.2.2 следует, что $C = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$, где $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является Δ^1_1-последовательностью кодов $c_n = \langle T_n, F_n\rangle$ из π_λ. Предположим для простоты, что $c_n \notin \boldsymbol{\pi}_0$ для всех n, т. е. $T_n \ne \varnothing$. Определим код $c = \langle T, F\rangle \in \mathbf{BC}$ так, чтобы выполнялось условие $T = \{\Lambda\} \cup \{\ulcorner nm\urcorner{}^\wedge t : m^\wedge t \in T_n\}$, где для краткости $\ulcorner nm\urcorner = 2^n(2m+1)-1$ и соответственно $F(\ulcorner nm\urcorner{}^\wedge t) = F_n(m^\wedge t)$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что $c \in \Delta^1_1$ и $c \in \boldsymbol{\pi}_\xi$, а значит, $c \in \pi_\xi$. Наконец, $\boldsymbol{B}_c = \bigcap_n \boldsymbol{B}_{c_n} = X$. □

Продолжая доказательство теоремы 11.6.3, определим класс $\Pi^\dagger_\xi$, для $1 \le \xi \le \lambda$, как семейство всех множеств вида $\bigcap_{c\in C} \boldsymbol{B}_c$, где $C \subseteq \pi_\xi$ принадлежит классу Π^1_1. Отдельно для $\xi = 0$ будем считать, что $\Pi^\dagger_0$ состоит из всех бэровских интервалов. Определим $\Sigma^\dagger_\xi$ как семейство всех множеств, дополнительных к множествам из $\Pi^\dagger_\xi$.

Очевидно, что $\Pi^*_\xi \subseteq \Pi^\dagger_\xi$ и $\Sigma^*_\xi \subseteq \Sigma^\dagger_\xi$.

Лемма 11.7.2. *Если* $\xi \le \lambda$, *то* $\Pi^\dagger_\xi \subseteq \Sigma^1_1$ *и соответственно* $\Sigma^\dagger_\xi \subseteq \Pi^1_1$.

Доказательство. Пусть $X = \bigcap_{c\in C} \boldsymbol{B}_c$, где множество $C \subseteq \pi_\xi$ принадлежит классу Π^1_1. Тогда

$$x \in X \iff \exists c\,(c \in C \wedge x \in \boldsymbol{B}_c) \iff \exists c \in \Delta^1_1\,(c \in C \wedge x \in \boldsymbol{B}_c)\,,$$

и по теореме 9.5.6 и следствию 9.2.5 самая правая часть этой формулы дает принадлежность к классу Π^1_1. □

Лемма 11.7.3. *Если* $\xi \le \lambda$ *и* $\Pi^\dagger_\xi$*-множество* X *не пересекается с* Σ^1_1*-множеством* Z, *то найдется* Π^*_ξ*-множество* X', *отделяющее* X *от* Z.

Доказательство. По определению $X = \bigcap_{c\in A} \boldsymbol{B}_c$, где $A \subseteq \pi_\xi$ есть Π^1_1-множество. Множество $P = \{\langle x, c\rangle : c \in A \wedge x \notin \boldsymbol{B}_c\}$ принадлежит классу Π^1_1 согласно теореме 9.5.6, и $Z \subseteq \mathtt{pr}\, P$. Следовательно, по теореме униформизации найдется однозначное Π^1_1-множество $Q \subseteq P$, которое униформизует P. Но тогда множество $C = \{c : \exists x \in Z\, Q(x, c)\}$ принадлежит классу Σ^1_1: в самом деле,

$$c \in C \iff \exists x \in Z\, \forall c' \in \Delta^1_1\, \bigl(c' \ne c \Longrightarrow \neg\, Q(x, c')\bigr)\,,$$

и остается воспользоваться следствием 9.2.5. При этом, очевидно, $C \subseteq A$. По теореме отделимости получаем Δ^1_1-множество B, для которого $C \subseteq B \subseteq A$. Тогда множество $X' = \bigcap_{c \in B} \boldsymbol{B}_c$ принадлежит $\varPi^*_\xi$ согласно лемме 11.7.1, включает все точки X, но не имеет общих точек с Z. Действительно, если $x \in Z$ то найдется такая точка c, что $Q(x, c)$; тогда $c \in C$, и потому $c \in B$. Но по выбору Q мы получаем, что $x \notin \boldsymbol{B}_c$, т. е. $x \notin X'$. □

После этих приготовлений получим результат, который обеспечит индуктивный шаг леммы 11.6.3. Пусть τ — топология Ганди—Харрингтона. Множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ называются *τ-почти равными*, если симметрическая разность $X \bigtriangleup Y$ является тощим множеством в смысле τ.

Лемма 11.7.4. *Если $1 \le \rho \le \lambda$, то каждое $\mathbf{\Pi}^0_\rho$-множество τ-почти равно некоторому (счетному) пересечению множеств из $\varSigma^\dagger_{<\rho} = \bigcup_{\xi<\rho} \varSigma^\dagger_\xi$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по ρ.

Рассмотрим какое-нибудь $\mathbf{\Pi}^0_\rho$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$, т. е. счетное пересечение множеств из $\mathbf{\Sigma}^0_{<\rho}$. По смыслу доказываемого предложения можно считать, что X само принадлежит классу $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ для какого-то ординала $\xi < \rho$ либо, в случае, когда $\rho = 1$ и $\xi = 0$, $X = \mathbb{N}^\mathbb{N} \smallsetminus [s]$ есть дополнение бэровского интервала, т. е. само принадлежит классу $\varSigma^*_0$ — и это доказывает лемму для $\rho = 1$ (база индукции).

Поэтому считаем, что $\rho \ge 2$ и $\xi \ge 1$. Тогда по индуктивному предположению множество X τ-почти равно счетному объединению множеств из $\varPi^\dagger_{<\xi} = \bigcup_{\eta<\xi} \varPi^\dagger_\eta$. Значит, можно допустить, что X и есть такое счетное объединение.

Обозначим через $\widehat{X}$ пересечение всех $\varSigma^\dagger_\xi$-множеств, содержащих X. Поскольку $\varSigma^\dagger_\xi$ — счетный класс, для окончания доказательства леммы будет достаточно проверить, что разность $\widehat{X} \smallsetminus X$ является τ-нигде не плотным множеством. Итак, для произвольного непустого $\varSigma^1_1$-множества Z мы найдем непустое $\varSigma^1_1$-множество $Z' \subseteq Z$, не имеющее общих точек с $\widehat{X} \smallsetminus X$.

Случай 1: пересечение $Z \cap X$ непусто. Тогда по предположению об X существуют ординал $\eta < \xi$ и $\varPi^\dagger_\eta$-множество (бэровский интервал при $\eta = 0$) $Y \subseteq X$, также непусто пересекающее Z. Однако Y есть $\varSigma^1_1$ по лемме 11.7.2. Остается взять $Z' = Z \cap Y$.

Случай 2: $Z \cap X = \varnothing$. Мы покажем, что тогда и $Z \cap \widehat{X} = \varnothing$, т. е. можно взять просто $Z' = Z$. Согласно лемме 11.7.3 каждое $\varPi^\dagger_{<\xi}$-множество $Y \subseteq X$ отделимо от Z множеством класса $\varPi^*_{<\xi}$. (А при $\eta = 0$ классы $\varPi^\dagger_0$ и $\varPi^*_0$ по определению совпадают.) Таким образом,

$X \subseteq X'$, где X' есть объединение всех $\Pi^*_{<\xi}$-множеств, не пересекающих Z. Покажем, что $X' \in \Sigma^\dagger_\xi$; тогда мы получим $\widehat{X} \subseteq X'$ и, далее, $\widehat{X} \cap Z = \varnothing$, что и требовалось.

Заметим, что множество кодов $C = \{c \in \pi_{<\xi} : \boldsymbol{B}_c \cap Z = \varnothing\}$ принадлежит классу Π^1_1. В самом деле,

$$c \in C \iff c \in \Delta^1_1 \wedge c \in \boldsymbol{\pi}_{<\xi} \wedge \forall\, z\ (z \notin Z \vee z \notin \boldsymbol{B}_c)\,.$$

Отношение $c \in \Delta^1_1$ здесь выражается Π^1_1-формулой $\exists\, a \in \Delta^1_1\, (c = a)$ (см. следствие 9.2.5). Второй конъюнктивный член есть Π^1_1 по условию теоремы 11.6.3. Наконец, по теореме 9.5.6 и выбору Z последний член принадлежит тому же классу.

Напомним, что для каждого $c \in \mathbf{BC}$ код $\neg\, c \in \mathbf{BC}$ определен выше (см. упражнение 9.5.4) так, что $\boldsymbol{B}_{\neg\, c} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \boldsymbol{B}_c$ и если $c \in \pi_\eta$, то $\neg\, c \in \pi_{\eta+1}$. Поэтому множество $C^- = \{\neg\, c : c \in C\}$ удовлетворяет условию $C^- \subseteq \pi_\xi$. Далее, $X' = \bigcup_{c \in C} \boldsymbol{B}_c = \bigcup_{c' \in C^-} (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \boldsymbol{B}_{c'}) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus \bigcap_{c' \in C^-} \boldsymbol{B}_{c'}$. Чтобы убедиться, что $X' \in \Sigma^\dagger_\xi$, достаточно показать, что множество кодов C^- принадлежит классу Π^1_1, а это следует из того, что условие $c' \in C^-$ эквивалентно тому, что

$$c' \in \mathbf{BC} \wedge \forall\, c\, (c' = \neg\, c \Longrightarrow c \in C). \qquad \square$$

А теперь мы займемся непосредственно доказательством теоремы 11.6.3. Рассмотрим произвольные Σ^1_1-множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и предположим, что X отделяется от Y некоторым $\mathbf{\Pi}^0_\lambda$-множеством S, т. е. $X \subseteq S$, но $Y \cap S = \varnothing$; докажем, что тогда отделяющее множество имеется и в классе Π^*_λ.

Согласно лемме 11.7.4 множество S τ-почти равно счетному пересечению множеств из $\Sigma^\dagger_{<\lambda}$. Пусть U — одно из этих $\Sigma^\dagger_{<\lambda}$-множеств. Тогда разность $D = X \smallsetminus U \subseteq S \smallsetminus U$ есть τ-тощее множество. Но $U \in \Pi^1_1$ по лемме 11.7.2, а значит, $D \in \Sigma^1_1$. Однако топология Ганди—Харрингтона τ бэровская по теореме 10.2.3, т. е. открытое тощее множество обязательно пустое. Отсюда следует, что $X \subseteq U$. Используя лемму 11.7.3, находим $\Sigma^*_{<\lambda}$-множество V, для которого $X \subseteq V \subseteq U$.

Итак, мы приходим к выводу, что пересечение X^* всех $\Sigma^*_{<\lambda}$-множеств $V \supseteq X$ τ-почти равно X. Но X^* есть множество, дополнительное к множеству $\bigcup_{c \in C} \boldsymbol{B}_c$, где $C = \{c \in \pi_{<\lambda} : X \cap \boldsymbol{B}_c = \varnothing\}$. Аналогично последней части доказательства леммы 11.7.4 легко проверяется, что $C \in \Pi^1_1$ и $X^* \in \Pi^\dagger_\lambda$, так что из леммы 11.7.2 следует, что $X^* \in \Sigma^1_1$. Заметим, что множество $P = X^* \cap Y$ пусто: в самом деле, иначе $P \subseteq X^* \smallsetminus X$ было бы непустым τ-открытым множеством, и мы опять получили бы противоречие с теоремой 10.2.3. Применяя лемму 11.7.3 к X^* и Y, мы находим множество, отделяющее X^* (а тогда и исходное множество X) от Y, в классе Π^*_λ.

$\square$ (теоремы 11.6.3 и 11.6.1)

Глава 12

Некоторые дихотомические теоремы для отношений эквивалентности и отношений порядка

В основной части этой главе мы рассмотрим некоторые вопросы, связанные с отношениями эквивалентности на точечных множествах, точнее с мощностью соответствующих фактормножеств. Мы рассмотрим этот вопрос как в плане классических канторовых мощностей, так и в плане «борелевских мощностей», введенных выше в §5.5. В частности, будут доказаны две дихотомические теоремы. Первая из них утверждает, что фактормножество по $\mathbf{\Pi}^1_1$-отношению эквивалентности либо не более чем счетно, либо континуально, и более того, имеется совершенное множество попарно неэквивалентных точек. Вторая же теорема выявляет особую роль «борелевской мощности» фактормножества по отношению эквивалентности E_0 (которое весьма важно для ряда вопросов, см. например §5.7). В конце главы мы вкратце рассматриваем некоторые вопросы, связанные с $\mathbf{\Pi}^1_1$-отношениями эквивалентности, а также с борелевскими предпорядками.

§12.1 Первая дихотомическая теорема

Перед технической частью этого параграфа необходимо некоторое обсуждение, чтобы правильно представить смысл получаемых результатов. Напомним, что *континуум-гипотеза* **CH** Кантора — это утверждение о том, что нет ни одной мощности строго между счетной мощностью $\aleph_0$ и мощностью континуума $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ (которая строго больше $\aleph_0$). После работ Гёделя (1930-е годы) и Коэна (начало 1960-х годов) стало известно, что современная математика (по крайней мере настолько, насколько она базируется на теории множеств Цермело—Френкеля **ZFC**) не позволяет дать определенный ответ «да» или «нет» на вопрос, верна ли гипотеза **CH**.

Однако весьма плодотворным оказался подход, направленный на проверку гипотезы **CH** в определенных классах множеств. В частности, П. С. Александров (см. [36]) и Хаусдорф (см. [55]) доказали, что гипотеза **CH** верна в классе борелевских множеств вещественной прямой $\mathbb{R}$, или, что в данном случае эквивалентно, бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Иными словами, борелевское множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не может иметь мощности, промежуточной между $\aleph_0$ и $\mathfrak{c}$. Нет контрпримеров и в классе $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств — это теорема Суслина (см. [113]), утверждающая, что, более того, всякое несчетное $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество имеет совершенное подмножество. Такие множества, естественно, имеют мощность континуума. Однако уже в классе $\mathbf{\Pi}^1_1$ возможны контрпримеры, т. е. несчетные $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества мощности $\aleph_1$, не имеющие совершенных подмножеств. См. об этом главу 13, в особенности §13.3, а также нашу обзорную статью [11], в которой дан подробный анализ этого круга вопросов.

Есть, однако, и другой подход к изучению гипотезы **CH** в определенных классах точечных множеств, состоящий в том, что мы ищем контрпримеры не в виде *точечных множеств*, а в виде *фактормножеств*. Таким образом, исследуется вопрос, сколько классов эквивалентности может иметь отношение эквивалентности того или иного типа. Картина здесь получается отчасти похожая на то, что мы видим для множеств, однако с обращением, т. е. число классов эквивалентности $\mathbf{\Pi}^1_1$-отношения не может быть промежуточной мощностью, в то время как число классов эквивалентности $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношения — может (см. конец этого параграфа, предложение 12.8.1).

Вторая часть этого утверждения (о $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношениях) следует из сказанного выше о $\mathbf{\Pi}^1_1$-множествах. Первая же часть представляет собой весьма сложную теорему, для которой мы фактически не знаем ни одного доказательства в рамках классических методов дескриптивной теории множеств, и вообще в рамках топологии множеств польских пространств.

Теорема 12.1.1 (Сильвер [109]). *Пусть* E *— отношение эквивалентности класса* $\mathbf{\Pi}^1_1$ *на борелевском множестве* $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$*. Тогда выполнено одно из следующих двух утверждений*:

(I) *отношение* E *имеет не более чем счетное число классов эквивалентности*;

(II) *имеется совершенное множество* $Y \subseteq X$ *из попарно* E*-неэквивалентных точек.*

Заметим, что результат автоматически переносится на все польские пространства. В самом деле, каждое такое пространство допускает борелевский изоморфизм на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ согласно теореме 2.6.2. Этот изоморфизм, во-первых, сохраняет класс $\mathbf{\Pi}^1_1$, а во-вторых, в случае (II) переводит совершенное множество в борелевское, которое, в свою очередь, имеет совершенное подмножество по теореме 3.4.1.

Сама теорема 12.1.1 может быть сформулирована в терминах борелевской сводимости $\leqslant_{\mathrm{B}}$: если E есть $\mathbf{\Pi}^1_1$-отношение эквивалентности, то либо (I′) $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \aleph_0$ (т. е. по определению $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \Delta_C$ для некоторого счетного множества C), либо же (II′) $\Delta_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$.

В самом деле, допустим, что выполнено утверждение (I) теоремы. Пусть для простоты E имеет строго счетное число классов эквивалентности. Выберем в каждом из них по точке, и пусть $C = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \subseteq X$ — выбранное множество точек. Отображение, переводящее каждую точку $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в ту единственную точку $x_i \in C$, для которой $x \mathrel{\mathsf{E}} x_i$, подтверждает соотношение $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \Delta_C$, так что $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \aleph_0$. Обратное же утверждение, т. е. тот факт, что из (I′) следует (I), очевидно.

Теперь допустим, что выполнено утверждение (II) теоремы, т. е. пусть $Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — совершенное множество попарно E-неэквивалентных точек. Тогда любой борелевский изоморфизм $\vartheta\colon X \to Y$ осуществляет борелевскую редукцию $\Delta_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ к E[1], т. е. мы имеем утверждение (II′). Обратно, предположим, что выполнено утверждение (II′), т. е. $\Delta_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ посредством некоторой борелевской функции $\vartheta\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Эта функция, очевидно, взаимно однозначна, а потому ее образ $Y = \{\vartheta(a) : a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ есть несчетное борелевское множество попарно E-неэквивалентных точек. Оно содержит совершенное подмножество, что и доказывает утверждение (II) теоремы.

Замечание 12.1.2. Используя теорему 12.1.1, мы можем доказать предложение 5.6.2 (iii). Пусть E — борелевское отношение эквивалентности. Случай (I) теоремы 12.1.1 сразу приводит к тому, что

[1] Не составляет труда усилить результат требованием непрерывности и взаимной однозначности функции ϑ.

$\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \aleph_0$ или $\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \boldsymbol{n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, так что сразу предположим, что выполнено утверждение (II), т. е. пусть $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — совершенное множество попарно E-неэквивалентных точек. Любая борелевская инъекция $\vartheta \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ доказывает соотношение $\Delta_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$.

§ 12.2 Доказательство первой дихотомической теоремы

Известны несколько различных доказательств теоремы 12.1.1. Первое из них, весьма громоздкое и использующее метод вынуждения (форсинг), принадлежит самому Сильверу; оно и опубликовано в работе [109]. Другое доказательство с форсингом, в котором используется *форсинг Харрингтона* (он состоит их непустых Σ^1_1-множеств), приведено в книге Миллера [95] и, с некоторыми упрощениями, в книге В. Г. Кановея [64]. Наконец, имеется и чисто топологическое доказательство, в котором используется топология Ганди–Харрингтона и, следовательно, методы эффективной дескриптивной теории множеств. Его мы здесь и приводим, в варианте из статьи Мартина и Кехриса [89] и книги [87], также с некоторыми упрощениями. На самом деле во всех известные доказательствах этой теоремы используется достаточно похожая комбинаторная техника в разных модификациях.

Доказательство (теорема 12.1.1)**.** Прежде всего, согласно теореме 2.6.2, мы можем предполагать, что $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, т. е. E — отношение эквивалентности на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Идея. Предположим, что E имеет несчетно много классов эквивалентности; требуется доказать, что тогда существует совершенное множество попарно неэквивалентных точек. Допустим, что нам удалось найти такое непустое и открытое в *польской* топологии пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ множество $H \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что E является тощим множеством на $H \times H$ — другими словами, $\mathsf{E} \cap (H \times H) \subseteq \bigcup_n P_n$, где все множества $P_n \subseteq (H \times H)$ нигде не плотны. В этом случае мы легко строим систему $\{X_s\}_{s \in 2^{<\omega}}$ непустых открыто-замкнутых множеств $X_s \subseteq H$, для которых:

1) $X_{s^\wedge i} \subseteq X_s$ и $X_{s^\wedge 0} \cap X_{s^\wedge 1} = \varnothing$,

2) $(X_s \times X_t) \cap \bigcup_{m \le n} P_m = \varnothing$ при $s, t \in 2^n, s \neq t$, и

3) $\mathtt{diam}\, X_s \le m^{-1}$ при $s \in 2^m$,

где 2^n — совокупность всех кортежей чисел 0 и 1 длины n, $2^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} 2^n$, $s^\wedge i$ имеет очевидный смысл, а $\mathtt{diam}\, X$ обозначает диаметр множества X в польской метрике пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, введенной в § 1.3.

Тогда множество $X = \bigcap_n \bigcup_{s \in 2^n} X_s$ будет искомым совершенным множеством из попарно E-неэквивалентных точек.

К сожалению, мы не можем утверждать, что множество H указанного вида действительно существует в *польской* топологии. Это тот момент, когда в игру входит топология Ганди—Харрингтона $\top$. Здесь мы рекомендуем читателю освежить в памяти материал § 10.3, в частности, вспомнить введенные там обозначения $\top$, $\top_n$, $\top^n$ для топологий.

Продолжение доказательства содержит две технические части.

Техническая часть 1. Во-первых, поскольку $\mathsf{E} \in \mathbf{\Pi}^1_1$, найдется такое $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, что E является $\Pi^1_1(p)$-отношением. Как обычно в подобных случаях, мы будем для краткости записи считать, что параметр p отсутствует, т. е. отношение E принадлежит классу Π^1_1. Если это не так, то параметр p естественно включается в выкладки, т. е. топология Ганди—Харрингтона, порожденная непустыми Σ^1_1-множествами, уступает место релятивизованной топологии Ганди—Харрингтона, порожденной непустыми $\Sigma^1_1(p)$-множествами, и т. д.

Множество Харрингтона H определяется равенством

$$H = \{x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \text{нет такого } \Delta^1_1\text{-множества } B, \text{ что } x \in B \subseteq [x]\},$$

где $[x] = [x]_\mathsf{E} = \{y : x \mathsf{E} y\}$ есть класс E-эквивалентности точки x. Другими словами, H есть объединение всех Δ^1_1-множеств, состоящих из попарно E-эквивалентных точек. Как показывает следующая лемма, попарно E-эквивалентные множества более широкого класса Σ^1_1 также накрываются множеством H.

Лемма 12.2.1. *Если Σ^1_1-множество $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ состоит из попарно E-эквивалентных точек, то $X \subseteq H$.*

Доказательство. Считая, что X непусто, рассмотрим множество $Y = \{y \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \forall x\, (x \in X \Longrightarrow x \mathrel{\mathsf{E}} y\}$. Тогда Y есть Π^1_1-множество и $X \subseteq Y$. По теореме отделимости (следствие 8.1.2) найдется Δ^1_1-множество B, для которого $X \subseteq B \subseteq Y$. Но по определению B состоит из попарно E-эквивалентных точек, так что $B \subseteq H$. □

Возможен один из двух следующих случаев.

Случай 1: $H = \varnothing$, т. е. каждая точка $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ принадлежит некоторому Δ^1_1-множеству из попарно E-эквивалентных точек.

Случай 2: $H \neq \varnothing$.

Случай 1 прост: поскольку всего имеется счетное число различных Δ^1_1-множеств, мы заключаем, что в предположении, что $H = \varnothing$, отношение E имеет не более чем счетное число классов эквивалентности, т. е. утверждение (I) теоремы 12.1.1. В дальнейшем рассматривается только **случай 2**. Требуется доказать, что существует совершенное множество попарно E-неэквивалентных точек.

Мы покажем, что непустое по предположению множество H является $\top$-открытым, и, кроме того, E — тощее множество на $H \times H$ в смысле топологии произведения $\top^2$. Идея в сущности довольно проста: H получается удалением всех тех классов E-эквивалентности, которые открыты в топологии $\top$. Для польской топологии этот номер не пройдет: нет никакой гарантии того, что после удаления открытых классов останется открытое множество. Но в топологии Ганди—Харрингтона, как мы увидим, всё будет в порядке благодаря ее дескриптивным свойствам.

Лемма 12.2.2. *Множество H открыто в $\top$ и даже принадлежит классу Σ^1_1.*

Доказательство. В самом деле, по определению

$$x \in H \iff \forall B \in \Delta^1_1 \left(x \in B \Longrightarrow \exists y \in B \,(x \not\mathsf{E}\, y)\right). \qquad (1)$$

Чтобы привести правую часть к Σ^1_1-виду, воспользуемся тем перечислением Δ^1_1-множеств, которое дается теоремой 9.1.1. Пусть множества $E = \text{Cod}(\Delta^1_1) \subseteq \mathbb{N}$ и W, $W' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ таковы, как в теореме 9.1.1, в частности E, W являются Π^1_1-множествами, а W' есть Σ^1_1-множество. Тогда для любой точки $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеем $x \in H$, если и только если для каждого $e \in E$ выполняется условие

$$x \in (W)_e \Longrightarrow \exists y \in (W')_e \,(x \not\mathsf{E}\, y).$$

Левая часть этой импликации эквивалентна тому, что $\langle e, x\rangle \in W$, а потому выражает Π^1_1-отношение, а ее правую часть можно переписать в виде $\exists y\,(W'(e,y) \wedge x \not\mathsf{E}\, y)$, так что она представляет собой Σ^1_1-отношение. □

Лемма 12.2.3. *Множество E является тощим на $H \times H$ в смысле $\top^2$.*

Доказательство. Напомним, что E есть $\mathbf{\Pi}^1_1$-отношение, т. е. CA-множество в польской топологии, а следовательно, и в топологии $\top$. Отсюда следует, что E имеет свойство Бэра в смысле $\top$, так как свойство Бэра имеет место для A-множеств и CA-множеств по теореме 5.3.1 (которая справедлива не только для польских пространств). Таким образом, согласно теореме Улама—Куратовского, достаточно вывести, что множество-сечение $H_x = H \cap [x] = \{y \in H : x \mathsf{E} y\}$ тощее в смысле $\top$, какова бы ни была точка $x \in H$.

Как и выше, H_x имеет свойство Бэра в топологии $\top$. Значит, чтобы проверить, что H_x — тощее множество в смысле $\top$, достаточно установить, что H_x не является котощим ни на каком непустом Σ^1_1-множестве $D \subseteq H$.

Пусть, напротив, сечение H_x является котощим множеством в смысле $\top$, на некотором непустом Σ^1_1-множестве $U \subseteq H$. Тогда множество $D' = (H_x \cap U) \times (H_x \cap U)$ плотно в $U^2 = U \times U$ в смысле $\top_2$ по лемме 10.3.2. Таким образом, D' непусто пересекает любое непустое Σ^1_1-множество $P \subseteq U^2$. В частности, если множество $P = \{\langle y, z\rangle \in U^2 : y \not\mathsf{E}\, z\}$ непусто, то $P \cap D' \neq \varnothing$.

Допустим, что $\langle y, z\rangle \in P \cap D'$. Тогда обе точки y, z принадлежат H_x, т. е. мы имеем $y \,\mathsf{E}\, z$, а это противоречит предположению о том, что $\langle y, z\rangle \in P$. Следовательно, на самом деле P — пустое множество, откуда следует, что $U \subseteq [x]$, так что $U \subseteq H$ по лемме 12.2.1, и мы имеем противоречие. $\square$

Техническая часть 2. Модифицировав рассуждение для польской топологии, приведенное в начале доказательства теоремы, мы построим совершенное множество X попарно E-неэквивалентных точек. Модификация состоит в том, что вместо свойства полноты польской топологии пространства $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ будут использованы подходящие свойства топологии $\top$.

Пусть по лемме 12.2.3 выполнено условие $\mathsf{E} \cap (H \times H) \subseteq \bigcup_n P_n$, где каждое множество $P_n \subseteq (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$ нигде не плотно в топологии $\top^2$. Согласно теореме 10.2.3 топология $\top$ имеет польскую сеть; пусть это будет $\{\mathscr{X}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Не составит большого труда построить семейство Σ^1_1-множеств $X_s \subseteq H$, $(s \in 2^{<\omega})$ удовлетворяющее условиям 1, 2, 3 (см. выше) и следующему дополнительному требованию:

4) если $\mathtt{lh}\, s = m$ то $X_s \in \mathscr{X}_m$.

В этом случае при любом $a \in 2^\mathbb{N}$ последовательность множеств $X_{a\restriction m}$, $m \in \mathbb{N}$, имеет непустое пересечение, и, более того, согласно условию 3, это пересечение содержит ровно одну точку, скажем x_a. По построению если $a \neq a'$, то выполнено соотношение $\langle x_a, x_{a'}\rangle \notin P_m$ для всех m, так что $x_a \not\mathsf{E}\, x_{a'}$ и, в частности, $x_a \neq x_{a'}$. Следовательно, множество $X = \{x_a : a \in 2^\omega\}$ есть совершенное (даже гомеоморфное канторову дисконтинууму через отображение $a \mapsto x_a$) множество попарно E-неэквивалентных точек.

$\square$ (Теорема 12.1.1)

Упражнение 12.2.4. Вернувшись к разбиению на случаи и их анализу в доказательстве теоремы, докажите, что *если Π^1_1-отношение эквивалентности E имеет не более чем счетное число классов* *эквивалентности* (случай (I) теоремы)*, то каждый из классов эквивалентности включает непустое подмножество класса* Δ^1_1.

Можно было бы ожидать, что и в случае (II) теоремы указанное совершенное множество существует в классе Δ^1_1 (при условии, что само E является Π^1_1-отношением). Недавние еще не опубликованные исследования [47] показали, что такое уточнение, вообще говоря, невозможно.

Замечание 12.2.5. Дадим краткое описание конструкции множества попарно неэквивалентных точек из статьи [52], где для обеспечения непустоты пересечений вдоль каждого пути $a \in 2^{\mathbb{N}}$ используется игра Шоке. Выполняется построение двух семейств $\{U_s\}_{s \in 2^{<\omega}}$ и $\{V_s\}_{s \in 2^{<\omega}}$ непустых Σ^1_1-множеств в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которых, во-первых, семейство множеств U_s удовлетворяет требованиям 1, 2, 3 и, во-вторых, при любом $a \in 2^{\mathbb{N}}$ последовательность множеств

$$U_{a\restriction 0} = U_\Lambda,\ V_{a\restriction 0} = V_\Lambda,\ U_{a\restriction 1},\ V_{a\restriction 1},\ U_{a\restriction 2},\ V_{a\restriction 2},\ \dots ,U_{a\restriction n},\ V_{a\restriction n},\ \dots$$

отвечает фиксированной выигрывающей стратегии τ игрока II в игре[2] Шоке $C_{\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,;\,\top\rangle}$ для топологии $\top$; такая стратегия существует благодаря теореме 10.2.3. Тогда пересечение $X_a = \bigcap_n V_{a\restriction n}$ непусто, каково бы ни было $a \in 2^{\mathbb{N}}$; на самом деле благодаря условию 3, наложенному на диаметры, X_a содержит ровно одну точку x_a.

§ 12.3 Вторая дихотомическая теорема

Отношения эквивалентности допускают значительно более глубокий анализ, чем простая альтернатива «счетно много классов или совершенное множество попарно неэквивалентных точек», как в теореме 12.1.1. Этот анализ связан, однако, не с обычными канторовыми мощностями, а с «борелевскими мощностями», которые были определены в § 5.5 на основе понятий редукции и борелевской сводимости $\leqslant_{\mathrm{B}}$. Эти вопросы относятся скорее к компетенции *дескриптивной динамики* (о которой см. нашу монографию [13]). Однако здесь имеется несколько теорем, весьма сложные доказательства которых основаны на некоторых (также сложных) результатах дескриптивной теории множеств. Одну из таких теорем, называемую *второй дихотомической теоремой*, мы представим в этой главе после нескольких определений и замечаний более общего характера.

Напомним, что отношение эквивалентности E_0 определяется на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ так, что $a \mathrel{\mathsf{E}_0} b$, когда $a(n) = b(n)$ для всех, кроме конечного

[2] Формально это означает, что $V_{a\restriction n} = \tau(U_{a\restriction 0}, U_{a\restriction 0}, \dots, U_{a\restriction n})$ при любом n.

числа, значений n, см. § 5.6. Согласно следующей теореме Харрингтона, Кехриса и Луво [52], E_0 является $\leqslant_{\mathrm{B}}$-наименьшим среди всех негладких борелевских отношений эквивалентности.

Теорема 12.3.1. *Пусть E — борелевское отношение эквивалентности на (борелевском) множестве $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда имеет место одно из следующих двух утверждений* :

(I) E — *гладкое отношение (т. е. $\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \Delta_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$, см. § 5.6)*;

(II) $\mathsf{E}_0 \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, *причем даже посредством непрерывной и взаимно однозначной функции $f \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$.*

Утверждения (I) и (II) несовместимы согласно результату упражнения 5.6.4 (2), так что мы имеем здесь настоящую дихотомию. Эта дихотомия для борелевских отношений эквивалентности известна как *классификация Глимма—Эффроса*, по имени математиков, впервые получивших результат для отношений класса $\mathbf{F}_\sigma$. Отметим, что как утверждение (I) так и утверждение (II) имеют несколько эквивалентных форм и модификаций, относящихся к группам борелевских преобразований и теории меры, см. [52, 67].

Как и выше, теорема 12.3.1 распространяется на отношения эквивалентности в любом польском пространстве.

Упражнение 12.3.2. Выведите теорему 12.1.1 для *борелевских* отношений эквивалентности E из теоремы 12.3.1. Для этого сначала докажите теорему 12.1.1 для *гладких* отношений эквивалентности E, т. е. в случае (I) теоремы 12.3.1, используя теорему 3.4.1. Далее, взяв произвольное совершенное множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ из попарно E_0-неэквивалентных элементов, докажите, что та редукция, которая существует в предположении (II) теоремы 12.3.1, переводит X в совершенное множество из попарно E-неэквивалентных элементов.

Доказательство (теорема 12.3.1)**.** [3] Согласно теореме 2.6.2, можно считать, что область X данного борелевского отношения эквивалентности E совпадает с $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Понятно, что E является $\varDelta^1_1(p)$-отношением для некоторого параметра $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Как обычно в таких случаях, доказательство проводится для случая, когда E есть $\varDelta^1_1$-отношение, т. е. параметр p отсутствует. В общем случае параметр p равномерно входит в рассуждения, так что топология $\top$ меняется на топологию $\top(p)$, порожденную непустыми $\varSigma^1_1(p)$-множествами.

[3] Доказательство будет закончено в § 12.7. В целом мы следуем доказательству, данному в работе [52]. Некоторые теоретико-рекурсивные детали, впрочем, удалось исключить. Конструкция расщепляющейся системы множеств, опирающаяся в статье [52] на игру Шоке, заменена польской сетью.

Главным моментом доказательства является анализ взаимоотношений между данным отношением эквивалентности E и его замыканием $\overline{\mathsf{E}}$ в топологии $\top^2$ (которая, напомним, есть произведение двух копий топологии $\top$ Ганди—Харрингтона). Естественно, E рассматривается как множество пар, т. е. множество пространства $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$.

Возможно одно из двух.

Случай 1: $\mathsf{E} = \overline{\mathsf{E}}$, т. е. множество E просто замкнуто в $\top^2$.

Случай 2: $\mathsf{E} \subsetneqq \overline{\mathsf{E}}$.

Мы рассмотрим эти случаи по отдельности. Окажется (это более легкая часть), что в первом случае отношение E является гладким, а во втором случае E_0 сводится к E, как в утверждении (II).

§ 12.4 Случай замкнутого отношения

Итак, допустим, что $\mathsf{E} = \overline{\mathsf{E}}$.

Положим $[A]_{\mathsf{E}} = \{x : \exists y \in A\,(x \mathrel{\mathsf{E}} y)\}$ для множеств $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (E-*насыщение* множества A). Множество A называется E-*инвариантным*, если $A = [A]_{\mathsf{E}}$. Следующая лемма инвариантной отделимости пригодится для оценки дескриптивной сложности отношения $\overline{\mathsf{E}}$.

Лемма 12.4.1. *Если Σ^1_1-множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ являются E-инвариантными и удовлетворяют условию $[A]_{\mathsf{E}} \cap [B]_{\mathsf{E}} = \varnothing$, то существует E-инвариантное Δ^1_1-множество C, отделяющее множество X от Y.*

Доказательство. Насыщение $[A]_{\mathsf{E}} = \{x : \exists y\,(y \in A \wedge x \mathrel{\mathsf{E}} y)\}$ любого Σ^1_1-множества само является Σ^1_1-множеством. Используя этот факт и теорему отделимости 8.1.2, мы без труда строим последовательность множеств $X = A_0 \subseteq C_0 \subseteq A_1 \subseteq C_1 \subseteq \ldots$ так, что каждое C_n является Δ^1_1-множеством, отделяющим A_n от Y, а $A_{n+1} = [C_n]_{\mathsf{E}}$. Тогда всё еще $A_{n+1} \cap Y = \varnothing$ вследствие инвариантности множества Y. Объединение $C = \bigcup_n C_n$, очевидно, E-инвариантно и отделяет множество X от Y.

Проблема, однако, в том, что эффективный класс Δ^1_1 не замкнут относительно счетных пересечений, так что сразу не видно, почему C принадлежит классу Δ^1_1. (Очевидно лишь, что C — борелевское множество.) Здесь нужен более тонкий анализ. Именно, начнем с «хорошего» универсального Σ^1_1-множества $U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (теорема 6.7.7). По определению существует такая рекурсивная функция $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $[U_n]_{\mathsf{F}} = U_{h(n)}$ для всех n. (Как обычно, $U_n = \{x : \langle n, x\rangle \in U\}$.) Далее, применив лемму 8.2.3 к дополнению множества U как «хорошему» универсальному Π^1_1-множеству, с фиксированным кодом для множества $[B]_{\mathsf{E}}$, мы получим такую пару рекурсивных функций $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для каждого n выполняется следующее условие: если $U_n \cap [B]_{\mathsf{E}} = \varnothing$, то $U_{f(n)}, U_{g(n)}$ являются взаимно дополнительными Σ^1_1-множествами (значит, каждое из них есть множество класса Δ^1_1), которые включают соответственно U_n и $[B]_{\mathsf{E}}$. Подходящая итерация функций h и f, g позволяет определить такую последовательность $X = A_0 \subseteq C_0 \subseteq A_1 \subseteq C_1 \subseteq \dots$ как выше, причем достаточно эффективно для того, чтобы множество $C = \bigcup_n C_n$ принадлежало требуемому классу Δ^1_1. Более подробно об этом сказано в работе [52], лемма 5.1. □

Следствие 12.4.2. *Отношение $\overline{\mathsf{E}}$ есть гладкое (борелевское) отношение эквивалентности, а также отношение класса Σ^1_1.*

Доказательство. Согласно лемме 12.4.1 и по определению $\top$ мы имеем:

$$x \,\overline{\mathsf{E}}\, y \iff \forall C \in \Delta^1_1 \big(C \ \mathsf{E}\text{-инвариантно} \implies (x \in C \Longrightarrow y \in C)\big).$$

Тем самым, (счетное) семейство всех инвариантных Δ^1_1-множеств C является разделяющим для $\overline{\mathsf{E}}$, откуда и следует гладкость согласно упражнению 5.6.4. С другой стороны, правая часть выделенной эквивалентности приводится к Σ^1_1-виду таким же образом, как и в доказательстве леммы 12.2.2, при помощи теоремы 9.1.1. □

Итак, для случая 1 если $\mathsf{E} = \overline{\mathsf{E}}$, т. е. если отношение E замкнуто в топологии $\top^2$, то E — гладкое отношение.

§ 12.5 Случай незамкнутого отношения

Продолжая доказательство теоремы 12.3.1, мы теперь рассмотрим случай, когда $\mathsf{E} \subsetneqq \overline{\mathsf{E}}$, и докажем, что из этого предположения следует, что $\mathsf{E}_0 \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$, как в условии (II) теоремы. Это будет длинное доказательство

Поскольку $\mathsf{E} \subseteq \overline{\mathsf{E}}$, каждый E-класс $[x]_{\mathsf{E}} = \{y : x \,\mathsf{E}\, y\}$ включен в соответствующий $\overline{\mathsf{E}}$-класс $[x]_{\overline{\mathsf{E}}} = \{y : x \,\overline{\mathsf{E}}\, y\}$, причем по предположению имеются $\overline{\mathsf{E}}$-классы, содержащие *более чем один* E-класс. Рассмотрим объединение

$$H = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : [x]_{\mathsf{E}} \subsetneqq [x]_{\overline{\mathsf{E}}}\} = \{x : \exists y\, (x \,\overline{\mathsf{E}}\, y \wedge x \not\mathsf{E}\, y)\}$$

всех таких классов; $H \in \Sigma^1_1$, поскольку $\mathsf{E} \in \Delta^1_1$ и $\overline{\mathsf{E}} \in \Sigma^1_1$ (согласно следствию 12.4.2). Множество H играет здесь примерно ту же роль, как и другое множество H в доказательстве теоремы 12.1.1.

Лемма 12.5.1. *В смысле топологии $\top^2$ множество E является плотным и тощим на (открытом в $\overline{\mathsf{E}}$) множестве $(H \times H) \cap \overline{\mathsf{E}}$.*

Доказательство. Плотность очевидна; займемся доказательством того, что E — тощее множество на $(H \times H) \cap \overline{\mathsf{E}}$. Поскольку E — борелевское множество, предположив противное, мы получим пару Σ^1_1-множеств $A, B \subseteq H$, для которых $(A \times B) \cap \overline{\mathsf{E}} \neq \varnothing$ и E является котощим на $(A \times B) \cap \overline{\mathsf{E}}$. Предполагаем, что $A \subseteq [B]_{\overline{\mathsf{E}}}$ и $B \subseteq [A]_{\overline{\mathsf{E}}}$ (иначе просто заменим A на $A \cap [B]_{\overline{\mathsf{E}}}$, и сделаем то же для B).

Утверждается, что $(A \times A) \cap \overline{\mathsf{E}} \subseteq \mathsf{E}$; другими словами, отношения E и $\overline{\mathsf{E}}$ совпадают на A. Для доказательства мы рассмотрим множество $\overline{\mathsf{E}}^3 = \{\langle x, y, z\rangle : x \,\overline{\mathsf{E}}\, y \,\overline{\mathsf{E}}\, z\}$ с топологией, унаследованной из $\top_{2+1} = \top_2 \times \top$.

Предложение 12.5.2. *Пространство* $\langle \overline{\mathsf{E}}^3; \top_{2+1}\rangle$ *удовлетворяет теореме Бэра, т. е. в нем все котощие множества плотны.*

Доказательство (утверждение)**.** Достаточно указать польскую сеть для этого пространства. Для этого используем польские сети $\{\mathscr{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\mathscr{Z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ для топологий $\top_2$ и $\top$ соответственно, даваемые теоремой 10.2.3. (Топологии $\top_2$ и $\top$, очевидно, гомеоморфны.) Искомая сеть $\{\mathscr{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ для пространства $\langle \overline{\mathsf{E}}^3; \top_{2+1}\rangle$ задается следующим образом: $\mathscr{P}_n$ есть семейство всех *непустых* множеств вида $P = (X \times Z) \cap \overline{\mathsf{E}}^3$, где $X \in \mathscr{X}_n$ и $Z \in \mathscr{Z}_n$. Проверим требуемые свойства сети (определение 10.2.2).

Плотность. Пусть Σ^1_1-множества $X \subseteq (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$ и $Z \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ таковы, что пересечение $P = (X \times Z) \cap \overline{\mathsf{E}}^3$ непусто. Тогда по определению $\overline{\mathsf{E}}^3$, и Σ^1_1-множество $X \cap ([Z]_{\overline{\mathsf{E}}} \times [Z]_{\overline{\mathsf{E}}})$ непусто, а потому найдется множество $X' \in \mathscr{X}_n$ (непустое!), удовлетворяющее условию $X' \subseteq X \cap ([Z]_{\overline{\mathsf{E}}} \times [Z]_{\overline{\mathsf{E}}})$. По аналогичной причине, найдется такое множество $Z' \in \mathscr{Z}_n$, что $\varnothing \neq Z' \subseteq Z \cap [X']_{\overline{\mathsf{E}}}$. Легко видеть, что пересечение $P' = (X' \times Z') \cap \overline{\mathsf{E}}^3$ непусто, следовательно, оно принадлежит $\mathscr{P}_n$ и удовлетворяет $P' \subseteq P$.

Непустота пересечений. Предположим, что $P_m = (X_m \times Z_m) \cap \overline{\mathsf{E}}^3 \in \mathscr{P}_m$ для каждого m и все конечные пересечения множеств P_n непусты. То же верно для последовательности множеств X_m и для последовательности множеств Z_m. Поэтому имеется единственная точка $\langle x, y, z\rangle \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^3$, для которой $\langle x, y\rangle \in \mathscr{X}_n$ и $z \in \mathscr{Z}_n$ для всех n. Проверим, что $\langle x, y, z\rangle \in \overline{\mathsf{E}}^3$. Пусть, напротив, скажем, $x \not\overline{\mathsf{E}}\, z$. По лемме 12.4.1 существует E-инвариантное Δ^1_1-множество C, для которого $x \in C$ и $z \notin C$. Согласно выбору сетей $\{\mathscr{X}_n\}$ и $\{\mathscr{Z}_n\}$ найдутся такие числа m, n, что $Z_m \cap C = \varnothing$ и $X_n \subseteq C \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Тогда пересечение $P_n \cap P_m$ — пустое множество, и мы имеем противоречие.

□ (предложение)

Продолжая доказательство включения $(A \times A) \cap \overline{\mathsf{E}} \subseteq \mathsf{E}$ и леммы, мы теперь рассмотрим $\top_{2+1}$-открытое в $\overline{\mathsf{E}}^3$ и непустое по предположению множество

$$P = \{\langle x, y, z\rangle \in \overline{\mathsf{E}}^3 : x \in A \wedge y \in A \wedge z \in B\}.$$

По лемме 10.3.3 отображения пространства $\langle \overline{\mathsf{E}}^3; \top_{2+1}\rangle$ в $\langle \overline{\mathsf{E}}; \top_2\rangle$, заданные посредством соотношений $\langle x, y, z\rangle \longmapsto \langle x, z\rangle$ и $\langle x, y, z\rangle \longmapsto \langle y, z\rangle$, открыты и непрерывны, а прообразы открытых, нигде не плотных, тощих и котощих множеств при таких отображениях остаются соответственно открытыми, нигде не плотными, тощими и котощими. Значит, в соответствии с выбором множеств A и B, множества

$$R = \{\langle x, y, z\rangle \in P : x \mathrel{\mathsf{E}} z\} \quad \text{и} \quad S = \{\langle x, y, z\rangle \in P : y \mathrel{\mathsf{E}} z\}$$

являются $\top_{2+1}$-котощими в P как прообразы котощего в $(A \times B) \cap \overline{\mathsf{E}}$ множества $(A \times B) \cap \mathsf{E}$. Поэтому пересечение $R \cap S$ является $\top_{2+1}$-всюду плотным в P. (Мы использовали теорему Бэра для пространств с польской сетью, см. следствие 10.1.3.)

Если теперь допустить противное, т. е. $(A \times A) \cap \overline{\mathsf{E}} \not\subseteq \mathsf{E}$, то множество $Q = \{\langle x, y, z\rangle \in P : x \mathrel{\not\mathsf{E}} y\}$ окажется непустым. Но множество Q является $\top_{2+1}$-открытым в P, так как $\mathsf{E} \in \varDelta^1_1$ (а значит, E открыто в $\top_2$). Поэтому Q непусто пересекается с множеством $R \cap S$, и мы получаем противоречие.

Итак, в самом деле отношение E тождественно $\overline{\mathsf{E}}$ на A. Простое рассуждение показывает, что $[A]_{\mathsf{E}} = [A]_{\overline{\mathsf{E}}}$. (В противном случае, $\varSigma^1_1$-множество $A' = [A]_{\overline{\mathsf{E}}} \smallsetminus [A]_{\mathsf{E}}$ было бы непусто, т. е. $(A' \times A) \cap \overline{\mathsf{E}}$ также было бы непусто. Тогда мы имели бы $(A' \times A) \cap \mathsf{E} \neq \varnothing$, поскольку $\overline{\mathsf{E}}$ является замыканием множества E в $\top^2$, а произведение $A' \times A$ открыто, и мы получаем противоречие.) Но этого не может быть, так как $A \subseteq H$. □ (лемма)

Следствие 12.5.3. *В смысле топологии $\top^2$ множество $\Delta_H = \{\langle x, x\rangle : x \in H\}$ замкнуто и нигде не плотно в $(H \times H) \cap \overline{\mathsf{E}}$.*

Доказательство. Замкнутость очевидна: диагональ Δ_H замкнута даже в более слабой польской топологии. Далее, мы имеем $\Delta_H \subseteq \mathsf{E}$, а потому множество Δ_H является $\top^2$-тощим в $(H \times H) \cap \overline{\mathsf{E}}$ по лемме 12.5.3. Но замкнутые тощие множества нигде не плотны. □

Замечание 12.5.4. Имеется прямое доказательство нигде не плотности множества Δ_H в следствии 12.5.3. Предположение противного приводит к таким множествам $A, B \subseteq H$ класса $\varSigma^1_1$, что множество $Q = (A \times B) \cap \overline{\mathsf{E}}$ непусто, а Δ_H является $\top^2$-плотным на Q, т. е. в силу замкнутости $a \mathrel{\overline{\mathsf{E}}} b \Longrightarrow a = b$ для всех $a \in A$ и

$b \in B$. Можно предполагать, что $A = B$ (иначе заменим оба множества на $A \cap B$). Итак, бинарные отношения $\mathsf{E}, \overline{\mathsf{E}}$ и просто равенство совпадают на Σ^1_1-множестве $A = B$.

Отсюда следует, что Σ^1_1-множество $[A]_{\mathsf{E}}$ включено в Π^1_1-множество $P = \{x : \forall a \in A\,(x \mathbin{\overline{\mathsf{E}}} a \implies x \mathbin{\mathsf{E}} a)\}$. А поскольку оба множества E-инвариантны, по лемме 12.4.1 найдется E-инвариантное Δ^1_1-множество C, удовлетворяющее условию $[A]_{\mathsf{E}} \subseteq C \subseteq P$. Второй шаг: мы замечаем, что Σ^1_1-множество $[A]_{\mathsf{E}}$ включено в Π^1_1-множество $Q = \{y \in C : \forall x \in C\,(x \mathbin{\overline{\mathsf{E}}} y \implies x \mathbin{\mathsf{E}} y)\}$, так что по той же причине найдется E-инвариантное Δ^1_1-множество D, для которого $[A]_{\mathsf{E}} \subseteq D \subseteq Q$. По построению отношения E и $\overline{\mathsf{E}}$ совпадают на D. Тогда $[a]_{\mathsf{E}} = [a]_{\overline{\mathsf{E}}}$ для всех $a \in D$. (В самом деле, если $a \in D$, но $x \notin D$, то соотношение $a \mathbin{\overline{\mathsf{E}}} x$ не имеет места поскольку D является E-инвариантным множеством из Δ^1_1, т. е. открыто-замкнутым в $\top$.) Отсюда следует, что $D \cap H = \varnothing$, т. е. $A \cap H = \varnothing$, и мы получаем противоречие с выбором A.

§12.6 Редукция E_0 к данному отношению

Мы продолжаем доказательство теоремы 12.3.1 (случай 2, $\mathsf{E} \subsetneqq \overline{\mathsf{E}}$).

Согласно лемме 12.5.1 имеется убывающая последовательность таких $\top^2$-открытых множеств $W_n \subseteq (H \times H) \cap \overline{\mathsf{E}}$, что каждое из них $\top^2$-плотно в $(H \times H) \cap \overline{\mathsf{E}}$, а пересечение $\mathsf{E} \cap \bigcap_n W_n$ пусто. В силу следствия 12.5.3 можно предполагать, что диагональ Δ_H не пересекает W_0 (иначе заменим каждое W_n разностью $W_n \setminus \Delta$).

Редукция E_0 в E, которую мы построим, реализует ту же идею, что и классическое построение, проведенное в статье [52]. Однако мы заменим игру Шоке (главный инструмент обеспечения непустоты пересечений вдоль ветвей расщепления) польскими сетями, чтó несколько упрощает выкладки. Начнем с некоторых определений. Если $P \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$, то положим

$$\mathtt{pr}_1\, P = \{x : \exists\, y\, P(x,y)\} \quad \text{и} \quad \mathtt{pr}_2\, P = \{y : \exists\, x\, P(x,y)\}$$

Пусть $X, Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathsf{R} \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$. Мы пишем $X \mathbin{\mathsf{R}} Y$, когда

$$\forall\, x \in X\, \exists\, y \in Y\, (x \mathbin{\mathsf{R}} y) \quad \text{и} \quad \forall\, y \in Y\, \exists\, x \in X\, (x \mathbin{\mathsf{R}} y)\,.$$

Согласно следствию 10.3.1, имеются польские сети $\{\mathscr{X}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ и $\{\mathscr{P}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ для топологий $\top$ на множестве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\top_2$ на множестве $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ соответственно. Мы положим

$$\mathscr{X}^*_n = \{X : X \text{ — непустое } \Sigma^1_1\text{-множество, и } \exists\, X' \in \mathscr{X}_n\ (X \subseteq X')\}$$

и аналогично определим $\mathscr{P}^*_n$ из $\mathscr{P}_n$. Будет построено семейство Σ^1_1-множеств X_u $(u \in 2^{<\omega})$, для которых (а) $X_u \in \mathscr{X}^*_{n-1}$ и $X_{u^\wedge i} \subseteq X_u \subseteq H$ для всех n, $u \in 2^n$ и $i = 0, 1$.

(Здесь 2^n обозначает совокупность всех диадических последовательностей длины n, а $2^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} 2^n$.) Отсюда следует, что для любой бесконечной последовательности $a \in 2^{\mathbb{N}}$ пересечение $\bigcap_{n\in\omega} X_{a\restriction n}$ содержит единственную точку, ниже обозначаемую как $\phi(a)$, и отображение ϕ непрерывно в польской топологии.

Чтобы обеспечить взаимную однозначность отображения ϕ и для некоторых других целей, вводится еще одно требование — на этот раз к *парам* множеств X_u, X_v.

(б) $X_u \times X_v \subseteq W_{n-1}$ для всех n и каждой такой пары $u, v \in 2^n$, что $u(n-1) \neq v(n-1)$ (т. е. последние члены u и v различны).

В этом случае мы имеем $\phi(a) \neq \phi(b)$ при $a \neq b \in 2^\omega$, поскольку W_0 не пересекает Δ_H, так что отображение ϕ получается взаимно однозначным.

Далее нам будут нужны дополнительные взаимосвязи, касающиеся *некоторых* пар $\langle u, v\rangle$, чтобы обеспечить правильное взаимодействие между ветвями в $2^{<\omega}$, и в конечном счете установить, что $\mathsf{E}_0 \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{E}$ посредством ϕ.

Пару u, v из 2^n назовем *критической парой*, если $u = 0^k{}^\wedge 0^\wedge r$ и $v = 0^k{}^\wedge 1^\wedge r$ для некоторого $k < n$ (0^k есть кортеж из k нулей) и какого-то $r \in 2^{n-k-1}$ (возможно, что $k = n-1$, тогда $r = \Lambda$). Мы построим Σ^1_1-множества R_{uv} для всех критических пар u, v так, что будут выполнены следующие требования:

(в) $\mathtt{pr}_1 \mathsf{R}_{uv} = X_u$, $\mathtt{pr}_2 \mathsf{R}_{uv} = X_v$, $\mathsf{R}_{u^\wedge i, v^\wedge i} \subseteq \mathsf{R}_{uv}$, каковы бы ни были критическая пара $u, v \in 2^n$ и $i \in \{0, 1\}$;

(г) $\mathsf{R}_{uv} \in \mathscr{P}^*_{n-1}$ для любой критической пары $u, v \in 2^n$;

(д) для каждого k множество $\mathsf{R}_k = \mathsf{R}_{0^k{}^\wedge 0\,,\,0^k{}^\wedge 1}$ удовлетворяет условию $\mathsf{R}_k \subseteq \mathsf{E}$.

Заметим, что пара $u^\wedge i$, $v^\wedge i$ будет критической, если сама пара u, v критическая. Однако пара $u^\wedge i$, $v^\wedge j$ не может быть критической при $i \neq j$ (кроме случая $u = v = 0^k$ для некоторого k).

Упражнение 12.6.1. Докажите, что любая пара $u, v \in 2^n$ может быть соединена конечной цепочкой критических пар в 2^n. Используя то, что из условия (в) вытекает $X_u \,\mathsf{R}_{uv}\, X_v$, а тогда согласно условию (д) и $X_u \,\mathsf{E}\, X_v$ для всех критических пар u, v, выведите, что соотношения $X_u \,\mathsf{E}\, X_v$ и, следовательно, $X_u \,\overline{\mathsf{E}}\, X_v$, имеют место для *каждой* пары $u, v \in 2^n$.

Проверим, что из условий (в) – (д) следует, что $\mathsf{E}_0 \leqslant_{\text{B}} \mathsf{E}$ посредством ϕ.

Докажем, что условие $a \mathrel{\mathsf{E}_0} b$ влечет $\phi(a) \mathrel{\mathsf{E}} \phi(b)$. Достаточно рассмотреть случай, когда $a = 0^k{}^\wedge 0^\wedge c$ и $b = 0^k{}^\wedge 1^\wedge c$ для каких-то $k \in \mathbb{N}$ и $c \in 2^{\mathbb{N}}$, опять поскольку любая пара u, $v \in 2^n$ может быть связана в 2^n цепочкой критических пар. Здесь важно то, что пересечение $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{R}_{0^k{}^\wedge 0^\wedge c\restriction n,\, 0^k{}^\wedge 1^\wedge c\restriction n}$ непусто благодаря свойству (г), но поскольку $\mathsf{R}_{uv} \subseteq X_u \times X_v$, это пересечение не может быть чем-либо иным кроме точки $\langle \phi(a), \phi(b) \rangle$. Значит, $\langle \phi(a), \phi(b) \rangle \in \mathsf{R}_k$, откуда согласно (д) получаем $\phi(a) \mathrel{\mathsf{E}} \phi(b)$.

Докажем, что условие $a \mathrel{\not\mathsf{E}_0} b$ влечет $\phi(a) \mathrel{\not\mathsf{E}} \phi(b)$. В самом деле, если $a \mathrel{\not\mathsf{E}_0} b$, то мы имеем $a(n) \neq b(n)$ для бесконечно многих n; тогда $\langle \phi(a), \phi(b) \rangle \in W_n$ также для бесконечно многих n благодаря условию (б), т. е. фактически для всех n, так как множества W_n убывают. Мы заключаем, что $\phi(a) \mathrel{\not\mathsf{E}} \phi(b)$, ибо E не имеет общих точек с пересечением множеств W_n.

Итак, для доказательства теоремы 12.3.1 остается построить множества X_u и R_{uv}, удовлетворяющие требованиям (а) – (д). Перед тем как выполнить собственно построение, докажем полезную комбинаторную лемму.

Лемма 12.6.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\{X_u : u \in 2^n\}$ — семейство непустых Σ^1_1-множеств в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и для каждой критической пары $u, v \in 2^n$ задано Σ^1_1-множество $\mathsf{R}_{uv} \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$, для которого $X_u \mathrel{\mathsf{R}_{uv}} X_v$. Тогда:*

(i) *если $u_0 \in 2^n$ и $X' \subseteq X_{u_0}$ есть непустое Σ^1_1-множество, то имеются такие непустые Σ^1_1-множества $Y_u \subseteq X_u$ $(u \in 2^n)$, что для всех критических пар u, v, и $Y_{u_0} = X'$ по-прежнему $Y_u \mathrel{\mathsf{R}_{uv}} Y_v$;*

(ii) *если $u_0, v_0 \in 2^n$ — критическая пара, и непустые Σ^1_1-множества $X' \subseteq X_{u_0}$ и $X'' \subseteq X_{v_0}$ удовлетворяют условию $X' \mathrel{\mathsf{R}_{u_0 v_0}} X''$, то можно подобрать такие непустые Σ^1_1-множества $Y_u \subseteq X_u$ $(u \in 2^n)$, что для всех критических пар u, v по-прежнему выполнено условие $Y_u \mathrel{\mathsf{R}_{uv}} Y_v$, и кроме того, имеют место равенства $Y_{u_0} = X'$ и $Y_{v_0} = X''$.*

Доказательство. Заметим, что утверждение (i) следует из (ii): берем любую последовательность $v_0 \in 2^n$, для которой одна из пар $\langle u_0, v_0 \rangle$, $\langle v_0, u_0 \rangle$ критическая, и положим соответственно

$$\begin{aligned} X'' &= \{y \in X_{v_0} : \exists\, x \in X' \,(x \mathrel{\mathsf{R}_{u_0 v_0}} y)\}, \quad \text{или} \\ X'' &= \{y \in X_{v_0} : \exists\, x \in X' \,(y \mathrel{\mathsf{R}_{v_0 u_0}} x)\}. \end{aligned}$$

Утверждение (ii) доказывается индукцией по n. Если $n = 1$, и тогда $u_0 = \langle 0 \rangle$, $v_0 = \langle 1 \rangle$, то пусть $Y_{u_0} = Y'$, $Y_{v_0} = Y''$.

Индуктивный шаг. Мы доказываем лемму для $n+1$, предполагая, что она уже доказана для n; $n \ge 1$. Разделим множество 2^{n+1} на две части $U_0 = \{s^\wedge 0 : s \in 2^n\}$ и $U_1 = \{s^\wedge 1 : s \in 2^n\}$, связанные единственной критической парой кортежей $\overline{u} = 0^n{}^\wedge 0$ и $\overline{v} = 0^n{}^\wedge 1$.

Предположим, что $u_0 = \overline{u}$ и $v_0 = \overline{v}$. Применим индуктивное предположение (i) отдельно к системе $\{X_u : u \in U_0\}$ и множеству $X' \subseteq X_{u_0}$, и к системе $\{X_u : u \in U_1\}$ и множеству $X'' \subseteq X_{v_0}$. Соединив результаты вместе, получим такую систему Σ^1_1-множеств $Y_u \subseteq X_u$ $(u \in 2^{n+1})$, что $Y_u \, \mathsf{R}_{uv} \, Y_v$ для всех критических пар $\langle u, v \rangle$, возможно, за исключением пары из $u = u_0 = \overline{u}$ и $v = v_0 = \overline{v}$, и, дополнительно, $Y_{u_0} = X'$ и $Y_{v_0} = X''$. Наконец, отметим, что $Y_{\overline{u}} \, \mathsf{R}_{\overline{uv}} \, Y_{\overline{v}}$ по выбору множеств X' и Y'.

Рассмотрим второй случай: последовательности u_0 и v_0 принадлежат одной и той же части, скажем U_0, множества 2^{n+1}. Применяя индуктивное предположение о выполнении (ii) к системе $\{X_u\}_{u \in U_0}$ и множествам $X' \subseteq X_{u_0}$ и $X'' \subseteq X_{v_0}$, получим систему непустых Σ^1_1-множеств $Y_u \subseteq X_u$ $(u \in U_0)$. Среди них, в частности, Σ^1_1-множество $Y_{\overline{u}} \subseteq X_{\overline{u}}$. Теперь положим

$$Y_{\overline{v}} = \{y \in X_{\overline{v}} : \exists x \in Y_{\overline{u}} \, (x \, \mathsf{R}_{\overline{uv}} \, y)\},$$

чтобы было выполнено соотношение $Y_{\overline{u}} \, \mathsf{R}_{\overline{uv}} \, Y_{\overline{v}}$, и применим индуктивное предположение о выполнении (i) к семейству $\{X_v : v \in U_1\}$ и множеству $Y_{\overline{v}} \subseteq X_{\overline{v}}$. □ (лемма)

§ 12.7 Построение расщепляющейся системы

Начиная построение множеств X_u и R_{uv}, удовлетворяющих требованиям (а) – (д) из § 12.6, мы положим $X_\Lambda = H$. Допустим, что система множеств X_s $(s \in 2^n)$ и отношений R_{st} для критических пар $s, t \in 2^k$, $k \le n$, уже определены; продолжим конструкцию на уровень $n+1$.

Сначала мы определим $A_{s^\wedge i} = X_s$ для всех $s \in 2^n$ и $i = 0, 1$, а также $\mathsf{Q}_{uv} = \mathsf{R}_{st}$ для каждой критической пары $u = s^\wedge i$, $v = t^\wedge i$ в 2^{n+1}, кроме пары из $\overline{u} = 0^n{}^\wedge 0$ и $\overline{v} = 0^n{}^\wedge 1$; для последней (заметим, что $A_{\overline{u}} = A_{\overline{v}} = X_{0^n}$) определим просто $\mathsf{Q}_{\overline{uv}} = \overline{\mathsf{E}}$, так что соотношение $A_u \, \mathsf{Q}_{uv} \, A_v$ будет выполнено для каждой критической пары из $u, v \in 2^{n+1}$.

Эти построенные множества A_u и Q_{uv} будут уменьшены в несколько действий, чтобы удовлетворить условия (а) – (д).

После 2^{n+1} шагов использования леммы 12.6.2 (i) мы получим систему непустых Σ^1_1-множеств $B_u \subseteq A_u$, $B_u \in \mathscr{X}^*_n$ $(u \in 2^{n+1})$, удовлетворяющих условию $B_u \mathsf{Q}_{uv} B_v$ для каждой критической пары u, v в 2^{n+1}. Это обеспечивает выполнение требования (а).

Чтобы гарантировать (б), рассмотрим любую пару из последовательностей $u_0 = s_0{}^\wedge 0$ и $v_0 = t_0{}^\wedge 1$, где $s_0, t_0 \in 2^n$. Согласно 12.6.1 и $\top^2$-плотности $\top^2$-открытого множества W_n в $(H \times H) \cap \overline{\mathsf{E}}$, существуют непустые Σ^1_1-множества $B' \subseteq B_{u_0}$ и $B'' \subseteq B_{v_0}$, для которых $B' \times B'' \subseteq W_n$ и множество $P = (B' \times B'') \cap \overline{\mathsf{E}}$ непусто. Можно предположить, что $\mathtt{pr}_1 P = B'$ и $\mathtt{pr}_2 P = B''$. (Если это не так, то положим $B' = \mathtt{pr}_1 P$ и $B'' = \mathtt{pr}_2 P$.) В этом предположении выполнено соотношение $B' \, \overline{\mathsf{E}} \, B''$. Теперь применим лемму 12.6.2 (i) отдельно к семействам $\{B_{s^\wedge 0} : s \in 2^n\}$ и $\{B_{t^\wedge 1} : t \in 2^n\}$ (ср. с доказательством леммы 12.6.2!), и множествам $B' \subseteq B_{s_0{}^\wedge 0}$, $B'' \subseteq B_{t_0{}^\wedge 1}$ соответственно. Соединив результаты, мы получим систему таких непустых Σ^1_1-множеств $B'_u \subseteq B_u$ $(u \in 2^{n+1})$, что $B'_{u_0} = B'$, $B'_{v_0} = B''$, т. е. $B'_{u_0} \times B'_{v_0} \subseteq W_n$, и всё еще имеет место $B'_u \, \mathsf{Q}_{uv} \, B'_v$ для всех критических пар u, v в 2^{n+1}, возможно, за исключением пары из кортежей $\overline{u} = 0^{n\wedge}0$ и $\overline{v} = 0^{n\wedge}1$, единственной соединяющей обе области. Для этой особой пары выполнены соотношения $B'_{\overline{u}} \, \overline{\mathsf{E}} \, B'_{u_0}$ и $B'_{\overline{v}} \, \overline{\mathsf{E}} \, B'_{v_0}$. (Результат упражнения 12.6.1 применяется в каждой из двух областей.) Поэтому $B'_{\overline{u}} \, \overline{\mathsf{E}} \, B'_{\overline{v}}$, так как $B' \, \overline{\mathsf{E}} \, B''$. Наконец на данном этапе построения, $\mathsf{Q}_{\overline{uv}}$ совпадает с $\overline{\mathsf{E}}$ по определению, откуда следует, что $B'_{\overline{u}} \, \mathsf{Q}_{\overline{uv}} \, B'_{\overline{v}}$.

После 2^{n+1} шагов (число шагов равно числу пар u_0, v_0, которые нужно рассмотреть), мы получим такую систему непустых Σ^1_1-множеств $C_u \subseteq B_u$ $(u \in 2^{n+1})$, что $C_u \times C_v \subseteq W_n$ всякий раз, когда $u(n) \neq v(n)$, а также $C_u \, \mathsf{Q}_{uv} \, C_v$ для всех критических пар $u, v \in 2^{n+1}$. Теперь требование (б) выполнено.

Следующий шаг: обеспечим выполнение требования (д) для пары $\overline{u} = 0^{n\wedge}0$, $\overline{v} = 0^{n\wedge}1$. На данном этапе построения имеем $\mathsf{Q}_{\overline{uv}} = \overline{\mathsf{E}}$. Используя $\top^2$-плотность множества E в $\overline{\mathsf{E}}$, которая имеет место по лемме 12.5.1, и соотношение $C_{\overline{u}} \, \overline{\mathsf{E}} \, C_{\overline{v}}$, мы заключаем, что множество $\mathsf{Q} = (C_{\overline{u}} \times C_{\overline{v}}) \cap \mathsf{E}$ непусто. Рассмотрим Σ^1_1-множества $C' = \mathtt{pr}_1 \mathsf{Q}$ $(\subseteq C_{\overline{u}})$ и $C'' = \mathtt{pr}_2 \mathsf{Q}$ $(\subseteq C_{\overline{v}})$. Тогда выполнено соотношение $C' \, \mathsf{Q} \, C''$, откуда следует $C' \, \mathsf{Q}_{\overline{uv}} \, C''$. Лемма 12.6.2 (ii) приносит такую систему непустых Σ^1_1-множеств $D_u \subseteq C_u$ $(u \in 2^{n+1})$, что всё еще выполнено $D_u \mathsf{Q}_{uv} D_v$ для всех критических пар u, v в 2^{n+1}, и при этом $D_{\overline{u}} = C'$ и $D_{\overline{v}} = C''$. Переопределяем множество $\mathsf{Q}_{\overline{uv}}$ посредством формулы $\mathsf{Q}_{\overline{uv}} = \mathsf{Q}$. Соотношение $D_{\overline{u}} \, \mathsf{Q}_{\overline{uv}} \, D_{\overline{v}}$ при этом сохраняется.

Наконец, обеспечим выполнение требований (в) и (г). Рассмотрим произвольную критическую пару последовательностей $u_0 = s_0{}^\wedge 0$, $v_0 = t_0{}^\wedge 1$ из 2^{n+1}. Множество $\mathsf{Q}' = \mathsf{Q}_{u_0 v_0} \cap (D_{u_0} \times D_{v_0})$ непусто (так как выполнено соотношение $D_{u_0} \mathsf{Q}_{u_0 v_0} D_{v_0}$) и принадлежит Σ^1_1.

Возьмем любое непустое Σ^1_1-множество $\mathsf{Q} \subseteq \mathsf{Q}'$, принадлежащее $\mathscr{P}^*_n$. Положим $D' = \mathtt{pr}_1\, \mathsf{Q}$ и $D'' = \mathtt{pr}_2\, \mathsf{Q}$. Тогда имеет место $D' \mathsf{Q}\, D''$, так как $D' \mathsf{Q}_{u_0 v_0} D''$). Применим лемму 12.6.2 (ii) к системе множеств D_u $(u \in 2^{n+1})$ и множествам D' и D''. После этого вводим «новое» множество $\mathsf{Q}_{u_0 v_0}$ равенством $\mathsf{Q}_{u_0 v_0} = \mathsf{Q}$.

Проделаем это сужающее построение последовательно для всех критических пар. Те множества, которые в результате этого получатся — обозначим их через X_u $(u \in 2^{n+1})$, — являются искомыми. Отношения R_{uv} $(u, v \in 2^{n+1})$ теперь определяются сужением множеств Q_{uv} на $X_u \times X_v$.

Этим построение завершено.

$\square$ (теорема 12.3.1)

§ 12.8 О $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношениях эквивалентности

Назовем *тонким* (в англоязычной литературе: thin) такое отношение эквивалентности (на множестве одного из польских пространств), для которого нет совершенного множества попарно неэквивалентных точек. В этой терминологии теорему 12.1.1 можно переформулировать так: *Всякое тонкое $\mathbf{\Pi}^1_1$-отношение эквивалентности имеет не более чем счетное число классов эквивалентности.*

К сожалению, этот результат уже не имеет места даже для $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношений эквивалентности, не говоря об отношениях более высоких проективных классов. В самом деле, рассмотрим произвольное неборелевское $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $C \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, разбитое на борелевские конституанты: $C = \bigcup_{\alpha < \omega_1} C_\alpha$. Определим отношение E так:

$$x \,\mathsf{E}\, y, \text{ если и только если } \exists\, \alpha\, (x \in C_\alpha \wedge y \in C_\alpha) \vee (x \notin C \wedge y \notin C).$$

Предложение 12.8.1. *В этом случае E является тонким $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношением эквивалентности, и E имеет несчетно много (ровно $\aleph_1$) классов эквивалентности.*

Доказательство. Свойство тонкости для E следует из принципа ограничения индексов (теорема 4.4.1). В самом деле, любое попарно E-неэквивалентное множество X точек из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ с необходимостью включено в C, за исключением самое большее одной точки. Тогда если множество X борелевское, или даже является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством, то его можно накрыть счетным числом конституант C_α по теореме 4.4.1, а потому оно само счетно (поскольку любая конституанта по определению содержит самое большее одну точку множества X), что и требовалось.

Далее, E имеет ровно $\aleph_1$ (непустых) классов эквивалентности, поскольку иначе C было бы борелевским множеством.

Остается проверить, что E является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношением. Для этого рассмотрим норму $\varphi\colon C \to \omega_1$, определенную так, что $\varphi(x) = \xi$ при $x \in C_\xi$. Мы видели (см. доказательство теоремы 8.3.2), что эта норма является

$\mathbf{\Pi}^1_1$-нормой, точнее, $\varPi^1_1(p)$-нормой, где $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ таково, что C принадлежит классу $\varPi^1_1(p)$. В частности, отношение

$$y \leqslant^-_\varphi x \iff x \notin C \vee \big(x, y \in C \wedge \varphi(y) \leq \varphi(x)\big)$$

на C является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношением. Однако соотношение $x \mathsf{E}\, y$ равносильно тому, что $y \leqslant^-_\varphi x \wedge x \leqslant^-_\varphi y$. □

Бэрджес доказал в работе [40] следующую теорему, показывающую, что данный пример является в определенном смысле исчерпывающим.

Теорема 12.8.2. *Если E — тонкое отношение эквивалентности класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$ на борелевском множестве $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$, то оно имеет не более чем $\aleph_1$ классов эквивалентности.*

Доказательство. Для простоты считаем, что область X отношения E просто равна $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. (Иначе доопределяем E, полагая, для $x, y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, $x \mathsf{E}' y$, когда $x \mathsf{E}\, y$ или $x, y \notin X$.) Дополнительное $\mathbf{\Pi}^1_1$-отношение

$$W = (X \times X) \smallsetminus \mathsf{E} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N} : x \not\mathsf{E}\, y\}$$

раскладывается на борелевские конституанты, $W = \bigcup_{\xi<\omega_1} W_\xi$, см. §4.3. Положим $W_{<\xi} = \bigcup_{\eta<\xi} W_\eta$ и $\mathsf{E}_\xi = (\mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}) \smallsetminus W_{<\xi}$, так что все отношения E_ξ на X — борелевские, и по построению $\mathsf{E} = \bigcap_{\xi<\omega_1} \mathsf{E}_\xi$. Из принципа ограничения (теорема 4.4.1) следует, что если $\mathsf{E} \subseteq P \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и P является $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеством, то найдется такой ординал $\xi < \omega_1$, что $\mathsf{E}_\xi \subseteq P$.

Мы не утверждаем, что *все* отношения E_ξ являются отношениями эквивалентности, однако справедливо следующее:

Лемма 12.8.3. *Множество Ξ всех индексов $\xi < \omega_1$ таких, что E_ξ — отношение эквивалентности на $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, замкнуто и неограничено в ω_1.*

Доказательство (лемма)**.** Замкнутость Ξ следует из того, что $\mathsf{E}_\lambda = \bigcap_{\xi<\lambda} \mathsf{E}_\xi$ для всех предельных ординалов λ. Для проверки неограниченности, рассмотрим два вспомогательных множества ординалов:

$$\begin{aligned} H &= \{\eta < \omega_1 : \forall x\, \forall y\, \forall x'\, \forall y'\, (x \mathsf{E}_\eta\, y \wedge x' \mathsf{E}\, x \wedge y \mathsf{E}\, y' \Longrightarrow x' \mathsf{E}_\eta\, y')\}\,; \\ \varPi &= \{\langle \eta, \zeta\rangle : \eta < \zeta < \omega_1 \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \mathsf{E}_\zeta\, y \wedge y \mathsf{E}_\eta\, z \Longrightarrow x \mathsf{E}_\eta\, z)\}\,. \end{aligned}$$

Утверждается, что *если $\eta_0 < \omega_1$, то существует ординал $\eta \in H$, $\eta > \eta_0$.* Для доказательства строим по индукции возрастающую последовательность ординалов $\eta_n < \omega_1$. Если ординал $\eta_n > \eta_0$ уже определен, то пусть

$$C = \{\langle x, y\rangle \in \mathsf{E}_{\eta_n} : \forall x'\, \forall y'\, (x' \mathsf{E}\, x \wedge y \mathsf{E}\, y' \Longrightarrow x' \mathsf{E}_{\eta_n}\, y')\},$$

так что C есть $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество и $\mathsf{E} \subseteq C \subseteq \mathsf{E}_{\eta_n}$. Согласно принципу ограничения, найдется ординал $\eta_{n+1} > \eta_n$, для которого $\mathsf{E}_{\eta_{n+1}} \subseteq C$. Остается определить $\eta = \mathtt{sup}_n\, \eta_n$, и мы получаем $\eta \in H$.

Теперь утверждается, что *если $\eta \in H$, то существует такой ординал $\zeta < \omega_1$, что $\langle \eta, \zeta\rangle \in \varPi$.* В самом деле, $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество

$$D = \{\langle x, y\rangle \in \mathsf{E}_\eta : \forall z\, (x \,\mathsf{E}_\eta\, z \Longrightarrow y \,\mathsf{E}_\eta\, z\}$$

удовлетворяет $D \subseteq \mathsf{E}_\eta$, а также $\mathsf{E} \subseteq D$, поскольку $\eta \in H$. Снова по принципу ограничения, найдется ординал $\zeta > \eta$, для которого $\mathsf{E}_\zeta \subseteq D$.

Теперь, задавшись произвольным $\alpha < \omega_1$ и используя оба доказанных утверждения, строим по индукции такую возрастающую последовательность ординалов $\xi_n \in H$, что $\alpha < \xi_0$ и $\langle \xi_n, \xi_{n+1}\rangle \in \Pi$ для каждого n. Легко видеть, что $\xi = \mathtt{sup}_n\, \xi_n \in \Xi$. □ (лемма)

Заключительный этап доказательства теоремы 12.8.2 в варианте из книги [68] состоит в следующем. Пусть напротив, E имеет как минимум $\aleph_2$ классов эквивалентности. Множество $Y \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ (напомним: X — область отношения E) назовем *большим*, если оно пересекает как минимум $\aleph_2$ классов E-эквивалентности, так что само $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ — большое.

Согласно лемме 12.8.3, существует такая возрастающая функция $f : \omega_1 \to \omega_1$, что отношение $\mathsf{F}_\xi = \mathsf{E}_{f(\xi)}$ будет борелевским отношением эквивалентности на $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ для всех ξ. При этом $\mathsf{E} = \bigcap_{\xi<\omega_1} \mathsf{F}_\xi$. А поскольку E предполагается тонким, все отношения F_ξ также будут тонкими. Значит, по теореме 12.1.1, каждое F_ξ имеет не более чем счетное множество классов эквивалентности, и пусть $\{K_{\xi n} : n \in \mathbb{N}\}$ — список всех классов F_ξ-эквивалентности без повторений (случай конечного числа классов F_ξ-эквивалентности легко элиминируется). Все множества $K_{\xi n}$ — борелевские, и пусть $\{C_\eta : \eta < \omega_1\} = \{K_{\xi n} : \xi < \omega_1 \wedge n \in \mathbb{N}\}$ — их общий список. Легко видеть, что $x \,\mathsf{E}\, y$ равносильно тому, что $x \in C_\eta \Longleftrightarrow y \in C_\eta$ для всех η.

Заметим, что *если $Y \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ — большое множество, то найдется такой индекс $\eta < \omega_1$, что оба множества $Y \cap C_\eta$ и $Y \smallsetminus C_\eta$ также большие.* (Иначе для любого ξ существует один индекс n_ξ, для которого $Y \cap K_{\xi n_\xi}$ — большое множество, а любое множество $Y \cap K_{\xi n}$, $n \neq n_\xi$ большим не является, и мы без труда выводим противоречие с выбором Y.) Поэтому и согласно следствию 2.6.3 и теореме 1.1.6, найдется счетное семейство $\mathscr{A}$ борелевских множеств $A \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$, которое а) содержит все бэровские интервалы в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, б) замкнуто относительно операций пересечения, объединения, разности двух множеств; в) порождает польскую топологию τ на множестве $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ (усиливающую обычную топологию бэровского пространства согласно п. а); и г) если $A \in \mathscr{A}$ — большое множество, то найдется такое $\eta < \omega_1$, что множества $Y \cap C_\eta$ и $Y \smallsetminus C_\eta$ — большие.

Отсюда следует, что существует расщепляющаяся система $\{A_s\}_{s \in 2^{<\omega}}$ больших множеств $A_s \in \mathscr{A}$ (следовательно, τ-открыто-замкнутых), удовлетворяющая обычным условиям типа 1), 2), 3) из п. 1.6 и такому условию: если $s \in 2^{<\omega}$, то найдется такой ординал $\eta = \eta(s)$, что $A_{s^\wedge 0} \subseteq C_\eta$ но $A_{s^\wedge 1} \cap C_\eta = \varnothing$. Отсюда следует, что если $a \neq b \in 2^\mathbb{N}$ то $f(a) \neq f(b)$, где $f(a)$ — единственный элемент пересечения $\bigcap_m A_{a\restriction m}$. Отсюда имеем совершенное попарно E-неэквивалентное множество $P = \{f(a) : a \in 2^\mathbb{N}\}$, т. е. E — не тонкое, противоречие. □ (теорема 12.8.2)

До сих пор, однако, остается открытым вопрос всегда ли можно получить *абсолютный* список классов эквивалентности данного тонкого $\mathbf{\Sigma}^1_1$-

отношения E в виде последовательности $\{K_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$, где каждый класс E-эквивалентности K_α (по необходимости также множество из $\mathbf{\Sigma}^1_1$) задан конкретным, эффективным образом. (Приведенное нами доказательство не приносит этого свойства.) Оказывается (см. работы [41] и [58]), что такая эффективность достижима, если предположить, что

(∗) либо универсум $\mathbf{V}$ удовлетворяет «гипотезе диезов» (она родственна некоторым гипотезам существования больших кардиналов), либо универсум $\mathbf{V}$ является генерическим расширением конструктивного универсума $\mathbf{L}$. (Известно, что эти две гипотезы несовместимы.)

Исследование тонких $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношений облегчается в случае, когда все классы эквивалентности данного отношения — борелевские множества, причем *ограниченного ранга*, т. е. все они принадлежат некоторому одному борелевскому классу $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ $(\alpha < \omega_1)$; такие отношения принято называть *лузинскими*, поскольку Н. Н. Лузин был инициатором их изучения (см. § 13.4 об истории вопроса). Хотя и здесь нельзя утверждать, что каждое лузинское $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношение имеет лишь счетно много классов (подходящие контрпримеры указаны Сами, см. [104]), однако в этом случае классы допускают эффективное перечисление счетными ординалами. Более того, если предположить, что любое несчетное $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество имеет совершенное подмножество, то тогда любое лузинское даже $\mathbf{\Delta}^1_2$-отношение имеет лишь счетно много классов. Об этих результатах см. работы Штерна [115] и В. Г. Кановея [6] (в последней специально для отношений эквивалентности, порожденных разбиением на конституанты). То же самое можно выразить иначе: каждое лузинское $\mathbf{\Delta}^1_2$-отношение, имеющее несчетно много классов эквивалентности, имеет (в том же предположении о $\mathbf{\Pi}^1_1$-множествах) совершенное множество попарно неэквивалентных элементов.

Теорема 12.3.1 также перестает быть верной для $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношений эквивалентности, но имеет для них более слабую версию, состоящую в том, что, в предположении (∗), требование (I) теоремы 12.3.1, т. е. существование борелевской функции $\vartheta\colon X \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$, удовлетворяющей $x \mathrel{\mathsf{E}} y \iff \vartheta(x) = \vartheta(y)$, меняется условием существования функции $\vartheta\colon X \to 2^{<\omega_1}$, удовлетворяющей $x \mathrel{\mathsf{E}} y \iff \vartheta(x) = \vartheta(y)$ и в некотором точном смысле эффективной (даже класса $\mathbf{\Delta}^1_2$). Здесь $2^{<\omega_1} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} 2^\alpha$ — множество всех бинарных последовательностей произвольной трансфинитной счетной длины. Таким образом, эффективное перечисление классов E-эквивалентности простыми бесконечными последовательностями в (I) теоремы 12.3.1 меняется, для $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношений, эффективным перечислением классов эквивалентности последовательностями любой конечной или счетной трансфинитной длины. Об этих важных и трудных результатах см. [58, 60].

§ 12.9 О борелевских предпорядках

Отношения эквивалентности являются, очевидно, особым типом предпорядков (т. е. транзитивных и рефлексивных бинарных отношений, см.

§ 4.8), а именно, *симметричными (частичными) предпорядками*. Оказывается, в этой более широкой области предпорядков имеют место теоремы, похожие на теоремы 12.1.1 и 12.3.1 и в каком-то смысле их обобщающие. К этой категории относится нижеследующие теоремы 12.9.1 и 12.9.6. Их доказательства слишком сложны, чтобы привести их здесь, и поэтому мы ограничимся формулировками и некоторыми следствиями.

Цепью в частично предупорядоченном множестве $\langle X\,;\preccurlyeq\rangle$ называется любое множество $Y \subseteq X$, *линейно* предупорядоченное отношением $\preccurlyeq$, а *попарно несравнимым множеством* — любое множество $A \subseteq X$, состоящее из попарно $\preccurlyeq$-несравнимых элементов, т. е. если элементы $x \neq y$ принадлежат A, то ни $x \preccurlyeq y$ ни $y \preccurlyeq x$ не имеет места.[4]

Теорема 12.9.1 (доказана в работе [53]). *Пусть $\preccurlyeq$ — борелевское отношение предпорядка на (борелевском) множестве $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда выполнено одно и только одно из следующих двух утверждений*:

(I) *X есть объединение счетного числа борелевских цепей*;

(II) *имеется совершенное попарно несравнимое множество $Y \subseteq X$.*

Если же заранее известно, что $\preccurlyeq$ — ***линейный*** *предпорядок на X, то существуют ординал $\alpha < \omega_1$ и борелевское отображение $\vartheta\colon X \to 2^{\alpha}$ такое, что $x \preccurlyeq y \Longleftrightarrow \vartheta(x) \leqslant_{\mathtt{lex}} \vartheta(y)$ для всех $x, y \in X$.* □

Через $\leqslant_{\mathtt{lex}}$ обозначается лексикографический порядок на 2^{α}.

Для случая, когда заданный борелевский предпорядок $\preccurlyeq$ является отношением эквивалентности, первая часть теоремы 12.9.1 переходит в теорему 12.9.1 для борелевских отношений — и в этом смысле мы говорим об обобщении. Вторая же часть теоремы 12.9.1 не имеет смысла для борелевских отношений эквивалентности как вида предпорядков.

Упражнение 12.9.2. Докажите, что если $\alpha < \omega_1$, то множество 2^{α} не имеет $\leqslant_{\mathtt{lex}}$-цепей длины ω_1. Отсюда по теореме 12.9.1 следует, что если $\preccurlyeq$ — борелевское отношение линейного предпорядка на (борелевском) множестве $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то не существует $\preccurlyeq$-цепей длины ω_1.

Докажите, что последнее утверждение может быть неверным для не линейных борелевских предпорядков $\preccurlyeq$ (т. е. не предполагается $\preccurlyeq$-сравнимость любых двух элементов из области $\preccurlyeq$). Для этого рассмотрите такой предпорядок на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$: $x \leq^* y$, когда $x(n) \leq y(n)$ для всех, кроме конечного числа, значений n.

Упражнение 12.9.3. Докажите, используя теорему 12.9.1, что если $\preccurlyeq$ — линейный борелевский предпорядок, то соответствующее отношение эквивалентности $x \approx y$, когда $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x$ является гладким. Докажите, на примере того же порядка $\leq^*$ (а для него соответствующее отношение

---

[4] В работах по комбинаторике такие множества часто называются антицепями. Однако в теории множеств *антицепью* в в частично предупорядоченном множестве $\langle X\,;\preccurlyeq\rangle$ называется любое множество $A \subseteq X$, удовлетворяющее более сильному условию: любые два элемента $x \neq y$ из A *несовместны*, т. е. нет ни одного элемента $z \in X$, для которого одновременно $x \preccurlyeq z$ и $y \preccurlyeq z$.

эквивалентности есть $\mathsf{E_0}$), что для нелинейных борелевских предпорядков это утверждение не обязательно верно.

Теорему 12.9.1 можно сопоставить со следующей теоремой Дилворта [45] о разбиении, хорошо известной в комбинаторике:

Теорема 12.9.4. *Если $\langle P\,; \preccurlyeq\rangle$ — частичный предпорядок и $k \geq 2$ — натуральное число, то либо P разбивается на k цепей, либо P имеет попарно несравнимое $(k+1)$-элементное множество.*

Доказательство (набросок)**.** Мы ограничимся изложением простого индуктивного доказательства для случая, когда множество P конечно. О переходе к бесконечным P при помощи леммы Цорна см. в [45] либо стр. 220–222 в книге О. Оре, *Теория графов*, М.: Наука, 1980.

Итак, доказываем индукцией по n, очевидно, эквивалентное утверждение: *если $\langle P\,; \preccurlyeq\rangle$ — частично предпорядоченное множество из n элементов, то найдется $k \leq n$ такое, что P разбивается на k цепей и одновременно P имеет попарно несравнимое k-элементное множество.* Чтобы провести индуктивный шаг, предположим, что P содержит $n+1$ элемент, и пусть x — один из $\preccurlyeq$-максимальных элементов P. Тогда $P' = P \smallsetminus \{x\}$ имеет n элементов, так что по индуктивному предположению мы имеем, для некоторого (единственного) k разбиение $P' = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ на цепи C_i, и в то же время P' имеет попарно несравнимые k-элементные множества.

Для каждого i, пусть x_i — тот максимальный элемент цепи C_i, который принадлежит одному из попарно несравнимых k-элементных множеств в P'. Тогда множество $X = \{x_i : 1 \leq i \leq k\}$ само попарно несравнимо. (В самом деле, пусть напротив, $x_i \preccurlyeq x_j$; $i \neq j$. Имеется такое попарно несравнимое множество $Y = \{y_r : 1 \leq r \leq k\}$, что $y_j = x_j$ и $y_r \in C_r$ для всех r. Имеем $y_i \preccurlyeq x_i$ по выбору x_i, так что $y_i \preccurlyeq x_j = y_j$. Получилось противоречие, поскольку Y — попарно несравнимое множество.)

Если x не сравнимо ни с каким из x_i, то, положив $C_{k+1} = \{x\}$, мы получим разбиение P на $k+1$ цепей, а также попарно несравнимое множество $X \cup \{x\}$ из $k+1$ элементов.

Теперь допустим, что $x_i \leq x$ для хотя бы одного i. Удалим из P цепь $C' = \{x\} \cup \{y : y \preccurlyeq x_i\}$. Оставшееся множество $Q = P \smallsetminus C'$ не имеет попарно несравнимых k-элементных множеств: это следует из выбора x_i. Значит, по индуктивному предположению, Q разбивается на $k-1$ цепей. Добавив к ним C', получим разбиение P на k цепей, а X остается попарно несравнимым k-элементным множеством. □

Соответствующее утверждение для случая $k = \aleph_0$ имело бы вид:

(†) *каждый частичный предпорядок либо разбивается на счетное число цепей, либо имеет несчетное попарно несравнимое множество.*

Упражнение 12.9.5. Докажите, что (†), вообще говоря, не верно. В качестве контрпримера возьмите множество $P = \omega_1 \times \omega_1$ с покомпонентным порядком, и докажите, что P не разбивается на счетное число цепей, а каждое попарно несравнимое множество в P конечно.

Однако «борелевский» вариант ложного утверждения (†) оказывается справедливым согласно теореме 12.9.1 (первая часть). В связи с этим вызывает интерес вопрос, а верен ли «борелевский» вариант самой теоремы 12.9.4, т. е. верно ли, что

(‡) *если* $\preccurlyeq$ *— борелевский частичный предпорядок на множестве* $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *и* $k \geq 2$*, то либо* X *разбивается на* k *борелевских цепей, либо существует попарно несравнимое* $(k+1)$*-элементное множество.*

Этот вопрос остается открытым. Однако согласно теореме 12.9.1 мы по крайней мере можем не ограничивая общности предполагать, при его решении, что X уже является объединением счетного числа дизъюнктных борелевских цепей.

Любопытное уточнение второй части теоремы 12.9.1 получено Луво в статье [76]. Оказывается, что если $\langle X\,; \preccurlyeq\rangle$ — борелевский *линейный* предпорядок и $\xi < \omega_1$, то либо имеется борелевское вложение $\langle X\,; \preccurlyeq\rangle \to \langle 2^{\omega^\xi}; \leqslant_{\mathtt{lex}}\rangle$, либо же имеется даже непрерывное вложение $\langle 2^{\omega^{\xi+1}}; \leqslant_{\mathtt{lex}}\rangle \to \langle X\,; \preccurlyeq\rangle$. Таким образом, порядки вида $\langle 2^{\omega^\xi}; \leqslant_{\mathtt{lex}}\rangle$ образуют своего рода базис для всех борелевских линейных предпорядков.

Теперь об аналоге теоремы 12.3.1 для борелевских предпорядков. Если $a, b \in 2^{\mathbb{N}}$, то пусть $a \leqslant_{\mathtt{alex}} b$ (*анти-лексикографический порядок*), когда либо $a = b$, либо найдется n такое, что $a(n) < b(n)$, но $a(k) = b(k)$ для всех $k > n$. Отношение $\leqslant_{\mathtt{alex}}$ упорядочивает каждый E_0-класс эквивалентности в $2^{\mathbb{N}}$ по типу $\mathbb{Z}$ (кроме классов тождественного нуля и тождественной единицы), а E_0-неэквивалентные элементы и $<_{\mathtt{alex}}$-несравнимы.

Теорема 12.9.6 (доказана в работе [62]). *Пусть* $\preccurlyeq$ *— борелевское отношение предпорядка на (борелевском) множестве* $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$*. Тогда выполнено одно и только одно из следующих двух утверждений*:

(I) *существуют ординал* $\alpha < \omega_1$ *и борелевское отображение* $f\colon X \to 2^\alpha$*, линеаризующее* $\preccurlyeq$ *в том смысле, что* $x \preccurlyeq y \Longrightarrow f(x) \leqslant_{\mathtt{lex}} f(y)$*, а* $\preccurlyeq$*-несравнимые элементы* f *переводит в разные элементы* 2^α;

(II) *существует непрерывная взаимно однозначная функция* $\vartheta\colon 2^{\mathbb{N}} \to X$*, удовлетворяющая* $a \leqslant_{\mathtt{alex}} b \Longrightarrow \vartheta(a) \preccurlyeq \vartheta(b)$*, и если* $a \not\mathrel{\mathsf{E}_0} b$*, то* $\vartheta(a), \vartheta(b)$ $\preccurlyeq$*-несравнимы.* □

Утверждение (I), в сущности, говорит, что данный борелевский предпорядок $\preccurlyeq$ может быть *линеаризован*, т. е. усилен до борелевского же *линейного* предпорядка, скажем, $\preccurlyeq'$ (который затем вкладывается в 2^α для подходящего $\alpha < \omega_1$ по теореме 12.9.1), причем так, что если $\approx$ и $\approx'$ — отношения эквивалентности, соответствующие предпорядкам $\preccurlyeq$ и $\preccurlyeq'$, то разные $\approx$-классы не сливаются в один $\approx'$-класс. Если такая линеаризация невозможна, то согласно (II) образ отображения ϑ является $\preccurlyeq$ множеством несравнимых цепей, которое находятся во взаимно однозначном борелевском соответствии с множеством всех E_0-классов в $2^{\mathbb{N}}$.

Глава 13

Второй уровень проективной иерархии, неразрешимость проблем Лузина

Цель этой главы — введение в теорию точечных множеств второго проективного уровня, который состоит из классов $\mathbf{\Sigma}^1_2$, $\mathbf{\Pi}^1_2$, $\mathbf{\Delta}^1_2$ и соответствующих эффективных классов Σ^1_2, Π^1_2, Δ^1_2 с параметром $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или без него. В целом результаты здесь много беднее, чем для первого проективного уровня. В частности, не удается и, по-видимому, никогда не удастся доказать или опровергнуть утверждения о регулярности, измеримости, свойстве Бэра, свойстве совершенного ядра для множеств второго проективного уровня.

Такое в высшей степени необычное «решение» этих проблем классической дескриптивной теории множеств, поставленных Н. Н. Лузиным в 1920-х и 30-х годах, было найдено значительно позже и на основе методов современной теории множеств, таких как конструктивность по Гёделю и форсинг (вынуждение) по Коэну. Изложение этих методов не входит в содержание книги; аксиома детерминированности, которая позволяет доказать половину упомянутого «решения», и сама эта половина излагаются в следующих главах.

В этой главе мы изложим основные теоремы о структуре второго проективного уровня и прокомментируем главные результаты о проблемах регулярности и еще об одной группе проблем: о несчетных последовательностях борелевских множеств ограниченного ранга.

§ 13.1 Структура второго проективного уровня

Для начала напомним, что законы униформизации, редукции, отделимости на втором проективном уровне противоположны законам для первого проективного уровня. Именно, как было показано в § 8.5, **униформизация** и **редукция** выполнены для $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множеств, но не для $\mathbf{\Pi}^1_2$-множеств, а **отделимость**, наоборот, для $\mathbf{\Pi}^1_2$-множеств, но не для $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множеств. В то же время на первом уровне выполнены **униформизация** и **редукция** для класса $\mathbf{\Pi}^1_1$, но не для $\mathbf{\Sigma}^1_1$, а **отделимость** — для $\mathbf{\Sigma}^1_1$, но не для $\mathbf{\Pi}^1_1$. То же самое верно для эффективных классов $\varSigma^1_2(p)$, $\varPi^1_2(p)$, $\varSigma^1_2(p)$ при любом параметре p.

Добавим один простой результат.

Следствие 13.1.1. *Каждое $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество X является объединением борелевских множеств в числе не более чем $\aleph_1$.*

Доказательство. По определению X тождественно проекции некоторого $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества, т. е. СА-множества P. Последнее допускает представление в виде объединения $P = \bigcup_{\alpha<\omega_1} P_\alpha$ борелевских множеств P_α (см. следствие 4.3.5). Так что $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$, где каждое X_α есть проекция борелевского множества P_α, т. е. множество класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$, или, что то же самое, A-множество. Значит, каждое множество X_α допускает представление в виде объединения $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\omega_1} X_{\alpha\beta}$ борелевских множеств $X_{\alpha\beta}$ (снова следствие 4.3.5). Окончательно $X = \bigcup_{\alpha,\beta<\omega_1} X_{\alpha\beta}$, что и требовалось. □

Посмотрим как обстоит дело с однозначными и счетнозначными множествами. С одной стороны, по теореме униформизации 8.4.1 каждое множество класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$ является проекцией однозначного $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества. С другой стороны, по теореме 11.1.1 на первом проективном уровне проекциями однозначных даже $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеств являются только $\mathbf{\Delta}^1_1$-множества, но отнюдь не все множества более широкого класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$. То же верно и для эффективных классов.

Большие различия имеются и для теорем расщепления и накрытия. Напомним, что любое однозначное множество класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$ накрывается однозначным $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеством, а любое счетнозначное множество класса $\mathbf{\Delta}^1_1$ является счетным объединением однозначных $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеств; см. теоремы 11.1.5 и 11.1.3. А для второго уровня мы имеем прямо противоположное.

Теорема 13.1.2. *Существует однозначное множество класса $\varSigma^1_2$, которое не накрывается никаким даже счетнозначным $\mathbf{\Pi}^1_2$-множеством.*

Теорема 13.1.3. *Существует счетнозначное множество класса $\mathit{\Pi}^1_1$, которое не является счетным объединением однозначных $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множеств.*

Эти теоремы из работы [5, § 5] усиливают некоторые результаты, известные из более ранних работ, в частности отмеченное П. С. Новиковым и Л. В. Келдыш в работе [27] существование однозначного множества класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$, не накрываемого никаким однозначным $\mathbf{\Delta}^1_2$-множеством, и доказанное В. И. Гливенко в работе [50] существование однозначного множества класса $\mathbf{\Pi}^1_1$, не накрываемого никаким однозначным $\mathbf{\Delta}^1_1$-множеством.

Доказательство (теорема 13.1.2)**.** Результат несложен. Мы начинаем с универсального $\mathit{\Sigma}^1_2$-множества $U \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$, т. е. требуется, чтобы любое множество $R \subseteq (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$ имело вид $R = U_a = \{\langle b, c\rangle \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2 : U(a, b, c)\}$ для подходящего $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Теперь рассмотрим $\mathit{\Sigma}^1_2$-множество $Z = \{\langle a, c\rangle : U(a, a, c)\}$. По теореме униформизации найдется однозначное $\mathit{\Sigma}^1_2$-множество $P \subseteq Z$, для которого $\mathtt{pr}\, P = \mathtt{pr}\, Z$. Это и ведет к доказательству теоремы.

Именно, предположим противное, т. е. пусть $P \subseteq Q$, где $Q \subseteq (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$ является счетнозначным $\mathbf{\Pi}^1_2$-множеством. Тогда дополнительное множество $R = (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2 \smallsetminus Q$ принадлежит классу $\mathbf{\Sigma}^1_2$, а потому найдется $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, для которого $R = U_a$. Далее, поскольку множество Q счетнозначно, для дополнительного множества R выполнено равенство $\mathtt{pr}\, R = \mathbb{N}^\mathbb{N}$, а потому можно подобрать точку $c \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, удовлетворяющую соотношению $R(a, c)$, а тогда (поскольку $R = U_a$) и $U(a, a, c)$, а значит, $\langle a, c\rangle \in Z$ и $a \in \mathtt{pr}\, Z = \mathtt{pr}\, P$. Из этого следует, что для некоторого b справедливо $P(a, b)$. Тогда (идем обратно) выполнены и соотношения $Z(a, b)$, $U(a, a, b)$, $R(a, b)$. Итак, точка $\langle a, b\rangle$ принадлежит двум непересекающимся множествам P и R, т. е. мы получаем противоречие. □

Доказательство (теорема 13.1.3, набросок)**.** Начнем с множества U всех таких пар $\langle a, b\rangle \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \times 2^\mathbb{N}$, что b является характеристической функцией некоторого $\mathit{\Sigma}^1_2(a)$-множества $u \subseteq \mathbb{N}$. Оставив пока в стороне вопрос о его проективном классе, докажем, что U не является объединением счетного числа однозначных $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множеств.

Пусть, напротив, $U = \bigcup_m P_m$, где все множества $P_m \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times 2^\mathbb{N}$ однозначны и имеют класс $\mathbf{\Sigma}^1_2$. Найдется такой параметр $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, что каждое из P_m принадлежит классу $\mathit{\Sigma}^1_2(a)$. Напомним, что по теореме иерархии (следствие 6.7.4) существует множество $u \subseteq \mathbb{N}$, $u \in \mathit{\Sigma}^1_2(a) \smallsetminus \mathit{\Delta}^1_2(a)$. Его характеристическая функция $b \in 2^\mathbb{N}$ принадлежит сечению $U_a = \{b \in 2^\mathbb{N} : U(a, b)\}$ множества U, т. е. сечению одного из однозначных $\mathit{\Sigma}^1_2(a)$-множеств P_m, а потому, очевидно, синглет $\{b\}$ также имеет класс $\Sigma^1_2(a)$, а значит, по лемме 6.9.1 сама точка b принадлежит $\Delta^1_2(a)$. Отсюда следует, что $u = \{k : b(k) = 1\} \in \Delta^1_2(a)$, и мы получаем противоречие.

Дальнейший ход доказательства основан на следующей лемме.

Лемма 13.1.4. *Множество U принадлежит классу Σ^1_2.* □

Доказательство леммы, в принципе несложное (см. теорему 5.6 в работе [5, § 13]), использует некоторые результаты теории конструктивных множеств и поэтому не может быть воспроизведено здесь. Было бы интересно, конечно, получить более элементарное доказательство, которое пока неизвестно.

Приняв лемму 13.1.4, мы получаем очевидно счетнозначное Σ^1_2-множество U, по доказанному не представимое в виде объединения счетного числа однозначных $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множеств. Чтобы получить теперь искомое Π^1_1-множество с тем же свойством, используем обычный прием. Именно, возьмем Π^1_1-множество $P \subseteq (\mathbb{N}^\mathbb{N})^3$, проектирующееся в U, т. е. $U(a,b) \iff \exists\, c\, P(a,b,c)$, и униформизуем его в смысле $(\mathbb{N}^\mathbb{N})^2 \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ таким Π^1_1-множеством $Q \subseteq P$, что

$$U(a,b) \iff \exists\, c\, Q(a,b,c) \iff \exists!\, c\, Q(a,b,c)\,.$$

Множество Q счетнозначно в смысле $\mathbb{N}^\mathbb{N} \times (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$ вследствие однозначности Q в смысле $(\mathbb{N}^\mathbb{N})^2 \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и счетнозначности U и не представимо в виде объединения счетного числа множеств класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$, однозначных в смысле $\mathbb{N}^\mathbb{N} \times (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$. Остается взять подходящий гомеоморфизм $h \colon (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2 \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и множество $W = \{\langle a, h(b,c)\rangle : Q(a,b,c)\}$, и теорема 13.1.3 доказана. □

§ 13.2 Проблемы регулярности по Лузину

Все борелевские множества в любом польском пространстве, разумеется, измеримы в смысле любой борелевской меры и благодаря σ-аддитивности понятий, связанных с категорией, имеют свойство Бэра. Вопрос о наличии совершенного ядра («свойства совершенного ядра») у несчетных борелевских множеств не столь прост: прямая индукция по построению множеств с помощью борелевских операций не проходит. Решение было найдено П. С. Александровым в работе [36] и Ф. Хаусдорфом в работе [55] независимо и разными методами. Доказательство, данное Александровым, привело к открытию М. Я. Суслиным A-операции и A-множеств и, тем самым, $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств. Н. Н. Лузин в работе [80] и М. Я. Суслин в работе [113] установили, что A-множества имеют все три свойства регулярности: для них выполняются теоремы 3.4.1 и 5.3.1 этой книги.

Здесь будет удобно ввести следующие обозначения, в которых $\mathbf{K}$ — произвольный класс проективной или эффективной иерархий и «$\mathbf{K}$-множество» означает, как обычно, «множество из класса $\mathbf{K}$»:

PK($\mathbf{K}$): всякое $\mathbf{K}$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет свойство совершенного ядра, т. е. X либо счетно, либо содержит совершенное подмножество;

LM($\mathbf{K}$): всякое $\mathbf{K}$-множество $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ является $\boldsymbol{\lambda}$-измеримым, где мера $\boldsymbol{\lambda}$ — та, которая определена в примере 5.1.7;

BP($\mathbf{K}$): всякое $\mathbf{K}$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет свойство Бэра.

Конечно, сразу возникает следующий вопрос: взяв эти частные формулировки (т. е. для бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ либо для $2^{\mathbb{N}}$ и одной специальной меры для свойства измеримости), не упустили ли мы чего-нибудь важного в отношении других польских пространств и мер. Негативный ответ (не упустили) дается следующей теоремой.

Теорема 13.2.1. *Если $\mathbf{K}$ — проективный класс начиная с классов $\boldsymbol{\Sigma}^1_1, \boldsymbol{\Pi}^1_1, \boldsymbol{\Delta}^1_1$ первого уровня, а $\mathbb{X}$ — несчетное польское пространство, то*

(i) PK($\mathbf{K}$) *равносильно тому, что всякое $\mathbf{K}$-множество $X \subseteq \mathbb{X}$ имеет свойство совершенного ядра*;

(ii) LM($\mathbf{K}$) *равносильно тому, что всякое $\mathbf{K}$-множество $X \subseteq \mathbb{X}$ является μ-измеримо, где μ — любая борелевская σ-конечная мера на $\mathbb{X}$*;

(iii) BP($\mathbf{K}$) *равносильно тому, что всякое $\mathbf{K}$-множество $X \subseteq \mathbb{X}$ имеет свойство Бэра.*

Доказательство (набросок)**.** (i) Используем тот факт, что все несчетные польские пространства борелевски изоморфны по теореме 2.6.2, и отдельно теорему 3.4.1, чтобы доказать, что образ совершенного множества при таком изоморфизме сам содержит совершенное подмножество.

(ii) Здесь придется поработать. Зафиксируем некоторую вероятностную борелевскую меру μ на польском пространстве $\mathbb{X}$ (σ-конечные меры сводятся к конечным, а те к вероятностным, по достаточно простым соображениям). Утверждается, что существуют борелевские множества $X \subseteq \mathbb{X}$ полной μ-меры и $Y \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ полной $\boldsymbol{\lambda}$-меры и борелевская биекция $h\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$, переводящая μ в $\boldsymbol{\lambda}$. Из этого утверждения, очевидно, следует искомый результат.

Для наглядности будем предполагать, что μ и $\boldsymbol{\lambda}$ являются вероятностными мерами на $[0,1]$ (отрезок вещественной прямой). Удалив из $[0,1]$ все интервалы (a,b) μ-меры 0, мы получаем такое совершенное множество $X \subseteq [0,1]$, что $\mu(X) = 1$ и $\mu(I \cap X) > 0$ всякий раз когда интервал $I = (a,b)$ непусто пересекается с X. Аналогично найдется такое совершенное множество $Y \subseteq [0,1]$, что $\boldsymbol{\lambda}(Y) = 1$ и $\boldsymbol{\lambda}(I \cap Y) > 0$ всякий раз когда $I \cap Y = \varnothing$.

Положим $f(x) = \mu(X' \cap [0,x))$ для $x \in X$; легко видеть, что f – сохраняющая порядок непрерывная функция из X на $[0,1]$. Более того, f переводит меру μ на X в обычную лебегову меру на $[0,1]$. Наконец, функция f «почти» взаимно однозначна в том смысле что равенство $f(x) = f(y)$ выполнено при $x \neq y$ только в том случае когда x, y – концы одного и того же смежного интервала к X, так что если мы удалим из X все, например, левые концы таких интервалов, то f будет биекцией на полученном множестве X' и всё еще будет выполняться равенство $\mu(X') = 1$.

Построив таким же образом, но исходя из $\boldsymbol{\lambda}$, функцию $g\colon Y \xrightarrow{\text{на}} [0,1]$ и множество $Y' \subseteq Y$, $\boldsymbol{\lambda}(Y') = 1$, мы получаем борелевский изоморфизм $h(x) = g^{-1}(f(x)) : X' \xrightarrow{\text{на}} Y'$, переводящий μ в $\boldsymbol{\lambda}$, что и завершает доказательство этого утверждения.

(iii) Согласно теореме 1.6.4 пространство $\mathbb{X}$ становится гомеоморфным пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ после удаления из $\mathbb{X}$ некоторого тощего $\mathbf{F}_\sigma$-множества. $\square$

§ 13.3 Анализ проблем. Неразрешимость

В свете теоремы 13.2.1 упомянутые в § 13.2 результаты могут быть выражены как $\mathrm{PK}(\boldsymbol{\Sigma}^1_1)$, $\mathrm{LM}(\boldsymbol{\Sigma}^1_1)$, $\mathrm{BP}(\boldsymbol{\Sigma}^1_1)$. Конечно, измеримость и свойство Бэра переносятся и на класс $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ дополнительных множеств. Все предпринятые в классической дескриптивной теории попытки распространить эти результаты на более высокие проективные классы, т. е. доказать или опровергнуть хотя бы утверждения $\mathrm{PK}(\boldsymbol{\Pi}^1_1)$, $\mathrm{LM}(\boldsymbol{\Sigma}^1_2)$, $\mathrm{BP}(\boldsymbol{\Sigma}^1_2)$, оказались неудачными. Очень быстро эти проблемы были осознаны как трудные и, вероятно, центральные в дескриптивной теории множеств. Более того, Н. Н. Лузин высказывает в заметках, опубликованных в 1925 г., убеждение, что в классе проективных множеств эти проблемы вообще неразрешимы, т. е. на содержащиеся в них вопросы невозможно дать никакого определенного ответа[1]. Несколько позже, в статье [24] (1951 г.), П. С. Новиков охарактеризовал проблемы о совершенном ядре для $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-множеств и

[1] Н. Н. Лузин пишет в работе [81]: «Неизвестно и никогда не будет известно, имеет ли каждое несчетное множество данного семейства [т. е. семейства проективных множеств] мощность континуума, является оно или нет множеством третьей категории [т. е. множеством, не имеющим свойства Бэра], измеримо ли оно».

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{LM}(\boldsymbol{\Sigma}^1_2) \arrow[dd] \arrow[r, dashed] & \mathrm{LM}(\boldsymbol{\Delta}^1_2) \\
\mathrm{PK}(\boldsymbol{\Pi}^1_1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & \mathrm{BP}(\boldsymbol{\Sigma}^1_2) \arrow[r, dashed] & \mathrm{BP}(\boldsymbol{\Delta}^1_2)
\end{tikzcd}
$$

измеримости $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$-множеств как две из трех «основных проблем дескриптивной теории функций» [2].

Итак, развитие классической дескриптивной теории множеств привело к проблемам о наличии свойств регулярности у точечных множеств, как в их «минимальной» (с точки зрения участвующего в них проективного класса) [3] и наиболее непосредственной форме, т. е.

$$
\mathrm{PK}(\boldsymbol{\Pi}^1_1)\,, \quad \mathrm{LM}(\boldsymbol{\Delta}^1_2)\,, \quad \mathrm{BP}(\boldsymbol{\Delta}^1_2)\,, \quad \mathrm{LM}(\boldsymbol{\Sigma}^1_2)\,, \quad \mathrm{BP}(\boldsymbol{\Sigma}^1_2)\,, \tag{$*$}
$$

так и в целом для класса всех проективных множеств [4]. Дальнейшее изучение этих проблем стало возможным только после развития таких методов современной теории множеств, как *конструктивность* и *форсинг*.

На диаграмме графически представлены основные связи пяти гипотез из списка $(*)$ со стр. 257. Именно, стрелки изображают доказуемые импликации между этими гипотезами, причем пунктирные стрелки изображают те импликации, которые получаются из тривиальных соображений (поскольку $\boldsymbol{\Delta}^1_2 \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^1_2$). Но каждая из пяти гипотез сама по себе оказывается неразрешимой. Другими словами, ее нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

Более точно, оказывается, что гипотезы неразрешимы в рамках аксиоматической теории множеств Цермело–Френкеля **ZFC** с аксиомой выбора. Эта теория была разработана в 1908–1925 гг., в част-

[2] Третьей в списке П. С. Новикова стоит проблема отделимости в высших проективных классах, ставшая особенно интересной после его собственной работы [102], где показано, что законы отделимости для второго проективного уровня обратны законам отделимости для первого уровня (см. § 13.1 выше, а также комментарии Н. Н. Лузина в работе [18, § 23]).

[3] Разумеется, не считая доказуемых утверждений для класса $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$.

[4] Строго говоря, $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$-случай проблем измеримости и свойства Бэра не минимален, поскольку $\boldsymbol{\Delta}^1_2$ – собственный подкласс класса $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ и для него эти проблемы также неразрешимы. Однако он заслуживают включения в список по крайней мере по двум причинам. Во-первых, класс $\boldsymbol{\Sigma}^1_2 = \mathrm{A}_2$ вообще привлекал больше внимания в классической дескриптивной теории, чем класс $\boldsymbol{\Delta}^1_2 = \mathrm{B}_2$. Во-вторых, методы решения этих проблем для $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$- и $\boldsymbol{\Delta}^1_2$-случаев, в сущности, одинаковы.

ности в связи с установкой сделать математические доказательства более аккуратными и кодифицировать все используемые в них аксиомы. Интересно, что, вообще говоря, не было аксиом, о которых математики вели бы споры, включать их или нет в эту аксиоматическую теорию множеств.[5] Подробнее об аксиоматической системе **ZFC** см., например, в книгах [14, 4, 3].

После длительной проработки оснований всех главных разделов математики считается твёрдо установленным, что любое математическое рассуждение может быть преобразовано в доказательство из аксиом **ZFC** (или, как говорят, в *вывод в теории* **ZFC**), и в этом смысле недоказуемость какого-то положения $\boldsymbol{P}$ в **ZFC** означает его недоказуемость в математике. Соответственно *неразрешимость* какой-либо математической проблемы, т. е. невозможность дать ни положительный, ни отрицательный ответ на поставленный вопрос, приравнивается к её неразрешимости в теории **ZFC**. Последняя же означает, что ни формула $\boldsymbol{P}$, выражающая данную проблему, ни её отрицание $\neg \boldsymbol{P}$ не имеют вывода в теории **ZFC**.

Главный результат о неразрешимости свойств регулярности проективных множеств формулируется в следующей общей теореме, доказательство которой выходит за рамки этой книги. Отметим, что это сводная теорема, соединяющая результаты, полученные в разное время и разными математиками, но главные результаты получены Гёделем [51], П. С. Новиковым [24], Мэнсфилдом [86], Соловеем [111, 110], В. А. Любецким [20, 21, 22].

Теорема 13.3.1. *Каждая из гипотез списка* $(*)$ *неразрешима в теории* **ZFC***, т. е. ее (гипотезу) нельзя ни доказать, ни опровергнуть, исходя из аксиом этой теории. Более точно,*

(i) *утверждение, что все пять гипотез имеют положительное решение (т. е. все множества указанных классов имеют требуемые свойства), не противоречит аксиомам* **ZFC** ;

(ii) *утверждение, что все пять гипотез имеют отрицательное решение (т. е. в указанных классах имеются соответствующие контрпримеры), не противоречит аксиомам* **ZFC** ;

[5] Если не считать дискуссии по поводу аксиомы выбора, которая велась скорее в рамках полемики о допустимости таких средств, как закон исключенного третьего, неэффективные построения, «актуально» бесконечные множества и т. п., в которой отрицание аксиомы выбора скорее означало отрицание вообще любой теоретико-множественной аксиоматики. Этой теме в значительной мере посвящены знаменитые «Cinq lettres» [37] — переписка между Адамаром, Бэром, Борелем и Лебегом. Н. Н. Лузин говорит об этом в своих работах [16, часть III], [82, пп. 31, 60, 64] или в книге [85, гл. 1 и заключение].

(iii) *утверждение, что каждое проективное множество имеет все три рассматриваемых свойства регулярности, не противоречит аксиомам* **ZFC**.

Дополнительно,

(iv) *все импликации, обозначенные на диаграмме на с. 257 стрелками обоих видов, доказуемы в* **ZFC**, *однако*

(v) *обратные импликации, и вообще любые другие попарные связи между этими гипотезами, кроме указанных стрелками на диаграмме на с. 257, недоказуемы в* **ZFC**.

(vi) *все утверждения о непротиворечивости и недоказуемости в пунктах* (i), (ii), (iii), (v), *остаются в силе также и по отношению к теориям* **ZFC** + **CH** *и* **ZFC** + ¬ **CH**, *т. е. с добавленной континуум-гипотезой* **CH** *либо с добавленным отрицанием континуум-гипотезы.*

Эта теорема справедлива в молчаливом предположении, что сама аксиоматика **ZFC** непротиворечива. Это предположение обязательно, так как в противоречивой теории по законам математической логики можно доказать любое утверждение. Более того, доказательство частей (i) и (iii) теоремы требует допустить непротиворечивость более сильной аксиоматики **ZFCI**, получаемой из аксиоматики **ZFC** добавлением аксиомы о существовании недостижимого кардинала, по крайней мере в отношении свойства совершенного ядра, а также в отношении свойства измеримости выше класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$. Не входя в обсуждение этого сложного вопроса, отметим, что нет никаких оснований сомневаться в непротиворечивости этих аксиоматик. Детали см. в нашей обзорной статье [11].

Возвращаясь к диаграмме, стоит отметить удивительную асимметрию. Утверждение $\mathrm{LM}(\mathbf{\Sigma}^1_2) \Longrightarrow \mathrm{BP}(\mathbf{\Sigma}^1_2)$ доказуемо, но обратное утверждение недоказуемо, что говорит о глубоком различии между измеримостью и свойством Бэра.

В доказательствах теоремы 13.3.1 большую роль играют понятия точек генерических по Коэну и случайных по Соловею. Если задано польское пространство $\mathbb{X}$, например, вещественная прямая $\mathbb{R}$ или бэровское пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то точка $x \in \mathbb{X}$ является *генерической по Коэну*, если её нельзя включить ни в какое тощее множество в $\mathbb{X}$, кодируемое конструктивным (по Гёделю) вещественным числом. Аналогично вводится понятие точки *случайной по Соловею*, только тощие множества заменяются множествами меры 0 в смысле заранее заданной меры на $\mathbb{X}$. Множество всех генерических точек и множество всех случайных точек сами по себе — замечательные теоретико-множественные объекты, о которых см. в статьях [11] и [12].

§ 13.4 О несчетных последовательностях борелевских множеств и о конституантах

Сюда же следует добавить и еще одну группу проблем классической дескриптивной теории множеств.

Вернемся к анализу гипотезы $\mathrm{PK}(\boldsymbol{\Pi}^1_1)$ о существовании несчетного $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-множества без совершенного подмножества, проведенному в § 4.4 (где множества класса $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ назывались CA-множествами). Чтобы не повторяться, под *последовательностью конституант* мы договоримся понимать любую последовательность множеств вида $A_\xi = \boldsymbol{A}_\xi[\mathfrak{F}]$ или $C_\xi = \boldsymbol{C}_\xi[\mathfrak{F}]$, $\xi < \omega_1$, где $\mathfrak{F} = \{F_s\}_{s\in\mathbb{N}^{<\omega}}$ — регулярная суслинская система замкнутых множеств F_s данного польского пространства, как в определении 4.3.1. Следуя старой традиции, конституанты вида C_ξ, т. е. конституанты CA-множества $C = \bigcup_{\xi<\omega_1} C_\xi$, будем называть *внешними*, а конституанты вида A_ξ, т. е. конституанты A-множества $A = \bigcup_{\xi<\omega_1} A_\xi$, — *внутренними*.

Назовем последовательность конституант A_ξ или C_ξ *ограниченной*, если найдется такой ординал $\xi_0 < \omega_1$, что все члены с индексами $\xi > \xi_0$ суть пустые множества. Другими словами, *неограниченная* последовательность конституант — это последовательность, которая содержит бесконечно много непустых членов.

Замечание 13.4.1. В этой терминологии результат следствия 4.4.6 можно переформулировать так: для существования несчетного $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-множества, не имеющего совершенных подмножеств, необходимо и достаточно, чтобы существовала неограниченная последовательность внешних конституант, все члены которой — не более чем счетные множества.

Мы знаем сейчас из результатов, вкратце изложенных в § 13.3, что проблема существования таких последовательностей конституант, как в замечании 13.4.1, неразрешима. Однако в 1930-е гг. это не было известно, и математики, работавшие в дескриптивной теории множеств, рассматривали разные модификации этой проблемы, пытаясь где-то нащупать основу для содержательного исследования. Приведем здесь следующие проблемы этого типа, сформулированные Н. Н. Лузиным в ряде работ 1930-х гг., в частности в статьях [17, 18, 84].

Проблема 1. Существует ли неограниченная последовательность внешних конституант, каждый член которой, т. е. каждая конституанта C_ξ, $\xi < \omega_1$, содержит ровно одну точку?

Проблема 2. Существует ли неограниченная последовательность внешних конституант, все члены которой — не более чем счетные множества?

Проблема 3. Существует ли неограниченная последовательность внешних конституант, члены которой являются борелевскими множествами *ограниченного ранга*, т. е. существует такой ординал $\rho < \omega_1$, что каждая конституанта C_ξ данной последовательности есть $\mathbf{\Sigma}^0_\rho$-множество?

Подобно проблемам из § 13.3, связанным со свойствами регулярности, две из этих трех проблем, а именно 2 и 3, оказались неразрешимыми, причем эквивалентными в том смысле, что из существования последовательности конституант, удовлетворяющей требованиям проблемы 3, следует существование последовательности конституант, удовлетворяющей требованиям проблемы 2. (В обратную сторону результат очевиден: все счетные множества принадлежат классу $\mathbf{\Sigma}^0_2$.)

Проблема 1 оказалась, напротив, разрешимой в отрицательном направлении: таких последовательностей нет. При этом разница обеспечивается не требованием одноэлементности как таковым, а подразумеваемой непустотой каждой внешней конституанты. Добавив это требование к проблемам 2 и 3, мы также получаем проблемы, разрешимые отрицательно.

Более подробно об этих результатах заинтересованный читатель может узнать из статей [30] и [6]. Первая посвящена истории проблем и их решений, а вторая излагает собственно решения на техническом уровне. Техника доказательств включает такие методы современной теории множеств, как конструктивность и метод вынуждения, которые выходят за рамки этой книги.

Совсем недавно некоторые из результатов, связанных с последовательностями конституант ограниченного борелевского ранга, удалось распространить на более широкий тип ω_1-последовательностей, порождаемых $\mathbf{\Pi}^1_1$-нормами (см. упражнение 8.3.6); об этом см. в статье [43].

Глава 14

Бесконечные игры и аксиома детерминированности

Мы отмечали в гл. 13, что теоремы классической дескриптивной теории множеств относятся в основном к двум первым уровням иерархии: борелевские множества, $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества (или А-множества) и их дополнения (класс $\mathbf{\Pi}^1_1$), а также, для некоторых результатов, множества второго проективного уровня (классы $\mathbf{\Sigma}^1_2$, $\mathbf{\Pi}^1_2$, $\mathbf{\Delta}^1_2$). И плюс «эффективные» варианты тех же классов, т. е., например, Σ^1_1, $\Sigma^1_1(p)$, где $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (параметр). При этом свойства регулярности уже приводят к неразрешимым проблемам для второго проективного уровня и, в отношении свойства совершенного ядра, даже для класса $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Специалисты по основаниям математики предприняли ряд попыток усилить аксиомы теории **ZFC**, с тем чтобы было можно как-то содержательно исследовать высшие проективные уровни. Наибольший успех здесь принесло направление, связанное с аксиомой детерминированности и ее вариантами, которое мы представим в двух последних главах настоящей книги.

§14.1 Введение в теорию детерминированности

С каждым множеством A «бэровской плоскости» $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2 = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ассоциируется игра $\mathbf{G}_A$ двух игроков, обозначаемых, как правило, **I** и **II** (а также, например, А и В, Он и Она, или как-то иначе), на множестве $\mathbb{N}$. Игра проходит следующим образом:

игрок **I** пишет натуральное число a_0;

игрок **II**, зная «ход» a_0, пишет свое натуральное число b_0;

опять игрок **I**, зная b_0, пишет натуральное число a_1;

игрок **II**, зная a_1, пишет натуральное число b_1;

и т. д. до бесконечности. В конечном счете получается пара бесконечных последовательностей

$$\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle, \ \boldsymbol{b} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \langle b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots \rangle,$$

т. е. точек пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, называемая *партией*. Если оказалось, что пара $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ принадлежит множеству A, то партия считается выигранной игроком **I**, а в противном случае определяется выигрыш игрока **II**. Множество A называется *игровым множеством*[1], кратко — ИМ, для этой игры.

Игроки могут делать свои ходы, следуя той или иной стратегии. *Стратегией* в игре рассматриваемого вида является любая функция, заданная на множестве $\mathbb{N}^{<\omega}$ всех кортежей (конечных последовательностей) натуральных чисел (с пустым кортежем Λ), и принимающая значения среди натуральных чисел. Таким образом, все стратегии в таких играх принадлежат множеству $\mathscr{S} = \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^{<\omega})}$ всех функций $\sigma \colon \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$. Это множество во многих вопросах можно отождествлять с бэровским пространством $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Если игрок **I** придерживается стратегии $\sigma \colon \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$, то каждый свой ход a_n он должен делать в соответствии с равенством $a_n = \sigma(b_0, \ldots, b_{n-1})$, или, короче, $a_n = \sigma(\boldsymbol{b} \restriction n)$, где $\boldsymbol{b} \restriction n = \langle b_0, \ldots, b_{n-1} \rangle$ есть последовательность первых n ходов игрока **II** в рассматриваемой игре. В частности, начальный ход a_0 дается равенством $a_0 = \sigma(\Lambda)$, затем $a_1 = \sigma(b_0)$, $a_2 = \sigma(b_0, b_1)$, и так далее. Таким образом, стратегия σ полностью определяет последовательность $\boldsymbol{a} = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ ходов игрока **I** по данной последовательности $\boldsymbol{b} = \langle b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots \rangle$ ходов игрока **II**. Задаваемую указанными равенствами последовательность $\boldsymbol{a}$ обозначают через $\sigma * \boldsymbol{b}$.

Говорят, что стратегия σ является выигрывающей стратегией (кратко ВС) для игрока **I** в игре $\mathbf{G}_A$ (= в игре с игровым множеством A), если $\sigma * \boldsymbol{b} \in A$, какова бы ни была точка $\boldsymbol{b} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Другими

[1] В англоязычной литературе «payoff set», что затруднительно перевести на русский язык дословно.

словами, выигрывающая стратегия обеспечивает выигрыш, как бы ни играл противник. Аналогично стратегия $\tau\colon \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$ является выигрывающей стратегией для игрока **II** в игре $\mathbf{G}_A$, когда соотношение $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} * \tau \rangle \in A$ имеет место для любой точки $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, где точка $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} * \tau \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ определяется равенствами

$$b_0 = \tau(a_0), \quad b_1 = \tau(a_0, a_1), \quad b_1 = \sigma(a_0, a_1, a_2) \quad \text{и так далее.}$$

Множество A и игра $\mathbf{G}_A$ называются *детерминированными*, если один из игроков (оба одновременно, очевидно, не могут) имеет выигрывающую стратегию в игре $\mathbf{G}_A$. Часто замечают, что детерминированность игры $\mathbf{G}_A$ может быть условно выражена конъюнкцией

$$\exists\, a_0\, \forall\, b_0\, \exists\, a_1\, \forall\, b_1\, \ldots\, A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \;\vee\; \forall\, a_0\, \exists\, b_0\, \forall\, a_1\, \exists\, b_1\, \ldots\, \neg\, A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,, \qquad (*)$$

в которой, как обычно, $\boldsymbol{a} = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$, $\boldsymbol{b} = \langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle$, левая часть дизъюнкции выражает наличие выигрывающей стратегии для игрока **I**, а правая — для игрока **II**. Вся же дизъюнкция выглядит как закон исключенного третьего. Условность такого представления состоит в том, что попытка получить точный смысл бесконечных кванторных приставок в выражении $(*)$ неизбежно приводит обратно к играм и выигрывающим стратегиям.

Упражнение 14.1.1. Используя непрерывность и взаимную однозначность отображений $\boldsymbol{b} \mapsto \sigma * \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a} * \tau$, докажите, что детерминированное множество не может быть множеством Бернштейна (см. теорему 5.4.1).

Следствие 14.1.2 (из упражнения 14.1.1 и теоремы 5.4.1)**.** *Существуют недетерминированные множества $A \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$.* □

Напомним, что теорема 5.4.1 существенно использует аксиому выбора, — в сущности, ее доказательство требует выполнения цепочки из $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ последовательных пар выборов точек x_ξ и y_ξ. Таким образом, и данное доказательство существования недетерминированных множеств опирается на аксиому выбора.

Замечание 14.1.3. Как мы увидим ниже, детерминированность тех или иных игр имеет ряд интересных приложений в дескриптивной теории множеств. При этом математическое содержание рассматриваемых задач таково, что в наиболее естественной форме игры игроки выбирают не натуральные числа, а элементы заранее заданного множества I (игра *на множестве* I) или даже двух множеств, I и J, т. е. игрок **I** делает ходы $a_n \in I$, игрок **II** делает ходы $b_n \in J$, а игровое множество A удовлетворяет условию $A \subseteq I^{\mathbb{N}} \times J^{\mathbb{N}}$ (игра *на* *множествах* I, J, или игра *на* $I \times J$), Если множества I, J непусты и не более чем счетны, то любая игра в таком расширенном смысле сводится к уже рассмотренному типу игр на $\mathbb{N}$: возьмем пару функций $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} I$ и $g\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} J$ (если множества I, J строго счетны, то f, g могут быть биекциями), определим новое игровое множество $A' = \{\langle x, y\rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2 : \langle f \cdot x, g \cdot y\rangle \in A\}$, где $(f \cdot x)(f(n)) = x(n)$ для всех n и то же для $g \cdot y$, и так далее.

Ниже мы будем ссылаться на такие игры как на **обобщенный вариант** игр на $\mathbb{N}$. Для них естественным образом вводится понятие стратегий, ВС, детерминированных множеств $A \subseteq I^{\mathbb{N}} \times J^{\mathbb{N}}$ и соответствующих игр $\mathbf{G}_A$.

Игры позволяют определить важный оператор *игрового проектирования*. Пусть $\mathbb{X}$ — польское пространство и $B \subseteq \mathbb{X} \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$. Если $x \in \mathbb{X}$, то мы имеем *сечение* $(B)_x = \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2 : B(x, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\}$ и определенную им игру $\mathbf{G}_{(B)_x}$. Положим

$$\Game\, B = \{x \in \mathbb{X} : \text{игрок } \mathbf{I} \text{ имеет ВС в игре } \mathbf{G}_{(B)_x}\}.$$

Как и выше, действие оператора $\Game$ можно символически изобразить бесконечной строкой чередующихся кванторов по натуральным числам:

$$x \in \Game\, B \iff \exists\, a_0\, \forall\, b_0\, \exists\, a_1\, \forall\, b_1\, \ldots \exists\, a_n\, \forall\, b_n\, \ldots B(x, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

где, как обычно, $\boldsymbol{a} = \langle a_0, a_1, a_2, \dots\rangle$ и $\boldsymbol{b} = \langle b_0, b_1, b_2, \dots\rangle$.

§14.2 Пример: игра Банаха—Мазура

Классическим и, вероятно, самым первым примером игр такого рода является игра Банаха—Мазура. Она определяется для каждого множества $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ как игра на множестве $I = \mathbb{N}^{<\omega} \smallsetminus \{\Lambda\}$ всех непустых (конечных) кортежей натуральных чесел с игровым множеством $\mathrm{BM}(X) \subseteq I^{\mathbb{N}} \times I^{\mathbb{N}}$, состоящим из всех пар $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ бесконечных последовательностей $\boldsymbol{u} = \langle u_0, u_1, u_2, \dots\rangle$ и $\boldsymbol{v} = \langle v_0, v_1, v_2, \dots\rangle$ кортежей $u_i, v_i \in I$, для которых бесконечная последовательность $x(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_0{}^\wedge v_0{}^\wedge u_1{}^\wedge v_1{}^\wedge u_2{}^\wedge v_2{}^\wedge \dots \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит данному множеству X. Игра $\mathbf{G}_{\mathrm{BM}(X)}$ и называется *игрой Банаха—Мазура* для множества X в пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Интерес и значение этой игры объясняются ее связью со свойством Бэра для данного множества X, которая дается следующей теоремой:

Теорема 14.2.1 (Банах—Мазур). *Пусть $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Игрок* **II** *имеет ВС в игре $\mathbf{G}_{\mathrm{BM}(X)}$, если и только если X — тощее множество в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Соответственно игрок* **I** *имеет ВС в $\mathbf{G}_{\mathrm{BM}(X)}$, если и* *только если* $U \smallsetminus X$ *— тощее множество для некоторого бэровского интервала* $U = [s] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset x\}$.

Таким образом, игра $\mathbf{G}_{\mathrm{BM}(X)}$ имеет прямое отношение к свойству Бэра для множества X. Как мы увидим ниже, имеются другие типы игр, связанные похожим способом с иными важными свойствами данных точечных множеств.

Доказательство. Для первого утверждения в одну сторону всё просто. Поскольку X — тощее множество, найдется последовательность открытых плотных множеств $D_n \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, пересечение которых $D = \bigcap_n D_n$ не пересекает X. С учетом открытой плотности множеств D_n, игрок **II** может играть в $\mathbf{G}_{\mathrm{BM}(X)}$ так, что при любом n кортеж $w_n = u_0{}^\wedge v_0{}^\wedge u_1{}^\wedge v_1{}^\wedge \ldots {}^\wedge u_n{}^\wedge v_n \in \mathbb{N}^{<\omega}$ удовлетворяет равенству $U = [w_n] \subseteq D_n$. Этим он гарантирует выполнение условий $x(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in D$ и $x(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \notin X$.

Обратно, пусть τ — ВС для игрока **II** в игре $\mathbf{G}_{\mathrm{BM}(X)}$; докажем, что множество X тощее. Последовательность

$$t = \langle u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k \rangle$$

(четной длины) из кортежей $u_i, v_i \in I = \mathbb{N}^{<\omega} \smallsetminus \{\Lambda\}$ назовем τ-согласованной (кратко: τ-СП), если для всех $i < k$ выполнено равенство $v_i = \tau(u_0, u_1, \ldots, u_i)$. Далее, пусть $x \in 2^{\mathbb{N}}$; тогда τ-согласованную последовательность $t = \langle u_0, v_0, \ldots, u_k, v_k \rangle$ условимся называть x-максимальной, если, во-первых, кортеж-конкатенация

$$w(t) = u_0{}^\wedge v_0{}^\wedge u_1{}^\wedge v_1{}^\wedge \ldots {}^\wedge u_k{}^\wedge v_k$$

является началом последовательности x (т. е. $w(t) \subset x$) и, во-вторых, нет ни одной пары кортежей $u, v \in I$, для которой выполнено $v = \tau(u_0, u_1, \ldots, u_k, u)$ и $w(t)^\wedge u^\wedge v \subset x$.

Мы утверждаем, что для всякой точки $x \in X$ имеется x-максимальная τ-СП. Для доказательства проведем следующее построение. Пустая последовательность $t_0 = \Lambda$, очевидно, будет τ-СП, причем $w(t_0) = \Lambda \subset x$. Если последовательность t_0 не является x-максимальной, то t_0 можно продолжить, получая такую σ-СП $t_1 = \langle u_0, v_0 \rangle$, что $w(t_1) \subset x$. Если последовательность $\langle b_1, t_1 \rangle$ снова не x-максимальна, то существует еще более длинная τ-СП $t_2 = \langle u_0, v_0, v_1, v_1 \rangle$, удовлетворяющая условию $w(t_2) \subset x$. И так далее.

Но этот процесс не может продолжаться до бесконечности, ибо мы получили бы партию $\boldsymbol{a} = \langle u_0, u_1, \ldots \rangle$, $\boldsymbol{b} = \langle v_0, v_1, \ldots \rangle$ в игре $\mathbf{G}_{\mathrm{BM}(X)}$, соответствующую стратегии τ (т. е. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} * \tau$) и такую, что $x(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = x \in X$, чего не может быть по выбору τ. Итак, построение обрывается, и на соответствующем шаге k мы приходим к x-максимальной τ-СП t_k.

Итак, для любой точки $x \in X$ имеется x-максимальная τ-СП t.

Теперь рассмотрим произвольную τ-СП $t = \langle u_0, v_0, \ldots, u_k, v_k \rangle$. Если $u \in I$, то пусть $v(u) = \tau(u_0, u_1, \ldots, u_k, u)$ — это снова кортеж в I, а потому можно определить продолженную конкатенацию

$$w(t)^\wedge u^\wedge v(u) = u_0{}^\wedge v_0{}^\wedge u_1{}^\wedge v_1{}^\wedge \ldots {}^\wedge u_k{}^\wedge v_k{}^\wedge u^\wedge v(u) \in \mathbb{N}^{<\omega},$$

и множество $G_t = [w(t)] \smallsetminus \bigcup_{u \in I} [w(t)^\wedge u^\wedge v(u)] \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, очевидно, нигде не плотное в самом бэровском интервале $[w(t)]$.

Наконец, из определения максимальности немедленно следует, что если $x \in X$ и τ-СП t x-максимальна, то $x \in G_t$. Отсюда в силу очевидной счетности множества всех τ-СП получается, что множество X тощее.

Вторая часть теоремы (для стратегий игрока **I**) доказывается аналогично. В качестве s следует взять кортеж $s = \sigma(\Lambda)$ — начальный ход игрока **I** согласно какой-то его выигрывающей стратегии. $\square$

Игру Банаха—Мазура можно определить для любого множества X в произвольном топологическом пространстве $\mathbb{X}$. Именно, пусть I — фиксированная база топологии $\mathbb{X}$. Ходами игроков **I** и **II** являются множества $U_n \in I$ и $V_n \in I$ соответственно, причем требуется, чтобы выполнялись включения

$$U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq U_n \supseteq V_n \supseteq \ldots,$$

т. е. каждый последующий ход является подмножеством предыдущего. При этом игрок **I** выигрывает партию в игре $\mathbf{G}_{\mathrm{BM}(X)}$, если пересечение $\bigcap_n U_n = \bigcap_n V_n$ непусто, содержит единственную точку x, и эта точка принадлежит множеству X. В определенных предположениях относительно $\mathbb{X}$ (верных, например, для польских пространств) теорема 14.2.1 сохраняет силу в этом случае в отношении игрока **II** и требует некоторой очевидной переформулировки в отношении игрока **I**. Более подробно об этом говорится в книге [7].

Упражнение 14.2.2. Покажите, что игра Шоке из §10.1 относится к играм Банаха—Мазура. Какой смысл для этого случая имеет теорема 14.2.1?

§14.3 Теорема детерминированности открытых множеств

Поставим теперь другой вопрос: какие (с точки зрения положения в иерархиях дескриптивной теории множеств) множества $A \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ заведомо являются детерминированными? Следующая теорема показывает, что по крайней мере все открытые множества именно таковы.

Теорема 14.3.1 (Гейл и Стьюарт, [49]). *Каждое открытое множество $A \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ детерминировано.*

Доказательство. Рассмотрим модификацию, общую для многих приложений детерминированности: игра, начинающаяся с определенной позиции. Пусть в добавление к множеству $A \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ заданы два кортежа $u, v \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Игра $\mathbf{G}_A(u; v)$, или игра $\mathbf{G}_A$ с позиции $\langle u; v\rangle$, отличается от игры $\mathbf{G}_A$ только тем, что игрок **I** обязан сделать свои первые m ходов, где $m = \mathtt{lh}\, u$ — длина кортежа u, так, чтобы они как раз составили u, а игрок **II** должен делать первые n ($n = \mathtt{lh}\, v$) ходов так, чтобы эти ходы составили кортеж v.

Например, если заданы кортежи $u = \langle a_0, a_1\rangle$ и $v = \langle b_0\rangle$, то игра $\mathbf{G}_A(u; v)$ (= игра $\mathbf{G}_A$ с позиции $\langle u; v\rangle = \langle a_0, a_1; b_0\rangle$) предусматривает, что игрок **I** делает начальный ход a_0, затем игрок **II** делает ход b_0, снова игрок **I** делает ход a_1 — в этих трех ходах игроки не имеют выбора, будучи обязанными брать соответствующие члены кортежей u, v, — а все последующие ходы $b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ могут уже быть выбранными произвольно. Результат же партии в такой игре определяется, как и для игры $\mathbf{G}_A$, т. е. игрок **I** выигрывает в случае, когда $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in A$, где последовательности $\boldsymbol{a} = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle$ и $\boldsymbol{b} = \langle b_0, b_1, b_2, \ldots\rangle$ включают как вынужденные (т. е. a_0, b_0, a_1 в нашем примере), так и произвольные ходы.

Понятие стратегии и выигрывающей стратегии в играх, начинающихся с определенной позиции, поясняется на примере той же игры $\mathbf{G}_A(u; v)$, $u = \langle a_0, a_1\rangle$ и $v = \langle b_0\rangle$. Стратегией для игрока **I** в этой игре будет любая функция $\sigma\colon \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющая условиям $\sigma(\Lambda) = a_0$ и $\sigma(b_0) = a_1$. Такая стратегия будет выигрывающей для игрока **I**, если $\sigma * \boldsymbol{b} \in A$, какова бы ни была точка $\boldsymbol{b} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющая равенству $\boldsymbol{b}(0) = b_0$ (в общем случае — удовлетворяющая условию $v \subset \boldsymbol{b}$). Точно так же вводятся понятия стратегии $\tau\colon \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$ и ВС для игрока **II**: в рассматриваемой игре нужно потребовать, чтобы выполнялось равенство $\tau(a_0) = b_0$, и в этом случае τ будет ВС для игрока **II**, если $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} * \tau\rangle \in A$ для любой такой точки $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $\boldsymbol{a}(0) = a_0$ и $\boldsymbol{a}(1) = a_1$ ($u \subset \boldsymbol{a}$ в общем случае). Наконец, говорят, что позиция $\langle u; v\rangle$ является выигрывающей для игрока **I** (соответственно для игрока **II**) в игре $\mathbf{G}_A$, когда игрок **I** (соответственно игрок **II**) имеет ВС в игре $\mathbf{G}_A(u; v)$.

Изложив эти определения, обратимся непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим произвольное открытое множество $A \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$. Допуская, что игрок **I** не имеет ВС в игре $\mathbf{G}_A$, укажем, как должен действовать игрок **II**, чтобы выиграть в этой игре.

Пусть игрок **I** делает некоторый начальный ход $a_0 \in \mathbb{N}$. По предположению начальная позиция $\langle \Lambda; \Lambda\rangle$ не является выигрывающей для игрока **I**, а значит и позиция $\langle a_0 ; \Lambda\rangle$ не будет для выигрывающей для **I**. Поэтому игрок **II** может сделать ход b_0 так, что позиция $\langle a_0 ; b_0\rangle$ снова не будет выигрывающей для **I**. Допустим, что один из таких ходов $b_0 \in \mathbb{N}$ (для определенности, пусть наименьший из них) игрок **II** берет своим ответом на ход a_0 противника.

Пусть, далее, игрок **I** производит очередной ход $a_1 \in \mathbb{N}$. Аналогичное рассуждение показывает, что игрок **II** имеет такой ход b_1, что позиция $\langle a_0, a_1 ; b_0, b_1\rangle$ не является выигрывающей для противника. И так далее.

Из этого описания действий игрока **II** не составляет труда извлечь стратегию $\tau\colon \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$, обладающую тем свойством, что если для любой последовательности $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ходов игрока **I**, определить $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} * \tau$ (последовательность ответов игрока **II** по стратегии τ), то, каково бы ни было натуральное число n, позиция $\langle \boldsymbol{a} \restriction n ; \boldsymbol{b} \restriction n\rangle$ не является выигрывающей для игрока **I** в игре $\mathbf{G}_A$. В частности, для всякого n найдется такая пара $\langle \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n\rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2 \smallsetminus A$, что $\boldsymbol{a}_n \restriction n = \boldsymbol{a} \restriction n$ и $\boldsymbol{b}_n \restriction n = \boldsymbol{b} \restriction n$ (иначе позиция $\langle \boldsymbol{a} \restriction n ; \boldsymbol{b} \restriction n\rangle$ уже была бы выиграна игроком **I** независимо от всех последующих ходов обоих игроков). Другими словами, имеется сходящаяся к точке $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ последовательность точек $\langle \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n\rangle$ замкнутого дополнения множества A. Следовательно, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \notin A$, и это всякий раз, когда $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} * \tau$. Так что найденная стратегия τ в самом деле будет ВС для игрока **II** в игре $\mathbf{G}_A$, что и требовалось. □

Упражнение 14.3.2. Дайте строгое определение игры $\mathbf{G}_A(u ; v)$ (см. начало доказательства теоремы) в виде $\mathbf{G}_{A'}$ для некоторого множества A', зависящего от A, u, v. Определение множества A' должно реализовывать две идеи. Во-первых, если хотя бы один из игроков делает ход, не соответствующий начальной позиции, т. е., например, игрок **I** делает ход $a_i \neq u(i)$ для некоторого $i < \mathtt{lh}\, u$, то тот из игроков, который допускает такое нарушение первым по ходу игры (включая случай, когда он допускает такое нарушение хотя бы раз, а соперник не допускает ни одного нарушения), проигрывает. Во-вторых, если оба игрока следуют правилу начальной позиции, то игрок **I** выигрывает, когда $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in A$.

§ 14.4 Детерминированность в проективных классах

Для каждого (скажем, проективного) класса Γ рассматривается гипотеза $\mathrm{D{\scriptsize ET}}(\Gamma)$, утверждающая детерминированность всех множеств $A \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ класса Γ. В этой терминологии теорема 14.3.1

утверждает, что выполнена гипотеза $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$. Переход к двойственному классу дается следующей леммой.

Лемма 14.4.1. *Гипотеза* $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^1_n)$ *равносильна* $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_n)$.

Доказательство. Мы хотели бы вывести детерминированность данного $\mathbf{\Pi}^1_n$-множества $A \subseteq (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$ из детерминированности дополнительного $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множества $C = (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2 \smallsetminus A$. Так как сделать это прямо не удается, приходится слегка преобразовать множество C. Для каждой точки $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ положим $x^-(n) = x(n+1)$, $\forall n$. (Удалено значение $x(0)$.) Ввиду непрерывности отображения $x \mapsto x^-$ множество $C' = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x^-\rangle \in C\}$ принадлежит классу $\mathbf{\Sigma}^1_n$ вместе с C, а потому детерминировано по предположению $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^1_n)$. Если игрок **I** имеет ВС σ в игре $\mathbf{G}_{C'}$, то стратегия $\tau = \sigma$ будет ВС для игрока **II** в игре $\mathbf{G}_A$. Если же игрок **II** имеет ВС τ в игре $\mathbf{G}_{C'}$, то ВС σ для игрока **I** в игре $\mathbf{G}_A$ задается соотношением $\sigma(u) = \tau(u^-)$ для всех $u \in \mathbb{N}^{<\omega}$. (Кортеж u^- получается удалением из u самого левого члена — ср. с определением x^- для $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$.) □

Следствие 14.4.2. *Каждое замкнутое множество* $A \subseteq (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$ *детерминировано, т. е. выполняется гипотеза* $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^0_1)$. □

Наиболее сильной в этом направлении является следующая теорема, доказательство которой выходит за рамки настоящей книги; технически самый доступный вариант доказательства изложен у Кехриса, см. [68, гл. 20].

Теорема 14.4.3 (Мартин, [90, 91]). *Каждое борелевское множество* $A \subseteq (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$ *детерминировано, т. е. выполняется гипотеза* $\mathrm{Det}(\mathbf{\Delta}^1_1)$. □

Но уже для непосредственно следующих за $\mathbf{\Delta}^1_1$ классов $\mathbf{\Sigma}^1_1$ и $\mathbf{\Pi}^1_1$ гипотеза $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^1_1)$ (и равносильная ей гипотеза $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_1)$) недоказуема в **ZFC**, см. § 14.5. Впрочем, $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^1_1)$ можно вывести, допустив существование *измеримого кардинала*, одного из так называемых *больших кардиналов*. (См. об этом в книге [3, гл. 8]; других источников на русском языке нет.)

Упражнение 14.4.4. Пусть I, J — непустые счетные множества, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{\Gamma}$ — один из проективных классов $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$ и выполняется гипотеза $\mathrm{Det}(\mathbf{\Gamma})$. Докажите, что тогда любое $\mathbf{\Gamma}$-множество $A \subseteq I^\mathbb{N} \times J^\mathbb{N}$ детерминировано в смысле обобщенного подхода из замечания 14.1.3.

Одно любопытное приложение гипотез детерминированности связано с оператором «игрового проектирования» из § 14.1. Для каждого класса Γ точечных множеств через $\Game\,\Gamma$ обозначается совокупность всех множеств вида $\Game\, B$, где B — множество из Γ, расположенное в одном из пространств вида $\mathbb{X}\times(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$, а $\mathbb{X}$ — польское пространство. Согласно следующей лемме, последовательно применяя $\Game$ к классу $\mathbf{\Sigma}^0_1 = \mathbf{\Sigma}^1_0$ открытых множеств, мы получаем классы $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Sigma}^1_2$, $\mathbf{\Pi}^1_3$, $\mathbf{\Sigma}^1_4$, ... и соответственно, применяя $\Game$ к классу $\mathbf{\Pi}^0_1 = \mathbf{\Pi}^1_0$ замкнутых множеств, мы получаем классы $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_2$, $\mathbf{\Sigma}^1_3$, $\mathbf{\Pi}^1_4$, ...

Лемма 14.4.5. *Если выполнена гипотеза* $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^1_m)$*, то имеют место равенства* $\Game\,\mathbf{\Pi}^1_m = \mathbf{\Sigma}^1_{m+1}$ *и* $\Game\,\mathbf{\Sigma}^1_m = \mathbf{\Pi}^1_{m+1}$.

Доказательство. Рассмотрим первое равенство.

Докажем включение справа налево. Пусть $X\subseteq\mathbb{X}$, $X\in\mathbf{\Sigma}^1_{m+1}$. Тогда X совпадает с проекцией $\mathtt{pr}\,Q=\{x\in\mathbb{X}:\exists y\,Q(x,y)\}$ некоторого $\mathbf{\Pi}^1_m$-множества $Q\subseteq\mathbb{X}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Теперь мы имеем $X=\Game\,B$, где

$$B=\{\langle x,y,z\rangle\in\mathbb{X}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}:Q(x,y)\}\in\mathbf{\Pi}^1_m\,.$$

Докажем включение слева направо. Пусть $X=\Game\,B$, где $B\subseteq\mathbb{X}\times(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ — множество класса $\mathbf{\Pi}^1_m$. Таким образом,

$$X=\{x:\exists\sigma\colon\mathbb{N}^{<\omega}\to\mathbb{N}\,\forall\boldsymbol{b}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,B(x,\sigma*\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\}.$$

Здесь переменная σ ограничена пространством $\mathbb{S}=(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$, т. е. по существу бэровским пространством, с точностью до гомеоморфизма, индуцированного любой биекцией из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^{<\omega}$. Далее, множество

$$W=\{\langle x,\boldsymbol{b},\sigma\rangle:B(x,\sigma*\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\}\subseteq\mathbb{X}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{S}$$

имеет класс $\mathbf{\Pi}^1_m$, поскольку отображение $\langle\sigma,\boldsymbol{b}\rangle\mapsto\sigma*\boldsymbol{b}$ непрерывно. Поэтому наше множество $X=\{x:\exists\sigma\in\mathbf{S}\,\forall\boldsymbol{b}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,W(x,\boldsymbol{b},\sigma)\}$ принадлежит классу $\mathbf{\Sigma}^1_{m+1}$.

Перейдем ко второму равенству леммы. Доказательство включения слева направо в том же виде, как для первого утверждения, не проходит: мы получим слишком высокий класс $\mathbf{\Sigma}^1_{m+2}$ для множества $X=\Game\,B$. Чтобы обойти это затруднение, используем гипотезу $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^1_m)$ для замены условия существования ВС для игрока **I** условием несуществования ВС для игрока **II**, что и дает искомый класс $\mathbf{\Pi}^1_{m+1}$ для множества $X=\Game\,B$. □

§ 14.5 Приложение к свойствам регулярности

Результаты уже первых работ по детерминированности [100, 98, 99] показали, что для каждого множества X в бэровском пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (или в любом польском пространстве) существуют игры, предположение о детерминированности которых гарантирует основные свойства регулярности (см. § 5.4) для данного множества X, т. е. абсолютную измеримость, свойство Бэра и свойство совершенного ядра. В отношении свойства Бэра, например, речь идет об игре Банаха—Мазура, рассмотренной в § 14.2. См. об этом также гл. 8 в книге [3] и специально посвященную этим вопросам книгу [7].

Затем выяснилось, что при любом n из гипотезы о детерминированности всех $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множеств вытекают свойства регулярности даже на следующем проективном уровне.

Теорема 14.5.1 ($\mathrm{D{\scriptsize ET}}(\mathbf{\Sigma}^1_n)$). *Все множества класса $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ обладают свойством Бэра и свойством совершенного ядра, и измеримы в смысле любой σ-конечной меры на соответствующем польском пространстве.*

Эта теорема впервые опубликована в книге [97], а в отношении свойства Бэра и свойства совершенного ядра — также в [89], но сами результаты получены Мартином и Кехрисом в начале 70-х гг.

Отметим один специфический момент в сформулированной теореме, присущий также некоторым другим следствиям детерминированности. Именно, при $n = 0$ гипотеза $\mathrm{D{\scriptsize ET}}(\mathbf{\Sigma}^1_n)$ является теоремой (теорема 14.3.1). Следовательно, и заключение об измеримости, свойстве Бэра и свойстве совершенного ядра у всех $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств является обычным математическим фактом, не опирающимся ни на какие гипотезы детерминированности. Этим мы получаем альтернативное доказательство теорем 3.4.1 и 5.3.1 о том, что каждое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество имеет все три свойства регулярности. В этой связи действительно заслуживает внимания то, что теорема 14.5.1 весьма естественно обобщает упомянутые результаты для класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$, обращаясь в последние при $n = 0$.

Второе наше замечание касается уже уровня $n = 1$. Согласно результатам П. С. Новикова (см. статью [24]), средствами аксиом **ZFC** невозможно доказать выполнение хотя бы одного из рассматриваемых трех свойств регулярности для всех множеств класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$. Следовательно, и гипотеза $\mathrm{D{\scriptsize ET}}(\mathbf{\Sigma}^1_1)$ невыводима в теории **ZFC**, ибо по теореме 14.5.1 из нее вытекает каждое из этих трех свойств для всех $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множеств. (Собственно, достаточно ограничиться хотя бы одним из них, скажем свойством совершенного ядра.)

Мы приведем в § 14.6 доказательство той части теоремы 14.5.1, которая касается совершенного ядра. Для свойства Бэра в § 14.7 дано доказательство более сильного результата, чем содержащийся в теореме. Доказательство теоремы для измеримости здесь не приводится, так как оно имеет технически более сложный характер. Два разных доказательства менее точного результата, о том что из **PD** следует измеримость каждого проективного множества, см. на русском языке в книге [7] и в статье [10].

§ 14.6 Свойство совершенного ядра

Доказательство (теорема 14.5.1, свойство совершенного ядра)**.** Наш план сводится к следующему: для специально построенной игры G будет показано, что если игрок **I** имеет ВС в этой игре, то множество X включает совершенное подмножество, а если ВС есть у игрока **II**, то X не более чем счетно. А детерминированность игры будет следовать из гипотезы $\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Sigma}^1_n)$.

Не ограничивая общности, можно предполагать, что $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, где $2^{\mathbb{N}}$ — канторов дисконтинуум. (Действительно, имеется гомеоморфизм между $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и подходящим косчетным в $2^{\mathbb{N}}$ множеством, позволяющий провести редукцию к указанному частному случаю.) Тогда найдется такое $\boldsymbol{\Pi}^1_n$-множество $Q \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что

$$X = \mathtt{pr}\, Q = \{x \in 2^{\mathbb{N}} : \exists\, y\, Q(x,y)\}.$$

Ниже мы определим игру на множестве $I \times J$, где $I = \{0,1\}$ (двухэлементное множество), а $J = \mathbb{N} \times 2^{<\omega}$ (счетное множество). Напомним, что $2^{<\omega}$ — множество всех конечных кортежей нулей и единиц. Таким образом, ходами игрока **I** являются числа $a_n = 0,1$, а ходами игрока **II** — пары $p_i = \langle b_i, u_i\rangle \in J = \mathbb{N} \times 2^{<\omega}$. Партией же является любая пара последовательностей $\boldsymbol{a} = \langle a_0, a_1, a_2, \dots\rangle \in 2^{\mathbb{N}}$ и $\boldsymbol{p} = \langle p_0, p_1, p_2, \dots\rangle \in (\mathbb{N} \times 2^{<\omega})^{\mathbb{N}}$, где $a_i = 0,1$, $p_i = \langle b_i, u_i\rangle$, $b_i \in \mathbb{N}$ и $u_i \in 2^{<\omega}$ для всех i. В этом случае определим

$$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}) = u_0{}^\wedge\langle a_1\rangle^\wedge u_1{}^\wedge\langle a_2\rangle^\wedge \ldots \in 2^{\mathbb{N}}, \quad H(\boldsymbol{p}) = \langle b_0, b_1, b_2, b_3, \dots\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Функции $D\colon 2^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N} \times 2^{<\omega})^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ и $H\colon (\mathbb{N} \times 2^{<\omega})^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, очевидно, непрерывны, а потому множество

$$A[Q] = \{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{p}\rangle \in 2^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N} \times 2^{<\omega})^{\mathbb{N}} : \langle D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}), H(\boldsymbol{p})\rangle \notin Q\}$$

принадлежит $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, так что соответствующая игра[2] $\mathbf{G}_{A[Q]}$ является детерминированной.

Благодаря детерминированности игры $\mathbf{G}_{A[Q]}$ один из игроков имеет выигрывающую стратегию.

[2] Отметим, что начальный ход a_0 игрока **I** совершенно не влияет на исход партии, так как a_0 не участвует в определении $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{p})$; по существу, игрок **I** «пропускает» ход, предоставляя право фактически начать партию противнику.

Случай 1: игрок **I** имеет ВС σ в игре $\mathbf{G}_{A[Q]}$. Заметим, что σ является здесь функцией из счетного множества $(\mathbb{N} \times 2^{<\omega})^{<\omega}$ (всех кортежей с членами из $\mathbb{N} \times 2^{<\omega}$) в $2 = \{0,1\}$, т. е. σ принадлежит пространству $\mathscr{S} = 2^{((\mathbb{N} \times 2^{<\omega})^{<\omega})}$, которое гомеоморфно канторову дисконтинууму $2^{\mathbb{N}}$. Нашей целью будет доказать, что в этом случае данное множество X не более чем счетно.

Рассматривается множество $\boldsymbol{T}$ всех конечных последовательностей вида $t = \langle a_0, p_0, a_1, p_1, \ldots, a_{k-1}, p_{k-1}, a_k \rangle$ (нечетной длины) из членов $a_i = 0, 1$ и $p_i = \langle b_i, u_i \rangle \in \mathbb{N} \times 2^{<\omega}$. Такую последовательность t назовем σ-согласованной (кратко — σ-СП), если для всех $i \le k$ выполнено равенство $a_i = \sigma(p_0, p_1, \ldots, p_{i-1})$; это означает, что t — начало партии в игре вида $A[Q]$, в которой игрок **I** придерживается стратегии σ. Если к тому же $x \in 2^{\mathbb{N}}$, $b \in \mathbb{N}$ и кортеж-конкатенация

$$w(t) = u_0{}^\wedge\langle a_1 \rangle{}^\wedge u_1{}^\wedge\langle a_2 \rangle{}^\wedge \ldots {}^\wedge u_{k-1}{}^\wedge\langle a_k \rangle$$

является началом бесконечной последовательности x (т. е. $w(t) \subset x$), но нет такого кортежа $u \in 2^{<\omega}$ и такого числа $a = 0, 1$, что $w(t)^\wedge u^\wedge\langle a \rangle \subset x$ и $a = \sigma(p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}, p)$, где $p = \langle b, u \rangle$, то пару $\langle b, t \rangle$ условимся называть *x-максимальной*.

Мы утверждаем, что ко всякой точке $x \in X$ имеется x-максимальная пара. Действительно, поскольку $x \in X$, мы имеем $\langle x, y \rangle \in Q$ для некоторой точки $y = \langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, которая фиксируется. Положим $a_0 = \sigma(\Lambda)$. Тогда $t_0 = \langle a_0 \rangle$ является σ-СП, и при этом $w(t_0) = \Lambda \subset x$. Если пара $\langle b_0, t_0 \rangle$ не является x-максимальной, то t_0 можно продолжить, получая такую σ-СП $t_1 = \langle a_0, p_0, a_1 \rangle$, что $w(t_1) \subset x$ и $p_0 = \langle b_0, u_0 \rangle$, $u_0 \in 2^{<\omega}$. Если снова пара $\langle b_1, t_1 \rangle$ не x-максимальна, то существует еще более длинная σ-СП $t_2 = \langle a_0, p_0, a_1, p_1, a_2 \rangle$, для которой $w(t_2) \subset x$ и $p_1 = \langle b_1, u_1 \rangle$, $u_1 \in 2^{<\omega}$. И так далее. Но этот процесс не может продолжаться до бесконечности, ибо мы получили бы партию $\boldsymbol{a} = \langle a_0, a_1, \ldots \rangle$, $\boldsymbol{p} = \langle p_0, p_1, \ldots \rangle$ в игре $\mathbf{G}_A$, соответствующую стратегии σ (т. е. $\boldsymbol{a} = \sigma * \boldsymbol{b}$) и такую, что $\langle D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}), H(\boldsymbol{p}) \rangle = \langle x, y \rangle \notin Q$, чего не может быть по выбору σ. Итак, построение обрывается, и на соответствующем шаге k мы приходим к x-максимальной паре $\langle b, t \rangle$.

Таким образом, для любой точки $x \in X$ действительно существует x-максимальная пара $\langle b, t \rangle$. Убедимся, что в такой ситуации x однозначно определяется по b и t посредством σ. Этого будет достаточно для доказательства счетности множества X, так как совокупность всех пар $\langle b, t \rangle$ рассматриваемого вида счетна. Пусть $t = \langle a_0, p_0, \ldots, a_{k-1}, p_{k-1}, a_k \rangle$. Поскольку $w(t) \subset x$, найдется m такое, что $w(t) = x \restriction m$. Этим равенством уже определены все значения $x(j)$, где $j < m$. Покажем, как индукцией по i вычислить все значения $x(m+i)$.

Пусть $i \in \mathbb{N}$. Положим $u^i = \langle x(m), \dots, x(m+i-1)\rangle$, $p^i = \langle b, u^i\rangle$ и $a^i = \sigma(p_0, \dots, p_{k-1}, p^i)$. Понятно, что $t^i = t^\wedge\langle p^i, a^i\rangle$ будет σ-СП. Следовательно, ввиду x-максимальности пары $\langle b, t\rangle$, мы получаем $w(t^i) \not\subset x$. Однако $w(t^i) = w(t)^\wedge u^{i\wedge}\langle a^i\rangle$, и ясно, что $w(t)^\wedge u^i \subset x$. Значит, $a^i \neq x(m+i)$. Вместе с тем, $x(m+i) = 0$ или 1 так как $x \in X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, и $a^i = 0$ или 1. Значит, при любом $i \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $x(m+i) = 1 - \sigma(p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p^i)$, которое и позволяет последовательно найти все числа $x(m+i)$.

Случай 2: игрок $\mathbf{II}$ имеет ВС τ в игре $\mathbf{G}_A$. Проверим, что в этом случае наше множество X включает совершенное подмножество. Функция $F(\boldsymbol{a}) = D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} * \tau)$ непрерывна, а образ $C = \{F(\boldsymbol{a}) : \boldsymbol{a} \in 2^{\mathbb{N}}\}$ дисконтинуума $2^{\mathbb{N}}$ включен в X по выбору τ и в соответствии с определением множества A. Теперь если мы установим взаимную однозначность отображения F, то можно будет заключить, что C — искомое совершенное подмножество множества X.

Рассмотрим пару точек $\boldsymbol{a} = \langle a_0, a_1, \dots\rangle \neq \boldsymbol{a}' = \langle a'_0, a'_1, \dots\rangle$ дисконтинуума $2^{\mathbb{N}}$, и пусть m — наименьший такой индекс, что $a'_m \neq a_m$. Положим $p_i = \tau(a_0, ..., a_i) = \langle b_i, u_i\rangle$ и $p'_i = \tau(a'_0, ..., a'_i) = \langle b'_i, u'_i\rangle$ для всех i. Тогда

$$F(\boldsymbol{a}) = u_0{}^\wedge\langle a_1\rangle^\wedge u_1{}^\wedge\langle a_2\rangle^\wedge \dots \quad \text{и} \quad F(\boldsymbol{a}') = u'_0{}^\wedge\langle a'_1\rangle^\wedge u'_1{}^\wedge\langle a'_2\rangle^\wedge \dots .$$

По выбору τ мы получим $a'_i = a_i$, а тогда и $u'_i = u_i$ для всех $i < m$, но $a'_m \neq a_m$. Значит, $F(a) \neq F(a')$, что и требовалось.

□ (теорема 14.5.1, совершенное ядро)

Упражнение 14.6.1. Приведите выкладки для случая 1 из доказательства теоремы 14.5.1 для совершенного ядра к следующей компактной форме.

В предположении $\mathrm{D{\scriptstyle ET}}(\mathbf{\Sigma}^1_n)$ если $\sigma \in \mathscr{S} = 2^{((\mathbb{N}\times 2^{<\omega})^{<\omega})}$ (т. е. σ может быть стратегией для игрока $\mathbf{I}$ в игре вида $\mathbf{G}_{A[Q]}$), то каждой паре из числа $b \in \mathbb{N}$ и кортежа $t \in \boldsymbol{T}$ сопоставляется точка $x = \Xi_{bt}(\sigma) \in 2^{\mathbb{N}}$ таким образом, что если $Q \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — множество класса $\mathbf{\Pi}^1_n$ и σ является ВС для игрока $\mathbf{I}$ в игре $\mathbf{G}_{A[Q]}$, то множество $X = \mathtt{pr}\, Q = \{x \in 2^{\mathbb{N}} : \exists y\, Q(x, y)\}$ удовлетворяет условию $X \subseteq \{\Xi_{bt}(\sigma) : b \in \mathbb{N} \wedge t \in \boldsymbol{T}\}$, и тем самым, X не более чем счетно. При этом каждая из функций $\Xi_{bt} : 2^{((\mathbb{N}\times 2^{<\omega})^{<\omega})} \to 2^{\mathbb{N}}$ непрерывна.

§ 14.7 Свойство Бэра

Обратимся теперь к свойству Бэра. Действие оператора ∂ на проективные классы определяется леммой 14.4.5. Поэтому результат теоремы 14.5.1 для свойства Бэра вытекает из следующей теоремы Кехриса.

Теорема 14.7.1. *Пусть* $\mathbf{\Gamma}$ *— проективный класс и выполняется гипотеза* $\mathrm{DET}(\mathbf{\Gamma})$*. Тогда каждое множество из* $\Game\,\mathbf{\Gamma}$ *имеет свойство Бэра.*

Доказательство. Мы ограничимся случаем множеств пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Достаточно показать, что, каково бы ни было $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ класса $\Game\,\mathbf{\Gamma}$, либо X тощее, либо найдется такой бэровский интервал $U = [w]$ (где $w \in \mathbb{N}^{<\omega}$) в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что разность $U \smallsetminus X$ — тощее множество. Итак, пусть $X = \Game\,B$, где множество $B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ принадлежит $\mathbf{\Gamma}$. Рассмотрим игру G, в которой оба игрока **I** и **II** каждым своим ходом выбирают одну из пар вида $\langle a, u\rangle$, где $a \in \mathbb{N}$ и $u \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $u \neq \Lambda$, т. е. это игра на множестве $\mathbb{N} \times (\mathbb{N}^{<\omega} \smallsetminus \{\Lambda\})$. Последовательность ходов в партии выглядит так:

$$\begin{array}{llllllll} \text{игрок } \mathbf{I}: & a_0, u_0 & & a_1, u_1 & & a_2, u_2, & & \ldots, \\ \text{игрок } \mathbf{II}: & & b_0, v_0 & & b_1, v_1 & & b_2, v_2, & \ldots, \end{array}$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ и $u_i, v_i \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Для определения результата составляются точки $\boldsymbol{a} = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle$, $\boldsymbol{b} = \langle b_0, b_1, b_2, \ldots\rangle$ и

$$\boldsymbol{x} = u_0{}^\wedge v_0{}^\wedge u_1{}^\wedge v_1{}^\wedge u_2{}^\wedge v_2{}^\wedge \ldots$$

в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Полагаем, что игрок **I** выигрывает в случае, когда $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in B$, а иначе выигрывает игрок **II**[3].

Игра G детерминирована, поскольку ее игровое множество (в пространстве $(\mathbb{N}\times 2^{<\omega})^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}\times 2^{<\omega})^{\mathbb{N}}$) получается из B как непрерывный прообраз. Следовательно, один из игроков имеет ВС в игре G.

Случай 1: игрок **II** имеет ВС τ в игре G. (Мы предпочитаем начать с этого случая.) Докажем, что тогда X — тощее множество. Условимся, что буквами u, v (с индексами) обозначаются только кортежи из множества $\mathbb{N}^{<\omega} \smallsetminus \{\Lambda\}$. Стратегия τ определена на кортежах вида $\langle a_0, u_0, a_1, u_1, a_2, u_2, \ldots\rangle$ и принимает значения среди пар $\langle b, v\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$. Последовательность вида

$$t = \langle a_0, u_0, b_0, v_0, a_1, u_1, b_1, v_1, \ldots, a_{k-1}, u_{k-1}, b_{k-1}, v_{k-1}\rangle \qquad (1)$$

назовем τ-согласованной (кратко — τ-СП), если для любого $i < k$ выполняется равенство $\langle b_i, v_i\rangle = \tau(a_0, u_0, a_1, u_1, \ldots, a_i, u_i)$. Если при этом $a \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, кортеж $w(t) = u_0{}^\wedge v_0{}^\wedge u_1{}^\wedge v_1{}^\wedge \ldots{}^\wedge u_{k-1}{}^\wedge v_{k-1}$ удовлетворяет соотношению $w(t) \subset x$, и нет ни одной такой τ-СП t'

[3] Сравните эту игру с игрой Банаха—Мазура, из которой она происходит!

вида $t^\wedge\langle a_k, u_k, b_k, v_k\rangle$, что $w(t') \subset x$ и $a_k = a$, то пару $\langle a, t\rangle$ будем называть x-максимальной.

И вновь для всякой точки $x \in X$ существует максимальная пара $\langle a, t\rangle$. Идея та же, что и в доказательстве теорем 14.2.1 и 14.5.1, с той, однако, разницей, что используется ВС σ для игрока **I** в игре $\mathbf{G}_{(B)_x}$, которую он имеет при $x \in X = \Game B$. Детали мы опускаем. Допустив, что максимальные пары существуют, выведем, что данное множество X тощее.

Предположим, что $x \in X$, а пара $\langle a, t\rangle$ является x-максимальной; в частности, t есть τ-СП вида (1). Пусть $u \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $u \neq \Lambda$ и

$$\langle b, v\rangle = \tau(a_0, u_0, \ldots, a_{k-1}, u_{k-1}, a, u)\,.$$

Определяемый этим равенством кортеж $v \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $v \neq \Lambda$, обозначим через $v(u)$. Последовательность $t' = t^\wedge\langle a, u, b, v(u)\rangle$ снова будет τ-СП. Поэтому ввиду x-максимальности пары $\langle a, t\rangle$ мы получаем $w(t') = w(t)^\wedge u^\wedge v(u) \not\subset x$. Таким образом, точка x принадлежит множеству

$$W_t = [w(t)] \smallsetminus \textstyle\bigcup_{u \in \mathbb{N}^{<\omega},\, u \neq \Lambda}[w(t)^\wedge u^\wedge v(u)]\,.$$

Ввиду произвольности точки $x \in X$ в этом рассуждении, можно заключить, что $X \subseteq \bigcup_t W_t$. Но каждое из множеств W_t нигде не плотно.

Случай 2: игрок **I** имеет ВС σ в игре G. Пусть $\langle a, u\rangle = \sigma(\Lambda)$ — начальный ход по стратегии σ. Выкладки, близкие к проведенным в случае 1, позволяют доказать, что $[u] \smallsetminus X$ будет тощим множеством. Дополнительный момент здесь состоит в том, что каждое сечение $(B)_x$, $x \in X$, множества B принадлежит, как и само B, классу $\mathbf{\Gamma}$. Следовательно, в силу предположения $\mathrm{D{\scriptstyle ET}}(\mathbf{\Gamma})$, если $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \smallsetminus X$, то игрок **II** имеет ВС в игре $\mathbf{G}_{(B)_x}$. $\square$

§14.8 Аксиомы детерминированности

Помимо частных гипотез детерминированности вроде рассмотренных выше гипотез $\mathrm{D{\scriptstyle ET}}(\mathbf{\Gamma})$ для различных проективных классов $\mathbf{\Gamma}$, рассматриваются и более общие аксиомы детерминированности. Наибольший интерес с точки зрения приложений к дескриптивной теории представляют *аксиома детерминированности* **AD**, постулирующая детерминированность каждого множества $A \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$, и *аксиома проективной детерминированности* **PD**, постулирующая детерминированность всех проективных множеств $A \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$.

Следствие 14.8.1 (PD). *Все проективные множества обладают свойством Бэра и свойством совершенного ядра и измеримы* *в смысле любой σ-конечной меры на соответствующем польском пространстве.* □

Этот результат прямо вытекает из теоремы 14.5.1. Таким образом, гипотеза **PD** решает в положительном смысле проблемы об основных свойствах регулярности для всех проективных множеств. В то же время для **AD** известна следующая гораздо более сильная теорема, распространяющая свойства регулярности вообще на все точечные множества. Она доказана в ранних работах по детерминированности [42, 100, 98, 99], а утверждение для свойства Бэра, кстати, легко следует из теоремы 14.2.1.

Теорема 14.8.2 (**AD**). *Все множества $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ обладают свойством Бэра и свойством совершенного ядра и измеримы в смысле любой σ-конечной меры на данном польском пространстве.* □

Скажем несколько слов о взаимоотношениях гипотез детерминированности с аксиомами системы Цермело—Френкеля **ZFC**. Напомним, что буква C (от choice, choix) в аббревиатуре **ZFC** означает, что в список аксиом включена аксиома выбора **AC**. Исключив эту аксиому, получают более слабую теорию, обозначаемую **ZF**. Таким образом, **ZFC** = **ZF** + **AC**. Вопрос о роли аксиомы выбора в современной математике хорошо изучен, и выводы получены такие.

1. Аксиома выбора практически не нужна в математике там, где занимаются конечными множествами (комбинаторика, конечные группы, и т. п.).

2. Аксиома выбора нужна в тех разделах математики, которые так или иначе основаны на вещественной прямой $\mathbb{R}$, причем здесь обычно можно обойтись *аксиомой зависимого выбора*[4] **DC**, которая используется, например, в выводе счетной аддитивности меры Лебега. Это разрешает рассматривать **ZF** + **DC** как важную подтеорию теории **ZFC**.

3. Полная аксиома выбора, несомненно, нужна в современных абстрактных разделах математики, таких как теория множеств, теоретико-множественная топология, и некоторые другие.

Аксиома **AD** противоречит аксиоме выбора, хотя бы потому, что из последней согласно следствию 14.1.2 вытекает существование неде-

[4] Аксиома зависимого выбора **DC** — это усиленный вариант счетной аксиомы выбора в случае, когда выбор каждого элемента производится из множества, зависящего от результатов предыдущих выборов. Более точно, если каждому кортежу $u = \langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle \in X^{<\omega}$ элементов некоторого множества X сопоставлено непустое множество $C_u \subseteq X$, то аксиома **DC** утверждает, что для всякого элемента $x \in X$ найдется такая бесконечная последовательность $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ элементов $x_n \in X$, что $x_0 = x$ и $x_n \in C_{\boldsymbol{x} \upharpoonright n}$ для всех n.

терминированных множеств. Тем самым, присоединять **AD** к **ZFC** не имеет смысла. Рассматриваются, однако, такие теории с аксиомами детерминированности, как **ZFC** + **PD** (аксиома выбора плюс аксиома проективной детерминированности) и **ZF** + **DC** + **AD** (полной аксиомы выбора нет, но имеется аксиома зависимого выбора и полная аксиома детерминированности).

Вопрос о непротиворечивости теорий **ZF**+**DC**+**AD** и **ZFC**+**PD** считается в удовлетворительном смысле решенным в рамках современной теоретико-множественной парадигмы, после того как Мартин и Стил в работе [92] доказали, что непротиворечивость обеих теорий следует из непротиворечивости гипотезы существования одного очень большого кардинала[5]. Дополнительным аргументом в пользу непротиворечивости является фактическое отсутствие противоречий в тех очень богатых картинах следствий в теории множеств, включая и дескриптивную теорию множеств, которые уже получены для обеих этих теорий. С этой точки зрения, ситуация качественно мало чем отличается от вопроса о непротиворечивости самой теории **ZFC**.

Что же касается *относительной* непротиворечивости, то даже **ZF**+**PD** намного сильнее теории **ZFC**. Далее, если теория **ZF**+**AD** непротиворечива, то она остается таковой после добавления **DC**. В то же время ни принцип **DC**, ни аксиома выбора $\mathbf{AC}_{\aleph_0}$ для счетных семейств непустых множеств не являются теоремами **ZF**+**AD**. (См., однако, упражнение 14.8.3.) Об этих сложных метаматематических результатах см., например, статьи [66, 112].

Так или иначе, аксиомы **AD** и **PD** всерьез рассматриваются в качестве дополнительных «рабочих» аксиом теории множеств. В этой связи употребляется термин *игровой универсум*[6] для обозначения теоретико-множественного универсума, в котором действует одна из аксиом детерминированности, например, **PD**. Помимо богатой картины следствий для проективных множеств, часть (по необходимости небольшая) которых представлена в этой и следующей главах, одним из аргументов в пользу принятия **AD** или **PD** в качестве теоретико-множественной аксиомы является то, что детерминированность игры $\mathbf{G}_A$ может быть условно выражена как закон исключенного третьего для формул с бесконечными кванторными приставками, см. §14.1.

Упражнение 14.8.3. Докажите в теории **ZF** + **AD**, что аксиома выбора выполнена для счетных семейств множеств бэровского

[5] А именно, измеримого по Уламу кардинала, превосходящего бесконечное число кардиналов Вудина.

[6] В англоязычной литературе «playful universe».

пространства. Для этого, задавшись семейством непустых множеств $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, рассмотрите игру $\mathbf{G}_A$, где $A = \{\langle x, y\rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2 : y \notin Z_{x(0)}\}$. Игрок **I** не может иметь выигрывающей стратегии в этой игре, поскольку, какой бы начальный ход a_0 он ни сделал, игрок **II** обеспечит себе выигрыш, делая свои ходы b_n так, чтобы их последовательность $\boldsymbol{b}$ совпадала с выбранной им заранее (но после хода a_0) точкой $y \in Z_{a_0}$. Следовательно, игрок **II** имеет ВС τ в игре $\mathbf{G}_A$. Покажите, что такая стратегия обеспечивает функцию выбора для семейства множеств Z_j.

Глава 15

Структура высших уровней проективной иерархии в детерминированном универсуме

Продолжая изложение теории детерминированности, мы перейдем от следствий гипотез детерминированности для свойств регулярности к их следствиям для структурной теории проективных классов. Наиболее важным результатом здесь является продолжение на все проективные уровни феномена осцилляции с шагом 2, выявляемого в отношении свойств **отделимости**, **редукции**, **униформизации** на первых уровнях проективной иерархии. Этот феномен был отмечен в замечании 8.5.5. В ходе доказательства этого результата нам придется изучить более основательно некоторые технические конструкции из гл. 8, а также вывести принципиальную теорему об определимом выборе выигрывающей стратегии.

§15.1 Первая теорема периодичности

Мы начнем с проблем, связанных со свойствами **редукции** и **отделимости** для высших проективных классов. Выше было показано, что **редукция** имеет место для классов $\mathbf{\Sigma}^1_0$, $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Sigma}^1_2$, но не для двойственных классов $\mathbf{\Pi}^1_0$, $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_2$, а **отделимость** — наоборот, для классов $\mathbf{\Pi}^1_0$, $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_2$, но не для $\mathbf{\Sigma}^1_0$, $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Sigma}^1_2$, см. §8.5. Высшие же проективные уровни совершенно не поддавались попыткам выяснить законы отделимости и редукции. Вместе с тем проблема отделимости и редукции — наряду с проблемой свойств регулярности — традиционно ставилась на первое место среди классических задач дескриптивной теории множеств.

Отсюда возникают два вопроса. Во-первых, в чем причина осцилляции между $\mathbf{\Sigma}$-классами и $\mathbf{\Pi}$-классами в этих теоремах классической дескриптивной теории множеств? Во-вторых, что же всё-таки происходит со свойствами **редукции** и **отделимости** в высших проективных классах?

Аксиомы **ZFC** представляются недостаточно сильными для ответа на эти вопросы. Для дальнейшего исследования предлагались различные подходы. Например, можно усилить **ZFC** посредством подходящей аксиомы. Исторически первой такой аксиомой была *аксиома конструктивности* Гёделя, обычно обозначаемая равенством $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, где $\mathbf{V}$ символизирует теоретико-множественный универсум, $\mathbf{L}$ обозначает класс всех конструктивных множеств, а само равенство выражает аксиому: каждое множество принадлежит $\mathbf{L}$, т. е. конструктивно. Наконец, *конструктивными* называются множества, получаемые в ходе особого трансфинитного построения, начинающегося с пустого множества. Здесь нет места обсуждать соответствующие детали, скажем лишь, что если теория **ZFC** непротиворечива, то и расширенная теория **ZFC** + «$\mathbf{V} = \mathbf{L}$» остается непротиворечивой, как показано Гёделем в работе [51]. На русском языке о конструктивности и ее следствиях см. книги [14, 4, 3] и статьи [11, 12].

Для нас здесь важно такое следствие аксиомы $\mathbf{V} = \mathbf{L}$: для любого $n \geq 3$ **редукция** имеет место для класса $\mathbf{\Sigma}^1_n$, но не для двойственного класса $\mathbf{\Pi}^1_n$, а **отделимость** — наоборот, для класса $\mathbf{\Pi}^1_n$, но не для $\mathbf{\Sigma}^1_n$, см. [51, 24]. Таким образом, аксиома конструктивности делает все уровни проективной иерархии начиная с третьего подобными уровню 2 в отношении свойств **редукции** и **отделимости**. Этим дается ответ на второй из поставленных выше вопросов, но не на первый. Именно поэтому следующая теорема, доказанная независимо Мартином в [88] и Московакисом (см. [35]) на основе более ранней заметки Блэквелла [39], произвела большое впечатление в мире теории множеств.

Теорема 15.1.1 ($\mathrm{D{\scriptstyle ET}}(\mathbf{\Sigma}^1_{2n})$). *Для классов* $\mathbf{\Sigma}^1_0, \mathbf{\Pi}^1_1, \mathbf{\Sigma}^1_2, \mathbf{\Pi}^1_3, \ldots,$ $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$, $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+2}$ *выполнена* **редукция**, *но не выполнена* **отделимость**, *а для двойственных классов* $\mathbf{\Pi}^1_0$, $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_2$, $\mathbf{\Sigma}^1_3$, $\ldots$, $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$, $\mathbf{\Pi}^1_{2n+2}$ *выполнена* **отделимость**, *но не выполнена* **редукция**.

В предположении проективной детерминированности оба ряда, естественно, продолжаются до бесконечности.

Следствие 15.1.2 (**PD**). *Для классов* $\mathbf{\Sigma}^1_0$, $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Sigma}^1_2$, $\mathbf{\Pi}^1_3$, $\mathbf{\Sigma}^1_4$, $\mathbf{\Pi}^1_5$, $\ldots$ *выполнена* **редукция**, *но не выполнена* **отделимость**, *а для классов* $\mathbf{\Pi}^1_0, \mathbf{\Sigma}^1_1, \mathbf{\Pi}^1_2, \mathbf{\Sigma}^1_3, \mathbf{\Pi}^1_4, \mathbf{\Sigma}^1_5, \ldots$ *выполнена* **отделимость**, *но не выполнена* **редукция**. □

Теорема и следствие вместе известны как *первая теорема периодичности* (речь идет о периодичности с периодом 2). Итак, аксиома **PD** делает все четные уровни проективной иерархии подобными уровням 0 и 2, а все нечетные уровни — подобными уровню 1. Этим дается ответ и на вопрос об осцилляции, поставленный в начале параграфа. Именно, результаты для уровней 0,1,2, верные в **ZFC** по теореме 15.1.1 поскольку гипотеза $\mathrm{D{\scriptstyle ET}}(\mathbf{\Sigma}^1_0)$ доказуема (теорема 14.3.1), являются лишь частью общей красивой картины.

Остается добавить, что в предположении **PD** «редуцируемые» классы получаются из начального класса $\mathbf{\Sigma}^1_0$ а «отделимые» классы — из $\mathbf{\Pi}^1_0$ последовательным применением оператора $\eth$ согласно лемме 14.4.5. Отметим также, что как показали исследования Стила, если Γ — класс точечных множеств, удовлетворяющий некоторым достаточно элементарным условиям и не совпадающий с классом $\complement\Gamma$ дополнительных множеств, то в предположении полной аксиомы детерминированности **AD** в точности один из классов $\Gamma, \complement\Gamma$ удовлетворяет принципу отделимости. Таким образом, за теоремой 15.1.1 может в действительности скрываться более общий результат.

§ 15.2 Доказательство

Теперь перейдем к доказательству теоремы 15.1.1. Прежде всего достаточно вывести **редукцию** для классов первого ряда теоремы. Тогда **отделимость** для классов второго ряда будет следовать из того простого факта, что из **редукции** вытекает **отделимость** для класса дополнительных множеств, а для вывода отрицательной части теоремы достаточно воспользоваться предложением 8.2.1. Далее вспомним, что **редукция** является следствием свойства нормированности согласно лемме 8.3.3. Тем самым, для доказательства теоремы 15.1.1 достаточно будет доказать следующую теорему.

Теорема 15.2.1 ($\text{Det}(\mathbf{\Sigma}^1_{2n})$)**.** *Классы* $\mathbf{\Sigma}^1_0$, $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Sigma}^1_2$, $\mathbf{\Pi}^1_3$, $\ldots$, $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$, $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+2}$ *нормированы.*

Следствие 15.2.2 (PD). *Классы* $\mathbf{\Sigma}^1_0$, $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Sigma}^1_2$, $\mathbf{\Pi}^1_3$, $\ldots$ *нормированы.* □

Доказательство теоремы 15.2.1 следует такой схеме: сначала проверяется нормированность класса $\mathbf{\Sigma}^1_0 = \mathbf{\Sigma}^0_1$ открытых множеств, затем выполняются индуктивные переходы $\mathbf{\Pi}^1_{2n-1} \to \mathbf{\Sigma}^1_{2n}$ и $\mathbf{\Sigma}^1_{2n} \to \mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$. Имея в виду лемму 14.4.5, существо этой схемы можно было бы выразить так: нормированность переходит с любого проективного класса $\mathbf{\Gamma}$ на $\partial\,\mathbf{\Gamma}$. Доказательство такого общего утверждения было получено Московакисом (гл. 6 книги [97]), однако в такой форме оно слишком сложно для того, чтобы поместить его здесь. Мы приведем первоначальное доказательство, принадлежащее Мартину и Московакису Оно состоит из трех лемм.

Лемма 15.2.3. *Класс* $\mathbf{\Sigma}^1_0 = \mathbf{\Sigma}^0_1$ *открытых множеств нормирован.*

Лемма 15.2.4. *Если класс* $\mathbf{\Pi}^1_n$ *нормирован, то класс* $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ *также будет нормированным.*

Лемма 15.2.5 ($\text{Det}(\mathbf{\Sigma}^1_n)$)**.** *Если класс* $\mathbf{\Sigma}^1_n$ *нормирован, то и класс* $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ *будет нормированным.*

Подчеркнем, что первые две леммы не предполагают каких-либо гипотез детерминированности. Собственно, эти результаты уже были отмечены выше (упражнение 8.3.4 и лемма 8.5.2). Поэтому мы можем сконцентрироваться на третьей лемме.

Доказательство (лемма 15.2.5)**.** Требуется построить $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$-норму на $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$-множестве $X = \{x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \forall\, y\, P(x,y)\}$, где $P \subseteq (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$ — множество класса $\mathbf{\Sigma}^1_n$, несущее $\mathbf{\Sigma}^1_n$-норму φ. Каждой паре точек $x, y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ сопоставляются игры G_{xy} и G'_{xy} с игровыми множествами

$$\begin{aligned} A_{xy} &= \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2 : \langle x, \boldsymbol{a}\rangle \not\leqslant^*_\varphi \langle y, \boldsymbol{b}\rangle\} \qquad \text{и} \\ A'_{xy} &= \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2 : \langle x, \boldsymbol{b}\rangle <^*_\varphi \langle y, \boldsymbol{a}\rangle\}\,, \end{aligned}$$

которые принадлежат классам $\mathbf{\Pi}^1_n$ и $\mathbf{\Sigma}^1_n$ соответственно по выбору нормы φ. (Об отношениях $\leqslant^*_\varphi$ и $\leqslant^*_\varphi$ см. определение 8.3.1.) Все эти игры детерминированы, ибо согласно лемме 14.4.1 гипотеза $\text{Det}(\mathbf{\Sigma}^1_n)$ влечет $\text{Det}(\mathbf{\Pi}^1_n)$.

Рассматриваются следующие бинарные отношения на $\mathbb{N}^\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x \leqslant^* y &\iff \text{игрок } \mathbf{II} \text{ имеет ВС в игре } G_{xy}\,; \\ x <^* y &\iff \text{игрок } \mathbf{I} \text{ имеет ВС в игре } G'_{xy}\,. \end{aligned}$$

Мы утверждаем, что $\leqslant^*$ и $<^*$ – отношения класса $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$. Действительно, скажем, $\leqslant^*$ тождественно дополнению множества $\Game\, B$, где

$$B = \{\langle x, y, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle : \langle x, \boldsymbol{a}\rangle \not<^*_\varphi \langle y, \boldsymbol{b}\rangle\}$$

— множество класса $\mathbf{\Pi}^1_n$. Но $\Game\, B \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ согласно лемме 14.4.5. Точно так же рассматривается и отношение $<^*$.

Теперь остается проверить, что отношения $\leqslant^*$ и $<^*$ совпадают соответственно с $<^*_\psi$ и $\leqslant^*_\psi$ для подходящей нормы ψ на X. Чтобы доказать существование такой нормы, вполне достаточно доказать следующие семь утверждений:

(1) если $x \in X$ и $y \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \smallsetminus X$, то $x <^* y$;

(2) если $x \leqslant^* y$, то $x \in X$;

(3) если $x \in X$, то $x \leqslant^* x$;

(4) если $x \leqslant^* y$ и $y \leqslant^* z$, то $x \leqslant^* z$;

(5) если $x <^* y$, то $x \leqslant^* y$;

(6) если $x, y \in X$, то $x \leqslant^* y \Longleftrightarrow y \not<^* x$;

(7) не существует бесконечно $<^*$-убывающих цепочек элементов множества X.

Выигрывающая стратегия σ для игрока **I**, приносящая доказательство утверждения (1), состоит в следующем: он, независимо от ходов игрока **II**, делает свои ходы $a_i \in \mathbb{N}$ согласно равенству $a_i = c(i)$, где $c \in \mathbb{N}$ — заранее фиксированная точка, для которой $\langle y, c\rangle \notin P$. (Такая точка c существует, коль скоро $y \notin X$.) В то же время, какую бы последовательность $\boldsymbol{b}$ своих ходов ни сделал игрок **II**, он получит $\langle x, \boldsymbol{b}\rangle \in P$, ввиду того что $x \in X$. Стало быть, получается $\langle x, \boldsymbol{b}\rangle <^*_\varphi \langle y, \boldsymbol{a}\rangle$.

Точно так же доказывается утверждение (2). Если $x \notin X$, то игрок **I** обеспечивает себе выигрыш в игре G_{xy}, делая свою последовательность ходов $\boldsymbol{a}$ так, чтобы выполнялось условие $\langle x, \boldsymbol{a}\rangle \notin P$.

Утверждение (3) вовсе тривиально: игроку **II** достаточно повторять ходы игрока **I**, обеспечивая выполнение $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ и $\langle x, \boldsymbol{a}\rangle \leqslant^*_\varphi \langle x, \boldsymbol{b}\rangle$. (Важно, что $x \in X$; из этого следует, что $\langle x, \boldsymbol{a}\rangle \in P$ для всех $\boldsymbol{a}$.)

Докажем утверждение (4). Пусть игрок **II** имеет ВС τ' в игре G_{xy} и ВС τ'' в игре G_{yz}. Из этих двух стратегий легко составляется искомая ВС τ в игре G_{xz}. Именно, полагаем $\tau(a_0, \ldots, a_k) = \tau''(b_0, \ldots, b_k)$, где $b_i = \tau'(a_0, \ldots, a_i)$ для всех i. Эта стратегия удовлетворяет условию $\alpha * \tau = (\alpha * \tau') * \tau''$ для всех $\alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$.

Докажем утверждение (5). Пусть игрок **I** имеет ВС σ в игре G'_{xy}. Тогда ВС τ для игрока **II** в игре G_{xy} можно задать равенством

$\tau(a_0, \ldots, a_k) = \sigma(a_0, \ldots, a_{k-1})$. Легко видеть, что для любой точки $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ если $\boldsymbol{b} = \tau * \boldsymbol{a}$, то $\sigma * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, и мы имеем $\langle x, \boldsymbol{b} \rangle \leqslant^*_\varphi \langle y, \boldsymbol{a} \rangle$ по выбору σ, откуда следует $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \notin A_{xy}$, так что τ в самом деле является ВС для **II** в игре G_{xy}.

Докажем утверждение (6). Импликация $\Longrightarrow$. Пусть, напротив, игроки **I** и **II** имеют выигрывающие стратегии σ и τ в играх G'_{yx} и G_{xy} соответственно. Рассмотрим партию $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, в которой игроки придерживаются указанных стратегий, т. е. $\boldsymbol{a} = \sigma * \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} * \tau$. Немедленно приходим к противоречию:

$$\langle y, \boldsymbol{b} \rangle <^*_\varphi \langle x, \boldsymbol{a} \rangle \quad \text{и} \quad \langle x, \boldsymbol{a} \rangle \leqslant^*_\varphi \langle y, \boldsymbol{b} \rangle .$$

Теперь импликация $\Longleftarrow$. Поскольку условие $y <^* x$ не выполняется, ввиду детерминированности рассматриваемых игр игрок **II** имеет ВС τ в игре G'_{yx}. Покажем, что эта стратегия будет ВС и в игре G_{xy} для игрока **II**. Пусть $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ произвольно и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} * \tau$. Тогда не выполняется условие $\langle y, \boldsymbol{b} \rangle <^*_\varphi \langle x, \boldsymbol{a} \rangle$. Но $\langle x, \boldsymbol{a} \rangle$ и $\langle y, \boldsymbol{b} \rangle$ принадлежат P, поскольку $x, y \in X$. Следовательно, $\langle x, \boldsymbol{a} \rangle \leqslant^*_\varphi \langle y, \boldsymbol{b} \rangle$.

Наконец, докажем утверждение (7). Предположим противное: пусть существует бесконечная $<^*$-убывающая последовательность точек $x_i \in X$. При любом i игрок **I** имеет ВС σ_i в игре $G'_{x_{i+1} x_i}$. Зададим последовательность точек $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ равенствами $\boldsymbol{a}_i(l) = \sigma_i(\boldsymbol{a}_{i+1} \restriction l)$ индукцией по l одновременно для всех i. Другими словами, последовательность определений выглядит так:

$$a_i(0) = \sigma_i(\Lambda)\,, \quad a_i(1) = \sigma_i(a_{i+1}(0))\,, \quad a_i(2) = \sigma_i(a_{i+1}(0), a_{i+1}(1))\,,$$

и т. д. В результате получим $\boldsymbol{a}_i = \sigma_i * \boldsymbol{a}_{i+1}$, т. е. $\langle x_{i+1}, \boldsymbol{a}_{i+1} \rangle <^*_\varphi \langle x_i, \boldsymbol{a}_i \rangle$ для всех i. Отсюда следует, что

$$\varphi(x_0, \boldsymbol{a}_0) > \varphi(x_1, \boldsymbol{a}_1) > \varphi(x_2, \boldsymbol{a}_2) > \ldots ,$$

чего не может быть, поскольку значения φ — ординалы.

□ (лемма 15.2.5 и теорема 15.2.1)

§15.3 Вторая теорема периодичности. Лестницы

В свете результатов двух предыдущих параграфов и гл. 8, напрашивается предположение о том, что при выполнении гипотезы $\text{Det}(\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n})$ все классы первого ряда теоремы 15.1.1 удовлетворяют принципу **униформизации**, кроме, конечно, класса $\boldsymbol{\Sigma}^1_0 = \boldsymbol{\Sigma}^0_1$ открытых множеств (открытое множество не может быть униформным). Именно так и обстоят дела благодаря следующей теореме Московакиса [96], известной как *вторая теорема периодичности*.

Теорема 15.3.1 ($\mathrm{DET}(\mathbf{\Sigma}^1_{2n})$). *Принцип* **униформизации** *имеет место для классов* $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Sigma}^1_2$, $\mathbf{\Pi}^1_3$, $\mathbf{\Sigma}^1_4$, $\dots$, $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$, $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+2}$, *но не имеет места для двойственных классов* $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_2$, $\mathbf{\Sigma}^1_3$, $\mathbf{\Pi}^1_4$, $\dots$, $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$, $\mathbf{\Pi}^1_{2n+2}$, *а также и для классов* $\mathbf{\Sigma}^1_0$, $\mathbf{\Pi}^1_0$.

Следствие 15.3.2 (**PD**). *Принцип* **униформизации** *имеет место для классов* $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Sigma}^1_2$, $\mathbf{\Pi}^1_3$, $\mathbf{\Sigma}^1_4$, $\mathbf{\Pi}^1_5$, $\mathbf{\Sigma}^1_6$, $\dots$, *но не имеет места для двойственных классов* $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_2$, $\mathbf{\Sigma}^1_3$, $\mathbf{\Pi}^1_4$, $\mathbf{\Sigma}^1_5$, $\mathbf{\Pi}^1_6$, $\dots$, *а также и для классов* $\mathbf{\Sigma}^1_0$, $\mathbf{\Pi}^1_0$.

Однако понятие нормы и сама первая теорема периодичности оказываются слишком слабыми для того, чтобы работать с **униформизацией**. Приходится использовать более сложное понятие лестницы, извлеченное Московакисом из классических работ по униформизации, в частности из доказательства теоремы 8.4.1.

Определение 15.3.3. *Лестницей* на множестве X польского пространства $\mathbb{X}$ называется набор $\varphi = \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ норм $\varphi_k\colon X \to \mathtt{Ord}$, удовлетворяющий следующему условию:

(∗) если $x_0, x_1, x_2, \ldots \in X$ и $\mathtt{lim}\, x_k = x \in \mathbb{X}$, причем для всякого k имеется такой ординал λ_k, что почти все по i (т. е. за исключением конечного числа индексов i) значения $\varphi_k(x_i)$ совпадают с λ_k, то $x \in X$ и $\varphi_k(x) \le \lambda_k$ для каждого k.

Лестницы классифицируются с точки зрения определимости. Именно, лестница $\varphi = \{\varphi_k\}$ называется $\mathbf{\Gamma}$-*лестницей*, когда оба множества $\{\langle k,x,y\rangle : x \leqslant^*_{\varphi_k} y\}$ и $\{\langle k,x,y\rangle : x <^*_{\varphi_k} y\}$ в $\mathbb{N}\times\mathbb{X}\times\mathbb{X}$ принадлежат классу $\mathbf{\Gamma}$.

Упражнение 15.3.4. Пусть $\mathbf{\Gamma}$ — проективный класс. Докажите следующее: для того чтобы лестница $\varphi = \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (на некотором множестве в польском пространстве) была $\mathbf{\Gamma}$-лестницей, необходимо и достаточно, чтобы каждая норма φ_k была $\mathbf{\Gamma}$-нормой.

Если на каждом множестве данного класса $\mathbf{\Gamma}$ существует $\mathbf{\Gamma}$-лестница, то говорят, что класс $\mathbf{\Gamma}$ имеет *свойство лестницы.*

Лемма 15.3.5. *Если* $\mathbf{\Gamma}$ *— проективный класс, то на каждом* $\mathbf{\Gamma}$*-множестве* X *можно задать* $\mathbf{\Gamma}$*-лестницу* $\varphi = \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, *удовлетворяющую таким двум дополнительным условиям*:

(i) *если* $x_0, x_1, x_2, \dots \in X$, *и для любого* k *почти все по* i *ординалы* $\varphi_k(x_i)$ *совпадают с некоторым одним ординалом* $\lambda_k \in \mathtt{Ord}$, *то найдется такая точка* x, *что* $\mathtt{lim}\, x_k = x$, *и тогда* $x \in X$ *согласно* (∗) *из определения 15.3.3*;

(ii) *если* $j < k$ *и* $\varphi_k(x) \le \varphi_k(y)$, *то* $\varphi_j(x) \le \varphi_j(y)$.

Лестницы, удовлетворяющие условиям (i) и (ii), называются *хорошими*.

Доказательство. Мы начнем с произвольной $\mathbf{\Gamma}$-лестницы $\psi = \{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ на $\mathbf{\Gamma}$-множестве $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Требуется построить хорошую $\mathbf{\Gamma}$-лестницу на X. Выберем ординал λ так, чтобы для всех $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и k выполнялось условие $\psi_k(x) < \lambda$. Каждому k сопоставляется порядковый изоморфизм f_k множества

$$C_k = \{\langle \xi_0, l_0, \xi_1, l_1, \ldots, \xi_k, l_k\rangle : \xi_i < \lambda \wedge l_i \in \mathbb{N}\},$$

упорядоченного лексикографически, на соответствующий (единственный) ординал ν_k. Положим $\varphi_k(x) = f_k(\psi_0(x), x(0), \ldots, \psi_k(x), x(k))$ для всех $x \in X$ и k. Легко проверяется, что нормы φ_k составляют искомую хорошую лестницу φ на X. □

Роль хороших лестниц раскрывает следующий результат Московакиса (см. [96]), полученный, в сущности, на основе анализа доказательства теоремы 8.4.1 (теорема Новикова–Кондо–Аддисона).

Предложение 15.3.6. *Пусть* $m \ge 1$. *Если класс* $\mathbf{\Pi}^1_m$ *имеет свойство лестницы, то он удовлетворяет* **униформизации**.

Доказательство. Униформизуем $\mathbf{\Pi}^1_m$-множество $Q \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Согласно предыдущей лемме на множестве Q имеется хорошая $\mathbf{\Pi}^1_m$-лестница $\varphi = \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Положим

$$S = \{\langle k, x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall\, y' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\langle x, y\rangle \leqslant^*_{\varphi_k} \langle x, y'\rangle)\}$$

и покажем, что множество $P = \{\langle x, y\rangle : \forall\, k\, S(k, x, y)\}$ униформизует наше множество Q. Принадлежность множества P к классу $\mathbf{\Pi}^1_m$ следует из того, что φ является $\mathbf{\Pi}^1_m$-лестницей.

Прежде всего, $\langle x, y\rangle \in P \Longrightarrow \langle x, y\rangle \leqslant^*_{\varphi_0} \langle x, y\rangle \Longrightarrow \langle x, y\rangle \in Q$, т. е. $P \subseteq Q$. Остается проверить, что для каждой точки x, если сечение $(Q)_x = \{y : Q(x, y)\}$ непусто, то $(P)_x$ содержит ровно одну точку. Положим для этого $B_0 = (Q)_x$, где точка $x \in \mathbb{X}$ фиксирована и удовлетворяет условию $(Q)_x \ne \varnothing$, и далее

$$\lambda_k = \operatorname*{inf}_{y' \in B_0} \varphi_k(x, y'), \quad B_{k+1} = \{y : S(k, x, y)\} = \{y : \varphi_k(x, y) = \lambda_k\}$$

для всех k. Каждое из множеств B_k непусто, причем $(P)_x$ совпадает с пересечением всех B_k. Остается проверить, что это пересечение содержит ровно одну точку. Заметим, что $B_1 \subseteq B_0$ по определению. При $k > l$ включение $B_{k+1} \subseteq B_k$ следует из предположения, что φ — хорошая лестница. Следовательно, при $i \geq k$ выполняется включение $B_{k+1} \subseteq B_k$. Выбрав в каждом B_i произвольным образом точку y_i, мы получим $\varphi_k(y_i) = \lambda_k$ всякий раз, когда $i > k$. И вновь по предположению о хорошей лестнице найдется такая точка $y = \mathtt{lim}\, y_i$, что $\langle x, y\rangle \in Q$, т. е. $y \in (Q)_x$, и $\varphi_k(x,y) \leq \lambda_k$, т. е. фактически $\varphi_k(x,y) = \lambda_k$ — для всех k. Но это и означает, что $y \in \bigcap_k B_k$.

Если y' — другая точка пересечения всех B_k, то, повторив проведенное рассуждение для последовательности $y, y', y, y', \ldots$, мы получим сходимость последней, откуда следует, что $y' = y$. □

§ 15.4 Доказательство свойства лестницы

Итак, свойство лестницы для класса $\mathbf{\Pi}^1_m$ приводит к доказательству **униформизации** для классов $\mathbf{\Pi}^1_m$ и $\mathbf{\Sigma}^1_{m+1}$, т. е. лестницы играют по отношению к униформизации примерно ту же роль, что и нормы — к редукции. Эта аналогия продолжается следующей теоремой Московакиса; см. [96]:

Теорема 15.4.1 ($\mathrm{D{\scriptsize ET}}(\mathbf{\Sigma}^1_{2n})$). *Классы* $\mathbf{\Sigma}^1_0$, $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Sigma}^1_2$, $\mathbf{\Pi}^1_3$, …, $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$, $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+2}$ *имеют свойство лестницы.*

В соответствии с предложением 15.3.6, из этой теоремы следует теорема 15.3.1 (вторая теорема периодичности). Сама же теорема 15.4.1 доказывается по той же схеме, что и доказанная выше первая теорема периодичности.

Лемма 15.4.2. *Класс* $\mathbf{\Sigma}^1_0 = \mathbf{\Sigma}^0_1$ *имеет свойство лестницы.*

Лемма 15.4.3. *Если класс* $\mathbf{\Pi}^1_n$ *имеет свойство лестницы, то и класс* $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ *имеет свойство лестницы.*

Лемма 15.4.4 ($\mathrm{D{\scriptsize ET}}(\mathbf{\Sigma}^1_n)$). *Если класс* $\mathbf{\Sigma}^1_n$ *имеет свойство лестницы, то и класс* $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ *имеет свойство лестницы.*

Доказательство (лемма 15.4.2)**.** Рассмотрим открытое непустое множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Для каждого k пусть φ_k — та $\mathbf{\Sigma}^0_1$-норма на X, которая определена в доказательстве теоремы 8.3.2 (первая часть), т. е. все нормы φ_k совпадают. Нормы φ_k образуют искомую $\mathbf{\Sigma}^0_1$-лестницу на X. Условие $(*)$ определения 15.3.3 легко следует из того факта, что все множества-прообразы $f_k^{-1}[j] = [f(j)] \smallsetminus \bigcup_{j'<j}[f(j')]$ открыто-замкнуты в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, так что если точки x_i сходящейся последовательности принадлежат одному множеству $f_k^{-1}[j]$, то и предел принадлежит тому же множеству. □

Доказательство (лемма 15.4.3)**.** Построим $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$-лестницу на $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$-множестве $X = \mathtt{pr}\, P = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists\, y\, P(x,y)\}$, где $P \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ — множество класса $\mathbf{\Pi}^1_n$. Благодаря предложению 15.3.6, можно считать, что множество P однозначно, т. е. для всякого $x \in X$ существует единственная точка y_x такая, что $P(x, y_x)$. Далее, согласно лемме 15.3.5, существует хорошая $\mathbf{\Pi}^1_n$-лестница $\varphi = \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ на P. Положим $\psi_k(x) = \varphi_k(x, y_x)$ для $x \in X$. Нормы ψ_k составляют искомую $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$-лестницу на X. □

Доказательство (лемма 15.4.4)**.** Пусть $P \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ — множество класса $\mathbf{\Sigma}^1_n$. Построим $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$-лестницу на $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$-множестве $X = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall\, y\, P(x,y)\}$. Лемма 15.3.5 дает хорошую $\mathbf{\Sigma}^1_n$-лестницу $\varphi = \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ на P. Напомним, что $\mathbb{N}^{<\omega} = \{\mathbf{s}_k : k \in \mathbb{N}\}$ — фиксированное перечисление кортежей натуральных чисел, удовлетворяющее следующему требованию: если $\mathbf{s}_k \subset \mathbf{s}_j$, то $k < j$.

Пусть $x, y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $k \in \mathbb{N}$. Рассматривается игра G_{kxy} с игровым множеством

$$A_{xy} = \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2 : \langle x, \boldsymbol{a}\rangle \not\leqslant^*_{\varphi_k} \langle y, \boldsymbol{b}\rangle\},$$

но начинающаяся с позиции $\langle \mathbf{s}_k\, ; \mathbf{s}_k\rangle$, т. е. своими начальными $m = \mathtt{lh}\, \mathbf{s}_k$ ходами оба игрока должны брать члены одного и того же кортежа $\mathbf{s}_k$ (см. доказательство теоремы 14.3.1, и упражнение 14.3.2). Как и в доказательстве леммы 15.2.5, ко всякому k существует $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$-норма ψ_k на X, для любых $x, y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ удовлетворяющая эквивалентности

$$x \leqslant^*_{\psi_k} y \iff \text{игрок } \mathbf{II} \text{ имеет ВС в игре } G_{uxy}\,.$$

Остается проверить, что эти нормы образуют лестницу на X.

Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots \in X$, $x = \mathtt{lim}\, x_i$, и при любом k почти все по i ординалы $\psi_k(x_i)$ совпадают с одним зависящим от k ординалом λ_k. Требуется проверить, что $x \in X$ и $\psi_k(x) \le \lambda_k$ для всех k. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\psi_k(x_i) = \lambda_k$ для любой пары $i \ge k$ (иначе просто переходим к подходящей подпоследовательности). Тогда при $k \le m$ выполнено условие $\psi_k(x_k) = \psi_k(x_m) = \lambda_k$, т. е. игрок **II** имеет некоторую ВС τ_{km} в игре $G_{kx_mx_k}$.

Чтобы доказать, что $x \in X$, фиксируем произвольную точку $z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и удостоверимся, что $\langle x, z\rangle \in P$. Для любого i пусть k_i — то натуральное число k, для которого $\mathbf{s}_{k_i} = z \restriction i$. При этом $k_i < k_{i+1}$ для всех i, так что $\tau_i = \tau_{k_ik_{i+1}}$ будет ВС для игрока **II** в игре $G_i = G_{k_ix_{k_{i+1}}x_{k_i}}$.

Существует такая последовательность точек $z_i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $z_i = z_{i+1} * \tau_i$ для всех i. Именно, значения $z_i(j)$ определяются равенствами[1] $z_i(j) = z(j)$ при $j < i$ и $z_i(j) = \tau_i(z_{i+1} \restriction (j+1))$ при $j \geq i$. Более подробно, определение значений $z_i(j)$ производится так. Первый шаг: полагаем $z_i(j) = z(j)$ для всех пар $j < i$; этим определены все кортежи вида $z_i \restriction i$, $i \in \mathbb{N}$. Второй шаг: полагаем $z_i(i) = \tau_i(z_{i+1} \restriction (i+1))$. Это определение корректно, поскольку аргумент $z_{i+1} \restriction (i+1)$ уже известен после первого шага. Этим определены все кортежи вида $z_i \restriction (i+1)$. Третий шаг: полагаем $z_i(i+1) = \tau_i(z_{i+1} \restriction (i+2))$ (аргумент $z_{i+1} \restriction (i+1)$ уже известен), и теперь определены все кортежи вида $z_i \restriction (i+2)$. И так далее.

Таким образом, мы имеем $\langle x_{k_{i+1}}, z_{i+1} \rangle \leqslant^*_{\varphi_{k_i}} \langle x_{k_i}, z_i \rangle$ для всех i по выбору стратегий τ_i, а поскольку все точки x_i принадлежат X, получаем $\langle x_{k_i}, z_i \rangle \in P$ и $\varphi_{k_i}(x_{k_{i+1}}, z_{i+1}) \leq \varphi_{k_i}(x_{k_i}, z_i)$ для всех i. Отсюда следует, что

$$\varphi_j(x_{k_{i+1}}, z_{i+1}) \leq \varphi_j(x_{k_i}, z_i) \tag{1}$$

всякий раз, когда $j \leq k_i$ — ввиду того, что лестница φ хорошая. Поэтому для каждого j имеется такой ординал μ_j, что $\varphi_j(x_{k_i}, z_i) = \mu_j$ для почти всех i. Снова благодаря «хорошести» получаем, что предел $\mathtt{lim}_i \langle x_{k_i}, z_i \rangle$ существует и принадлежит множеству P. Однако $\mathtt{lim}\, x_{k_i} = x$, а $\mathtt{lim}\, z_i = z$. Итак, $\langle x, z \rangle \in P$, а поскольку в этом рассуждении z произвольно, имеем $x \in X$.

Заметим, что по определению лестницы в рассматриваемой ситуации $\varphi_j(x, z) \leq \mu_j$ для всех j. Соединяя это неравенство с неравенством (1) и учитывая выбор ординалов μ_j, получаем

$$\varphi_k(x, z) \leq \varphi_k(x_k, z_i)\,, \quad \text{т. е.} \quad \langle x, z \rangle \leqslant^*_{\varphi_k} \langle x_k, z_i \rangle\,, \tag{2}$$

для любой такой пары i, k, что $k = k_i$. (Следует взять $j = k$.) Вместе с тем, анализируя построение последовательности точек x_i, нетрудно заметить, что каждое значение $x_i(j)$ требует для своего определения информации только о числах $z(j')$, $j' \leq j$. Следовательно, $z_i = z * \tau^i$, где τ^i — некоторая стратегия (для игрока **II**), зависящая только от i.

Теперь мы без труда докажем неравенство $\psi_k(x) \leq \lambda_k$, где $k \in \mathbb{N}$ произвольно. Благодаря тому что $\psi_k(x_k) = \lambda_k$, достаточно убедиться, что игрок **II** имеет ВС в игре G_{kxx_k}. Обозначив через i длину кортежа $\mathbf{s}_k$, покажем, что τ^i будет искомой стратегией. Пусть $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность ходов игрока **I**. Если $\mathbf{s}_k \not\subset \boldsymbol{a}$, то игрок **I** проигрывает при любых ответах $\boldsymbol{b}$ игрока **II**, удовлетворяющих требованию $\mathbf{s}_k \subset \boldsymbol{b}$. Поэтому можно предполагать, что $\mathbf{s}_k \subset \boldsymbol{a}$.

[1] Заметим, что игра $G_i = G_{k_i x_{k_{i+1}} x_{k_i}}$ по определению начинается с позиции $\langle z \restriction i; z \restriction i \rangle$, и поэтому равенство $z_i(j) = \tau_i(z_{i+1} \restriction (j+1))$ будет выполнено автоматически и при $j < i$.

Тогда, повторив выкладки из первой части доказательства леммы, получим $k = k_i$, $z * \tau^i = z_i$, и, наконец, $\langle x, z\rangle \leqslant^*_{\varphi_k} \langle x_k, z * \tau^i\rangle$ согласно неравенству (2). А это и означает выигрыш игрока **II** в игре G_{kxx_k}.
□ (лемма 15.4.4 и теоремы 15.4.1, 15.3.1)

Значение лестниц в дескриптивной теории игровых универсумов отнюдь не исчерпывается второй теоремой периодичности и приложениями к униформизации. Вместе с нормами и предупорядочениями понятие лестницы занимает центральное место в дескриптивных исследованиях. В частности, лестницам в игровых универсумах посвящено большинство статей недавно вышедшей книги [69]. Отметим в ней интересную статью [114], где рассмотрен вопрос о лестницах на множествах класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Естественно, этот класс не имеет свойства лестницы, т. е. нельзя утверждать, что на любом $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множестве имеется $\mathbf{\Sigma}^1_1$-лестница (или хотя бы $\mathbf{\Sigma}^1_1$-норма). Однако согласно теореме 15.4.1 на каждом $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множестве имеется $\mathbf{\Sigma}^1_2$-лестница. Как показано в статье [114], этот непосредственный результат отнюдь не наилучший: на самом деле каждое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество несет лестницу класса $\mathbf{B}_{\omega_1}(\mathbf{\Sigma}^1_1)$, где $\mathbf{B}_{\omega_1}$ означает замыкание стоящего в скобках класса относительно борелевских операций дополнения и счетного объединения.

§15.5 Третья теорема периодичности

Пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — два пространства. Мы уже видели, что среди всех «плоских» множеств $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ выделяются те, которые удовлетворяют тому или иному требованию к *сечениям* $(P)_x = \{y \in \mathbb{Y} : P(x, y)\}$, где $x \in \mathbb{X}$. В частности, выделяются такие множества P, все сечения $(P)_x$ которых содержит не более одной точки, — *однозначные* множества, или такие, все сечения которых не более чем счетны, — *счетнозначные* множества, а также множества с компактными и σ-компактными сечениями, с сечениями положительной меры и др. (см. выше гл. 11). В классических исследованиях по борелевским и А-множествам со специальными сечениями предложены разработанные в основном усилиями Н. Н. Лузина и П. С. Новикова, а затем В. Я. Арсенина, Кунугуи, Е. А. Щеголькова и др. разнообразные и часто довольно сложные методы работы с такими множествами.

Как мы видели в гл. 10 и 11, эффективная дескриптивная теория множеств позволяет унифицировать технику изучения множеств со специальными сечениями. Теория детерминированности дает совершенно иной подход к этим вопросам, позволяющий, с одной стороны, не прибегать к методам эффективной теории, а с другой стороны, распространяющий результаты, полученные для первого проективного уровня, на высшие уровни иерархии на базе соответствующих гипотез детерминированности. Рамки настоящей книги позволяют остановиться подробно только на какой-нибудь одной задаче этого типа. Мы рассмотрим задачу расщепления счетнозначного множества данного проективного класса $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ на счетное число однозначных множеств того же класса.

Следующие две теоремы Московакиса (см. [97, гл. 6]) иногда объединяются под названием *третья теорема периодичности*. Первая из них обобщает (в соответствующих предположениях детерминированности) результат следствия 11.1.4 для класса $\mathbf{\Delta}^1_1$ (борелевские множества). Вторая, называемая еще *теоремой о выборе выигрывающей стратегии*, служит техническим базисом первой, а также находит многочисленные применения, например в доказательствах соответствующих обобщений других теорем о борелевских и $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множествах из гл. 11.

Теорема 15.5.1 ($\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^1_{2n})$)**.** *Любое счетнозначное множество класса $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ накрывается суммой счетного числа однозначных $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$-множеств. Следовательно, любое счетнозначное множество класса $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ есть счетная сумма однозначных множеств того же класса, и то же верно для $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$.*

Перед формулировкой следующей теоремы напомним, что $\mathscr{S} = \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^{<\omega})}$ — пространство всех стратегий в играх на $\mathbb{N}$.

Теорема 15.5.2 ($\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^1_{2n})$)**.** *Если $B \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2$ — множество класса $\mathbf{\Sigma}^1_{2n}$, то существует функция $\Phi\colon \Game B \to \mathscr{S}$ класса $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ на $\Game B$,*[2] *обладающая тем свойством, что при любом $x \in \Game B$ стратегия $\Phi(x)$ будет ВС для игрока $\mathbf{I}$ в игре $\mathbf{G}_{(B)_x}$.*

Комментарий. По определению в условиях теоремы 15.5.2 множество $\Game B$ состоит из всех точек $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, для которых игрок $\mathbf{I}$ имеет выигрывающую стратегию, скажем, $\sigma_x \in \mathscr{S}$ в игре $\mathbf{G}_{(B)_x}$, причем в общем случае не единственную. Суть теоремы состоит в том, что выигрывающую стратегию можно выбрать посредством функции определенного проективного уровня.

Доказательство (теорема 15.5.1)**.** Рассмотрим счетнозначное $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$-множество $P \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Можно считать (см. начало § 14.6), что $P \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times 2^\mathbb{N}$. Пусть $P = \{\langle x, y\rangle \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^2 : \exists z\, Q(x,y,z)\}$, где $Q \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times 2^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ есть $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$-множество. С помощью функций D

[2] Т. е. график функции Φ представляет собой пересечение множества $\Game B \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ с некоторым подмножеством пространства $\mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ класса $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$

и H из § 14.6 определим множество

$$B = \{\langle x, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N} \times 2^{<\omega})^{\mathbb{N}} : \langle x, D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}), H(\boldsymbol{p})\rangle \notin Q\}.$$

Оно зависит от Q и принадлежит классу $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n}$, так что при любом $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ игра $\mathbf{G}_{(B)_x}$ на $I \times J$, где $I = 2 = \{0,1\}$, а $J = \mathbb{N} \times 2^{<\omega}$, определяемая сечением

$$(B)_x = \{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}\rangle \in 2^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N} \times 2^{<\omega})^{\mathbb{N}} : \langle x, D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}), H(\boldsymbol{p})\rangle \notin Q\},$$

детерминирована. При этом $(B)_x = A[(Q)_x]$ в обозначениях § 14.6, где $(Q)_x = \{\langle y, z\rangle : Q(x,y,z)\}$. Кроме того, в соответствии с выкладками, проведенными в § 14.6,

$$\Game\, B = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \text{сечение } (P)_x \text{ не более чем счетно}\},$$

так что $\Game\, B = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ввиду счетнозначности множества P.

Стратегии игрока $\mathbf{I}$ в играх вида $\mathbf{G}_{(B)_x}$, $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, образуют пространство $2^{((\mathbb{N}\times 2^{<\omega})^{<\omega})}$ функций со значениями в множестве $2 = \{0,1\}$, определенных на множестве $(\mathbb{N}\times 2^{<\omega})^{<\omega}$ всех кортежей с членами из $\mathbb{N}\times 2^{<\omega}$. По теореме 15.5.2 существует такая $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+1}$-функция $\Phi\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to 2^{((\mathbb{N}\times 2^{<\omega})^{<\omega})}$, что стратегия $\Phi(x)$ — выигрывающая для игрока $\mathbf{I}$ в игре $\mathbf{G}_{(B)_x}$ при любом $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. При этом согласно результату упражнения 14.6.1 если $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то мы имеем

$$(P)_x \subseteq \{\Xi_{bt}(\Phi(x)) : b \in \mathbb{N} \wedge t \in \boldsymbol{T}\}.$$

Следовательно, определив $P_{bt} = \{\langle x, \Xi_{bt}(\Phi(x))\rangle : x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ для каждой пары из $b \in \mathbb{N}$ и $t \in \boldsymbol{T}$, мы получим счетное семейство однозначных множеств $P_{bt} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$, объединение которых накрывает P. При этом каждое P_{bt} удовледворяет условию $\mathtt{pr}\, P_{bt} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и имеет класс $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+1}$ согласно выбору Φ и непрерывности функций Ξ_{bt}, а тогда и класс $\boldsymbol{\Delta}^1_{2n+1}$, поскольку условие $\langle x, y\rangle \in P_{bt}$ равносильно тому, что $\forall\, y' \neq y\, (\langle x, y\rangle \notin P_{bt})$. □

Закончив доказательство теоремы 15.5.1, кратко остановимся на еще нескольких моментах, касающихся однозначных и счетнозначных множеств. Прежде всего, при $n = 0$ гипотеза $\mathrm{D\small{ET}}(\boldsymbol{\Sigma}^1_0)$ доказуема по теореме 14.3.1, а потому теорема 15.5.1 и данные ниже ее следствия превращаются в классические результаты для однозначных и счетнозначных борелевских и $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-множеств, изложенные в § 11.1.

Следствие 15.5.3 ($\mathrm{D\small{ET}}(\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n})$). *Если $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — счетнозначное $\boldsymbol{\Delta}^1_{2n+1}$-множество, то его проекция $\mathtt{pr}\, P = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists\, y\, P(x,y)\}$ также множество класса $\boldsymbol{\Delta}^1_{2n+1}$.*

Доказательство. В самом деле, в обозначениях доказательства теоремы 15.5.1 принадлежность классу $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$ для $\mathtt{pr}\, P$ следует из равенства

$$\mathtt{pr}\, P = \bigcup\nolimits_{b,t}\{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall\, y\, (P_{bt}(x,y) \Longrightarrow P(x,y))\}.$$

Принадлежность классу $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ для $\mathtt{pr}\, P$ очевидна. □

Обратно, каждое $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ есть проекция подходящего однозначного множества $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ класса $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$. Этот результат также доказывается с помощью теоремы 15.5.2 о выборе выигрывающей стратегии.

Следствие 15.5.4 (Det($\mathbf{\Sigma}^1_{2n}$))**.** *Каждое счетнозначное $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$-множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ униформизуется множеством класса $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$.*

Доказательство. По теореме 15.5.1 имеем $P = \bigcup_k P_k$, где каждое множество $P_k \subseteq P$ однозначно и принадлежит $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$. Тогда проекция $X_k = \mathtt{pr}\, P_k$ любого из них также принадлежит $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$ согласно следствию 15.5.3. Поэтому каждое из множеств $D_k = P_k \smallsetminus \bigcup_{k'<k} P_{k'}$ снова принадлежит классу $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$. Остается взять $Q = \bigcup_k Q_k$, где $Q_k = \{\langle x,y\rangle \in P_k : x \in D_k\}$, в качестве униформизующего множества. □

Отметим принципиальное значение счетнозначности униформизуемого множества P. В предположении Det($\mathbf{\Sigma}^1_{2n}$) существует $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$-множество, не допускающее униформизации $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$-множеством (и, разумеется, не являющееся счетнозначным).

Предложение 15.5.5 (Det($\mathbf{\Sigma}^1_{2n}$))**.** *Каждое однозначное множество класса $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$ накрывается однозначным $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$-множеством.*

Доказательство. Следует использовать теорему отделимости (теорема 15.1.1), аналогично доказательству теоремы 11.1.5 в однозначном варианте в § 11.2. □

§ 15.6 Теорема о выборе выигрывающей стратегии

Доказательство (теорема 15.5.2)**.** Итак, в предположении, что выполняется гипотеза Det($\mathbf{\Sigma}^1_{2n}$) рассматриваем произвольное $\mathbf{\Sigma}^1_{2n}$-множество $B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$. Начнем с определения двух семейств игр. Пусть $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$, и $u, v \in \mathbb{N}^k$ (кортежи натуральных чисел длины k), $a \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Через $G^a_x(u,v)$ обозначается игра $\mathbf{G}_{(B)_x}$ с игровым множеством $(B)_x$, но начинающаяся с позиции $\langle u^\wedge\langle a\rangle\,;v\rangle$. Игры вида $G^a_x(u,v)$ детерминированы благодаря гипотезе $\mathrm{DET}(\mathbf{\Sigma}^1_{2n})$.

Перед определением второго семейства игр каждой паре точек $x,y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ сопоставим точку $\prec x,y\succ \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ («квазипара» точек x,y), заданную равенствами $\prec x,y\succ(2k) = x(k)$ и $\prec x,y\succ(2k+1) = y(k)$ для всех k; отображение $\langle x,y\rangle \mapsto \prec x,y\succ$ является, очевидно, гомеоморфизмом $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Согласно второй теореме периодичности (теорема 15.2.1), на нашем $\mathbf{\Sigma}^1_{2n}$-множестве B имеется $\mathbf{\Sigma}^1_{2n}$-лестница, а тогда и *хорошая* $\mathbf{\Sigma}^1_{2n}$-лестница $\varphi = \{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ по лемме 15.3.5. С ее помощью, каждому набору из $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $u,v \in \mathbb{N}^k$ и $a,a' \in \mathbb{N}$ сопоставим игру $G^{a',a}_x(u,v)$ с игровым множеством

$$\{\langle \prec y,z'\succ, \prec y',z\succ\rangle : y,z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \wedge \langle x,y',z'\rangle \not\leq^*_{\varphi_k} \langle x,y,z\rangle\},$$

начинающуюся с позиции $\langle \prec u,v\succ^\wedge\langle a\rangle\,; \prec u,v\succ^\wedge\langle a'\rangle\rangle$, где «квазипара» $\prec u,v\succ$ кортежей u,v равной длины k определяется подобно «квазипаре» точек пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, т. е. $\prec u,v\succ$ — кортеж длины $2k$ и $\prec u,v\succ(2i) = u(i)$, $\prec u,v\succ(2i+1) = v(i)$ для всех $i<k$. Игровые множества этих игр принадлежат классу $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$ по выбору лестницы φ и потому детерминированы согласно лемме 14.4.1. Пусть

$$W_{xk} = \{\langle u,a,v\rangle : u,v \in \mathbb{N}^k \wedge \text{игрок } \mathbf{I} \text{ имеет ВС в игре } G^a_x(u,v)\},$$

и далее

$$\begin{array}{rcl} a' \leq_{xuv} a & \iff & \text{игрок } \mathbf{II} \text{ имеет ВС в игре } G^{a',a}_x(u,v)\,; \\ M_{xk} & = & \{\langle u,a',v\rangle \in W_{xk} : \forall\, a \in \mathbb{N}\,(a' \leq_{xuv} a)\}. \end{array}$$

Лемма 15.6.1. *Пусть $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$ и точки $y,z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ таковы, что $\langle y\restriction k, y(k), z\restriction k\rangle \in M_{xk}$ для всех k. Тогда $\langle y,z\rangle \in (B)_x$.*

Доказательство. При $k=0$ имеем $\langle \Lambda, y(0), \Lambda\rangle \in M_{x0}$, а это значит, что игрок **I** имеет ВС σ в игре $G^{y(0)}_x(\Lambda,\Lambda)$. Далее, если $k \in \mathbb{N}$, то $y(k) \leq_{x,y\restriction k,z\restriction k} a$ при любом $a \in \mathbb{N}$ по определению M_{xk}, т. е. игрок **II** имеет ВС τ_{ka} в игре $G^{ka} = G^{y(k),a}_x(y\restriction k, z\restriction k)$. Определим, пользуясь этой системой стратегий, последовательность точек $y_k, z_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и стратегий τ_k с помощью следующей системы равенств:

(1) $y_k(j) = y(j)$ и $z_k(j) = z(j)$ при $j<k$;

(2) $\tau_k = \tau_{k\,,\,y_k(k)}$ для всех k;

(3) $y_0(j) = \sigma(z_0(0),\dots,z_0(j-1))$ для всех j;

(4) $y_{k+1}(j) = \tau_k(y_k(0), z_{k+1}(0), \ldots, y_k(j-1), z_{k+1}(j-1), y_k(j))$ и
$z_k(j) = \tau_k(y_k(0), z_{k+1}(0), \ldots, y_k(j), z_{k+1}(j))$ при $j \geq k$.

Из соотношения (3) следует $y_0 = \sigma * z_0$, т. е. $\langle y_0, z_0 \rangle \in (B)_x$ по выбору σ. Далее, соотношение (1) показывает, что равенства (4) выполняются также и при $j < k$, ибо игры G^{ka} начинаются с позиций вида

$$\langle \prec y \restriction k, z \restriction k \succ^\wedge \langle a \rangle ; \prec y \restriction k, z \restriction k \succ^\wedge \langle y(k) \rangle \rangle .$$

Значит, $\prec y_{k+1}, z_k \succ = \prec y_k, z_{k+1} \succ * \tau_k$, т. е. $\langle x, y_{k+1}, z_{k+1} \rangle \leqslant^*_{\varphi_k} \langle x, y_k, z_k \rangle$ для всех k. Соединяя это с уже доказанным утверждением $\langle y_0, z_0 \rangle \in (B)_x$, получаем

$$\langle y_k, z_k \rangle \in (B)_x \quad \text{и} \quad \varphi_k(x, y_{k+1}, z_{k+1}) \leq \varphi_k(x, y_k, z_k)$$

для всех k. Свойство «хорошести» лестницы φ позволяет вывести отсюда (см. доказательство леммы 15.4.4) сходимость последовательности точек $\langle x, y_k, z_k \rangle$ к некоторой точке множества B. Но этой точкой может быть только точка $\langle x, y, z \rangle$. $\square$

Лемма 15.6.2. *Пусть* $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. *Если* $x \in \Game B$, *то найдется такое число* $a \in \mathbb{N}$, *что* $\langle \Lambda, a, \Lambda \rangle \in M_{x0}$. *Если* $k \in \mathbb{N}$, $\langle u, a, v \rangle \in M_{xk}$ *и* $b \in \mathbb{N}$, *то найдется такое число* $c \in \mathbb{N}$, *что* $\langle u^\wedge \langle a \rangle, c, v^\wedge \langle b \rangle \rangle \in M_{x,k+1}$.

Доказательство. Для множеств W_{xk} вместо M_{xk} лемма очевидна. Поэтому, предполагая противное, мы получаем точку $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, натуральное число k, пару кортежей $u, v \in \mathbb{N}^k$ и последовательность натуральных чисел a_i, $i \in \mathbb{N}$, для которых $\langle u, a_0, v \rangle \in W_{xk}$ и $a_i \not\leq_{xuv} a_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, игрок **I** имеет ВС σ в игре $G_x^{a_0}(u, v)$ и ВС σ_i в каждой игре $G_x^{a_i, a_{i+1}}(u, v)$, $i \in \mathbb{N}$.

С помощью этой системы стратегий можно построить последовательность точек $y_i, z_i \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, удовлетворяющих соотношениям $y_i \restriction k = u$ и $z_i \restriction k = v$ для всех i, а также $y_0 = \sigma * z_0$ и $\prec y_{i+1}, z_i \succ = \sigma_i * \prec y_i, z_{i+1} \succ$ для всех i. По выбору стратегий σ и σ_i отсюда вытекает, что $\langle y_0, z_0 \rangle \in (B)_x$ и $\langle x, y_i, z_i \rangle \not\leqslant^*_{\varphi_k} \langle x, y_{i+1}, z_{i+1} \rangle$ для всех i. Теперь индукцией по i нетрудно доказать, что $\langle y_i, z_i \rangle \in (B)_x$ и $\varphi_k(x, y_{i+1}, z_{i+1}) < \varphi_k(x, y_i, z_i)$ для всех i, чего не может быть, так как φ_k — норма. $\square$

Мы продолжаем доказательство теоремы 15.5.2. Согласно лемме 15.6.2, для каждой точки $x \in \Game B$ имеется стратегия $\Phi(x) = \sigma_x$, которая действует на произвольный кортеж $v = \langle b_0, \ldots, b_{k-1} \rangle \in \mathbb{N}^{<\omega}$ так, чтобы выполнялось условие $\langle u, \sigma_x(v), v \rangle \in M_{xk}$, где $u = \langle a_0, \ldots, a_{k-1} \rangle$ и $a_i = \sigma_x(b_0, \ldots, b_{i-1})$ для $i < k$. А согласно лемме

15.6.1 такая стратегия σ_x будет выигрывающей для игрока l в игре $\mathbf{G}_{(B)_x}$. Остается обеспечить при этом построение Φ как $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$-функции на множестве $\Game\, B$.

С этой целью рассмотрим множество

$$M = \{\langle x, k, u, v, a\rangle : x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \wedge \langle u, a, v\rangle \in M_{xk}\}.$$

Оно принадлежит классу $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$ по лемме 14.4.5 (существование ВС для игрока **II** в определении $\le_{xuv}$ выражается посредством отсутствия ВС для игрока **I**). Так что согласно теореме 15.3.1 (униформизация) множество M можно униформизовать $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$-множеством $C \subseteq M$. По сути C является функцией, заданной на некотором подмножестве пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}$ (целиком включающем $(\Game\, B) \times \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}$), со значениями в $\mathbb{N}$, и при этом $\langle x, k, u, v, C(x, k, u, v)\rangle \in M$ для любой четверки $\langle x, k, u, v\rangle$ из области определения C, а график C является множеством класса $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$.

Теперь уже можно определить функцию Φ. Пусть $x \in \Game\, B$ и $v = \langle b_0, \ldots, b_{k-1}\rangle \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Значение $a = \Phi(x)(v)$ получается следующим образом. Индукцией по $i < k$ определяем набор чисел a_i с помощью равенств

$$a_i = C(x, i, \langle a_0, \ldots, a_{i-1}\rangle, \langle b_0, \ldots, b_{i-1}\rangle).$$

Наконец, положим $\Phi(x)(v) = a_k$.

Чтобы убедиться, что функция Φ обеспечивает доказательство теоремы о выборе выигрывающей стратегии, требуется только проверить, что она является $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+1}$-функцией на $\Game\, B$; то обстоятельство, что $\Phi(x)$ есть ВС для игрока **I** в игре $\mathbf{G}_{(B)_x}$ при любом $x \in \Game\, B$, обеспечивается, как мы видели выше, леммой 15.6.1. Используя выбор множества C (в классе $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$), можно легко показать, что множество $U = \{\langle x, v, a\rangle : x \in \Game\, B \wedge \Phi(x)(v) = a\}$ также принадлежит $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$. Однако

$$\Phi(x) = \sigma \iff x \in \Game\, B \wedge \forall\, v\, \forall\, a\, (U(x, v, a) \iff \sigma(v) = a)\,,$$

откуда немедленно следует искомое утверждение о функции Φ.

$\square$ (теорема 15.5.2)

Литература

[1] П. С. Александров. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* М.: Наука, 1977.

[2] В. Я. Арсенин и А. А. Ляпунов. Теория A-множеств. *УМН*, 5(5(39)):45–108, 1950.

[3] К. Дж. Баруайз, ред. *Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств.* Пер. с англ. В. Г. Кановея, под ред. и с предисловием В. Н. Гришина, с добавлением В. Г. Кановея. М.: Наука, 1982.

[4] Т. Йех. *Теория множеств и метод форсинга.* Пер. с англ. В. И. Фуксона под ред. В. М. Гришина. М.: Мир, 1973.

[5] В. Г. Кановей. Добавление. Проективная иерархия Лузина: современное состояние теории. В книге: [3], с. 273–364. М.: Наука, 1982.

[6] В. Г. Кановей. Неразрешимые и разрешимые свойства конституант. *Матем. Сб.*, 125(4): 505–535, 1984.

[7] В. Г. Кановей. *Аксиома выбора и аксиома детерминированности.* М.: Наука, 1984.

[8] В. Г. Кановей. Идеи А. Н. Колмогорова в теории операций над множествами. *УМН*, 43(6): 93–128, 1988.

[9] В. Г. Кановей. Топологии, порожденные эффективно суслинскими множествами, и их приложения в дескриптивной теории множеств. *УМН*, 51 (вып. 3 (309)): 17–52, 1996.

[10] В. Г. Кановей, Т. Линтон, и В. А. Успенский. Игровой подход к мере Лебега. *Матем. Сборник.*, 199(11): 21–41, 2008.

[11] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств. *УМН*, 58(вып. 5(353)): 3–88, 2003.

[12] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. О множестве конструктивных вещественных чисел. *Труды МИАН*, 247: 95–128, 2004.

[13] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики.* М.: Наука, 2007.

[14] П. Дж. Коэн. *Теория множеств и континуум-гипотеза.* М.: Мир, 1969. пер. с англ.

[15] К. Куратовский. *Топология. Том I.* Пер. с англ. М. Я. Антоновского. С предисловием П. С. Александрова. М.: Мир, 1966.

[16] Н. Н. Лузин. *Современное состояние теории функций действительного переменного.* М.-Л.: ГТТИ, 1933.

[17] Н. Н. Лузин. О стационарных последовательностях. *Труды физмат. ин-та, отд. матем.*, 5: 125–147, 1934.

[18] Н. Н. Лузин. *О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций.* М.: Изд-во АН СССР, 1935.

[19] Н. Н. Лузин. *Собр. соч., т. 2.* М.: Изд-во АН СССР, 1958.

[20] В. А. Любецкий. Некоторые следствия гипотезы о несчетности множества конструктивных действительных чисел. *ДАН СССР*, 182(43): 758–759, 1968.

[21] В. А. Любецкий. Из существования неизмеримого множества типа A_2 вытекает существование несчетного множества, не содержащего совершенного подмножества, типа CA. *ДАН СССР*, 195(3): 548–550, 1970.

[22] В. А. Любецкий. Случайные последовательности чисел и A_2-множества. In *Исследования по теории множеств и неклассическим логикам*, с. 96–122. М.: Наука, 1976.

[23] А. А. Ляпунов. *Вопросы теории множеств и теории функций.* М.: Наука, 1979.

[24] П. С. Новиков. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств. *Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова*, 38: 279–316, 1951.

[25] П. С. Новиков. *Избранные труды: теория множеств и функций, математическая логика и алгебра.* М.: Наука, 1979.

[26] П. С. Новиков и С. И. Адян. Об одной полунепрерывной функции. *Уч. зап. МГПИ им. В.И. Ленина*, 138(3): 3–10, 1958.

[27] П. С. Новиков и Л. В. Келдыш. Комментарии к работам Н. Н. Лузина. В книге: *Лузин Н.Н., Собрание сочинений, т. 2*, с. 725–739. М.: Изд-во АН СССР, 1958.

[28] В. М. Тихомиров. Открытие A-множеств. *Историко-матем. исследования*, 34: 129–139, 1993.

[29] В. А. Успенский. Вклад Н. Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания. *УМН*, 40(вып. 3(243)): 85–116, 240, 1985.

[30] В. А. Успенский и В. Г. Кановей. Проблемы Лузина о конституантах и их судьба. *Вестник Моск. Унив. сер. мат., мех.*, с. 73–87, 1983.

[31] Ф. Хаусдорф. *Теория множеств.* М.: ОНТИ, 1934.

[32] Дж. Шенфилд. *Математическая логика.* М.: Наука, 1975. Пер. с англ.

[33] J.W. Addison. Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory. *Fundam. Math.*, 46: 123–135, 1959.

[34] J.W. Addison. Some consequences of the axiom of constructibility. *Fundam. Math.*, 46: 337–357, 1959.

[35] J.W. Addison and Y.N. Moschovakis. Some consequences of the axiom of definable determinateness. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 59: 708–712, 1968.

[36] P. Alexandroff. Sur la puissance des ensembles mesurables B. *C. R.*, 162: 323–325, 1916.

[37] R. Baire, É. Borel, J. Hadamard, and Lebesgue H. Cinq lettres sur la théorie des ensembles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 33: 261–273, 1905.

[38] Howard Becker and Alexander S. Kechris. *The descriptive set theory of Polish group actions.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[39] David Blackwell. Infinite games and analytic sets. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 58: 1836–1837, 1967.

[40] John P. Burgess. Equivalences generated by families of Borel sets. *Proc. Am. Math. Soc.*, 69: 323–326, 1978.

[41] John P. Burgess. Effective enumeration of classes in a Σ^1_1 equivalence relation. *Indiana Univ. Math. J.*, 28: 353–364, 1979.

[42] M. Davis. Infinite games of perfect information. *Ann. Math. Stud.*, 52: 85–101, 1964.

[43] Gabriel Debs and Jean Saint Raymond. Borel liftings of Borel sets: some decidable and undecidable statements. *Mem. Am. Math. Soc.*, 876: 118 pp., 2007.

[44] C. de la Vallée Poussin. *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire.* Paris: Gauthier-Villars, 1916.

[45] Robert P. Dilworth. A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets. *Ann. of Math.*, 51: 161–166, 1950.

[46] P. Du Bois Reymond. Sur la grandeur relative des infinis des fonctions. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 4: 338–353, 1870.

[47] Ekaterina B. Fokina, Sy-David Friedman, and Asger Törnquist. The effective theory of Borel equivalence relations. Kurt Gödel Research Center for Mathematical Logic, University of Vienna. Preprint dated June 16, 2009.

[48] D.H. Fremlin and S. Shelah. On partitions of the real line. *Isr. J. Math.*, 32: 299–304, 1979.

[49] David Gale and F.M. Stewart. Infinite games with perfect information. Contrib. Theory of Games, II, Ann. Math. Stud. No. 28, 245–266 (1953)., 1953.

[50] V. I. Glivenko. Sur les fonctions implicites. *Матем. сборник*, 36: 138–142, 1929.

[51] Kurt Gödel. *The Consistency of the Continuum Hypothesis*. Annals of Mathematics Studies, no. 3. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1940. Русский перевод: Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, УМН, 1948, т. 3, вып. 1, с. 96–149.

[52] L. A. Harrington, A. S. Kechris, and A. Louveau. A Glimm-Effros dichotomy for Borel equivalence relations. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(4): 903–928, 1990.

[53] L. A. Harrington, D. Marker, and S. Shelah. Borel orderings. *Trans. Am. Math. Soc.*, 310(1): 293–302, 1988.

[54] F. Hausdorff. Die Graduierung nach dem Endverlauf. *Leipzig Abh.*, 31 :297–334, 1909.

[55] F. Hausdorff. Die Mächtigkeit der *Borel*schen Mengen. *Math. Ann.*, 77: 430–437, 1916.

[56] F. Hausdorff. Summen von $\aleph_1$ Mengen. *Fundam. Math.*, 26: 241–255, 1936.

[57] Felix Hausdorff. *Collected works. Vol. III: Set theory (1927, 1935). Descriptive set theory and topology. Edited by U. Felgner, H. Herrlich, M. Hušek, V. Kanovei, P. Koepke, G. Preuß, W. Purkert und E. Scholz. (Gesammelte Werke. Band III: Mengenlehre (1927, 1935). Deskriptive Mengenlehre und Topologie.)*. Berlin: Springer. xxii, 1005 p. , 2008.

[58] G. Hjorth. Thin equivalence relations and effective decompositions. *J. Symbolic Logic*, 58(4): 1153–1164, 1993.

[59] G. Hjorth. Actions by the classical Banach spaces. *J. Symbolic Logic*, 65(1): 392–420, 2000.

[60] G. Hjorth and A. S. Kechris. Analytic equivalence relations and Ulm-type classifications. *J. Symbolic Logic*, 60(4): 1273–1300, 1995.

[61] W. Hurewicz. Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A). *Fundam. Math.*, 12: 78–109, 1928.

[62] Vladimir Kanovei. When a partial Borel order is linearizable. *Fundam. Math.*, 155(3): 301–309, 1998.

[63] Vladimir Kanovei. Linearization of definable order relations. *Ann. Pure Appl. Logic*, 102(1-2): 69–100, 2000.

[64] Vladimir Kanovei. *Borel equivalence relations: classification and structure*. University Lecture Series of AMS, New York, 2008.

[65] Vladimir Kanovei and Peter Koepke. *Comments to Hausdorff's paper "Die Machtigkeit der Borelschen Mengen"*, pages 439–442. Berlin: Springer, 2008.

[66] Alexander S. Kechris. The axiom of determinacy implies dependent choices in $\mathrm{L}(\mathbf{R})$. *J. Symb. Log.*, 49: 161–173, 1984.

[67] Alexander S. Kechris. Topology and descriptive set theory. *Topology Appl.*, 58(3): 195–222, 1994.

[68] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[69] Alexander S. Kechris, Benedikt Löwe, and John R. Steel, editors. *Games, scales, and Suslin cardinals. The Cabal Seminar, Vol. I.* Cambridge: Cambridge University Press. xi, 445 p. , 2008.

[70] M. Kondô. L'uniformisation des complémentaires analytiques. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 13: 287–291, 1937.

[71] K. Kuratowski. Sur les théorèmes de séparation dans la théorie des ensembles. *Fund. Math.*, 26: 183–191, 1936.

[72] Henry Lebesgue. Sur les fonctions représentable analytiquement. *Journ. de Math. (Sér. 6)*, 1: 139–216, 1905.

[73] G. Lorentz. Who discovered analytic sets. *The Mathematical Intelligencer*, 23: 1–5, 2001.

[74] Alain Louveau. A separation theorem for Σ^1_1 sets. *Trans. Am. Math. Soc.*, 260: 363–378, 1980.

[75] A. Louveau. Some results in the Wadge hierarchy of Borel sets. Cabal Semin. 79-81, Proc. Caltech-UCLA Logic Semin. 1979-81, Lect. Notes Math. 1019, 28–55 (1983)., 1983.

[76] Alain Louveau. Two results on Borel orders. *J. Symb. Log.*, 54, No.3: 865–874, 1989.

[77] N. Lusin and P. Novikoff. Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire, donné par un crible. *Fundamenta Math.*, 25: 559–560, 1935. Русский перевод в кн. [19] с. 621–623.

[78] N. Lusin and W. Sierpinski. Sur quelques proprietes des ensembles mesurables (A). *Krak. Anz.*, 1918: 35–48, 1918. Русский перевод в кн. [19] с. 273–284.

[79] N. Lusin and W. Sierpinski. Sur un ensemble non mesurable B. *Journ. de Math.*, 2: 53–72, 1923. Русский перевод в кн. [19] с. 285–300.

[80] Nicolas Lusin. Sur la classification de M. Baire. *C. r. Acad. Sci. Paris*, 164: 91–94, 1917. Русский перевод в кн. [19] с. 270–272.

[81] Nicolas Lusin. Sur les ensembles proectifs de M. Henri Lebesgue. *C. r. Acad. Sci. Paris*, 180: 1572–1574, 1925. Русский перевод в кн. [19] с. 304–306.

[82] Nicolas Lusin. Sur les ensembles analytiques. *Fund. Math.*, 10:1–95, 1927. Русский перевод в кн. [19] с. 380–459.

[83] Nicolas Lusin. Sur le problème de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensembles. *Mathématica Cluj*, 4: 54–66, 1930.

[84] Nicolas Lusin. Sur les classes des constituantes des complementaires analytiques. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, II. Ser.*, 2: 269–282, 1933. Русский перевод в кн. [19] с. 627–641.

[85] Nicolas Lusin. *Lecons sur les ensembles analytiques et leurs applications. 2nd corrected ed.* New York, N.Y.: Chelsea Publishing Company. XIV, 326 p., 1972. Русский перевод в кн. [19] с. 9–269.

[86] Richard Mansfield. Perfect subsets of definable sets of real numbers. *Pacific J. Math.*, 35(2): 451–457, 1970.

[87] Richard Mansfield and Galen Weitkamp. *Recursive aspects of descriptive set theory.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1985. With a chapter by Stephen Simpson.

[88] D.A. Martin. The axiom of determinateness and reduction principles in the analytical hierarchy. *Bull. Am. Math. Soc.*, 74: 687–689, 1968.

[89] D.A. Martin and A.S. Kechris. Infinite games and effective descriptive set theory. In *Analytic sets, by C. A. Rogers et al.*, pp. 403–470. Academic Press. X, 499 p., London etc., 1980.

[90] Donald A. Martin. Borel determinacy. *Ann. Math. (2)*, 102: 363–371, 1975.

[91] Donald A. Martin. A purely inductive proof of Borel determinacy. Recursion theory, Proc. AMS-ASL Summer Inst., Ithaca/N.Y. 1982, Proc. Symp. Pure Math. 42, 303–308 (1985)., 1985.

[92] Donald A. Martin and John R. Steel. A proof of projective determinacy. *J. Am. Math. Soc.*, 2(1): 71–125, 1989.

[93] Arnold W. Miller. On the length of Borel hierarchies. *Ann. Math. Logic*, 16: 233–267, 1979.

[94] Arnold W. Miller. On the Borel classification of the isomorphism class of a countable model. *Notre Dame J. Form. Logic*, 24(1): 22–34, 1983.

[95] Arnold W. Miller. *Descriptive set theory and forcing.* Springer-Verlag, Berlin, 1995. How to prove theorems about Borel sets the hard way.

[96] Yiannis N. Moschovakis. Uniformization in a playful universe. *Bull. Am. Math. Soc.*, 77: 731–736, 1971.

[97] Yiannis N. Moschovakis. *Descriptive set theory.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 100. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company. XII, 637 p. , 1980.

[98] J. Mycielski. On the axiom of determinateness. *Fundam. Math.*, 53: 205–224, 1964.

[99] J. Mycielski and S. Swierczkowski. On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness. *Fundam. Math.*, 54: 67–71, 1964.

[100] Jan Mycielski and Hugo Steinhaus. A mathematical axiom contradicting the axiom of choice. *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys.*, 10: 1–3, 1962.

[101] Pierre Novikoff. Sur les fonctions implicites mesurables B. *Fundam. Math.*, 17: 8–25, 1931. Русский перевод в кн. [25], с. 13–25.

[102] Pierre Novikoff. Sur la séparabilite des ensembles projectifs de seconde classe. *Fundam. Math.*, 25: 459–466, 1935. Русский перевод в кн. [25], с. 43–48.

[103] J. Saint Raymond. Approximation des sous-ensembles analytiques par l'interior. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 281 (Série A): 85–87, 1975.

[104] Ramez L. Sami. On Σ^1_1 equivalence relations with Borel classes of bounded rank. *J. Symb. Log.*, 49: 1273–1283, 1984.

[105] Dana Scott. Invariant Borel sets. *Fund. Math.*, 56: 117–128, 1964.

[106] E. Selivanowski. Sur les propriétés des constituantes des ensembles analytiques. *Fundam. Math.*, 21: 20–28, 1933.

[107] Wacław Sierpiński. Sur une propriété des limites d'ensembles. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 192: 1625–1627, 1931.

[108] Wacław Sierpiński. Sur les constituantes des ensembles analytiques. *Fundam. Math.*, 21: 29–34, 1933.

[109] Jack H. Silver. Counting the number of equivalence classes of Borel and coanalytic equivalence relations. *Ann. Math. Logic*, 18(1): 1–28, 1980.

[110] R.M. Solovay. On the cardinality of Σ^1_2 sets of reals. Found. Math., Symp. Pap. Commem. 60th Birthday K. Gödel, Columbus 1966, 58–73, 1969.

[111] R.M. Solovay. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Ann. Math. (2)*, 92: 1–56, 1970.

[112] Robert M. Solovay. The independence of DC from AD. Cabal Semin., Proc., Caltech-UCLA Logic Semin. 1976-77, Lect. Notes Math. 689, 171–183 (1978)., 1978.

[113] M. Souslin. Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis. *C. R.*, 164: 88–91, 1917.

[114] John R. Steel. Scales on Σ^1_1-sets. Kechris, Alexander S. (ed.) et al., Games, scales, and Suslin cardinals. The Cabal Seminar, Vol. I. Reprints of papers and new material based on the Los Angeles Caltech-UCLA Logic Cabal Seminar 1976–1985. Cambridge: Cambridge University Press; Urbana, IL: Association for Symbolic Logic (ASL). Lecture Notes in Logic 31, 2008.

[115] J. Stern. On Lusin's restricted continuum problem. *Ann. Math.*, 120: 7–37, 1984.

[116] Z. Zalcwasser. Un théorème sur les ensembles qui sont à la fois F_σ et G_δ. *Fundamenta math.*, 3: 44–45, 1922.

Предметный указатель

абсолютная измеримость, 94
аксиома
  AC, 279
  AD, 278
  DC, 279
  PD, 278
  детерминированности, 278
  проективной детерминированности, 278
  выбора, 279
  зависимого выбора, 279
  Det(Γ), 270
алгебра
  σ-алгебра, 34
А-операция, 52
аппроксимация, 74
ассоциированная функция, 24

блок кванторов, 119
борелевское продолжение, 203
борелевская мера, 88
борелевская мощность, 97
  $\aleph_0$, 98
  $\mathfrak{c}$, 98
  $\boldsymbol{n}$, 98
борелевская сводимость, 96
борелевский изоморфизм, 45
борелевский код, 175
бэровский интервал, 13, 21
бэровское произведение, 112
бэровское пространство, $2^{\mathbb{N}}$, 20

вероятностная мера, 88
вершина дерева
  концевая, 23
ветвь, 68
вещественное число, 142
Виеторис
  топология, 32
выбор по Крайзелю, 173

гейм-оператор, 266
гомоморфизм, 71, 82
  частичный, 71
график, 129
график отображения, 39
группа
  борелевская, 103
  действие, 104
  полизируемая, 103
  польская, 103

действие, 104
  польское, 104
  свободное, 104
  $g \cdot x$, 104
декартово произведение, 13
дерево, 22, 145
  компактное, 192
  обрезанное, 69
  производное, 69
  совершенное, 23
  суперсовершенное, 199
  фундированное, 68
длина кортежа, 22

замыкание $\overline{X}$, 60

иерархия
  борелевская, 34
  проективная, 64
игра
  $\mathbf{G}_A$, 264

$\mathbf{G}_A(u;v)$, 269
детерминированная, 265
на $I \times J$, 266
на множествах I, J, 266
на множестве I, 265
с позиции, 269
игра Шоке, 186
игровой универсум, 280
изоморфизм
борелевский изоморфизм, 45
структур, $\cong_{\mathscr{L}}$, 105
интервал
бэровский интервал, 13, 21
канторов интервал, 21

канторов дисконтинуум, $2^{\mathbb{N}}$, 21
канторов интервал, 21
канторова система, 23
класс
Σ^i_n, Π^i_n, Δ^i_n, 116
$\Sigma^i_n(A)$, $\Pi^i_n(A)$, $\Delta^i_n(A)$, 116
$\mathbf{\Gamma}^0_\xi[\mathbb{X}]$, 35
$\mathbf{\Gamma}^1_n[\mathbb{X}]$, 64
$\Sigma^i_n(p)$, $\Pi^i_n(p)$, $\Delta^i_n(p)$, 116
$\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, $\mathbf{\Pi}^0_\xi$, $\mathbf{\Delta}^0_\xi$, $\mathbf{\Gamma}^0_\xi$, 34
$\mathbf{\Sigma}^1_0$, $\mathbf{\Pi}^1_0$, $\mathbf{\Delta}^1_n$, $\mathbf{\Gamma}^1_0$, 65
$\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$, $\mathbf{\Gamma}^1_n$, 64
Σ^1_1 на Π^1_1, 144
нормированный, 158
класс эквивалентности, 96
код, 150, 170
борелевский, 175
$\boldsymbol{\Delta^1_1}$-кодировка, 170
релятивизованная, 171
компактное дерево, 192
конституанта, 74, 81
внешняя, 260
внутренняя, 260
неограниченная последовательность, 260
ограниченная последовательность, 260
кортеж, 13
квантор
Воота, W, 218
фиктивный, 120

лестница, 289
хорошая, 290
$\mathbf{\Gamma}$-лестница, 289

мера, 88
борелевская, 88
верхняя, $\mu^*(Y)$, 88
вероятностная мера,
класса K, 208
код меры $\mathtt{cod}_\mu$, 208
мера $\boldsymbol{\lambda}$, 90
мера λ_p, 89
мера $\lambda_{1/2}$, 90
нижняя, $\mu_*(Y)$, 88
регулярность, 90 88
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-мера, 89
K-мера, 208
$(p, 1-p)$-мера, 89
σ-конечная, 88
метрика
совместимая польская, 16
метрика Хаусдорфа, 32
множества
почти равные, 222
множество
$\mathbf{F}$, 34
$\mathbf{F}_\sigma$, 16, 34
$\mathbf{G}$, 34
$\mathbf{G}_\delta$, 16, 34
А-множество, 52
С-множество, 63
СА-множество, 68
СА-множество, 52
$\mathsf{E_0}$-инвариантное, 102
аналитическое, 52
аналитическое дополнение, 52
борелевское, 34
внешнее, 79
гиперарифметическое, 179
детерминированное, 265
конструктивное, 284
косуслинское, 52
котощее, 18
нигде не плотное, 18
однозначное, 160
открытое плотное, 188

плотное, 18, 188
проективное, 64
счетнозначное, 202
совершенное, 22
суперсовершенное, 59, 199
суслинское, 52
точечное, 33
тощее, 18
униформное, 160
универсальное, 49, 125
хорошее, 128
$\mathbb{N}$-универсальное, 125
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-универсальное, 125
μ-измеримое, 88
множество-степень, 13

насыщение, 96
неограниченная последовательность, 260
норма, 85
Γ-норма, 158

область фундированности, 68
образ, 13
обрезанное дерево, 69
ограниченная последовательность, 260
орбита, 104
отделимость, 154
отношение
фундированное, 82
отношение эквивалентности, 95
гиперконечное, 101
гладкое, 99
индуцированное, 104
как множество пар, 95
конечное, 101
область, 96
орбитальное $\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}$, 104
счетное, 100
тонкое, 243
$\mathsf{\Delta}_X$, равенство, 98
E_0, 100
$\mathtt{Vit}$, 100
отображение
борелевское, 39
измеримое по Бэру, 40
счетнозначное, 203
B-измеримое, 40
K-измеримое, 130, 135, 147
отражение, 150

пара
$\prec x, y \succ$, 298
параметры формул, 115
партия, 264
партия в игре, 186
перечисление $\mathbf{s}_n$, 112
почти все, 13
польская сеть, 188
последовательность множеств
сходящаяся, 38
предел последовательности множеств, 38
нижний, 38
верхний, 38
предщель, 108
предупорядочение, 84
линейное, 85
полное, 85
принцип
$\boldsymbol{\Delta}^1_1$-кодировка, 170
борелевское продолжение, 203
выбор по Крайзелю, 173
отделимость, 154, 156
отражение, 150
редукция, 154, 155
счетноформная проекция, 202
счетноформная униформизация, 204
счетноформное перечисление, 203
теорема универсальных множеств, 128
униформизация, 161, 164
приставка, 115
проекция
игровая, $\Game B$, 266
$\mathtt{pr}\,P$, 55
$\mathtt{pr}[T]$, 146
производное дерево T', 69
прообраз, 13
пространство
близкое к бэровскому произведению, 140

бэровское произведение, 112
бэровское, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 20
вещественная прямая, $\mathbb{R}$, 28
гильбертов куб, $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$, 29
единичный отрезок, $\mathbb{I}$, 29
канторов дисконтинуум, $2^{\mathbb{N}}$, 21
компактных множеств, 32
польское, 16
совершенное, 22
стандартное борелевское, 49
стратегий $\mathscr{S}$, 264
Шоке, 186
c_0, 31, 32
$\mathbb{G}$-пространство, 104
борелевское, 104
польское, 104
$\mathbf{K}(\mathbb{X})$, 32
$\boldsymbol{\ell}^{\infty}$, 32
$\boldsymbol{\ell}^{p}$, 32
$\mathscr{P}(\mathbb{N})$, 30

ранг
$|T|$, 69
$|s|_T$, 69
борелевского кода, 175
дерева, 69
по Кантору–Бендиксону, 69
равенство, Δ_X, 98
развернутая функция, 129
развертка, 129
редукция, 96
борелевская, 96
редукция, 154
решето, 79
сечение, 79

сводимость
по Рудин – Блассу
экспоненциальная, 316
сводить, 154
свойство
абсолютная измеримость, 94
Бэра, 19, 94
совершенного ядра, 94, 255
Хаусдорфа, 109
сечение, 13, 49, 73, 201
сечение решета, 79

семейство
$\varPi^1_1$ в кодах, 150
симметрическая разность, 13
синглет, 131
система
дизъюнктная, 24
измельчающаяся, 23
канторова, 23
класса K, 147
монотонная, 23
неисчезающая, 23
открыто-отделимая, 24
регулярная, 23
суслинская, 23, 52
регулярная, 53
стратегия, 186, 264
выгрывающая, 186, 187
выигрывающая, ВС, 264
суслинская система, 23, 52
регулярная, 53
счетноформная проекция, 202
счетноформная униформизация, 204
счетноформное перечисление, 203

теорема универсальных множеств, 128
теория
ZF, 279
ZFC, 257
топология
Виеториса, 32
точка
конденсации, 110
точка ветвления, 23
точка фундированности, 68

универсум
игровой универсум, 280
униформизация, 161

фактормножество, 96
формула
аналитическая, 114
арифметическая, 114
ограниченная, 114
элементарная, 114
$\mathbf{bc}(c)$, 178
$\varPi^0_n$, 115

Π^1_n, 115
$\pi(c,x)$, 178
$\pi'(c,x)$, 178
$\sigma(c,x)$, 178
Σ^0_n, 115
Σ^1_n, 115
фундированность, 85
для строгого отношения $<$, 82
функция
область определения, 13
область значений, 13
развернутая, 129
счетнозначная, 203
K-измеримая, 130, 135, 147

Хаусдорфа
метрика, 32

число элементов, 13

щель, 108

эвентуальное доминирование, 107

ядро, 24
язык
счетный реляционный, 32

$2^{<\omega}$, 13, 20
2^n, 13
2^m, 22
$\leqslant^*$, 107
a^-, 113
$\boldsymbol{A}[\mathfrak{F}]$, 52, 73
$\boldsymbol{A}_{\leq\xi}[\mathfrak{F}]$, 74
$\boldsymbol{A}_{<\xi}[\mathfrak{F}]$, 74
$\boldsymbol{A}_{\xi}[\mathfrak{F}]$, 74
$(a)^k_i$, 113
$\aleph_0$, 98
$(a)_n$, 113
$a\restriction m$, 20
$A\times B$, 13
BC, 175
$\boldsymbol{B}_c$, 175
$\boldsymbol{B}_c(s)$, 175
BM(X), 266
Bor$(\mathbb{X})$, 34
BP$(\mathbf{K})$, 255
$\mathfrak{c}$, 98
c_0, 31, 32
$\bigwedge_n c_n$, 177
$\boldsymbol{C}[\mathfrak{F}]$, 73
$\boldsymbol{C}_{\leq\xi}[\mathfrak{F}]$, 74
$\boldsymbol{C}_{<\xi}[\mathfrak{F}]$, 74
$\boldsymbol{C}_{\xi}[\mathfrak{F}]$, 74
$\mathtt{cod}_\mu$, 208
$\cong_{\mathscr{L}}$, 105
$c[s]$, 176
$\bigvee_n c_n$, 177
$\complement X$, 13
Δ_X, 98
$\mathtt{dom}\,\mathsf{E}$, 96
$\mathtt{dom}\,f$, 13
E_0, 100
$\mathsf{E} <_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, 96
$\mathsf{E} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, 96
$\mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathfrak{a}} = \mathsf{E}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{G}}$, 104
$\mathsf{E} \leqslant_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, 96
$\mathscr{E}(\boldsymbol{R})$, 79
$\mathbf{F}$, 34
$f[X]$, 13
$f^{-1}[X]$, 13
$\mathbf{F}_\sigma$, 16, 34
F^x, 73
$\mathbf{G}$, 34
$g\cdot x$, 104
$\mathbf{\Gamma}^0_\xi[\mathbb{X}]$, 35
$\mathbf{\Gamma}^1_n[\mathbb{X}]$, 64
$\Game\, B$, 266
$\mathbf{G}_\delta$, 16, 34
$\mathbf{\Gamma}$, 117
Γ_F, 39
Γ_f, 129
$\mathit{\Gamma}$, 117
IFT, 68
$\mathbf{IFT}_\xi$, 69
$\mathbf{IFT}_{\leq\xi}$, 69
$\mathbf{IFT}_{<\xi}$, 69
IO, 81
$k^\wedge s$, 22
$\mathbf{K}(\mathbb{X})$, 32
$\lambda_{1/2}$, 90
Λ, 20, 68

$\boldsymbol{\lambda}$, 90
$\leq_f$, 85
$\mathtt{lh}\, s$, 13, 22
$\boldsymbol{\ell}^\infty$, 32
$\mathrm{LM}(\mathbf{K})$, 255
$\boldsymbol{\ell}^p$, 32
λ_p, 89
$\mathtt{Max}\, T$, 23
$(m)_i^k$, 112
$\mathtt{Mod}_{\mathscr{L}}$, 32
$\mu_*(Y)$, 88
$\mu^*(Y)$, 88
$\mathbb{N}$, 13
$\boldsymbol{n}$, 98
$\mathbb{N}^{<\omega}$, 13, 20, 22
$\nabla_n\, c_n$, 176
$\neg\, c$, 176
$\mathbb{N}^m$, 22
$\mathbf{num}(a, m)$, 131
ω_1, 34
$[s]$, 13
$\mathscr{P}(A)$, 13
$\mathbf{PH}_{ST}$, 71
π, 112
$\mathrm{PK}(\mathbf{K})$, 255
$\mathtt{pr}\, P$, 55
$\mathtt{pr}[T]$, 146
$\boldsymbol{P}(X)$, 89
P_x, 201
$\mathbb{R}$, 142
$\mathtt{ran}\, f$, 13
$\mathtt{rk}\, c$, 175
$|T|$, 69
$|s|_T$, 69
$\mathscr{S}$, 264
$[s]$, 21
$[s]$, 21
$\mathbf{s}_n$, 112
$\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$, $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$, $\boldsymbol{\Delta}^0_\xi$, $\boldsymbol{\Gamma}^0_\xi$, 34
$\boldsymbol{\Sigma}^1_0$, $\boldsymbol{\Pi}^1_0$, $\boldsymbol{\Delta}^1_0$, $\boldsymbol{\Gamma}^1_0$, 65
$\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, $\boldsymbol{\Pi}^1_n$, $\boldsymbol{\Delta}^1_n$, $\boldsymbol{\Gamma}^1_n$, 64
$s \restriction m$, 22
$s \subset t$, 22
$\mathtt{sup}\, \Xi$, 70
$s^\wedge k$, 22
$s^\wedge t$, 22
$\mathbf{Tr}$, 68
T', 69
$[T]$, 145
$|T|_{\mathtt{CB}}$, 69
$T^{(\infty)}$, 69
$T\restriction_s$, 69
$T_{\mathtt{wf}}$, 68
$T^{(\xi)}$, 69
$(U)_x$, 49
$\mathtt{Vit}$, 100
$\mathbf{WFT}$, 68
$\mathbf{WFT}_\xi$, 69
$\mathbf{WFT}_{\leq\xi}$, 69
$\mathbf{WFT}_{<\xi}$, 69
$\mathbf{WO}$, 81
$\mathbf{WO}_\xi$, 81
$\mathsf{W}x$, 218
X^n, 13
X^Y, 13
$(X)_a$, 13
X/E, 96
$[x]_{\mathsf{E}}$, 96
$\overline{X}$, 60
$X \triangle Y$, 13
$\prec x, y \succ$, 298
$[Y]_{\mathsf{E}}$, 96
$\#(X)$, 13

Приложение

Пользуясь случаем, мы приводим здесь переработанное доказательство одной теоремы нашей книги «Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики» [13], которое в первоначальном изложении [13, §5г] представило некоторые ключевые моменты без достаточных деталей. В теореме речь идет о том, что при некоторых общих предположениях о последовательности неотрицательных вещественных чисед r_n, заданное ею отношение эквивалентности

$$x \mathsf{S}_{\{r_n\}} y\,, \quad \text{если} \quad \sum_{n \in x \triangle y} r_n < +\infty$$

на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ (где $x \triangle y = (x \smallsetminus y) \cup (y \smallsetminus x)$ — симметрическая разность) борелевски несводимо к отношению эквивалентности

$$x \mathsf{Z}_0 y\,, \quad \text{если} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\#([0,n] \cap (x \triangle y))}{n} = 0\,,$$

определенному также на $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, где в числителе стоит число элементов симметрической разности $x \triangle y$ в конечном сегменте $[0,n]$. Эти отношения эквивалентности очевидным образом связаны соответственно с *суммируемым идеалом*

$$\mathscr{S}_{\{r_n\}} = \{z \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in z} r_n < +\infty\}$$

и *идеалом множеств плотности 0*

$$\mathscr{Z}_0 = \{z \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n \to \infty} \frac{\#([0,n] \cap z)}{n} = 0\}\,.$$

Важно: Все обозначения и ссылки в нижеследующем переработанном тексте §5г из [13] соответствуют списку обозначений, библиографии, и общей структуре разделов книги [13].

§ 5г. Суммируемые идеалы и идеал нулевой плотности

Утверждение о $\leqslant_{\rm B}$-независимости двух ниболее известных банаховых отношений эквивалентности $\boldsymbol{\ell}^1$ и c_0 весьма важно. В одну сторону оно доказано выше в упражнении 5.7. В другую сторону оно доказывается в следующей теореме 5.12, плученной Хъёртом [35] в общем виде, и только для E_2 и Z_0 — Джастом [45]. Ее любопытно сравнить с результатом 2.6: борелевская сводимость не вытекает из включения соответствующих идеалов!

Теорема 5.12. *Предположим* $r_n \ge 0$, $r_n \to 0$, $\sum_n r_n = +\infty$. *Тогда отношение* $\mathsf{S}_{\{r_n\}}$ *борелевски несводимо к* Z_0. *В частности, при* $r_n = \frac{1}{n+1}$, *отношение эквивалентности* $\mathsf{S}_{\{r_n\}} = \mathsf{E}_2$ *борелевски несводимо к* Z_0.

Доказательство. Предположим противное: найдется борелевская функция $\vartheta : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, являющаяся редукцией $\mathsf{S}_{\{r_n\}}$ к Z_0, т. е.

$$x \bigtriangleup y \in \mathscr{S}_{\{r_n\}} \iff \vartheta(x) \bigtriangleup \vartheta(y) \in \mathscr{Z}_0 \qquad \text{для всех } x, y \subseteq \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Вывод противоречия состоит из двух частей.

Для первой части нам понадобится еще один вариант определения сводимости по Рудин – Блассу из §2а. Именно, если $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ – идеалы на $\mathbb{N}$, то скажем, что соотношение $\mathscr{I} \leqslant^{++}_{\rm RB} \mathscr{J}$ выполняется *экспоненциально*, если существует последовательность натуральных чисел k_i удовлетворяющих условию $k_{i+1} \ge 2k_i$ и семейство непустых множеств $w_i \subseteq [k_i, k_{i+1})$, для которых эквивалентность $x \in \mathscr{I} \iff w_x = \bigcup_{i \in x} w_i \in \mathscr{J}$ выполнена для всех $x \subseteq \mathbb{N}$.

Часть 1: докажем, что $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \leqslant^{++}_{\rm RB} \mathscr{Z}_0$ экспоненциально.

Положим $\nu(x) = \mathtt{sup}_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{\#(x \cap [0, n))}{n}$ — это можно понимать как *плотность*, или скорее *верхняя* плотность множества $x \subseteq \mathbb{N}$. Мы оставляем читателю в качестве **упражнения** несложный вывод следующей эквивалентности, связывающей ν с идеалом $\mathscr{Z}_0$:

$$x \in \mathscr{Z}_0 \iff \lim_{k \to \infty} \nu(x \cap [k, \infty)) = 0 \qquad \text{для всех } x \subseteq \mathbb{N}. \qquad (2)$$

Скажем, что некоторое свойство $P(x)$ выполнено для $*$-*всех* элементов x какого-то множества $X \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$, если множество $\{x \in X : \neg\, P(x)\}$ всех контрпримеров является тощим в топологии пространства $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. (О последней см. §2а. Она гомеоморфна топологии произведения $2^{\mathbb{N}}$.) Это происходит автоматически, если само X — тощее, но мы будем использовать понятие «для $*$-всех» когда X — непустое открытое (тогда и не тощее) множество в $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Временно фиксируем $\varepsilon > 0$ и множества $u, v \subseteq [0, n)$. Для любого $x_0 \subseteq [n, \infty)$ симметрическая разность $(u \cup x_0) \bigtriangleup (v \cup x_0) = u \bigtriangleup v$ конечна, и потому она принадлежит идеалу $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$. Согласно (1) соответствующее множество $\vartheta(u \cup x_0) \bigtriangleup \vartheta(v \cup x_0)$ принадлежит $\mathscr{Z}_0$. Значит, согласно (2) найдется такое число $k > n$, что $\nu([\vartheta(u \cup x_0) \bigtriangleup \vartheta(v \cup x_0)] \cap [k, \infty)) < \varepsilon$. Однако функция $x \mapsto \nu([\vartheta(u \cup x) \bigtriangleup \vartheta(v \cup x)] \cap [k, \infty))$ является борелевской (поскольку таковы ϑ и ν), поэтому по теореме B.4 (см. дополнение) она непрерывна на подходящем ко-тощем множестве $D \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Значит, существует такое открытое множество $U \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$, содержащее x_0, что $\nu([\vartheta(u \cup x) \bigtriangleup \vartheta(v \cup x)] \cap [k, \infty)) < \varepsilon$ для всех $x \in U \cap D$, т. е. для $*$-всех $x \in U$. По определению топологии пространства $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, найдутся такие $n' > k$ и $s \subseteq [n, n')$, что $\nu([\vartheta(u \cup x') \bigtriangleup \vartheta(v \cup x')] \cap [k, \infty)) < \varepsilon$ выполнено для $*$-всех $x \subseteq [n, \infty)$, удовлетворяющих $x \cap [n, n') = s$. Другими словами, множество

$$\{x \subseteq [n, \infty) : x \cap [n, n') = s \wedge \nu([\vartheta(u \cup x) \bigtriangleup \vartheta(v \cup x)] \cap [k, \infty)) < \varepsilon\}$$

всех контрпримеров — тощее в $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Фиксировав эти k и n', рассмотрим теперь какую-нибудь другую пару множеств $u_1, v_1 \subseteq [0, n)$. Аналогичное рассуждение дает нам числа $k_1 > k$ и $n'_1 > n'$, и множество $s_1 \subseteq [n, n'_1)$, для которых $s = s_1 \cap [n, n')$ и неравенство $\nu([\vartheta(u_1 \cup x') \bigtriangleup \vartheta(v_1 \cup x')] \cap [k_1, \infty)) < \varepsilon$ выполнено для $*$-всех $x' \subseteq [n, \infty)$, удовлетворяющих $x' \cap [n, n'_1) = s_1$.

Продолжая этот процесс так, чтобы просмотреть все пары множеств $u, v \subseteq [0, n)$, получим в результате числа $n' > k > n$ и множество $s \subseteq [n, n')$ такие, что для всех $u, v \subseteq [0, n)$ и для $*$-всех $x \subseteq [n', \infty)$ выполнено

$$\nu\Big([\vartheta(u \cup s \cup x) \bigtriangleup \vartheta(v \cup s \cup x)] \cap [k, \infty)\Big) < \varepsilon\,. \tag{3}$$

Причем, если увеличить k, то (3) сохранится.

Далее, снова рассмотрим произвольное $x_0 \subseteq [n'', \infty)$. Как и выше, по теореме B.4 Дополнения, имеются число $n'' > n'$ и множество $s' \subseteq [n, n'')$ для которых $s = s' \cap [n, n')$ и кроме того

$$\vartheta(u \cup s' \cup x_0) \cap [0, k) = \vartheta(u \cup s' \cup x) \cap [0, k) \tag{4}$$

для всех $u \subseteq [0, n)$ и $*$-всех $x \subseteq [n'', \infty)$. При этом соотношение (3) сохраняется, т. е. для всех $u, v \subseteq [0, n)$ и $*$-всех $x \subseteq [n'', \infty)$:

$$\nu\Big([\vartheta(u \cup s' \cup x) \bigtriangleup \vartheta(v \cup s' \cup x)] \cap [k, \infty)\Big) < \varepsilon\,. \tag{5}$$

Итерируя эту конструкцию, построим последовательность натуральных чисел $0 = k_0 = a_0 < b_0 < k_1 < a_1 < b_1 < k_2 < \ldots$ и для каждого i множества $s_i \subseteq [b_i, a_{i+1})$ и $t_i \subseteq [a_i, b_i)$ такие, что

(a) $k_{i+1} \geq 2k_i$ for all i,

(b) $|r_i - \sum_{n \in t_i} r_n| < 2^{-i}$,

и кроме того, тощее множество $D(i) = \bigcup_\ell D_\ell(i) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$, где все множества $D_\ell(i) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ нигде не плотны, такое, что для всех u, $v \subseteq [0, b_i)$ и всех $x, y \subseteq [a_{i+1}, \infty)$, $x, y \notin D(i)$, выполнены следующие требования (c), (d), (e).

(c) $\nu\Big([\vartheta(u \cup s_i \cup x) \bigtriangleup \vartheta(v \cup s_i \cup x)] \cap [k_{i+1}, \infty)\Big) < 2^{-i-1}$,

(d) $\vartheta(u \cup s_i \cup x) \cap [0, k_{i+1}) = \vartheta(u \cup s_i \cup y) \cap [0, k_{i+1})$.

Последнее условие (e) требует некоторой работы. Положим $\pi(i, \ell) = 2^i(2\ell+1) - 1$, т. е. π — биекция $\mathbb{N}^2$ на $\mathbb{N}$ и $\pi(i, \ell) \geq \mathtt{max}\{i, \ell\}$. Наконец, для каждого $m = \pi(i, \ell)$ положим $D'_m = D_\ell(i)$ и $D^*_m = \bigcup_{j \leq m} D'_j$. Теперь формулируется:

(e) для каждого $z \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, если $z \cap [b_i, a_{i+1}) = s_i$ то $z \notin D^*_i$. Следовательно, если $z \cap [b_i, a_{i+1}) = s_i$ для бесконечно многих i, то $z \notin \bigcup_i D(i)$.

Опишем эту конструкцию несколько более подробно.

Шаг 1. Начав с $a_0 = 0$, мы определим значения $a_0 < b_0 < k_1 < a_1$ и множества $t_0 \subseteq [a_0, b_0)$ и $s_0 \subseteq [b_0, a_1)$ следующим образом.

Первое действие. В наших предположениях о числах r_n, находим число $b_0 > a_0$ и множество $t_0 \subseteq [a_0, b_0)$ так, чтобы выполнить (b) для $i = 0$.

Второе действие. Теперь, приняв $n = b_0$ и $\varepsilon = 2^{-1}$, выполним построение, которое приводит к (4) и (5), и обозначим через k_1 и a_1 полученные значения k' и n'' и через s_0 полученное множество $s' \subseteq [b_0, a_1)$. Понятно, что (c), (d) выполнены для $i = 0$. Если нужно, увеличиваем значения k_1 и a_1 с тем, чтобы получить (a).

Третье действие. Теперь надо позаботиться о (e). Понятно, что $D^*_0 = D_0(0)$ — нигде не плотное множество, а потому найдутся число $a'_1 > a_1$ и множество $s'_0 \subseteq [b_0, a'_1)$, продолжающее s_0, такие, что для любого $z \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, из $z \cap [b_0, a'_1) = s'_0$ следует $z \notin D^*_0$, т. е. (e).

Шаг *i*, т. е. уже имея значение a_i мы строим $a_i < b_i < k_{i+1} < a_{i+1}$ и прочие элементы для этого шага конструкции. Находим $b_i > a_i$ и $t_i \subseteq [a_i, b_i)$ удовлетворяющие (b). Приняв $n = b_i$ и $\varepsilon = 2^{-i+1}$, выполним построение, которое приводит к (4) и (5), и обозначим через k_{i+1} и a_{i+1} полученные значения k' и n'' и через s_i – полученное множество $s' \subseteq [b_i, a_{i+1})$. Увеличиваем k_{i+1} и a_{i+1}, если нужно, чтобы выполнилось (a). Наконец, повторяем третье действие шага 0 для множества D^*_i, получая (e).

И так далее.

Из (b) следует, что отображение $\xi \mapsto t_\xi = \bigcup_{i\in\xi} t_i$ $(\xi \in \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ является $\leqslant^{++}_{\mathrm{RB}}$-редукцией идеала $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$ к $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \restriction N$, где $N = \bigcup_i [a_i, b_i)$, причем соотношение $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \leqslant^{++}_{\mathrm{RB}} \mathscr{S}_{\{r_n\}} \restriction N$ выполнено экспоненциально из-за (a).

Положим $S = \bigcup_i s_i$; тогда $S \cap N = \varnothing$.

Наконец, положим $f(z) = \vartheta(z \cup S) \bigtriangleup \vartheta(S)$ для каждого $z \subseteq N$. Тогда для любых множеств $x, y \subseteq N$ (не обязательно для всех вообще $x, y \subseteq \mathbb{N}$) выполнена эквивалентность:

$$x \bigtriangleup y \in \mathscr{S}_{\{r_n\}} \Longleftrightarrow \vartheta(x \cup S) \bigtriangleup \vartheta(y \cup S) \in \mathscr{Z}_0 \Longleftrightarrow f(x) \bigtriangleup f(y) \in \mathscr{Z}_0\,,$$

так что f является редукцией идеала $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \restriction N$ к $\mathscr{Z}_0$. Пусть $w_i = f(t_i) \cap [k_i, k_{i+1})$ и $w_\xi = \bigcup_{i\in\xi} w_i$. Утверждается, что отображение $i \mapsto w_i$ доказывает $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \leqslant^{++}_{\mathrm{RB}} \mathscr{Z}_0$ (в экспоненциальном смысле согласно (a)), т. е.

$$\xi \bigtriangleup \eta \in \mathscr{S}_{\{r_n\}} \Longleftrightarrow w_\xi \bigtriangleup w_\eta \in \mathscr{Z}_0$$

для любых $\xi, \eta \subseteq \mathbb{N}$. В самом деле по сказанному выше имеем

$$\xi \bigtriangleup \eta \in \mathscr{S}_{\{r_n\}} \iff t_\xi \bigtriangleup t_\eta \in \mathscr{S}_{\{r_n\}} \iff f(t_\xi) \bigtriangleup f(t_\eta) \in \mathscr{Z}_0\,,$$

так что достаточно доказать, что $f(t_\xi) \bigtriangleup w_\xi \in \mathscr{Z}_0$ для каждого $\xi \subseteq \mathbb{N}$.

Из (2) следует, что достаточно вывести неравенства

$$\nu\Big([f(t_i) \bigtriangleup f(t_\xi)] \cap [k_i, k_{i+1})\Big) < 2^{-i} \quad \text{для всех} \quad i \in \xi, \text{ и}$$
$$\nu(f(t_\xi) \cap [k_i, k_{i+1})) < 2^{-i} \quad \text{для всех} \quad i \in \mathbb{N} \smallsetminus \xi\,,$$

что́ по определению превращается в неравенства

(i) $\nu\Big([\vartheta(t_i \cup S) \bigtriangleup \vartheta(t_\xi \cup S)] \cap [k_i, k_{i+1})\Big) < 2^{-i}$ для всех $i \in \xi$, и

(ii) $\nu\Big([\vartheta(S) \bigtriangleup \vartheta(t_\xi \cup S)] \cap [k_i, k_{i+1})\Big) < 2^{-i}$ для всех $i \in \mathbb{N} \smallsetminus \xi$.

Положим $\eta = \xi \cap [0, i]$. Тогда множества $x = t_\xi \cup S$ и $y = t_\eta \cup S$ удовлетворяют условию $x \cap [0, a_{i+1}) = y \cap [0, a_{i+1})$, причем $x \cap [b_i, a_{i+1}) = y \cap [b_i, a_{i+1}) = s_i$, так что $[\vartheta(x) \bigtriangleup \vartheta(y)] \cap [0, k_{i+1}) = \varnothing$ согласно (d). (Здесь отметим следующее. Очевидно, что множество $x = t_\xi \cup S$ удовлетворяет условию $x \cap [b_i, a_{i+1}) = s_i$ для бесконечно многих i, и то же для y, так что $x, y \notin \bigcup_i D(i)$ по (e). Следовательно, (d) применимо к паре x, y. Это же касается и использования (c) в следующем параграфе.)

Теперь положим $\zeta = \{i\}$ при $i \in \xi$ и $\zeta = \varnothing$ при $i \notin \xi$, и $z = t_\zeta \cup S$. Тогда $z \cap [b_{i-1}, \infty) = y \cap [b_{i-1}, \infty)$, причем $z \cap [b_{i-1}, a_i) = y \cap [b_{i-1}, a_i) = s_{i-1}$. Поэтому согласно (c) для $i-1$ вместо i мы имеем

$$\nu([\vartheta(z) \bigtriangleup \vartheta(y)] \cap [k_i, \infty)) < 2^{-i}.$$

Отдельно, если $i = 0$, то просто $\eta = \zeta$ и $z = y$, так что выделенное неравенство выполнено очевидным образом.

Соединяя оба результата, получим

$$\nu\Big([\vartheta(z) \bigtriangleup \vartheta(x)] \cap [k_i, k_{i+1})\Big) = \nu\Big([\vartheta(z) \bigtriangleup \vartheta(y)] \cap [k_i, k_{i+1})\Big) < 2^{-i}.$$

Отсюда сразу следует (i), так как $z = t_i \cup S$ при $i \in \xi$, и также (ii), так как $z = S$ при $i \notin \xi$.

Часть 2: выведем противоречие из части 1.

Итак определенное выше отображение $i \mapsto w_i$ из $\mathbb{N}$ в конечные подмножества $\mathbb{N}$ доказывает, что $\mathscr{S}_{\{r_n\}} \leqslant^{++}_{\mathrm{RB}} \mathscr{Z}_0$ экспоненциально, при указанной последовательности чисел k_i, удовлетворяющей условиям $k_{i+1} \geq 2k_i$ и $w_i \subseteq [k_i, k_{i+1})$. Если $d_i = \frac{\#(w_i)}{k_{i+1}} \to 0$, то очевидно $\bigcup_i w_i \in \mathscr{Z}_0$ по выбору последовательности $\{k_i\}$. Иначе найдется множество $x \in \mathscr{S}_{\{r_n\}}$ такое, что $d_i > \varepsilon$ для всех $i \in x$ и одного и того же $\varepsilon > 0$, так что $w_x = \bigcup_{i \in x} w_i \notin \mathscr{Z}_0$. В обоих случаях получаем противоречие с выбором отображения $i \mapsto w_i$. $\square$

Проблема 5.13. Фарах [24] указывает, что часть 1 доказательства теоремы 5.12 проходит также для идеала $\mathscr{I}_3$ (вместо $\mathscr{S}_{\{r_n\}}$) и спрашивает для каких еще идеалов можно повторить рассудение части 1.

Научное издание

Владимир Григорьевич Кановей,

Василий Александрович Любецкий

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ: БОРЕЛЕВСКИЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ МНОЖЕСТВА

Подписано в печать 13.09.2010 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 20. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография “Наука”»

121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.