

В. Г. Кановей
В. А. Любецкий

Современная теория множеств:
абсолютно неразрешимые
классические проблемы

Москва
Издательство МЦНМО
2013

УДК 510.22
ББК 22.12
К19

Кановей В. Г., Любецкий В. А.

К19 Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы — М.: МЦНМО, 2013. — 384 с.

ISBN 978-5-4439-0097-1

Монография посвящена изложению основ современной теории множеств: аксиоматики, конструктивности по Гёделю, форсинга. На этой основе излагаются главные результаты, связанные с классическими проблемами дескриптивной теории множеств.

Для математиков-студентов, аспирантов, научных работников.

ББК 22.12

*Владимир Григорьевич Кановей
Василий Александрович Любецкий*

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ:
АБСОЛЮТНО НЕРАЗРЕШИМЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Научное издание

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83.

Подписано в печать 9.04.2013. Формат 60×90 ¹/₁₆. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 24. Тираж 1000 экз. Заказ .

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

978-5-4439-0097-1

© Кановей В. Г., Любецкий В. А., 2013.

В математике XX века произошли принципиальные открытия, которые, по-видимому, не получили широкой известности среди математиков и философов. Эти открытия являются основным предметом изложения в нашей книге.

1) Оказалось возможным разумное определение случайного вещественного числа, так что почти все числа оказываются случайными, кроме рациональных и т.п.

2) Оказалось, что существуют простые и естественные вопросы о вещественных числах, которые не имеют ответа абсолютным образом; не относительно каких-то заранее разрешённых средств рассуждения, построения и т.д., а относительно всех наперёд мыслимых способов рассуждения. Эта ситуация радикально отличается от теперь широко известной алгоритмической или арифметической неразрешимости некоторых вопросов.

Монография (вместе с двумя другими нашими книгами) посвящена изложению основ современной теории множеств: аксиоматики, конструктивности по Гёделю, форсинга по Коэну. На этой основе излагаются главные результаты, связанные с классическими проблемами дескриптивной теории множеств. Для математиков-студентов, аспирантов, научных работников.

Оглавление

Предисловие	9
Некоторые теоретико-множественные обозначения	18
Некоторые логические обозначения	19
1 Множества в математике	21
1.1 Понятие множества	22
1.2 Множества в математике	23
1.3 Синглетоны и пары	25
1.4 Функции	26
1.5 Отношения	27
1.6 Отношения порядка	29
1.7 Натуральные числа	30
1.8 Кортежи	32
1.9 Элементарные операции над множествами	34
<i>Исторические и библиографические замечания</i>	<i>35</i>
2 Аксиоматическая теория множеств	37
2.1 Теория множеств Цермело – Френкеля	38
2.2 Комментарии к аксиомам	40
2.3 Универсум множеств и классы	42
2.4 Ординалы	44
2.5 Ординалы и фундированные отношения	48
2.6 Мощность множества. Кардиналы	50
2.7 Классификация кардиналов	53
<i>Исторические и библиографические замечания</i>	<i>54</i>
3 Универсум теории множеств	55
3.1 Теоретико-множественные структуры	56
3.2 Стандартные модели или $\in$ -модели	58
3.3 Иерархия Фон Неймана и $\in$ -индукция	59
3.4 Иерархия по мощности транзитивного замыкания . .	61
3.5 Ординальная определимость	62
3.6 Слабые теории и их модели	64
3.7 Теория Крипке – Платека	65

3.8	Абсолютность	69
3.9	Модели, не являющиеся $\in$ -моделями	70
3.10	Фундированные ядра моделей	72
3.11	Стандартные множества моделей	73
	<i>Исторические и библиографические замечания</i>	<i>76</i>
4	Дескриптивная теория множеств	77
4.1	Польские пространства	78
4.2	Бэровские произведения	79
4.3	Борелевские и проективные множества	80
4.4	Аналитические формулы, термы	82
4.5	Эффективная иерархия	84
4.6	Выходим из произведений бэровских пространств	86
4.7	Сведение расширенного языка к обычному	88
4.8	Преобразование аналитических формул	90
4.9	Классификация функций и точек	92
4.10	Приведение формул к регулярной форме	93
	<i>Исторические и библиографические замечания</i>	<i>96</i>
5	Первый проективный уровень, часть 1	97
5.1	A-множества	98
5.2	Деревья и ранги	100
5.3	Конституанты	103
5.4	Эффективная определимость конституант	105
5.5	Решета	109
5.6	Униформизация, редукция, отделимость	111
5.7	Кодировка борелевских множеств	113
5.8	Определимость кодировки	117
5.9	Теоремы абсолютности	118
	<i>Исторические и библиографические замечания</i>	<i>121</i>
6	Первый проективный уровень, часть 2	123
6.1	Основные свойства регулярности	124
6.2	Независимость свойств регулярности от пространства и меры	126
6.3	Первый проективный уровень	129
6.4	Мера, категория и борелевская кодировка	130
	<i>Исторические и библиографические замечания</i>	<i>132</i>
7	Свойства регулярности и проблемы Лузина – Новикова	133
7.1	Проблемы регулярности	134
7.2	Анализ проблем. Неразрешимость	135
7.3	План доказательства главной теоремы	137
7.4	О последовательностях конституант	138
7.5	Проблемы Лузина о конституантах	141
7.6	Узкая проблема континуума	144
7.7	Структура высших проективных классов	145

<i>Исторические и библиографические замечания</i>	146
---	-----

8 Конструктивность по Гёделю 147

8.1	Общее понятие конструктивности	148
8.2	Конструктивная иерархия	150
8.3	Абсолютность гёделева построения	151
8.4	Аксиома конструктивности	152
8.5	Кардиналы конструктивных универсумов	155
8.6	Конструктивность и континуум	156
8.7	Доказательство ключевого утверждения	159
8.8	Контрпримеры к свойствам регулярности	161
8.9	Совершенные множества конструктивных точек	164
	<i>Исторические и библиографические замечания</i>	166

9 Основы форсинга и генерические расширения 167

9.1	Форсинг и генерические расширения	168
9.2	Структура генерических расширений	170
9.3	Отношение вынуждения	173
9.4	Форсинг Коэна	175
9.5	Случайный форсинг	176
9.6	Еще три примера	179
9.7	Форсинг склейки кардиналов	181
	<i>Исторические и библиографические замечания</i>	182

10 Резольвенты классических проблем: часть 1 183

10.1	Множества, участвующие в резольвентах	184
10.2	Резольвенты свойств регулярности	185
10.3	Π^1_1 -множества без совершенного ядра	187
10.4	Каких множеств достаточно избегать?	187
10.5	Однородность и плотность	190
10.6	Нерегулярные множества второго уровня	192
10.7	Обобщение на произвольный идеал	195
10.8	Измеримость относительно идеала	198
	<i>Исторические и библиографические замечания</i>	201

11 Резольвенты классических проблем: часть 2 203

11.1	Если конструктивных точек мало, то...	205
11.2	Форсинг в связи с идеалом множеств	208
11.3	Случайные точки: общий подход	211
11.4	Дальнейшие результаты	212
11.5	Два примера	215
11.6	Взаимно генерические точки	217
11.7	Если неслучайных точек мало, то...	219
	<i>Исторические и библиографические замечания</i>	223

12 Комбинаторика финального доминирования	225
12.1 Финальные отношения	226
12.2 Финальное доминирование и мера	227
12.3 Финальное доминирование и категория	231
12.4 Измеримость влечет свойство Бэра для Σ_2^1 -множеств	233
12.5 Доказательство ключевой леммы	236
<i>Исторические и библиографические замечания</i>	<i>238</i>
13 Абсолютно неразрешимые классические проблемы	239
13.1 Основные результаты и комментарии	240
13.2 Одна склеивающая функция	242
13.3 Доказательство ключевых лемм	244
13.4 Склеивающие функции в числе $\aleph_2$	248
13.5 Свойство совершенного ядра	252
13.6 Модель Соловея	255
13.7 Вторая модель Соловея	260
<i>Исторические и библиографические замечания</i>	<i>260</i>
14 Необратимость импликаций	261
14.1 Главная теорема	262
14.2 $BP(\Delta_2^1) \not\Rightarrow LM(\Delta_2^1) \vee BP(\Sigma_2^1)$	262
14.3 $LM(\Delta_2^1) \not\Rightarrow BP(\Delta_2^1)$	265
14.4 О суммах нигде не плотных множеств	271
14.5 $LM(\Sigma_2^1) \not\Rightarrow PK(\Pi_1^1)$	273
14.6 $BP(\Sigma_2^1) \not\Rightarrow LM(\Delta_2^1)$	275
14.7 $BP(\Delta_2^1) \wedge LM(\Delta_2^1) \not\Rightarrow BP(\Sigma_2^1)$	279
14.8 $BP(\Sigma_2^1) \wedge LM(\Delta_2^1) \not\Rightarrow LM(\Sigma_2^1)$	284
<i>Исторические и библиографические замечания</i>	<i>288</i>
15 Положительные решения проблем о конституантах	289
15.1 Главная теорема	290
15.2 План доказательства	290
15.3 Последовательности счетных моделей	292
15.4 Фундированная подобласть	293
15.5 Суслинская система: вариант А	296
15.6 Суслинская система: вариант В	299
15.7 Редукция к замкнутым множествам	300
15.8 Случай решет	301
<i>Исторические и библиографические замечания</i>	<i>302</i>
16 Отрицательные решения проблем о конституантах	303
16.1 Главные теоремы о конституантах	304
16.2 Техническое введение в доказательство	305
16.3 Абсолютность некоторых утверждений	307
16.4 Обобщенные коды борелевских множеств	312
16.5 Универсальные деревья	314
16.6 Сжатые коды и лемма о сжатии	316

16.7	Теорема ограничения ранга	318
16.8	Доказательство главных теорем	319
16.9	Доказательство теоремы о выборе кодов	320
	<i>Исторические и библиографические замечания</i>	<i>325</i>
17	«Узкие проблемы» Лузина	327
17.1	Используя аксиому выбора	328
17.2	Теорема Фремлина — Шелаха	330
17.3	Эффективная постановка проблем	333
17.4	Положительные решения проблем	334
17.5	Отрицательные решения проблем	336
17.6	Снова модель Соловея	337
17.7	Доказательство теоремы о выборе кодов	338
	<i>Исторические и библиографические замечания</i>	<i>342</i>
18	Дальнейшие результаты	343
18.1	Нужен ли недостижимый кардинал?	344
18.2	Третий проективный уровень	345
18.3	σ -ССС-идеалы и регулярность	346
18.4	Континуум-гипотеза и отношения эквивалентности . .	349
	Список литературы	355
	Предметный указатель	367
	Индекс обозначений	375

Предисловие

В математике 20 века произошли три принципиальных открытия, которые, по-видимому, не получили широкой известности среди математиков и философов. Эти открытия являются основным предметом изложения в нашей книге.

1) Оказалось возможным разумное определение случайного вещественного числа. А именно, число называется *случайным*, если не существует множества вещественных чисел (обычной лебеговой) меры нуль, содержащего x , $x \in B$. При этом нужно фиксировать, каким множествам B разрешено участвовать в этом определении; если, например, всем одноэлементным множествам, то все числа будут неслучайными тривиальным образом. Можно определить это семейство так, что множество **Ran** всех случайных вещественных чисел имеет разумные ожидаемые свойства и, в частности, его дополнение имеет меру нуль, но некоторые числа, конечно, останутся неслучайными (рациональные и другие). Это определение основано на том, что некоторые множества проще описать, чем индивидуальные числа, даже входящие в эти множества; скажем, интервалы с рациональными концами, очевидно, проще описываются, чем некоторые входящие в них числа.

2) Оказалось, что существуют простые и естественные вопросы о вещественных числах, которые *не имеют ответа абсолютным образом*; не относительно каких-то заранее разрешённых средств рассуждения, построения и т.д., а относительно всех наперёд мыслимых способов рассуждения. Эта ситуация радикально отличается от теперь широко известной алгоритмической или арифметической неразрешимости некоторых вопросов. Сюда включается и открытие того, что *уже описаны все мыслимые способы рассуждения*. Это кажется настолько удивительным, что хочется добавить: это так, по крайней мере, на сегодняшний день.

3) Оказалась верной старая идея Гильберта, что мир всех множеств может состоять из множеств, *каждое из которых имеет ин-*

дивидуальное описание своим свойством, т. е. формулой на некотором раз и навсегда фиксированном простом языке с конечным числом знаков (языке, связанном с именами Цермело, Френкеля и др.). Иными словами, всякое множество имеет вид $\{x: \varphi(x)\}$, где φ — формула в этом языке. Эту идею необходимо подправить (Гёдель): расширить язык бесконечным числом, но совершенно однотипных символов (ординалов). Обозначим $\mathbf{L}^+$ все так определяемые вещественные числа (каждое число — также множество). Возникают два критически важных непересекающихся множества вещественных чисел, $\mathbf{L}^+$ и $\mathbf{Ran}$. В каком-то отдалённом смысле их можно сравнить с множествами алгебраических и трансцендентных чисел.

Современную теорию множеств трудно изложить иначе, чем в нескольких книгах, каждая из которых посвящена одному из ее наиболее актуальных разделов. Желательно, чтобы эти книги можно было читать независимо друг от друга и при этом от читателя не требовалась никакая специальная подготовка, по крайней мере, в части понимания основного материала этих книг. Следуя этому плану, мы опубликовали первую книгу нашей серии «Начала дескриптивной динамики» [18], посвященную одному из важных разделов современной теории множеств — дескриптивной теории множеств. Затем — вторую книгу, «Борелевские и проективные множества» [19], посвященную дескриптивной теории множеств в более широком плане, чем в [18], и настоящую книгу, излагающую теорию борелевских и проективных множеств, основной раздел дескриптивной теории множеств. Из этих трех книг, вероятно, первой стоит читать эту книгу, а затем на выбор [18] или [19].

Настоящая книга в целом посвящена более трудным аспектам дескриптивной теории множеств, а именно, классическим проблемам этой теории, восходящим к работам классиков математики 1920х — 1950х годов. Однако анализ этих проблем потребует от нас выхода в современную аксиоматическую теорию множеств, т. е. за рамки классической дескриптивной теории множеств — с точки зрения как объектов и понятий, так и используемой техники. Поэтому нашу книгу можно использовать и в роли введения в современную аксиоматическую теорию множеств, конструктивность по Гёделю и метод форсинга (вынуждения) по Коэну.

Уместно сказать несколько общих слов о современной теории множеств. Эта область математики давно утратила тот несколько необычный, отчасти философский, характер, который она имела в годы жизни Кантора. Начиная с 1910х годов, она стала обычным по задачам, методам и результатам разделом математики, не очень похожим в целом на математическую логику, в состав которой теорию

множеств включают скорее по традиции.

Теория множеств изучает обычные свойства обычных математических объектов, которые в ней называются *множествами*. Проблемы, возникающие при рассмотрении произвольных абстрактно заданных совокупностей, например, совокупности всех множеств или всех мощностей и т. д.¹ остаются за пределами современной теории множеств и, может быть, относятся скорее к философским проблемам математики. Для исключения этих проблем, современная теория множеств использует аксиоматический метод, состоящий в том, что все утверждения выводятся из аксиом теории множеств Цермело – Френкеля, обозначаемой **ZFC**, к которым относится и аксиома выбора. Аксиомы этой теории (см. о них ниже) исключают объекты, подобные упомянутому в связи с парадоксом Рассела. Поэтому парадоксы теории множеств, которые когда-то рассматривались как чуть ли не центральная проблема в теории множеств, исключены аксиоматикой **ZFC**. Их сменил парадокс принципиально нового типа: некоторые очень естественные математические утверждения оказались *в принципе не истинными и не ложными*, т. е. *абсолютно неразрешимыми*. Существование таких утверждений было предсказано Лузиным и доказано в работах К. Геделя, П. С. Новикова, П. Коэна. Например, таково утверждение об измеримости по Лебегу некоторого простого и явно описанного множества вещественных чисел.

С другой стороны, теория множеств обладает рядом черт, исключительно выделяющих ее среди других разделов математики. Во-первых, вся работающая в естествознании математика и практически вся математика записывается формулами языка теории множеств, языка **ZFC**. Этот язык кажется очень простым: в нем ровно одно исходное отношение $x \in y$, «множество x принадлежит множеству y ». Даже отношение равенства выражается через это отношение: множества равны, если они содержат одни и те же элементы.

Языки элементарной арифметики или, скажем, элементарной планиметрии выглядят гораздо сложнее. Во-вторых, не кажется, чтобы аксиоматика **ZFC** отличалась какой-то особой сложностью по сравнению с аксиоматиками элементарной геометрии или арифметики. И в то же время не вызывает сомнения, что, используя аксиомы **ZFC**, можно доказать любое истинное математическое утверждение так, как ведут доказательства в элементарной геометрии. По крайней мере, неясно, в чем заключалась бы особенная сложность языка

¹ К этим проблемам относится, например, известный парадокс Рассела, связанный с совокупностью $\{x: x \notin x\}$. Парадокс состоит в том, что, обозначив $X = \{x: x \notin x\}$, мы немедленно получаем $X \in X \iff X \notin X$, т. е. объект X внутренне противоречив. Однако такого типа совокупность X не встречается среди обычных математических объектов.

и аксиоматики теории множеств.

Занимавшиеся теорией множеств отмечали удивительное сочетание в ней геометричности (наглядности) и чисто логических (формальных) рассуждений, граничащих с вычислениями. Например, как пишет академик Крылов², Борель и Лебег, говоря о Лузине и его трудах по теории множеств, всегда характеризовали его как «великого геометра». В-третьих, теория множеств обладает эффективностью, несмотря на всю ее абстрактность. Одно из проявлений этой эффективности состоит в том, что ядро в совокупности всех множеств — борелевские и проективные множества строятся и изучаются в рамках единой теории рекурсивности и обладают общими чертами эффективных объектов. Конструктивность по Гёделю и ее современные обобщения в рамках теории больших кардиналов, а также разнообразные трансфинитные рекурсивные схемы также обладают эффективностью. Если из числа логических аксиом удалить аксиому исключенного третьего $(\neg\neg\varphi) \Rightarrow \varphi$, то полученная теория множеств $\mathbf{ZFC}^-$ обладает удивительным свойством: если доказано $\forall x_1, \dots, x_n \exists y \varphi(x_1, \dots, x_n, y)$, то можно индивидуально описать (термом языка $\mathbf{ZFC}$) функцию $y = f(x_1, \dots, x_n)$, для которой доказуемо $\forall x_1, \dots, x_n \varphi(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$. И это для любой формулы φ .

Отметим недавние работы в рамках теоретико-множественного нестандартного анализа [20, 111, 113], в которых найдены и исследованы задачи, во многом параллельные тем, которыми занимается дескриптивная теория множеств. Общий обзор состояния этого перспективного направления см. в статьях [17] и [114]. Теперь о содержании настоящей книги.

В гл. 1 вводятся основные понятия теории множеств и основные операции над множествами. Гл. 2 начинается с обзора аксиом теории множеств $\mathbf{ZFC}$ Цермело — Френкеля, а затем рассматриваются такие основные понятия теории множеств, как мощность, ординал, кардинал, аксиома выбора. Эта вводная часть нашей книги, посвященная скорее классической теории множеств, заканчивается в гл. 3 обзором некоторых более специальных элементов и понятий, связанных с теоретико-множественным универсумом, в частности, таких, как иерархия фон Неймана, $\in$ -модели, абсолютность; теории множеств, более слабые, чем $\mathbf{ZFC}$, и их модели; нефундированные модели. Читатель, так или иначе знакомый с содержанием первых трех глав (введением в современную «классическую» теорию множеств) по другим источникам и вводным курсам, может пропустить их при первом чтении, возвращаясь по мере надобности для уточнения обо-

² А. Н. Крылов, *Записки об ученых трудах действительных членов РАН*, Изд-во АН СССР, Москва, 1930.

значений или при поиске ссылок.

Следующая **гл. 4** содержит введение в дескриптивную теорию множеств. Для удобства читателя, дается обзор основных понятий этого раздела теории множеств и тех результатов нашей предыдущей книги [19], которые необходимы для понимания последующего изложения. Эта линия продолжается в двух следующих главах, в которых излагаются базовая теория первого проективного уровня в **гл. 5** и вопросы, связанные со свойствами регулярности, борелевской кодировки и абсолютности в **гл. 6**.

Уже в первые годы развития дескриптивной теории множеств было отмечено, что практически все значительные теоремы в этой области связаны с *первым проективным уровнем*, т. е. с классами Σ_1^1 , Π_1^1 и Δ_1^1 (А-множествами, СА-множествами, борелевскими множествами, соответственно), и именно для первого проективного уровня работают классические методы дескриптивной теории множеств. На втором проективном уровне теоремы, полученные для первого уровня, большей частью не имеют места, а те немногие результаты, которые удалось получить, обычно выглядят по-другому.

Более того, для множеств второго проективного уровня возникают проблемы, которые в принципе не имеют решения. Например, проблемы измеримости этих множеств и наличия у них свойства Бэра. Об этих проблемах говорится в **главе 7**. Их своеобразное «решение» было получено много лет спустя после того, как они были сформулированы Н. Н. Лузиным в 1920х годах. А именно, было доказано, что проблема измеримости множеств второго проективного уровня и другие подобные проблемы *абсолютно неразрешимы*, т. е. на поставленные Лузиным вопросы нельзя ответить «да» или «нет» (в рамках обычной системы аксиом теории множеств³).

³ Здесь важно, что в рамках такой системы аксиом, например аксиоматики теории множеств Цермело–Френкеля **ZFC**, формулируются и доказываются все «содержательные» математические результаты (а следовательно, и результаты естественных наук, выразимые на языке математики). Таким образом, нет такой аксиомы, которая могла бы помочь в решении вопросов Лузина и при этом не изменила обычную «содержательную» математику, а являлась бы ее естественной частью. Конечно, тут мы подходим к грани некоторой философской дискуссии: что есть содержательная математика. «Практический» ответ: это есть математика, которая излагается в рамках аксиоматики **ZFC**. Правда, в эту аксиоматику не включены приемы работы с особо большими множествами (типа «множества» всех абелевых групп и т. п.; чтобы подчеркнуть отличие от обычных, «маленьких» множеств, эти особо большие множества еще называют *классами*). Но если расширить **ZFC** средствами, которые некоторым разумно достаточным образом обеспечивают работу и с классами, то и тогда вопросы Лузина останутся неразрешимыми. То же самое остается верным, если расширить **ZFC** возможностью работать с «классами» классов и т. д. Так что неразрешимость вопросов Лузина не связана с тем, сколь большие множества разрешаются

В частности, неразрешимыми оказались следующие наиболее интересные классические гипотезы о свойствах регулярности для конкретных проективных классов множеств:

$$\text{РК}(\Pi_1^1), \text{LM}(\Sigma_2^1), \text{ВР}(\Sigma_2^1), \text{LM}(\Delta_2^1), \text{ВР}(\Delta_2^1), \quad (*)$$

где заглавные буквы обозначают рассматриваемое свойство регулярности (т. е. свойство совершенного ядра РК, измеримости по Лебегу LM, свойство Бэра ВР), а в скобках стоит проективный класс, так что, например, $\text{LM}(\Sigma_2^1)$ — это гипотеза «все множества проективного класса Σ_2^1 измеримы по Лебегу».

Доказательство этих теорем об абсолютной неразрешимости потребовало обращения к структуре всего теоретико-множественного универсума (в противоположность работе с множествами польских пространств в классической дескриптивной теории множеств) и разработки таких важнейших теоретико-множественных методов, как конструктивность и форсинг. Изложение этого материала дается в **главах 8 и 9** книги.

Подчеркнем важную особенность современной дескриптивной теории множеств: построения и доказательства в ней, в их наиболее общей и естественной форме, не замыкаются на чисто топологическую структуру множеств польских пространств, а напротив, апеллируют к структуре теоретико-множественного универсума в целом. В общем, роль ординалов, или, что то же самое, порядковых чисел (которые не составляют никакого польского пространства) была отмечена уже на раннем этапе развития дескриптивной теории множеств в связи с самыми разными свойствами множеств. Но эта роль общих теоретико-множественных методов многократно возрастает с переходом к более современным разделам дескриптивной теории множеств, которые, кстати, и создавались, в значительной мере, для поиска средств решения классических проблем о множествах вещественных чисел.

Этим заканчивается первая часть книги: введены (**главы 1 – 6**) основные понятия теории множеств, которые нужны для формулировки и понимания главных проблем; сформулированы (**гл. 7**) сами проблемы и связанные с ними результаты; изложена в общих чертах (**главы 8 и 9**) методика, которая используется для доказательства результатов о независимости.

Вторая часть книги содержит сами эти доказательства.

Главы 10, 11, 12 посвящены исследованию взаимосвязей между гипотезами списка (*), которые схематически изображены на диаграмме, показанной на стр. 135. Для этого с каждой из пяти гипотез

использовать. Она возникает на уровне уже одних только вещественных чисел.

тез ассоциируется определенная *резольвента* — лузинский термин, обозначающий такую (эквивалентную) переформулировку исходного предложения, которая имеет существенно более простую теоретико-множественную природу. Следствие 10.2.2 содержит все пять эквивалентностей с резольвентами, а их более «эффективные» варианты даются в теореме 10.2.1. Доказательства эквивалентностей в одну сторону приводятся в **гл. 10** на основе теории конструктивности, а в другую сторону — в **гл. 11** на основе метода вынуждения (форсинга). Одним из результатов этого исследования становится вывод нетривиальных импликаций

$$\text{PK}(\Pi_1^1) \implies \text{LM}(\Sigma_2^1) \quad \text{и} \quad \text{PK}(\Pi_1^1) \implies \text{BP}(\Sigma_2^1),$$

так что измеримость и свойство Бэра для класса Σ_2^1 являются следствиями свойства совершенного ядра для класса Π_1^1 .

Далее, в **гл. 12** проблемы измеримости и свойства Бэра связываются со свойствами финального доминирования, т. е. с отношением $\leq^*$ частичного предпорядка на множестве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ всех бесконечных последовательностей натуральных чисел, при котором $x \leq^* y$, если $x(n) \leq y(n)$ для всех, кроме конечного числа, номеров n . Это позволяет вывести весьма нетривиальную импликацию

$$\text{LM}(\Sigma_2^1) \implies \text{BP}(\Sigma_2^1),$$

связывающую гипотезы измеримости и свойства Бэра.

Следующая **гл. 13** излагает фундаментальную теорему Соловея о том, что даже сверх проективных классов, фигурирующих в гипотезах из списка (*), положительные решения всех трех проблем регулярности сразу для всех проективных множеств (и даже для некоторого ещё более широкого класса множеств) не противоречат аксиомам **ZFC**. Эта глава содержит еще один замечательный результат: даже если предположить, что «нерегулярные» проективные множества существуют, например существует несчетное проективное множество без совершенного ядра (или неизмеримое, или не имеющее свойства Бэра), то отсюда не следует существование **явно определяемого** «нерегулярного» проективного множества, т. е. какого-то конкретного, недвусмысленно определенного контрпримера! Различию между определимыми и «произвольными» (например, возникающими с помощью аксиомы выбора) множествами придавалось большое значение на ранних этапах развития теории множеств — см. об этом исторические и библиографические замечания в конце **гл. 2**.

Посредством построения подходящих моделей теории множеств, в **гл. 14** доказываемся, что между гипотезами списка (*) нет никаких связей, кроме упомянутых выше трех импликаций и следующих двух тривиально верных отношений,

$$\text{LM}(\Sigma_2^1) \implies \text{LM}(\Delta_2^1) \quad \text{и} \quad \text{BP}(\Sigma_2^1) \implies \text{BP}(\Delta_2^1).$$

Таким образом, ни одну из этих пяти импликаций нельзя обратить. В частности, необратима импликация $\text{LM}(\Sigma_2^1) \implies \text{BP}(\Sigma_2^1)$, — и это показывает, что известная симметрия между мерой и категорией, превалирующая во многих элементарных утверждениях, превращается в асимметрию в более сложных вопросах.

Исследования, изложенные в **главах 10 — 14** в целом закрыли проблемы о главных свойствах регулярности до второго уровня проективной иерархии включительно. Результаты, известные для проективных уровней 3 и 4, пока далеки от столь же полной картины, но среди прочего, они также выявляют асимметрию между мерой и категорией — теперь уже в таком ключевом вопросе, как непротиворечивость. Оказывается, что непротиворечивость гипотезы $\text{BP}(\Sigma_3^1)$ можно установить на базе непротиворечивости аксиом **ZFC**, в то время как гипотеза $\text{LM}(\Sigma_3^1)$ уже требует существование строго недостижимого кардинала. Эти результаты очень сложны, и их невозможно изложить в настоящей книге вместе с доказательствами, в силу естественных ограничений на размер и стиль — но мы предлагаем их подробный обзор в **главе 18**.

В заключительных главах книги мы обращаемся к еще одной группе проблем классической дескриптивной теории множеств, отчасти связанных с проблемами о свойствах регулярности точечных множеств, в особенности, с проблемой совершенного ядра, но непосредственно относящихся к общему вопросу о соотношении мощности $\aleph_1$ и мощности континуума $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ и к вопросу об эффективном представлении $\aleph_1$ в континууме. Это — проблемы Н. Н. Лузина о последовательностях конституант, т. е. борелевских множеств, на которые каноническим образом разлагаются множества первого проективного уровня, и вообще проблемы о несчетных последовательностях борелевских множеств, удовлетворяющих некоторым дополнительным требованиям типа их общей малости (например, все множества данной последовательности не более чем счетны), их *ограниченного ранга* (требуется, чтобы все множества из данной последовательности имели единый ранг $\rho < \omega_1$ в иерархии борелевских множеств), либо, наконец, как самое слабое требование, их *отделимости* множествами ограниченного ранга.

Эти проблемы возникли в 1920х и 1930х годах, но их полное решение было получено только в работах 1980х годов, на основе весьма изощренных технических средств теории множеств. Некоторые из проблем о конституантах оказались также *абсолютно неразрешимыми*, подобно многим другим проблемам классической теории множеств. Однако некоторые другие, достаточно неожиданно, оказа-

лись *разрешимыми*, т. е. на поставленные вопросы о существовании определенных последовательностей борелевских множеств получены отрицательные ответы — хотя эти решения основаны на методах, обычно используемых именно для доказательств неразрешимости.

Результаты для последовательностей борелевских множеств излагаются в **главах 15 и 16**, а последняя **гл. 17** книги посвящена еще двум проблемам классической дескриптивной теории множеств из «Лекций об аналитических множествах» Н. Н. Лузина [135] — это *узкая проблема континуума* об эффективном разбиении вещественной прямой на $\aleph_1$ непустых борелевских множеств ограниченного борелевского ранга, и *узкая проблема Лебега* об эффективном построении последовательности из $\aleph_1$ попарно различных борелевских множеств вещественной прямой ограниченного борелевского ранга. Обе проблемы решаются в положительном направлении, если убрать требование ограниченности по рангу или требование эффективности построения, разрешив использование аксиомы выбора. В общей постановке, эти проблемы решаются отрицательно. Этот глубокий результат Стерна, полученный при помощи упомянутой выше модели Соловея, составляет главное содержание **главы 17**.

Эта книга, разумеется, отчасти пересекается по содержанию с двумя предшествующими нашими книгами из серии «Современная теория множеств». По необходимости мы ссылаемся на «Борелевские и проективные множества» [19] в части базовых определений и теорем дескриптивной теории множеств. Однако эта книга может читаться и независимо от книг [18] и [19].

Предлагаемая книга, не претендуя ни на полный охват проблематики классической дескриптивной теории множеств (даже вместе с [18, 19]), ни на исчерпывающее изложение связанных с этими проблемами современных теоретико-множественных методов, задумана как введение, описывающее характер проблем, методов, результатов и приложений в этой области. Книга ориентирована на математиков (студентов, аспирантов, научных работников), знакомых с основами анализа, теории функций и топологии в объеме первых курсов университета. Для понимания изложения более сложных результатов, в частности связанных с ординалами (порядковыми числами), необходимо еще знакомство с элементарными основами теории множеств и теории моделей, которые также в той или форме преподаются на первых курсах университета.

Работа над книгой одного из авторов (В. Г. Кановея) была частично поддержана грантом РФФИ 13-01-00006.

Авторы посвящают книгу своим родителям, детям и внукам (Алеше, Валерии, Ивану, Маше и Сергею); становясь старше, они всё чаще думают о них.

Некоторые теоретико-множественные обозначения

- $x \in y$ (принадлежность) означает, что x есть элемент множества y ;
- $x \subseteq y$ (x включено в y) означает, что x есть подмножество множества y — здесь допускается и случай, когда $x = y$;
- $x \subset y$ означает, что $x \subseteq y$ но $x \neq y$ (собственное включение);
- $x \cup y$, $x \cap y$, $x \setminus y$ — объединение, пересечение, и (теоретико-множественная) разность множеств x и y ;
- если множество A фиксировано, то $\complement X = X^c = A \setminus X$ (дополнение множества X) для всех $X \subseteq A$;
- $A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A \text{ и } b \in B\}$ — декартово произведение;
 $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ — симметрическая разность;
- если $X \subseteq A \times B$ и $a \in A$, то $(X)_a = \{b : \langle a, b \rangle \in X\}$ — сечение;
- $\mathcal{P}(A) = \{x : x \subseteq A\}$ — множество всех подмножеств, *множественная степень* множества A ;
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
- $2 = \{0, 1\}$, и вообще $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, т. е. каждое натуральное число — множество всех меньших натуральных чисел;
- $\#X = \#(X) \in \mathbb{N}$ — число элементов в конечном множестве X ;
- «почти все» обычно означает: «все, кроме конечного числа»;
- *кортеж* — конечная последовательность любого вида;
- $X^Y = \{f : f \text{ есть функция из } Y \text{ в } X\}$;
- в частности, X^n — множество всех функций s из множества $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ в X , отождествляемое с множеством всех кортежей длины n из элементов множества X ;
- в частности, при $X = 2 = \{0, 1\}$, 2^n есть множество всех диадических (т. е. с членами 0, 1) кортежей длины n ;⁴
- $X^{<\omega} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ — множество всех кортежей (произвольной конечной длины) из элементов множества X ;
- в частности, $2^{<\omega}$ — множество всех диадических кортежей, а $\mathbb{N}^{<\omega}$ — множество всех кортежей натуральных чисел;
- $\text{lh } s$ — *длина* кортежа (конечной последовательности) s ; тогда $\text{lh } s = n$ при $s \in X^n$, и в частности, $\text{lh } s = \text{dom } s$;
- $\text{dom } f$ — область определения, а $\text{ran } f$ — область всех значений функции f ;
- Если f — функция, а $X \subseteq \text{dom } f$ — произвольное множество, то $f \upharpoonright X$ — *ограничение* (сужение) функции f на X , т. е. мы имеем $\text{dom } (f \upharpoonright X) = X$ и $(f \upharpoonright X)(x) = f(x)$ для всех $x \in X$;

⁴ Из контекста всегда будет ясно, что обозначено выражением 2^n : множество кортежей или арифметическая степень натурального числа 2.

- $f[X] = \{f(x) : x \in X \cap \text{dom } f\}$ — f -образ множества X ;
 $f^{-1}[X] = \{x \in \text{dom } f : f(x) \in X\}$ — f -прообраз множества X ;
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — бэровское пространство; если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ — кортеж натуральных чисел, то $[s] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset x\}$ — базовая окрестность в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (бэровский интервал);

Некоторые логические обозначения

- $\wedge$ означает «и»;
- $\vee$ означает «или»;
- $\implies$ означает «влечет»;
- $\iff$ означает «эквивалентно»;
- $\forall x \dots$ означает «для всех x выполняется $\dots$ »;
- $\exists x \dots$ означает «существует x такое, что $\dots$ »;
- $\forall x \in y \dots$ означает «для всех $x \in y$ выполняется $\dots$ »;
- $\exists x \in y \dots$ означает «существует $x \in y$ такое, что $\dots$ »;
- $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество с элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$;
- $\{x : \Phi(x)\}$ есть множество или класс всех x , удовлетворяющих $\Phi(x)$.
- $:=$ — графическое равенство формул, т. е. запись $\varphi := \dots$ понимается так: φ есть формула $\dots$.

Глава 1

Множества в математике

Эта глава имеет чисто вводный, элементарный характер. Читатель, так или иначе знакомый с материалом, может ее пропустить, рассматривая лишь как развернутую сводку обозначений.

§ 1.1 Понятие множества

Множество, и не только в математике, возникает путем объединения отдельных предметов (вещей, объектов) в одно целое. Иногда говорят, что множество *есть множественность, мыслимая как единство*. Синонимами слова «множество» являются слова «совокупность», «семейство». Например, можно говорить о совокупности студентов, присутствующих на лекции на определенный момент, о совокупности всех овец в стаде, о совокупности всех европейских государств, всех звезд нашей Галактики, и т. п. В каждом из этих случаев можно вместо слова «совокупность» употребить слово «множество».

Большие конечные и бесконечные множества — не объекты реального мира, а воображаемые объекты нашего сознания. Таким образом, речь идет о способности человека мыслить о совокупности различных объектов, объединенных вместе некоторым свойством, и формировать множество всех объектов, обладающих этим свойством. Георг Кантор, немецкий математик, основавший теорию множеств в 1870х — 1880х годах, выразил общую концепцию множества так: *множество — это соединение различных объектов нашей мысли в единое целое*. Добавим сюда еще одну, развернутую цитату из книги Хаусдорфа [54, стр. 9].

Множество возникает путем объединения отдельных предметов (вещей) в одно целое. Оно есть множественность, мыслимая как единство. Если бы эти и подобные им высказывания выставлялись в качестве определений, то можно было бы вполне основательно возразить, что они определяют *idem per idem* или даже *obscurum per obscurius*. Однако мы можем их толковать просто как указания на некоторый первоначальный, всем свойственный акт мышления, который, быть может, и нельзя, а быть может, и не нужно разлагать на другие, более простые акты. Мы придерживаемся именно такой точки зрения, и примем в качестве основного положения, что вещь M особым, не подлежащим определению образом, определяет собой вещи $a, b, c, \dots$, и что, обратно, эти последние также определяют M ; это отношение между вещью M и вещами $a, b, c, \dots$ будем выражать словами: множество M состоит из вещей $a, b, c, \dots$.

Впрочем, заслуга Кантора, конечно, не в том, что он «придумал множества» — они так или иначе фигурировали в математике и в более ранние времена — а в том, что он стал рассматривать множе-

ства как объекты, подчиняющиеся обычным законам математики, и, таким образом, открыл новую область математики, *теорию множеств*, со своей собственной проблематикой и методологией. Сверх этого, теория множеств играет особую роль *оснований* математики в целом, о чем будет сказано в следующей главе.

§ 1.2 Множества в математике

Перейдем к множествам в математике, т. е. к множествам математических объектов. Уже в области натуральных чисел возникают самые разнообразные множества, например:

$\{3, 1, 17, 125\}$ — множество, содержащее четыре указанных числа;

$\{1, 3, 5, \dots, 2m + 1\}$ — множество всех нечетных чисел до $2m + 1$;

$\{0, 3, 6, 9, \dots\}$ — множество всех чисел, кратных 3;

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ — все натуральные числа;

$\{x_1, \dots, x_n\}$ — множество, состоящее из элементов $x_1, \dots, x_n$.

Эти примеры показывают простейшие варианты использования фигурных скобок для образования множеств. Многоточия используются, естественно, только тогда, когда их смысл ясен из контекста. В более сложных случаях используется запись типа

$$\{x : \varphi(x)\}, \quad (1)$$

которая понимается как *множество всех x , удовлетворяющих свойству $\varphi(x)$* . Например, множество $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ всех простых натуральных чисел можно определить так:

$$\{n : n \geq 2 \wedge \neg \exists m, k (2 \leq m < n \wedge 2 \leq k < n \wedge n = m \cdot k)\}.$$

Здесь использованы обычные логические сокращения $\neg, \exists, \wedge$ для слов: «не верно, что», «существует», «и», а областью пробегания всех переменных, включая n , является натуральный ряд.

Возвращаясь к обозначению (1), отметим, что, как правило, имеется некоторая исходная область X , которой принадлежат все рассматриваемые объекты x . Скажем, $X = \mathbb{N}$ в последнем примере. Чтобы это подчеркнуть, часто пишут

$$\{x \in X : \varphi(x)\}, \quad (2)$$

что означает: *множество всех тех $x \in X$, которые удовлетворяют свойству $\varphi(x)$* . Здесь используется значок принадлежности $\in$,

т. е. $x \in X$ означает, что объект x (например, число) принадлежит множеству X , или, что то же самое, что x является элементом множества X . Отрицание этого отношения записывается как $x \notin X$, т. е. x не является элементом множества X .

Первый главный принцип теории множеств, называемый *постулатом*, или *аксиомой экстенциональности*, утверждает, что

множество полностью определено своими элементами,

т. е. два множества равны, если и только если они содержат одни и те же элементы. Формально это записывается так:

$$X = Y \iff \forall x (x \in X \iff x \in Y),$$

где через $\iff$ обозначается эквивалентность.

Отношение *включения* $\subseteq$ между множествами определяется так:

$$X \subseteq Y, \quad \text{если} \quad \forall x (x \in X \implies x \in Y),$$

т. е. запись $X \subseteq Y$ означает, что каждый элемент множества X является элементом множества Y . В этом случае говорят, что X является *подмножеством* множества Y . *Строгое*, или *собственное включение* $X \subset Y$ или, более выразительно, $X \subsetneq Y$, означает, что $X \subseteq Y$, но $X \neq Y$.¹ В этом случае Y называется *собственным* подмножеством множества X . Например, если $X = \{1, 2\}$ и $Y = \{1, 2, 3\}$, то

$$X \subseteq Y, \quad Y \not\subseteq X, \quad X \subsetneq Y, \quad X \subseteq X, \quad X \not\subset X, \quad \neg (X \subsetneq X).$$

Если X — любое множество, то $\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$ обозначает *множество всех подмножеств* множества X , также называемое *множеством-степенью* множества X .

Пустое множество $\emptyset$ определяется как множество, вообще не имеющее элементов. Из постулата экстенциональности следует, что два пустых множества равны друг другу, т. е., другими словами, пустое множество единственно. Любопытно, что $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ — это уже не пустое множество, а множество, содержащее единственный элемент $\emptyset$, так что, формально, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

К элементарным операциям над множествами относятся:

объединение $X \cup Y = \{x : x \in X \vee x \in Y\}$ — таким образом, $X \cup Y$ состоит из тех объектов x , которые принадлежат *хотя бы одному* из множеств X, Y ;

¹ Впрочем, в некоторых изданиях знак $\subset$ используется и для нестрогого включения. При чтении, нужно знакомиться со списком или обзором обозначений.

пересечение $X \cap Y = \{x : x \in X \wedge x \in Y\}$ — множество всех тех объектов x , которые принадлежат *каждому* из множеств X, Y .

Понятно, что $X \cap Y \subseteq X \subseteq X \cup Y$ и $X \cap Y \subseteq Y \subseteq X \cup Y$;

разность $X \setminus Y = \{x : x \in X \wedge x \notin Y\}$ — множество всех тех объектов x , которые принадлежат множеству X но не принадлежат множеству Y ;

симметрическая разность $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ — множество всех тех объектов x , которые принадлежат в точности одному из двух множеств X, Y и не принадлежат другому.

§ 1.3 Синглетоны и пары

Вообще, множества вида $\{x\}$, т. е. множества, содержащие ровно один элемент, называются *синглетонами*. Множества x и $\{x\}$ — заведомо разные, хотя некоторые математики могут не понимать этой разницы.

Соответственно, двухэлементное множество с элементами a, b обозначается $\{a, b\}$. Понятно, что $\{a, b\} = \{b, a\}$, и потому множество $\{a, b\}$ часто называют *неупорядоченной парой* элементов a, b . Если $a = b$ то, очевидно, $\{a, b\} = \{a\} = \{b\}$, так что синглетоны — это частный случай неупорядоченных пар.

Для любителей математической логики, отметим, что определение неупорядоченной пары $\{a, b\}$ может быть дано при помощи такой теоретико-множественной формулы:

$$\varphi(z, a, b) := a \in z \wedge b \in z \wedge \forall x \in z (x = a \vee x = b),$$

так что $\{a, b\}$ — это то единственное множество z , для которого выполнено $\varphi(z, a, b)$. Читатель без труда построит соответствующие формулы для синглетона $\{a\}$ или, допустим, для тройки $\{a, b, c\}$.

Неупорядоченные пары позволяют определить, средствами теории множеств, два других фундаментальных понятия: упорядоченную пару и натуральные числа.

Упорядоченной парой называется объект $\langle a, b \rangle$, сопоставляемый любым двум объектам a, b таким образом, что выполняется эквивалентность

$$\langle a, b \rangle = \langle a', b' \rangle, \text{ если и только если } a = a' \text{ и } b = b'. \quad (1)$$

Простейшее известное теоретико-множественное определение упорядоченной пары через неупорядоченную пару, введенную выше, было дано Куратовским в начале 1920х годов:

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}. \quad (2)$$

Требование (1) для этого определения легко проверяется. В то же время, подобно неупорядоченной паре, упорядоченную пару можно определить теоретико-множественной формулой:

$$\text{pair}(z, a, b) := \exists u \in z \exists v \in z (\varphi(u, a, a) \wedge \varphi(v, a, b) \wedge \varphi(z, u, v)),$$

где φ — определенная выше формула, так что $\langle a, b \rangle$ — это то единственное множество z , для которого выполнено $\text{pair}(z, a, b)$.

С упорядоченными парами связано **декартово произведение**

$$X \times Y = \{\langle x, y \rangle : x \in X \wedge y \in Y\}$$

множеств X, Y — множество всех упорядоченных пар с первыми членами из X и вторыми из Y .

§1.4 Функции

Множество f называется *функцией* (синоним: *отображением*), если 1) оно состоит из упорядоченных пар, и 2) из $\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f$ следует $y = z$. Другими словами, требуется, чтобы для каждого объекта $x \in \text{dom } f$ существовал единственный объект y , удовлетворяющий $\langle x, y \rangle \in f$ — и тогда этот единственный объект обозначается традиционной записью $y = f(x)$. Множества

$$\text{dom } f = \{x : \exists y (\langle x, y \rangle \in f)\}, \quad \text{и}$$

$$\text{ran } f = \{y : \exists x (\langle x, y \rangle \in f)\} = \{f(x) : x \in \text{dom } f\}$$

называются *областью определения*, соответственно, *областью значений* функции f . Запись $f: X \rightarrow Y$ понимается как то, что f — функция из X в Y , т. е. $\text{dom } f = X$ и $\text{ran } f \subseteq Y$, а когда пишут, что $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ (функция из X на Y), то требуется $\text{ran } f = Y$ строго. В этом случае, т. е. когда $\text{dom } f = X$ и $\text{ran } f = Y$, говорят, что f — *сюръекция* из X на Y .

Взаимно однозначной называется любая функция f , для которой $f^{-1} = \{\langle y, x \rangle : f(x) = y\}$ — тоже функция. Взаимно однозначная функция $f: X \rightarrow Y$ называется *инъекцией* из X в Y , а взаимно однозначная функция $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ — *биекцией* из X на Y ; в этом контексте биекция — это одновременно сюръекция и инъекция.

Функции фигурируют в математике также в форме индексированных множеств. Часто бывает, что каждому элементу a некоторого множества A сопоставлено множество X_a . В этом случае A называется *множеством индексов*, его элементы — *индексами*, а само семейство множеств X_a , обозначаемое как $\langle X_a \rangle_{a \in A}$ — *индексированным множеством*. Однако по существу $\langle X_a \rangle_{a \in A}$ есть не что иное как функция f , заданная условием $f(a) = X_a$ на множестве A .

С данным определением, понятия функции f и ее графика как множества пар $\{\langle x, f(x) \rangle : x \in \text{dom } f\}$ в сущности совпадают. Более традиционный подход разделяет эти понятия, отождествляя функцию $y = f(x)$ скорее с ее формальным определением, т. е. с правилом или законом, позволяющим вычислить значение $y = f(x)$ коль скоро аргумент x известен.

Математики более раннего времени считали понятия функции и отношения, и лежащее в их основе понятие упорядоченной пары примарными, т. е. по существу такими, которые нельзя свести к более простым математическим понятиям. Эта точка зрения превалировала долгое время даже после открытия теории множеств. Например, один из основателей теории множеств Хаусдорф писал в [54, с. 12]:

Понятие функции такое же основное и первоначальное, как и понятие множества. Функциональное отношение так же строится из пар элементов, как множество из отдельных элементов.

Понятно, что вопрос здесь в том, чтобы дать прямое теоретико-множественное определение для упорядоченной пары. По счастью, как мы видели в § 1.3, имеется элементарное определение такого рода.

§ 1.5 Отношения

Понятие пары лежит в основе такого центрального понятия математики как отношение.

Отношением, а точнее, *бинарным* отношением, называется любое множество R , состоящее из упорядоченных пар. Если пара $\langle x, y \rangle$ принадлежит отношению R , то часто пишут $x R y$ вместо $\langle x, y \rangle \in R$. Если R — бинарное отношение, то полагают

$\text{dom } R = \{x : \exists y (x R y)\}$ — область первого аргумента,

$\text{ran } R = \{y : \exists x (x R y)\}$ — область второго аргумента, и

$R^{-1} = \{\langle y, x \rangle : x R y\}$ — обратное отношение, $x R y \iff y R^{-1} x$.

Если $\text{dom } R \cup \text{ran } R \subseteq X$, то R называется бинарным отношением на множестве X . В этом случае говорят о *реляционной структуре* $\langle X; R \rangle$ с областью X и отношением R на X .

Реляционная структура может иметь и более одного отношения; тогда пишут, например, $\langle X; R_1, \dots, R_n \rangle$.

Определение 1.5.1. Если Q и R — бинарные отношения на множествах X и Y соответственно, то *изоморфизмом* структур $\langle X; Q \rangle$ и $\langle Y; R \rangle$ (или просто Q и R) называется такая биекция $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$,

что эквивалентность $x Q x' \iff f(x) R f(x')$ выполнена для всех $x, x' \in X$. Если изоморфизм существует, то структуры $\langle X; Q \rangle$ и $\langle Y; R \rangle$ называются *изоморфными*. $\square$

Особое значение для математики имеют четыре типа бинарных отношений, а именно, отношения эквивалентности, фундированные отношения, отношения порядка, функции. Здесь мы рассмотрим два первых типа из этих трех; функции уже рассмотрены отдельно в §1.4, а об отношениях порядка см. следующий параграф.

Бинарное отношение E на множестве X называется *отношением эквивалентности* на X , если выполняются следующие три условия:

рефлексивность: $x E x$ для любого $x \in X$;

транзитивность: если $x E y$ и $y E z$, то $x E z$.

симметричность: если $x E y$, то $y E x$.

В этом случае, если $x \in X$ то определяется *класс эквивалентности* $[x]_E = \{y \in X : x E y\}$, содержащий все элементы $y \in X$, E -эквивалентные элементу x , а *фактор-множество* $X/E = \{[x]_E : x \in X\}$ состоит из классов эквивалентности всех элементов $x \in X$.

Определение 1.5.2. Бинарное отношение R на множестве X называется *фундированным*,² если любое непустое множество $Y \subseteq X$ содержит такой элемент $y \in Y$, что ни для какого $x \in Y$ (включая и $x = y$) не выполняется $x R y$ — такое y часто называют *R -минимальным элементом* в Y . $\square$

Фундированные отношения играют важную роль в изучении *моделей теории множеств* (см. главу 3), а их частный случай — полные порядки, т. е. фундированные отношения линейного порядка, — это вообще одно из важнейших понятий теории множеств.

Лемма 1.5.3. Для фундированности бинарного отношения R на множестве X необходимо и достаточно, чтобы не было бесконечно R -убывающих цепочек $\dots R x_2 R x_1 R x_0$ элементов $x_n \in X$.

Доказательство. Для доказательства необходимости, заметим, что если цепочка указанного вида существует, то множество $Y = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ опровергает фундированность. Чтобы доказать достаточность, допустим, что R не фундировано. Тогда найдется множество $\emptyset \neq Y \subseteq X$, не имеющее ни одного R -минимального элемента. Раз Y непусто, берем $x_0 \in Y$ произвольно. Однако по выбору Y найдется следующий элемент $x_1 \in Y$, для которого $x_1 R x_0$. По той

² В англоязычной литературе *well-founded*.

же причине, найдется элемент $x_2 \in Y$, для которого $x_2 R x_1$. И так далее. Это построение приносит требуемую цепочку. $\square$

В доказательстве достаточности, использована аксиома выбора, о которой см. в следующей главе. Доказательство необходимости не использует аксиомы выбора.

Упражнение 1.5.4. Пусть R — фундированное отношение на множестве X . Докажите, используя лемму 1.5.3, что нет элементов $x, y \in X$, удовлетворяющих $x R y R x$, и, в частности, нет удовлетворяющих $x R x$. $\square$

§ 1.6 Отношения порядка

Бинарное отношение $\leq$ на множестве X называется *отношением (частичного) предпорядка* на X , если оно удовлетворяет условиям рефлексивности ($x \leq x$ для всех $x \in X$) и транзитивности (из $x \leq y$ и $y \leq z$ следует $x \leq z$), но не обязательно удовлетворяет симметричности. В этом случае говорят о *частично предупорядоченном множестве* X , а точнее, реляционной структуре $\langle X; \leq \rangle$, которая часто обозначается и $\langle X; \leq_X \rangle$, чтобы подчеркнуть, что отношение предпорядка связано с областью X .

Отношение предпорядка $\leq$ на X называется отношением (частичного) *порядка*, если дополнительно имеет место

антисимметричность: если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$.

Отношение частичного предпорядка или порядка $\leq$ на X называется *линейным*, соответственно, *фундированным*, если дополнительно имеет место соответствующее свойство из следующих двух:

линейность: если $x, y \in X$, то выполнено по крайней мере одно из двух: $x \leq y$ или $y \leq x$.

фундированность (в смысле определения 1.5.2): если $Y \subseteq X$ и множество Y непусто, то найдется элемент $y \in Y$ такой, что соотношение $y \leq x$ выполнено для любого $x \in Y$ — такое y называется $\leq$ -*минимальным* в Y .

Наконец, отношение $\leq$ называется *полным*, если оно одновременно линейно и фундировано.

В этих случаях говорят, соответственно, о *частично, линейно, вполне (пред)упорядоченном* множестве X или $\langle X; \leq \rangle$, $\langle X; \leq_X \rangle$.

В соответствии с определением 1.5.1, *порядковым изоморфизмом* двух частично (пред)упорядоченных множеств $\langle X; \leq_X \rangle$ и $\langle Y; \leq_Y \rangle$ является любая биекция $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$, удовлетворяющая условию

$$x \leq_X x' \iff f(x) \leq_Y f(x') \text{ для всех } x, x' \in X.$$

Если такая биекция f существует, то принято говорить, что множества $\langle X; \leq_X \rangle$ и $\langle Y; \leq_Y \rangle$ (или просто X и Y если порядки определены в контексте) *порядково изоморфны*, или *подобны*.

Начальным сегментом частично (пред)упорядоченного множества $\langle X; \leq_X \rangle$ называется любое множество $Y \subseteq X$ (а также $\langle Y; \leq_Y \rangle$), где $\leq_Y = \leq_X \upharpoonright Y$ — ограничение отношения $\leq_X$ на Y) удовлетворяющее условию: если $x \in X$, $y \in Y$ и $x \leq_X y$, то $x \in Y$. Если при этом $Y \neq X$, то начальный сегмент называется *собственным*.

Чрезвычайно важна следующая теорема о порядковых изоморфизмах вполне упорядоченных множеств, доказательство которой можно найти в книге [1] или в любом другом вводном курсе по теории множеств.

Теорема 1.6.1 (Кантор). (i) Если $\langle X; \leq_X \rangle$ и $\langle Y; \leq_Y \rangle$ — *порядково изоморфные вполне упорядоченные множества*, то между ними имеется *единственный порядковый изоморфизм*.

(ii) Если $\langle X; \leq_X \rangle$ и $\langle Y; \leq_Y \rangle$ — *вполне упорядоченные множества*, то выполняется одно и только одно из трех: либо они *подобны*, либо первое множество *подобно единственному собственному начальному сегменту второго*, либо второе множество *подобно единственному собственному начальному сегменту первого*. $\square$

Наконец, о строгих порядках. Отношения частичного предпорядка $\leq$ по определению рефлексивны ($x \leq x$ для всех x из области отношения), и поэтому их обычно называют *нестрогими*. Но каждое из них дает возможность определить *строгое* отношение

$$x < y, \text{ когда } x \leq y, \text{ но } y \not\leq x,$$

которое, очевидно, **антирефлексивно**, т. е. $x \not< x$ для всех x . **Линейность** для строгих порядков принимает форму классической трихотомии: $x < y \vee x = y \vee x > y$.

§1.7 Натуральные числа

Для математика традиционного плана сам вопрос о теоретико-множественном определении натуральных чисел может показаться странным: ведь натуральные числа по сути даны как количества в физическом универсуме. Однако целостный теоретико-множественный подход к миру математических объектов заставляет дать адекватное определение и натуральным числам, подобно тому, как такое определение дается для упорядоченной пары, функции, и т. п.

Идея такого определения достаточно проста: сопоставить каждому натуральному числу n множество, содержащее ровно n элементов. По счастью, такое множество легко найти: это множество $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ всех меньших натуральных чисел. Этим дается возможность индуктивного теоретико-множественного построения натуральных чисел:

$$0 = \emptyset \text{ (пустое множество);}$$

$$1 = \{0\} = \{\emptyset\};$$

$$2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\};$$

$$3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\};$$

и так далее, т. е. вообще $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ для каждого n .

С таким определением все натуральные числа становятся множествами. Но как быть с *множеством* всех натуральных чисел? Данная выше индуктивная схема может быть записана еще и так:

$$n+1 = \{0, 1, 2, \dots, n-1, n\} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{n\} = n \cup \{n\},$$

т. е. резюмируя $n+1 = n \cup \{n\}$. Назовем *индуктивным* любое множество X , для которого $\emptyset \in X$, и если $x \in X$ то и $x \cup \{x\} \in X$. Простое рассуждение показывает, что пересечение $\mathbb{N}$ всех индуктивных множеств само индуктивно, т. е. является *наименьшим* индуктивным множеством. Множество $\mathbb{N}$, очевидно, совпадает с $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Любопытно, что при таком построении натуральных чисел порядок на множестве $\mathbb{N}$ совпадает с принадлежностью: $m < n$ равносильно $m \in n$; точнее говоря, определяется $m < n$, если $m \in n$.

Теорема 1.7.1. *Отношение $<$ линейно упорядочивает $\mathbb{N}$, т. е. если $m, n \in \mathbb{N}$ то выполнена трихотомия $m < n \vee m = n \vee n < m$. Более того, этот порядок является полным, т. е. каждое непустое множество $X \subseteq \mathbb{N}$ содержит $<$ -наименьший элемент.*

Эту теорему можно доказывать по-разному, в зависимости от того, какие общие теоретико-множественные предположения используются. Мы выведем ее в § 2.4 как следствие одной более общей теоремы из теории ординалов.

Далее для построения числовой системы доказывается, что множество $\mathbb{N}$ с функцией *следующего числа* $S(n) = n \cup \{n\}$ удовлетворяет аксиомам Пеано. Это позволяет дать теоретико-множественные определения арифметических операций в области $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Это не так просто, но мы не будем на этом останавливаться, поскольку как это сделать известно из книг, подробно освещающих теоретико-множественные основания математики — см., например,

построение арифметики натуральных чисел в системе $\mathbf{Z}_2$ в книге [73], гл. 1, §§ 6 и след.

После этого можно определить и множество $\mathbb{Z}$ *целых* чисел как определенную надстройку над $\mathbb{N}$, например, как $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$, где $\mathbb{Z}_-$ состоит из всех пар вида $\langle 1, n \rangle$ с $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, понимаемых как отрицательные целые числа, а $\mathbb{Z}_+$ состоит из всех пар вида $\langle 0, n \rangle$ с $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, понимаемых как положительные целые числа. Арифметические действия продолжаются с $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Z}$ очевидным образом, и мы на этом не останавливаемся.

Теперь можно определить и множество $\mathbb{Q}$ *рациональных* чисел как надстройку над $\mathbb{Z}$. Любой математик скажет, что рациональные числа — это 0 и несократимые дроби вида $\frac{z}{m}$, где m — положительное натуральное число, а $z \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$. Однако теория множеств не знает что такое «дробь». Чтобы обойти это препятствие, множество $\mathbb{Q}$ определяется, как состоящее из пар вида $\langle z, m \rangle$, где z, m — таковы, как указано. После этого арифметические действия продолжаются с $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Q}$, и множество $\mathbb{Q}$ линейно упорядочивается соответствующим отношением $<$, т. е. $\langle z, m \rangle < 0 < \langle z', m' \rangle$ для всех $z < 0 < z'$ и $\langle z, m \rangle < \langle z', m' \rangle$ при $zm' < z'm$. Мы опять-таки не останавливаемся на этом совершенно рутинном деле.

Последний шаг теоретико-множественного построения числовой системы в математике хорошо известен: это дедекиндово построение вещественной прямой $\mathbb{R}$ через сечения в множестве $\mathbb{Q}$, изложенное в ряде книг, включая, например, [1] и [54].

§1.8 Кортежи

Имея упорядоченную пару, можно определить и упорядоченную *тройку* $\langle x, y, z \rangle = \langle \langle x, y \rangle, z \rangle$, *четверку* $\langle x, y, z, u \rangle = \langle \langle x, y, z \rangle, u \rangle$, и вообще упорядоченную *n -ку* $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ индукцией по n так:

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \rangle = \langle \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle, x_{n+1} \rangle, \quad (1)$$

и при этом будет выполнено ключевое свойство

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle y_1, \dots, y_n \rangle \iff x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n$$

Здесь, однако, нас ждет маленькая пакость. Каждая, к примеру, тройка $\langle x, y, z \rangle$ по определению является и парой $\langle a, z \rangle$, где $a = \langle x, y \rangle$, что не дает формально разграничить n -ки разной длины n .

Общее соглашение 1.8.1. Чтобы обойти эту проблему, мы будем отождествлять каждую n -ку $\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$, определенную по индукции в соответствии с (1), с таким множеством пар:

$$\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle = \{ \langle 0, x_0 \rangle, \langle 1, x_1 \rangle, \dots, \langle n-1, x_{n-1} \rangle \}, \quad (1')$$

где упорядоченные пары $\langle i, x_i \rangle$ в правой части равенства определяются согласно (2) в 1.3. Таким образом, n -ка $\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ произвольных множеств $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ есть по определению функция s , заданная на множестве $n = \{0, 1, \dots, n-1\} \in \mathbb{N}$ условием $s(i) = x_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$. $\square$

Понятно, что упорядоченная, например, тройка $\langle a, b, c \rangle$ по определению (1) и по определению (1') равна, соответственно,

$$\{\{\langle a, b \rangle\}, \{\langle a, b \rangle, c\}\} \quad \text{и} \quad \{\langle 0, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, c \rangle\},$$

т. е., вообще говоря, получаются разные множества. Однако эти определения отождествляются в математике безо всякого ущерба для строгости и ясности рассуждений.³ Мы будем понимать упорядоченные n -ки скорее в смысле определения (1') и, как принято в отечественной литературе, называть их *кортежами*, а число членов кортежа s называть его *длиной*, $\text{lh } s$. Таким образом, *упорядоченная n -ка* и *кортеж длины n* — это одно и то же. Например кортеж длины 4 — это четверка вида $s = \langle x, y, z, u \rangle$, и для нее $\text{lh } s = 4$.

Определение (1') применимо и при $n = 1$, давая $\langle a \rangle = \{\langle 0, a \rangle\}$, т. е. $\langle a \rangle$ — функция, $\text{dom } \langle a \rangle = 0$, и $\langle a \rangle(0) = a$, а при $n = 0$ единственный кортеж длины 0 — это пустое множество $\emptyset$, которое в данном контексте принято обозначать Λ и называть *пустым кортежем*.

Кортжи естественным образом упорядочены отношением *продолжения* $\subset$, т. е. $s \subset t$ означает, что кортеж t продолжает кортеж s . Например, $\langle 2, 1 \rangle \subset \langle 2, 1, 5, 3 \rangle$, но $\langle 2, 1 \rangle \not\subset \langle 2, 2, 5, 3 \rangle$ и $\langle 2, 1 \rangle \not\subset \langle 2, 1 \rangle$ (продолжение должно быть собственным). *Несобственное* продолжение $\subseteq$ вводится очевидным образом: $s \subseteq t$, если либо $s \subset t$ либо просто $s = t$. Например, $\langle 2, 1 \rangle \subseteq \langle 2, 1 \rangle$.

Если $s = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ — кортеж длины n и $m \leq n$, то определяется *ограничение* $s \upharpoonright m = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ кортежа s , состоящее из его m первых членов. Так, $\langle 2, 2, 5, 3 \rangle \upharpoonright 2 = \langle 2, 2 \rangle$, $\langle 2, 2, 5, 3 \rangle \upharpoonright 1 = \langle 2 \rangle$, а в вырожденном случае $\langle 2, 2, 5, 3 \rangle \upharpoonright 0 = \Lambda$ (пустой кортеж).

Если же s — кортеж длины $n = \text{lh } s$ и $m > n$, то определяют просто $s \upharpoonright m = s$.

Определение 1.8.2. Напомним, что *бинарным отношением* называется всякое множество из упорядоченных пар. Соответственно, множества, состоящие из упорядоченных троек $\langle x, y, z \rangle$, называются

³ Единственная оставшаяся еще с определением (1') неприятность состоит в том, что $\langle a, b \rangle$ двусмысленно обозначает как упорядоченную пару $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ в смысле § 1.3 так и кортеж длины 2 в смысле (1'). Следовало бы как-то переобозначить первую, например, через $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$, но это уже слишком.

тернарными отношениями, и вообще, если $n \geq 2$, то n -арное отношение, или, что то же самое, отношение n -арности n — это любое множество, состоящее из упорядоченных n -ок. $\square$

§ 1.9 Элементарные операции над множествами

Мы уже встречались с декартовым произведением двух множеств $X \times Y$. В более общем плане, *декартовым произведением* конечного числа множеств $X_1, \dots, X_n$ (где $n \geq 2$) называется множество

$$X_1 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle : x_1 \in X_1 \wedge \dots \wedge x_n \in X_n\}$$

всех кортежей длины n , каждый член x_i которых ($i = 1, \dots, n$) принадлежит соответствующему множеству X_i . Для случая равных сомножителей, определяется *декартова степень*

$$X^n = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ сомножителей}},$$

т. е. множество всех кортежей $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ длины n , все члены x_i которых принадлежат множеству X . Например, $X^0 = \{\Lambda\}$ содержит только пустой кортеж Λ (единственный кортеж длины 0).

Полагают $X^{<\omega} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ — множество всех кортежей, любой длины $n \in \mathbb{N}$, из элементов множества X .

Операции объединения и пересечения также применимы к любым конечным спискам множеств, например, в форме $A \cup B \cup C$ или $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$. Но имеется и более общая их форма, которая предполагает, что *элементы множеств сами являются множествами*, или, другими словами, что *все математические объекты являются множествами*. На этой основе вводятся такие операции:

объединение $\bigcup X = \{y : \exists x \in X (y \in x)\}$ — таким образом, $\bigcup X$ есть объединение всех множеств $x \in X$;

пересечение $\bigcap X = \{y : \forall x \in X (y \in x)\}$ — таким образом, $\bigcap X$ есть пересечение всех множеств $x \in X$.

Например, если $X = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$, то

$$\bigcup X = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

и соответственно $\bigcap X = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$.

В математике известно много операций над индексированными множествами (о них см. § 1.4). К наиболее простым относятся следующие три. Допустим, что дано индексированное множество $\langle X_a \rangle_{a \in A}$.

Определяются:

$$\begin{aligned}\bigcup_{a \in A} X_a &= \{x : \exists a \in A (x \in X_a)\} \text{ и} \\ \bigcap_{a \in A} X_a &= \{x : \forall a \in A (x \in X_a)\},\end{aligned}$$

т. е. соответственно *объединение* и *пересечение* всех множеств X_a , $a \in A$. А *декартово произведение* $\prod_{a \in A} X_a$ состоит из всех функций f таких, что $\text{dom } f = A$ и $f(a) \in X_a$ для всех индексов $a \in A$. Для случая равных множителей, степень X^A определяется как множество всех функций $f: A \rightarrow X$; таким образом, $X^A = \prod_{a \in A} X_a$, где все множества X_a тождественны множеству X .

И здесь мы знакомимся с одной глубокой проблемой. Если хотя бы одно из множеств X_a — пустое, то и множество $\prod_{a \in A} X_a$ будет, само собой, пустым. Но допустим, что все X_a непусты; можно ли тогда заключить, что непусто и декартово произведение $\prod_{a \in A} X_a$? См. в этой связи об аксиоме выбора в следующей главе.

Ниже мы познакомимся с другими, более сложными операциями над множествами.

Исторические и библиографические замечания

Для дальнейшего знакомства с доаксиоматической, «канторовой» теорией множеств, можно рекомендовать первые главы книг П. С. Александрова [1], А. В. Архангельского [3], и, конечно, Хаусдорфа [54], а также Куратовского и Мостовского [124].

Глава 2

Аксиоматическая теория МНОЖЕСТВ

Как мы видели в главе 1, такие основополагающие объекты математики как натуральные и вещественные числа, функции, отношения представляются множествами определенного вида. Исследования по основаниям математики в 1й половине XX века показали, что теоретико-множественное представление допускают практически все математические объекты, причем теоремы о них доказываются как теоремы о множествах на основе аксиом о множествах, которые составляют аксиоматику теории множеств Цермело – Френкеля **ZFC**. Основам этой аксиоматики посвящена данная глава.

После изложения самих аксиом **ZFC**, мы определим понятие теоретико-множественного универсума, т. е. мира математических множеств, управляемых аксиомами **ZFC**, рассмотрим некоторые основные элементы теоретико-множественной структуры этого универсума: ординалы, кардиналы, и обсудим связанные с ними понятия, например, классы. Мы не будем подробно останавливаться на демонстрации роли аксиом **ZFC** как основы современной математики, о чем см. литературу в конце главы.

§2.1 Теория множеств Цермело – Френкеля

Прежде всего, с точки зрения математической логики, теория множеств Цермело – Френкеля **ZFC** — это теория с логическим равенством в языке всего с одним собственным отношением, т. е. бинарным *отношением принадлежности* $\in$, причем $x \in y$ понимается как то, что множество x принадлежит множеству y или, что то же самое, является элементом множества y . Формулы этого языка, т. е. $\in$ -языка, будут называться $\in$ -формулами.¹

Список аксиом теории множеств Цермело – Френкеля **ZFC** приводится здесь с минимальными комментариями, скорее просто как список для дальнейших ссылок. Вообще, мы предполагаем некоторое знакомство читателя с теорией множеств **ZFC**.

Экстенциональность: $\forall X \forall Y (X = Y \iff \forall x (x \in X \iff x \in Y))$,
или, менее формально, множества равны если и только если они содержат одни и те же элементы.

Пара: $\forall x \forall y \exists Z \forall z (z \in Z \iff (z = x \vee z = y))$,
или, более развернуто: для любых множеств x, y существует множество Z , чьими элементами являются множества x, y и только они. Такое множество Z обозначается $Z = \{x, y\}$ (*неупорядоченная пара* множеств x, y).

Объединение: Для любого множества X существует множество $U = \bigcup X = \{y : \exists x \in X (y \in x)\}$, равное объединению всех элементов множества X .

Степень: Для любого множества x , его *степень* $\mathcal{P}(x) = \{y : y \subseteq x\}$ является множеством. Другими словами, постулируется существование множества $\mathcal{P}(x)$, состоящего из всех подмножеств данного множества x .

Пустое множество: Существует *пустое множество*, т. е. такое множество $\emptyset$, которое не содержит элементов. (Заметим, что по аксиоме *Экстенциональности* все пустые множества равны друг другу, т. е., другими словами, существует *единственное* пустое множество, которое и обозначается $\emptyset$.)

Бесконечность: Существует *индуктивное множество* — такое множество X , для которого $\emptyset \in X$ и $x \in X \implies x \cup \{x\} \in X$.

¹ В устной речи — *эпсилон-язык* и *эпсилон-формула*, поскольку знак принадлежности $\in$ исторически возник из буквы ϵ или ε греческого языка.

Выделение: $\forall X \exists Y \forall x (x \in Y \iff (x \in X \wedge \Phi(x)))$: любая совокупность элементов некоторого множества, определяемая формулой, является множеством.

Здесь $\Phi(x)$ может быть любой $\in$ -формулой с произвольными множествами в роли параметров². То же относится к формуле $\Phi(x, y)$ в двух следующих схемах аксиом. Понятно, что **Выделение**, **Собирание**, **Подстановка** — это не единичные аксиомы, как все прочие, а бесконечные списки аксиом, полученные по общим схемам — поэтому они часто называются *схемами* аксиом.

Собирание: Для любого множества X , если $\forall x \in X \exists y \Phi(x, y)$, то найдется множество Y такое, что $\forall x \in X \exists y \in Y \Phi(x, y)$.

Подстановка: Для любого множества X , если $\forall x \in X \exists! y \Phi(x, y)$ то существует множество f такое, что f — функция, определенная на множестве X и удовлетворяющая $\forall x \in X \Phi(x, f(x))$.

Регулярность³: Любое множество $X \neq \emptyset$ содержит элемент $x \in X$, для которого $x \cap X = \emptyset$.

Выбор: Для любого множества X , существует функция f (называемая *функцией выбора*), которая определена на X и удовлетворяет $f(x) \in x$ для всех непустых $x \in X$.

Итак, теория **ZFC** содержит аксиомы и схемы аксиом Экстенсionalности, Пары, Выделения, Собирания, Подстановки, Объединения, Пустого множества, Бесконечности, Регулярности, Степени, Выбора.

Более слабая теория **ZF** содержит те же аксиомы, кроме Выбора.

Принято считать (и это подтверждается развитием математики), что аксиомы **ZFC** создают достаточный и адекватный аксиоматический базис для подавляющего большинства разделов современной математики — в том смысле, что объекты изучения могут быть определены как множества, а математические теоремы об этих объектах выведены при помощи аксиом **ZFC**. Аксиомы теории **ZFC** были приняты математическим сообществом, за исключением, в какой-то степени, аксиомы выбора, по которой в начале XX века велись серьезные дискуссии.

² Формально это означает, что Φ может содержать другие свободные переменные кроме x , но Y не может быть переменной в $\Phi(x)$ (но X может).

³ Также называемая аксиомой **Фундирования**. В этой связи отметим, что аксиома **Регулярности** по существу утверждает, что если X — произвольное множество, то ограничение $\in_X = \in \upharpoonright X$ отношения принадлежности на множество X — фундировано в смысле определения 1.5.2.

§2.2 Комментарии к аксиомам

Аксиомы Пары, Объединения, Степени нужны для того, чтобы те операции над множествами, которые рассмотрены в первой главе, приводили снова к множествам. Например, простое объединение $x \cup y = \bigcup \{x, y\}$ двух множеств, и их упорядоченная пара $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ — множества по аксиомам Пары и Объединения.

Декартово произведение $X \times Y = \{\langle x, y \rangle : x \in X \wedge y \in Y\}$ — также множество. В самом деле, если $x \in X$ и $y \in Y$, то $\{x, y\} \in \mathcal{P}(X \cup Y)$ и $\langle x, y \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$, и мы видим, что

$$X \times Y = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)) : \exists x \in X \exists y \in Y (z = \langle x, y \rangle)\}$$

— множество по аксиоме Выделения, поскольку $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$ является множеством по аксиоме Степени.

Замечание 2.2.1. Более тонкое рассуждение позволяет вывести существование $X \times Y$ не используя аксиому Степени. Именно, для любого $x \in X$, отображение $f_x(y) = \langle x, y \rangle$, определенное для всех $y \in Y$, является множеством по аксиоме Подстановки, так что $F(x) = \text{ran } f_x = \{x\} \times Y$ — множество для любого $x \in X$ согласно сказанному выше. По аналогичным соображениям, и F (как функция, определенная на X) — множество, а потому и $R = \text{ran } F = \{\{x\} \times Y : x \in X\}$ — множество, как и, наконец, $X \times Y = \bigcup R$ по аксиоме Объединения. $\square$

Аналогично, если R — бинарное отношение, т. е. множество, состоящее из упорядоченных пар (например, функция), то $\text{dom } R$ и $\text{ran } R$ — множества. В самом деле, если $\langle x, y \rangle \in R$, то $x, y \in U = \bigcup \bigcup R$, где U — множество по аксиоме Объединения, и тогда

$$\text{dom } R = \{x \in U : \exists p \in R \exists y \in U (p = \langle x, y \rangle)\} \quad (1)$$

— также множество по Выделению, и то же для $\text{ran } R$.

Аксиома Бесконечности влечет существование по крайней мере одного индуктивного множества.

Отсюда по аксиоме Выделения вытекает существование *множества натуральных чисел* $\mathbb{N}$, определенного выше как пересечение всех индуктивных множеств

— возьмем как X произвольное индуктивное множество и формулу « x принадлежит каждому индуктивному множеству» в роли $\Phi(x)$.

Вообще, схема аксиом Выделения говорит нам, что любой объект вида $\{x \in X : \Phi(x)\}$, где X — произвольное множество, а Φ — любая теоретико-множественная формула, сам является множеством.

Схема аксиом Подстановки следует из Собирания и Выделения. Именно, сначала Собрание приносит такое множество Y , что выполнено $\forall x \in X \exists y \in Y \Phi(x, y)$, а затем $f = \{\langle x, y \rangle \in X \times Y : \Phi(x, y)\}$ — множество по Выделению.

В качестве элементарного следствия аксиомы Регулярности отметим следующее: нет множеств x , для которых $x \in x$. (Для вывода возьмите $X = \{x\}$ в аксиоме.) Нет также и цепочек вида $x \in y \in x$.

Аксиома Выбора часто употребляется в форме, приспособленной к выборам из множеств, образующих индексированное семейство.

Теорема 2.2.2. Пусть $\langle X_a \rangle_{a \in A}$ — индексированное семейство непустых множеств. Тогда декартово произведение $\prod_{a \in A} X_a$ непусто, т. е. найдется функция F такая, что $\text{dom } F = A$ и $F(a) \in X_a$ для каждого $a \in A$ — такая функция F называется функцией выбора для данного индексированного семейства.

Доказательство. Положим $Y_a = \{a\} \times X_a = \{\langle a, x \rangle : x \in X_a\}$ для каждого a . Согласно аксиоме Выбора, имеется функция выбора f для множества $Y = \{Y_a : a \in A\}$. Таким образом, если $a \in A$, то $f(Y_a) \in Y_a$, т. е. $f(Y_a) = \langle a, x \rangle$, где x — некоторый элемент множества X_a . остается определить $F(a) = f(Y_a)$ для всех a . $\square$

Обратно, если принять утверждение теоремы за аксиому, то из нее столь же легко выведется сама аксиома Выбора.

Аксиома Выбора выделяется среди всех аксиом ZFC своей *непредикативностью*. Именно, если оставить в стороне Экстенциональность, то все остальные аксиомы выражают существование некоторого единственного множества. (Или по крайней мере могут быть приведены к такому виду. Как, скажем, аксиома Бесконечности, которая может быть переформулирована как утверждение о существовании *наименьшего* — и тогда единственного — индуктивного множества, равного пересечению всех таких множеств.) Аксиома Выбора же не-предикативна в принципе, поскольку, вообще говоря, нет никакого способа выбрать некоторую единственную, вполне определенную функцию выбора среди всех таких функций.

С множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ связаны следующие две *ограниченные формы* аксиомы Выбора, часто (и не всегда явно) используемые в некоторых областях обычной, не теоретико-множественной математики — например, в теории меры.

счетный Выбор: Для любого семейства $\langle X_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ непустых множеств X_n имеется функция выбора, т. е. такая последовательность $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, что $x_n \in X_n$ для всех n .

зависимый Выбор, DC: Если бинарное отношение R удовлетворяет включению $\text{ran } R \subseteq \text{dom } R$, то найдется последовательность $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, для которой $x_n R x_{n+1}$ для всех n .

Из работ Гёделя, Коэна, и их последователей известно, что как сама аксиома **Выбора** так и каждая из этих двух ограниченных модификаций *независимы* от аксиом **ZF**, т. е. ни одну из них нельзя ни доказать, ни опровергнуть средствами остальных теоретико-множественных аксиом (если последние сами непротиворечивы).

Аксиома **Регулярности** стоит несколько в стороне от остальных аксиом **ZFC** в том, что она не выражает никакого свойства математических объектов и не влечет конкретных следствий вне собственно теории множеств. Поэтому рассматриваются теоретико-множественные системы, не содержащие этой аксиомы, или даже содержащие ту или иную аксиому прямо противоположного содержания. Такие теории могут допускать множества, удовлетворяющие, например, $x = \{x\}$, или $x = \{y\} \wedge y = \{x\}$, или $x \in y \in z \in x$, или вообще представлять достаточно произвольные графы через отношение принадлежности. О таких «антирегулярных» теориях см., например, в книгах [58] или [75, гл. 7].

С другой стороны, имеются системы в рамках теоретико-множественного *нестандартного анализа*, в которых аксиома **Регулярности** нарушается вследствие некоторых достаточно глубоких причин, хотя монстров типа $x = \{x\}$ там нет. О нестандартных теориях множеств см. нашу обзорную статью [17] или книгу [112].

§2.3 Универсум множеств и классы

Итак, исходным принципом современной теории множеств, или её **парадигмой**, является существование *теоретико-множественного универсума*, элементы которого называются множествами, и в котором могут быть адекватно определены или представлены все математические объекты. Мы обозначим этот универсум через $\mathbb{V}$. Предполагается, что этот универсум $\mathbb{V}$ подчинен аксиомам теории множеств Цермело – Френкеля **ZFC**, из которых формально следуют все математические теоремы — подобно тому, как, например, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ подчиняется аксиомам Пеано, из которых следуют все теоремы элементарной теории чисел. Впрочем, в некоторых случаях добавляются дополнительные аксиомы, а иногда наоборот, аксиома **выбора** удаляется.

Здесь уместно сказать несколько слов о классах. Наряду с множествами, т. е. собственно объектами теоретико-множественного универсума $\mathbb{V}$, рассматриваются и совокупности множеств, называемые

классами, которые сами не обязательно являются множествами — они для этого слишком большие! Для серьезного изучения классов в основаниях математики используются *теории классов*, в рамках которых классы существуют на равных правах с множествами, причем в некоторых из этих теорий множества определяются как те классы, которые являются элементами других классов. (О некоторых теориях классов см. в книгах [73] и [118].) Однако для нас будет достаточно следующего неформального определения:

Определение 2.3.1. *Классом* называется любая совокупность множеств вида $X = \{x : \varphi(x)\}$, т. е. всех множеств, удовлетворяющих данному свойству или формуле $\varphi(x)$ (которая может содержать некоторые множества в качестве параметров).

Резервируя слово *функция* для тех **множеств**, которые удовлетворяют определению из § 1.4, мы назовем *класс-функцией* любой класс F , который удовлетворяет тем же условиям 1) и 2) из § 1.4. $\square$

Каждое множество X является классом: $X = \{x : x \in X\}$. Более того, если x — множество, а X — класс, то $x \cap X$ и $x \setminus X$ — множества по аксиоме **Выделения**. Классы, не являющиеся множествами, называются *собственными* классами. Например, сам универсум $\mathbb{V} = \{x : x = x\}$ — это собственный класс. Другой важный пример — это собственный класс $\mathbf{Ord}$ всех ординалов, см. ниже.

Разумеется, любое утверждение в $\in$ -языке, в которое входят один или несколько конкретных классов, получает вполне определенный конкретный смысл на основе определения 2.3.1, так что в этом ограниченном смысле теория **ZFC** допускает классы. В то же время, теория **ZFC** не допускает *кванторов над классами*, т. е. кванторов типа «для каждого класса X выполнено ...», «существует класс X , для которого ...» в формулах — за **двумя следующими исключениями**, в каждом из которых «незаконной» формуле с квантором над классами может быть придан законный вид на основе определения 2.3.1.

Первое исключение. Формула вида $\exists^{\text{cls}} X \Phi(X)$, где $\exists^{\text{cls}} X$ имеет смысл «существует класс X », а X входит в $\in$ -формулу Φ только *справа* от $\in$. В этом случае $\exists^{\text{cls}} X \Phi(X)$ понимается в том смысле, что можно указать конкретную $\in$ -формулу $\varphi(x)$ такую, что исходная формула $\Phi(X)$ становится верной при подстановке $X = \{x : \varphi(x)\}$.

Второе исключение. Формула вида $\forall^{\text{cls}} X \Phi(X)$, где $\forall^{\text{cls}} X$ имеет смысл «для любого класса X », а X входит в $\in$ -формулу Φ только *справа* от $\in$. В этом случае $\forall^{\text{cls}} X \Phi(X)$ понимается в том смысле, что, какова бы ни была конкретная $\in$ -формула $\varphi(x)$, исходная формула $\Phi(X)$ становится верной при подстановке $X = \{x : \varphi(x)\}$. Другими словами, в этом случае $\forall^{\text{cls}} X \Phi(X)$ является *схемой*, содержащей бесконечное число утверждений некоторого общего вида.

В обоих исключениях, формулы φ могут содержать параметры, и точное до последней детали определение того, что имеется в виду, вылилось бы в формально-логическую возню на несколько страниц. Поэтому мы оставим разъяснения по этому вопросу в их данной краткой форме, поскольку смысл тех немногих класс-кванторных утверждений, которые встретятся ниже, будет вполне ясен.

К общей структуре теоретико-множественного универсума мы еще вернемся в следующей главе 3.

§2.4 Ординалы

Ординалы представляют собой естественное продолжение ряда натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ на основе двух общих принципов: во-первых, каждый ординал есть множество всех меньших ординалов, а потому для каждого ординала ξ имеется непосредственно следующий ординал $\xi \cup \{\xi\}$, и во-вторых, для каждого множества X ординалов имеется ординал, непосредственно следующий за всеми ординалами из X . Точное же определение таково:

Определение 2.4.1. Множество X *транзитивно*, если $\bigcup X \subseteq X$, или, другими словами, при выполнении условия:

если $y \in x \in X$ то $y \in X$ — т. е. элементы элементов множества X сами являются элементами множества X .

Ординалом называется всякое транзитивное множество ξ , все элементы которого также транзитивны.

Класс $\mathbf{Ord}$ всех ординалов упорядочивается так:

$\eta < \xi$, если $\eta \in \xi$;

$\eta \leq \xi$, если $\eta < \xi$ или $\eta = \xi$.

Если $\xi \in \mathbf{Ord}$ то полагаем $\xi + 1 = \xi \cup \{\xi\}$ — это, очевидно, также ординал и $\xi < \xi + 1$. $\square$

Например, $0 = \emptyset$ и $1 = \{\emptyset\}$ — ординалы, а $x = \{\{\emptyset\}\}$ — не ординал и даже не транзитивное множество: $\emptyset \in \{\emptyset\} \in x$ но $\emptyset \notin x$.

Сразу отметим, что по определению $\xi = \{\eta \in \mathbf{Ord} : \eta < \xi\}$, т. е. *каждый ординал есть множество всех меньших ординалов*.

Лемма 2.4.2. Класс $\mathbf{Ord}$:

— транзитивен, т. е. если $\eta \in \xi \in \mathbf{Ord}$ то и η — ординал, и

— собственный класс, т. е. не множество.

Сверх того, если $X \subseteq \mathbf{Ord}$ — множество, то оно ограничено в $\mathbf{Ord}$, т. е. найдется такой ординал ξ , что $\eta < \xi$ для всех $\eta \in X$.

Доказательство. Из $\eta \in \xi$ следует $\eta \subseteq \xi$ благодаря транзитивности ординала ξ , и далее $\eta \in \text{Ord}$ по определению, доказывая транзитивность. Далее, пусть напротив, $x = \text{Ord}$ — множество. Отсюда по транзитивности следует $\text{Ord} = x \in x$, но соотношение $x \in x$, как мы видели выше, несовместимо с аксиомой Регулярности.

Для вывода последнего утверждения, заметим, что иначе $U = \bigcup X$ равно Ord , но U — множество по аксиоме Объединения. $\square$

Лемма 2.4.3. $\mathbb{N} \subseteq \text{Ord}$ и $\mathbb{N} \in \text{Ord}$, т. е. каждое натуральное число и всё множество $\mathbb{N}$ — ординалы.

Натуральные числа называются *конечными* ординалами, а прочие (включая $\mathbb{N}$) — *бесконечными*.

Доказательство. Множество $\mathbb{N} \cap \text{Ord} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ — ординал}\}$ индуктивно, так что по определению $\mathbb{N} \subseteq \text{Ord}$. Остается доказать транзитивность $\mathbb{N}$. Заметим, что если X — индуктивное множество, то множество $X' = \{x \in X : x \subseteq X\}$ также индуктивно: если $x \in X'$, то $x \cup \{x\} \in X$ по индуктивности, и $x \cup \{x\} \subseteq X$, поскольку $x \subseteq X$ и $x \in X$. Отсюда легко следует транзитивность $\mathbb{N}$. $\square$

Следующая теорема выражает главное свойство ординалов. Ее доказательство, которое мы для экономии места опустим, можно найти на русском языке в книгах [99], [49, гл. 1], [163, гл. 9].

Теорема 2.4.4. Отношение $<$ есть полное (и тем самым линейное) упорядочение класса Ord . Более того, каждый непустой даже класс $X \subseteq \text{Ord}$ имеет $<$ -наименьший элемент. $\square$

Эта теорема обосновывает метод доказательства, называемый *трансфинитной индукцией*, и родственный метод трансфинитных индуктивных построений, или *трансфинитной рекурсии* — когда множество x_ξ сопоставляется каждому ординалу ξ в зависимости не только от ξ но и от уже построенных множеств x_η , $\eta < \xi$. Отсюда типично возникают *трансфинитные последовательности* — т. е. такие функции f , что $\delta = \text{dom } f \in \text{Ord}$. Трансфинитные последовательности часто записываются в форме индексированных множеств, т. е. как $\langle x_\xi \rangle_{\xi < \delta}$, где $\delta \in \text{Ord}$. К этому типу относятся и простые *бесконечные последовательности* — трансфинитные последовательности вида $\vec{x} = \langle x_n \rangle_{n < \omega}$ (т. е. $\text{dom } \vec{x} = \omega = \mathbb{N}$), а также *конечные последовательности* — кортежи $\vec{x} = \langle x_n \rangle_{n < n_0}$ (т. е. $\text{dom } \vec{x} = n_0 \in \mathbb{N}$).

Теорема 2.4.5 (трансфинитная индукция). Пусть $P(\xi)$ — некоторое свойство ординалов. Допустим, что для всякого ординала ξ имеет место следующее:

(*) если $P(\eta)$ верно для всех ординалов $\eta < \xi$, то и $P(\xi)$ верно.

Тогда $P(\xi)$ верно для всех $\xi \in \text{Ord}$.

Теорема 2.4.6 (трансфинитная рекурсия). Пусть $P(x, \xi, y)$ — некоторое тернарное свойство множеств, причем для любого множества x и ординала ξ имеется единственное множество y , удовлетворяющее $P(x, \xi, y)$. Тогда для всякого ординала ξ существует единственная последовательность $\langle x_\eta \rangle_{\eta < \xi}$, для которой:

(†) если $\eta < \xi$, то x_η — единственное множество x , удовлетворяющее $P(\langle x_\vartheta \rangle_{\vartheta < \eta}, \eta, x)$.

По лемме 2.4.3, теоремой 2.4.5 обосновываются также и обычная индукция в области натуральных чисел $\mathbb{N}$ (т. е. математическая индукция), а теоремой 2.4.6 — обычные индуктивные построения в области натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 2.4.5 достаточно применить теорему 2.4.4 к классу $X = \{\xi \in \text{Ord} : \neg P(\xi)\}$.

Теперь о теореме 2.4.6. Для краткости, любую последовательность, удовлетворяющую условию (†), будем называть ξ -последовательностью для P . Используя теорему 2.4.5, без труда доказывается единственность, и даже более сильное утверждение: если $\xi < \gamma$ и $\langle x_\eta \rangle_{\eta < \xi}$, $\langle y_\eta \rangle_{\eta < \gamma}$ являются, соответственно, ξ - и γ -последовательностями для P , то $x_\eta = y_\eta$ для всех $\eta < \xi$.

Теперь доказываем существование, также по индукции. Пусть $\gamma \in \text{Ord}$, и для каждого $\xi < \gamma$ существует (единственная по предыдущему) ξ -последовательность $s_\xi = \langle x_\eta^\xi \rangle_{\eta < \xi}$ для P . Отображение $f(\xi) = s_\xi$ есть множество-функция по аксиоме Подстановки, и по предыдущему $x_\eta^\xi = x_\eta^\gamma$ при $\eta < \xi < \gamma$. Если теперь $\gamma = \xi + 1$, то, присоединив к s_ξ пару $\langle \xi, x_\xi \rangle$, где x_ξ — единственное множество, удовлетворяющее $P(\langle x_\eta \rangle_{\eta < \xi}, \xi, x_\xi)$, мы получаем γ -последовательность $\langle x_\eta^\xi \rangle_{\eta \leq \xi}$ для P . Если же ординал γ предельный (т. е. если $\xi < \gamma$, то $\xi + 1 < \gamma$), то такой последовательностью будет $\langle x_\eta^{\xi+1} \rangle_{\eta < \gamma}$. $\square$

О более общем варианте трансфинитной индукции см. § 3.3.

Сразу укажем два важных следствия, вывод которых при помощи теоремы 2.4.4 оставляется читателю в качестве упражнения.

Следствие 2.4.7 (= теорема 1.7.1). Любой ординал ξ и, в частности, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, сам как множество вполне упорядочен отношением $\leq$ из 2.4.1 и является начальным сегментом в классе Ord . $\square$

Следствие 2.4.8. Если $\xi, \eta \in \text{Ord}$ то

$$\xi < \eta \iff \xi \in \eta \iff \xi \subsetneq \eta \quad \text{и} \quad \xi \leq \eta \iff \xi \subseteq \eta.$$

Следовательно, если $\xi \leq \eta \leq \xi + 1$ то $\eta = \xi$ или $\eta = \xi + 1$. $\square$

Вообще, ординалы можно отождествить с *порядковыми числами*, т. е. порядковыми типами вполне упорядоченных множеств. Это основывается на следующей теореме:

Теорема 2.4.9 (Кантор). Каждое вполне упорядоченное множество $X = \langle X; \leq_X \rangle$ порядково изоморфно единственному (зависящему от X) ординалу ξ , который обозначается через $\text{отр } X = \text{отр } \langle X; \leq_X \rangle$ и называется порядковым типом множества X .

Доказательство. Иначе по теореме 1.6.1 каждый ординал ξ был бы порядково изоморфен некоторому начальному сегменту Y_ξ в $\langle X; \leq_X \rangle$. Однако начальные сегменты — просто определенные подмножества множества X , так что они образуют множество по аксиомам Степени и Выделения. Отсюда по аксиоме Собираения легко следует, что и Ord — множество, с очевидным противоречием. $\square$

Если $\xi \in \text{Ord}$ то, согласно следствию 2.4.8, $\xi + 1$ есть следующий за ξ ординал. Среди ординалов выделяются:

- *непредельные*, т. е. ординалы вида $\xi + 1$, а также ординал 0 , и
- *предельные*, т. е. все прочие.

Упражнение 2.4.10. Докажите, что ординал $\xi > 0$ предельен, если и только если среди ординалов $\eta < \xi$ нет наибольшего. $\square$

Понятно, что $\mathbb{N}$ (см. лемму 2.4.3) — предельный ординал, так что предельные ординалы существуют. По теореме 2.4.3, существует и *наименьший* предельный ординал — его принято обозначать ω . Легко видеть, что ω — индуктивное множество.

Следствие 2.4.11. Наименьший предельный ординал ω тождествен множеству натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. $\square$

Объединение любого числа транзитивных множеств транзитивно, а потому имеет место следующая лемма:

Лемма 2.4.12. Если $X \subseteq \text{Ord}$ — произвольное множество, то $\xi = \bigcup X$ — ординал, причем наименьший ординал равный или больший всех ординалов из X , т. е. формально $\bigcup X = \sup X$.

Следовательно, любое множество $X \subseteq \text{Ord}$ ограничено в Ord : ординал $\eta = \bigcup X + 1$, удовлетворяет $\nu < \eta$ для всех $\nu \in X$. $\square$

Например, $\bigcup \emptyset = \sup \emptyset = 0$. Вообще, $\sup X$ совпадает с наибольшим ординалом в X , если такой существует, а иначе $\sup X$ — наименьший ординал, строго больший чем каждый ординал из X . Как обычно, если $f : X \rightarrow \mathbf{Ord}$, то полагают

$$\sup_{x \in X} f(x) =_{\text{def}} \sup \{f(x) : x \in X\}.$$

Для каждой пары ординалов ξ, η трансфинитной индукцией по η определяются *сумма* $\xi + \eta$ и *произведение* $\xi \cdot \eta$. Оба действия ассоциативны, но не коммутативны: например, $1 + \omega = \omega < \omega + 1$ и $2 \cdot \omega = \omega < \omega \cdot 2 = \omega + \omega$. Дистрибутивность только односторонняя: $\xi \cdot (\eta + \zeta) = (\xi \cdot \eta) + (\xi \cdot \zeta)$. Подробнее см., например, в книге [54], где вместо ординалов рассматриваются фактически идентичные им порядковые числа.

§2.5 Ординалы и фундированные отношения

Ординалы часто фигурируют в связи с рангами для фундированных отношений (о последних см. определение 1.5.2). В частности, большое значение имеет следующая теорема 2.5.3.

Определение 2.5.1. Пусть R — бинарное отношение на множестве X . Положим $R^{-1}(x) = \{z \in X : z R x\}$ для $x \in X$, и далее

$$\text{TC}_R(x) = Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2 \cup \dots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n,$$

где $Y_0 = R^{-1}(x)$, и $Y_{n+1} = \bigcup_{y \in Y_n} R^{-1}(y)$ индукцией по $n \in \mathbb{N}$. Множество $\text{TC}_R(x)$ *R-транзитивно*, т. е. для любых $x \in X$ и $y \in \text{TC}_R(x)$, из $x R y$ следует $x \in \text{TC}_R(x)$ — и является наименьшим R -транзитивным множеством, включающим $R^{-1}(x)$ как подмножество. Оно называется *R-транзитивным замыканием* элемента x .

Функцией ранга для R называется любое отображение $\rho(x) = |x|_R$ из X в $\mathbf{Ord}$, удовлетворяющее, для всех $x \in X$, равенству

$$\rho(x) = \sup_{z \in R^{-1}(x)} (\rho(z) + 1).^4 \quad (1)$$

Если такая функция ранга ρ существует и единственна, то определяется *ранг* $|R| = \sup_{x \in X} (\rho(x) + 1)$ отношения R . $\square$

Упражнение 2.5.2. Докажите, что если ранг $|R|$ определен, то он является ординалом. $\square$

Теорема 2.5.3. *Бинарное отношение R на множестве X — фундированное, если и только если для него имеется функция ранга. Если отношение R фундировано, то функция ранга единственна.*

⁴ Другими словами, супремум берется по всем $z \in R^{-1}(x) = \{z \in X : z R x\}$.

Доказательство. Допустим, что отношение R фундировано.

Рассмотрим множество F всех функций f , чья область определения $\text{dom } f \subseteq X$ R -транзитивна, причем f удовлетворяет условию (1) в 2.5.1 для всех $x \in \text{dom } f$. Важно, что любые две функции $f, f' \in F$ совпадают на общей области $C = \text{dom } f \cap \text{dom } f'$. (Иначе множество $Z = \{z \in C : f(z) \neq f'(z)\}$ непусто. По фундированности, Z содержит элемент z , для которого $Z \cap R^{-1}(z) \neq \emptyset$. Тогда $f(w) = f'(w)$ для всех $w \in R^{-1}(z)$, так что $f(z) = \sup_{w \in R^{-1}(z)} (f(w) + 1) = \sup_{w \in R^{-1}(z)} (f'(w) + 1) = f'(z)$, противоречие.)

Рассмотрим множество Y всех таких $x \in X$, что имеется функция $f \in F$ с $x \in \text{dom } f$. Если $x \in Y$ то пусть $f_x = f \upharpoonright (\text{TC}_R(x) \cup \{x\})$, где $f \in F$ — любая функция указанного вида. По доказанному, при $x \in Y$ это определение не зависит от выбора f , и f_x — снова функция из F с $x \in \text{dom } f_x$. Поэтому нам остается вывести, что $Y = X$: тогда просто определим $|x|_R = f_x(x)$ для всех x .

Если напротив, $Y \subsetneq X$, то множество $D = X \setminus Y$ непусто, и потому имеется элемент $y \in D$, для которого $D \cap R^{-1}(y) = \emptyset$. Если $x \in R^{-1}(y)$, то $x \in Y$, так что функция f_x определена. Положим $f(x) = f_x(x)$ для всех $x \in R^{-1}(y)$, и $f(y) = \sup_{x \in R^{-1}(y)} (f(x) + 1)$. Эта функция f свидетельствует, что $y \in Y$ — противоречие.

Обратно, пусть $\rho : X \rightarrow \text{Ord}$ — функция ранга. Чтобы доказать фундированность R , пусть $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Из полной упорядоченности класса Ord следует, что найдется такой элемент $y \in Y$, что $\rho(y) \leq \rho(x)$ для всех $x \in Y$. Но тогда, если $x \in Y$, то $x R y$ невозможно — иначе мы имели бы $\rho(y) > \rho(x)$, противоречая выбору y . $\square$

Результат теоремы 2.5.3 можно понимать в том смысле, что фундированное отношение допускает *гомоморфизм* в ординалы. Следующий результат показывает, что в определенной ситуации имеется и *изоморфизм* на $\in$ -отношение на транзитивном множестве.

Определение 2.5.4. Бинарное отношение R на множестве X *экстенционально*, если для любых x, y из X , из $R^{-1}(x) = R^{-1}(y)$ следует, что просто $x = y$. $\square$

Упражнение 2.5.5. Используя аксиомы Регулярности и Экстенциональности, докажите, что если X — любое множество, то отношение принадлежности $\in \upharpoonright X$ на множестве X фундировано, а если X — транзитивное множество, то $\in \upharpoonright X$ — также и экстенциональное отношение. Дайте пример (нетранзитивного) множества X , для которого отношение $\in \upharpoonright X$ не экстенционально. $\square$

Теорема 2.5.6. Пусть R — фундированное отношение на множестве X . Существует единственная функция $\phi = \phi_R$, определенная на X и удовлетворяющая, для всех $x \in X$, равенству

$$\phi(x) = \{\phi(y) : y \in R^{-1}(x)\} \quad (2)$$

Область всех значений $Y = \text{ran } \phi$ этой функции — транзитивное множество. Если сверх того отношение R экстенционально, то ϕ — биекция X на Y и изоморфизм структур $\langle X; R \rangle$ и $\langle Y; \in \upharpoonright Y \rangle$.

Такая функция ϕ_R называется *функцией Мостовского* для R .

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 2.5.3, мы рассматриваем множество Φ всех функций ϕ , заданных на некотором R -транзитивном множестве $\text{dom } \phi \subseteq X$, и удовлетворяющих условию (2) из 2.5.6 для всех $x \in \text{dom } \phi$. Снова любые две функции $\phi, \phi' \in \Phi$ совпадают на общей области $\text{dom } \phi \cap \text{dom } \phi'$.

Далее, рассматриваем множество Y всех таких $x \in X$, что имеется функция $\phi \in \Phi$, удовлетворяющая $x \in \text{dom } \phi$, определяем, для $x \in Y$, $\phi_x = \phi \upharpoonright (\text{TC}_R(x) \cup \{x\}) \in \Phi$, убеждаемся с помощью фундированности, что $Y = X$, и полагаем $\phi_R(x) = \phi_x(x)$, $\forall x$. Это дает нам существование и единственность искомой функции $\phi = \phi_R$.

Теперь допустим, что R — экстенциональное отношение. Предположим противное: $\phi = \phi_R$ — не биекция. Тогда множество

$$X' = \{x \in X : \exists x' \in X (x' \neq x \wedge \phi(x) = \phi(x'))\}$$

непусто, и пусть, по фундированности, $x \in X$ есть R -минимальный элемент в X' . По определению, найдется элемент $x' \neq x$, для которого $\phi(x) = \phi(x')$. Из экстенциональности, $R^{-1}(x) \neq R^{-1}(x')$. Пусть, к примеру, $y \in R^{-1}(x) \setminus R^{-1}(x')$. Коль скоро $\phi(x) = \phi(x')$, найдется такое $y' \in R^{-1}(x')$, что $\phi(y) = \phi(y')$. При этом заведомо $y \neq y'$, так как $y \notin R^{-1}(x')$. Таким образом, $y \in X'$, противоречие с выбором x .

После уже установленной биективности, проверка утверждения об изоморфизме несложна и оставляется читателю. $\square$

§2.6 Мощность множества. Кардиналы

Георг Кантор предложил называть *равномощными* любые два множества X и Y , между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие, т. е. имеется биекция $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$. В этом случае также говорят, что X и Y имеют *одинаковую мощность*, символически $\text{card } X = \text{card } Y$. При этом

- неравенство $\text{card } X \leq \text{card } Y$ понимается как то, что существует инъекция $f: X \rightarrow Y$, иначе говоря, биекция на некоторое подмножество $Y' \subseteq Y$,
- а строгое неравенство $\text{card } X < \text{card } Y$ означает, что $\text{card } X \leq \text{card } Y$, но $\text{card } X = \text{card } Y$ не выполнено.

Теорема 2.6.1 (Шрёдер – Бернштейн). *Если $\text{card } X \leq \text{card } Y$ и $\text{card } Y \leq \text{card } X$ то $\text{card } X = \text{card } Y$. Другими словами, если существуют инъекция из X в Y и инъекция из Y в X то существует и биекция из X на Y .* $\square$

Заметим, что данными выше определениями мощность $\text{card } X$ сама по себе как множество не вводится. Чтобы дать конкретное определение $\text{card } X$, используется:

Теорема 2.6.2 (Цермело). *Каждое множество X можно вполне упорядочить, так что, по теореме 2.4.9, оно равномощно некоторому ординалу.* $\square$

В отличие от теоремы 2.6.1 и многих других результатов базовой теории множеств (например, всех результатов из § 2.4), в доказательстве теоремы 2.6.2 используется аксиома Выбора. Доказательства теорем 2.6.1 и 2.6.2 см., например, в [1], [54], [73].

Итак, по теореме 2.6.2, для каждого множества X существуют ординалы, равномощные X , и тогда, по теореме 2.4.4, существует и наименьший из таких ординалов. Этот ординал (т. е. наименьший из равномощных X) называется *мощностью* множества X и обозначается $\text{card } X$. Просто *кардиналами* называются начальные ординалы, т. е. те, которые не равномощны меньшим ординалам. По определению, $\text{card } X$ — всегда кардинал, и если κ — кардинал, то $\text{card } \kappa = \kappa$. Card есть класс всех кардиналов.

Очевидно, что каждое натуральное число (= конечный ординал) — это кардинал; натуральные числа называются *конечными* кардиналами. За ними следует $\omega = \mathbb{N} = \aleph_0$ — наименьший бесконечный кардинал, и вообще каждому ординалу ξ сопоставляется ξ -ый по величине бесконечный кардинал $\omega_\xi = \aleph_\xi$, так что

$$\text{Card} = \mathbb{N} \cup \{\aleph_\xi : \xi \in \text{Ord}\}.$$

Существование кардинала $\omega_\xi = \aleph_\xi$ ⁵ для каждого $\xi \in \text{Ord}$ основано, с одной стороны, на ограниченности любого множества $X \subseteq \text{Ord}$ по лемме 2.4.12, а с другой стороны, на том, что максимальных мощностей нет согласно следующей «диагональной теореме» Кантора.

Теорема 2.6.3. *Для любого X , $\text{card } X < \text{card } \mathcal{P}(X)$.*

Если κ — кардинал, то определяют $2^\kappa = \text{card } \mathcal{P}(\kappa)$ (степень, или экспонента кардинала). По теореме, мы имеем $\kappa < 2^\kappa$ строго.

⁵ Обозначения $\aleph_0$, $\aleph_1$, вообще $\aleph_\xi$, $\xi \in \text{Ord}$, используются в случае, когда важны лишь мощностные характеристики, а обозначения ω , ω_1 , вообще ω_ξ — когда важны порядковые характеристики кардинала и его связь с другими ординалами. В то же время, формально $\aleph_\xi = \omega_\xi$.

Доказательство. Инъекция $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ дается отображением $x \mapsto \{x\}$. Для вывода $\text{card } \mathcal{P}(X) \not\leq \text{card } X$, предположим противное, т. е. существует инъекция $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow X$. Рассмотрим множество $Y = \{x \in \text{ran } F : x \notin f^{-1}(x)\} \subseteq X$, и пусть $y = f(Y)$. Имеем противоречие: $y \in Y \iff y \notin f^{-1}(y) \iff y \notin Y$. $\square$

Упражнение 2.6.4. Докажите, что для любого кардинала κ имеется следующий по величине кардинал κ^+ , причем если $\kappa < \omega$ то $\kappa^+ = \kappa + 1$, а если кардинал $\kappa = \aleph_\xi$ бесконечен, то $\kappa^+ = \aleph_{\xi+1}$. $\square$

Множества X , для которых $\text{card } X < \aleph_0 = \omega$, называются *конечными*; для них $\text{card } X = \#X$ — это число элементов множества X . Если же $\text{card } X \geq \aleph_0$, то X — *бесконечное* множество.

Если $\text{card } X = \aleph_0$, то множество X называется *счетным*. Иначе говоря, счетные множества — это те, которые равномощны множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Конечные и счетные множества объединяются под общим названием: *не более чем счетные* множества.

Существуют и несчетные множества: Например, по теореме 2.6.3, множество $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ несчетно; его мощность принято обозначать через $\mathfrak{c} = \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$ и называть *мощность континуума*, поскольку легко проверяется, что $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ и вещественная прямая $\mathbb{R}$ равномощны. Вообще, для любого кардинала κ , полагают $2^\kappa = \text{card } \mathcal{P}(\kappa)$; тогда 2^κ — также кардинал, и $\kappa < 2^\kappa$ строго по теореме 2.6.3.

С другой стороны, имеется и наименьший несчетный ординал $\omega_1 = \aleph_1 = \aleph_0^+$, т. е. первый несчетный кардинал. Вопрос о соотношении $\aleph_1$ и $\mathfrak{c}$ (т. е. имеет место равенство $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, или же $\aleph_1 < \mathfrak{c}$ строго) составляет содержание знаменитой *проблемы континуума*. В связи с этим рассматриваются:

континуум-гипотеза, СН: $\mathfrak{c} = \aleph_1$;

обобщенная континуум-гипотеза, GCH: $2^{\aleph_\xi} = \aleph_{\xi+1}$ для всех ординалов ξ — т. е. если кардинал κ бесконечен, то $2^\kappa = \kappa^+$.

Ни гипотезу **СН**, ни более общую **GCH** нельзя ни доказать, ни опровергнуть, исходя из аксиом **ZFC**.

Конфинальностью $\text{cof } \kappa$ бесконечного кардинала (или ординала) κ называется наименьший кардинал λ , для которого существует неограниченное⁶ (т. е. $\sup X = \kappa$) множество $X \subseteq \kappa$ (т. е. оно состоит из ординалов $\gamma < \kappa$) мощности $\text{card } X = \lambda$.

Упражнение 2.6.5. Докажите, что $\text{cof } \omega = \omega$ и $\text{cof } \omega_1 = \omega_1$, и вообще $\text{cof } \kappa^+ = \kappa^+$ для всех бесконечных кардиналов κ . Но с другой стороны, $\text{cof } \aleph_\omega = \omega < \aleph_\omega$ — возьмите для проверки множество $X = \{\aleph_n : n < \omega\}$. $\square$

⁶ Неограниченные множества также называются *конфинальными*.

§ 2.7 Классификация кардиналов

Как мы видели, кардиналы бывают конечными (это натуральные числа) и бесконечными. Несколько слов о дальнейшей классификации кардиналов. Бесконечный кардинал $\kappa = \aleph_\xi$ называется:

- *предельным*, если его индекс ξ — предельный ординал,
- *непредельным*⁷, если ξ — непредельный ординал (включая 0),
- *строго предельным*, если $2^{\aleph_\eta} < \kappa$ для любого индекса $\eta < \xi$,
- *регулярным*, если $\text{cof } \kappa = \kappa$ — т. е. требуется, чтобы каждое множество $X \subseteq \kappa$, неограниченное в κ , имело мощность κ ,
- *сингулярным*, если $\text{cof } \kappa < \kappa$ строго,
- *строго недостижимым*, если он строго пределен и регулярен,
- *слабо недостижимым*, если он пределен и регулярен.

В предположении **ГСН**, понятия предельного и строго предельного кардиналов тождественны, равно как и понятия недостижимого и строго недостижимого кардиналов тождественны.

В соответствии с этими определениями, первый бесконечный кардинал $\omega = \aleph_0$ неопределен и регулярен. (Хотя как ординал ω , конечно, является предельным.) Все кардиналы $\aleph_n$, $n < \omega$, также регулярны и непредельны. Первый предельный, а также и первый сингулярный кардинал — это $\aleph_\omega$, см. упражнение 2.6.5.

Существуют ли сингулярные непредельные кардиналы, т. е. слабо недостижимые? Такие кардиналы — если они есть — должны быть весьма велики. В самом деле, те кардиналы $\aleph_\xi$, которые сразу видны, например, $\aleph_0$, $\aleph_n$ для $n < \omega$, $\aleph_\omega$, даже например такой гигантский с точки зрения обычной математики кардинал как $\aleph_{\omega_{17}}$, удовлетворяют $\xi < \aleph_\xi$ — в то время как любой слабо недостижимый кардинал $\aleph_\xi$ удовлетворяет равенству $\aleph_\xi = \xi$. (Поскольку если $\xi < \aleph_\xi$ и ξ — предельный (бесконечный) ординал, то множество $X = \{\aleph_\eta : \eta < \xi\}$ мощности $\text{card } X = \text{card } \xi \leq \xi < \aleph_\xi$ неограничено в $\aleph_\xi$.) Поэтому можно было бы попытаться найти недостижимый кардинал среди кардиналов $\aleph_\xi$, удовлетворяющих $\aleph_\xi = \xi$. Это, однако, не проходит. В самом деле, первый кардинал $\kappa = \aleph_\xi$, удовлетворяющий равенству $\aleph_\xi = \xi$, может быть получен в виде $\kappa = \sup_{n < \omega} \kappa_n$, где, по индукции, $\kappa_0 = \aleph_0$ и $\kappa_{n+1} = \aleph_{\kappa_n}$ для всех n . Но этот кардинал κ сингулярен, ибо счетное множество $X = \{\kappa_n : n < \omega\}$ неограничено в κ .

⁷ В англоязычной литературе чаще successor cardinal, т. е. кардинал, следующий непосредственно за другим кардиналом. Дело в том, что если $\xi = \eta + 1$ то кардинал $\aleph_\xi$ непосредственно следует за $\aleph_\eta$.

На самом деле, недостижимые кардиналы настолько велики, что их существование вообще невозможно доказать в рамках аксиом теории **ZFC**. Тем не менее, они связаны с некоторыми утверждениями о точечных множествах (например, с гипотезой о том, что все множества проективного класса Π_1^1 имеют свойство совершенного ядра) и находят многочисленные применения в дескриптивной теории множеств. См. об этом ниже в главе 13.

Упражнение 2.7.1. Пусть κ — бесконечный предельный кардинал. Докажите, что κ слабо недостижим, если и только если κ не является объединением меньшего числа меньших кардиналов, и строго недостижим, если и только если дополнительно κ не ограничен сверху степенью меньшего кардинала. $\square$

Современной теорией множеств рассматриваются и еще большие кардиналы, такие как измеримый кардинал, см. например книгу [49].

Исторические и библиографические замечания

Аксиоматика (теория) множеств **ZFC** была разработана в 1908–1925 гг., в частности, в связи с установкой сделать математические доказательства более аккуратными и точно выделить все используемые в них аксиомы.

Интересно, что, вообще говоря, не было аксиом, о которых математики вели бы споры, включать их или нет в эту аксиоматику множеств. Кроме дискуссии об аксиоме выбора на ранних этапах развития теории множеств, которая велась в рамках полемики о допустимости таких средств, как закон исключенного третьего, неэффективные построения, «актуально» бесконечные множества и т. п.. В этой дискуссии отрицание аксиомы выбора скорее означало отрицание вообще любой теоретико-множественной аксиоматики и канторовой теории множеств как таковой. Этой теме в значительной мере посвящены знаменитые «Cinq lettres» [72] — переписка между Адамаром, Бэрмом, Борелем и Лебегом. Н. Н. Лузин говорит об этом в своих работах [25, часть III], [130, пп. 31, 60, 64] или в книге [135, гл. 1 и заключение].

Обстоятельное обсуждение аксиом **ZFC** в целом и аксиомы выбора в частности в историческом плане и в плане собственно оснований математики и развития теории множеств на ее более ранних этапах читатель может найти у Френкеля и Бар-Хиллела [77], а в более компактном виде — у Ван Хао и Мак-Нотона [182]. Уже с позиций современной теории множеств эти вопросы в некоторой степени освещаются Коэном [73].

О роли аксиом **ZFC** как основы современной математики, см., например, в книгах [99], [118], [73], [124], [49], [77]. В частности, первые главы книги [49] содержат анализ аксиом с точки зрения общих математических представлений — куда мы и отсылаем заинтересованного читателя.

Глава 3

Универсум теории множеств

Здесь мы остановимся на некоторых элементах структуры теоретикомножественного универсума, важных для более продвинутых разделов дескриптивной теории множеств. Это иерархия фон Неймана, ординальная определимость, модели, абсолютность, «нестандартные» ω -модели с универсумом $\mathbb{N}$ и их стандартные множества. По необходимости наше изложение будет нести скорее справочный характер, чем характер настоящего введения. В принципе эта глава может быть пропущена при первом чтении, так как ее содержание практически не используется в четырех последующих главах книги.

§ 3.1 Теоретико-множественные структуры

С точки зрения теории моделей, теоретико-множественной *структурой*, или *моделью*, называется любая структура вида $\langle M; \varepsilon \rangle$, где ε — некоторое бинарное отношение на произвольном множестве или классе M , называемом *областью* структуры или модели $\langle M; \varepsilon \rangle$. Интерпретируя ε как «принадлежность» в $\langle M; \varepsilon \rangle$, — т. е. $x \varepsilon y$ означает, что « x принадлежит y » в $\langle M; \varepsilon \rangle$, — мы действительно можем понимать $\langle M; \varepsilon \rangle$ как модель какой-то теории множеств.

Ключевое понятие *истинности* формализуется в теории множеств двумя способами: через релятивизацию и через выполнимость.

Определение 3.1.1. Пусть $\langle M; \varepsilon \rangle$ — произвольная теоретико-множественная структура. Если φ — формула $\in$ -языка, то ее *релятивизация* $\varphi^{\langle M; \varepsilon \rangle}$ определяется как результат замены каждого квантора $\exists x$ или $\forall x$ в φ на $\exists x \in M$, $\forall x \in M$ соответственно, и замены всех вхождений $\in$ на ε . $\square$

Смысл формулы $\varphi^{\langle M; \varepsilon \rangle}$ понятен: она говорит, что *сама формула* φ *истинна в модели* $\langle M; \varepsilon \rangle$. Например, пусть φ есть $\forall x \exists y (x \in y)$. Рассмотрим множества $\mathbb{N}$ и $\{\emptyset\}$ в роли M , с отношениями $\in \upharpoonright \mathbb{N}$ и $\in \upharpoonright \{\emptyset\}$ обычной принадлежности, ограниченной указанными областями, в роли ε . Тогда $\varphi^{\langle \mathbb{N}; \in \rangle}$ есть формула $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} (x \in y)$, которая, очевидно, истинна (именно, поскольку $n \in (n+1)$ для всех n по определению), т. е. сама φ истинна в $\mathbb{N}$. Напротив, предложение $\varphi^{\langle \{\emptyset\}; \in \rangle}$ ложно — также по очевидным соображениям.

С другой стороны, если структура $\langle M; \varepsilon \rangle$ такова, что M — множество, а не собственный класс, то теория моделей определяет *отношение выполнимости* $\langle M; \varepsilon \rangle \models \varphi$ следующим образом.

Определение 3.1.2 (например, 3.8 в [48, с. 29]). Для начала, представим сами $\in$ -формулы в виде объектов теории множеств — т. е. множеств определенного вида, точнее, кортежей из логических символов и множеств, участвующих в формуле в роли параметров. Это представление, называемое «гёделизацией», происходит так.

Считаем, что $\in$ -язык имеет 7 общих символов, т. е. $\in, =, \neg, \wedge, \exists$ и пару скобок, а остальные логические связки, т. е. $\vee, \implies, \iff, \forall$, рассматриваются как выраженные через $\neg, \wedge, \exists$ хорошо известным способом. Сопоставим указанным символам числа $0, 1, \dots, 6$ (именно в этом порядке). Для определенности, разрешим брать свободные переменные только из списка $v_0, v_1, v_2, \dots$, и каждой v_i сопоставим число $7+2i$. Каждому конкретному числу $n \in \mathbb{N}$ сопоставим $7+2n+1$, а каждому множеству $x \notin \mathbb{N}$ — само x . После этого, каждая $\in$ -формула с параметрами из некоторого множества X становится кортежем

из $(X \cup \mathbb{N})^{<\omega}$, т. е. кортежем натуральных чисел и элементов множества X . Например, $\exists v_0 (v_0 \in x)$, где x — какое-то множество-параметр, $x \notin \mathbb{N}$, отождествляется с кортежем $\langle 4, 7, 5, 7, 0, x, 6 \rangle$. Положим

Form(X) = множество всех кортежей из $(X \cup \mathbb{N})^{<\omega}$, являющихся правильно построенными $\in$ -формулами с параметрами из X ,

ClForm(X) = множество всех замкнутых формул из **Form**(X).

Пусть $\langle M; \varepsilon \rangle$ — теоретико-множественная структура. Имеется единственное множество $F \subseteq \mathbf{ClForm}(M)$, для которого:

- (1) формула « $x \in y$ » или « $x = y$ » (где $x, y \in M$) принадлежит F , если и только если $x \varepsilon y$, соответственно, $x = y$;
- (2) формула « $\neg \psi$ » из **ClForm**(M) принадлежит F , если и только если $\psi \notin F$;
- (3) формула « $\psi \wedge \psi'$ » из **ClForm**(M) принадлежит F , если и только если одновременно $\psi \in F$ и $\psi' \in F$;
- (4) формула « $\exists v \psi(v)$ » из **ClForm**(M) принадлежит F , если и только если $\psi(x)$ принадлежит F для хотя бы одного $x \in M$.

Это множество F обозначается **Sat**(M, ε), а формулы $\varphi \in \mathbf{Sat}(M, \varepsilon)$ называются выполнимыми (satisfiable), или *истинными* в $\langle M; \varepsilon \rangle$.

Пишут $\langle M; \varepsilon \rangle \models \varphi$, когда $\varphi \in \mathbf{Sat}(M, \varepsilon)$. □

Здесь важно иметь в виду, что « $\langle M; \varepsilon \rangle \models \varphi$ » — это одна, довольно сложная, $\in$ -формула $\exists F (F = \mathbf{Sat}(M, \varepsilon) \wedge \varphi \in F)$, в которую сама формула φ , как кортеж логических символов и множеств-параметров, входит в роли переменной вместе с M и ε и может связываться квантором. В то же время, релятивизация $\varphi^{(M; \varepsilon)}$ получается простым изменением кванторов, и здесь область M может быть и собственным классом, но φ не может служить переменной и связываться квантором. Оба варианта связаны следующей теоремой.

Теорема 3.1.3 (см. раздел 1.3 в [71]). *Если $\langle M; \varepsilon \rangle$ — теоретико-множественная структура, где M — множество, а φ является замкнутой $\in$ -формулой с элементами из M в роли параметров, то $\varphi^{(M; \varepsilon)}$ равносильно $\langle M; \varepsilon \rangle \models \varphi$.* □

Общее соглашение 3.1.4. Фраза «формула φ истинна в модели $\langle M; \varepsilon \rangle$ » понимается ниже в смысле $\langle M; \varepsilon \rangle \models \varphi$, когда M — множество, и в смысле $\varphi^{(M; \varepsilon)}$, когда M — собственный класс или когда φ — одна конкретная формула. По теореме 3.1.3, эти варианты равносильны, если оба применимы. □

Вообще, *моделями* обычно называются такие теоретико-множественные структуры $\langle M; \varepsilon \rangle$, области M которых — множества. Такая модель называется *моделью теории T* , если каждая аксиома φ теории T истинна в $\langle M; \varepsilon \rangle$, т. е. $\langle M; \varepsilon \rangle \models \varphi$. По теореме Гёделя о неполноте, существование хотя бы одной модели теории **ZFC** в этом строгом смысле недоказуемо в **ZFC**. В то же время, существуют структуры вида $\langle M; \varepsilon \rangle$, удовлетворяющие всем аксиомам **ZFC**, но такие, что M — не множество а собственный класс. Простейший пример: $\langle \mathbb{V}; \in \rangle$, где $\mathbb{V}$ — универсум всех множеств. Такие структуры — это не модели в строгом смысле¹, поскольку их области не являются множествами. Поэтому к ним неприменима теорема Гёделя о неполноте. Однако они чрезвычайно полезны во многих приложениях: в частности, существование «модели» **ZFC**, даже в этом несобственном смысле, в которой истинно некоторое предложение Φ , означает, что Φ не противоречит аксиомам **ZFC**. К этому типу структур (т. е. собственных классов), в которых истинны все аксиомы **ZFC**, относится класс $\mathbb{L}$ всех конструктивных множеств (см. главу 8), его расширения вида $\mathbb{L}[x]$, класс **NOD** (см. ниже) и др.

§ 3.2 Стандартные модели или $\in$ -модели

Частный случай теоретико-множественных структур образуют стандартные модели, или $\in$ -модели.

Определение 3.2.1. $\in$ -моделью называется любая структура вида $\langle M; \in \rangle$, или, более педантично, $\langle M; \in \upharpoonright M \rangle$, где M — какое-то множество, а $\in \upharpoonright M$ — ограничение «настоящего» отношения принадлежности $\in$ на M . Если множество M транзитивно — а это, напомним, означает, что из $y \in x \in M$ следует и $y \in M$, — то и модель $\langle M; \in \rangle$ называется *транзитивной $\in$ -моделью*. $\square$

Следующая теорема (см., например, теоремы 15А и 15Б в [99]) предлагает простую процедуру, сводящую произвольные $\in$ -модели к транзитивным $\in$ -моделям. Множество X называется *экстенциональным*, если $\langle X; \in \rangle$ — модель аксиомы Экстенциональности, т. е. мы имеем $x = y$ всякий раз, когда $x, y \in X$ и $x \cap X = y \cap X$.

Теорема 3.2.2. Для любого множества M существует единственная функция ϕ_M (называемая *свёрткой Мостовского* для M),

¹ Хотя иногда, неформально, они всё же называются моделями, скажем, $\mathbb{L}$ — *конструктивная модель*. Более точное название для структур, чьи области являются собственными классами — *интерпретация*, см. [163, 4.7 и 9.5], в данном случае интерпретация теории **ZFC** в ней самой.

определенная на M и удовлетворяющая равенству

$$\phi_M(x) = \{\phi_M(y) : y \in x \cap M\}$$

для всех $x \in M$. Ее область значений $\mathfrak{M} = \text{ran } \phi_M$ — транзитивное множество. Если множество M к тому же экстенционально, то ϕ_M является биекцией и $\in$ -изоморфизмом на $\mathfrak{M}$, т. е. для всех $x, y \in M$ выполнена эквивалентность $x \in y \iff \phi_M(x) \in \phi_M(y)$.

Доказательство. Применим теорему 2.5.6. □

Общее соглашение 3.2.3. Работая с $\in$ -моделями, предложения типа « M — модель такой-то теории», или «такое-то утверждение истинно в M » следует понимать так, что речь идет об $\in$ -структуре $\langle M; \in \rangle$. Аналогично, $\text{Sat}(M) = \text{Sat}(M, \in \upharpoonright M)$, а записи φ^M и $M \models \varphi$ понимаются как $\varphi^{\langle M; \in \rangle}$ и $\langle M; \in \rangle \models \varphi$ соответственно (см. § 3.1). □

Определение 3.2.4. Пусть $M \subseteq N$ — транзитивные множества. Говорят, что M есть элементарная подмодель модели N , или, что эквивалентно, N есть элементарное расширение модели M , если любая $\in$ -формула φ с множествами из M в роли параметров истинна в $\langle M; \in \rangle$ если и только если она истинна в $\langle N; \in \rangle$, т. е., в терминах соглашений 3.1.4 и 3.2.1, что $(M \models \varphi) \iff (N \models \varphi)$, или, равносильно, $(\langle M; \in \rangle \models \varphi) \iff (\langle N; \in \rangle \models \varphi)$. □

Об этих понятиях теории моделей, см. подробнее гл. 2 книги [48].

В теории моделей известны теорема Лёвенгейма — Скулема, которая утверждает, что любая модель имеет счетную элементарную подмодель; см., например, теорема 4.2 гл. 2 книги [48], и родственный ей принцип отражения (теорема 16 в [99]). Для $\in$ -моделей эти утверждения принимают, соответственно, следующий вид:

Теорема 3.2.5. Для любого множества X , если $X' \subseteq X$ не более чем счетно, то найдется счетное множество Y такое, что $X' \subseteq Y \subseteq X$ и Y является элементарной подмоделью X относительно всех $\in$ -формул. □

Теорема 3.2.6. Пусть $\varphi(x)$ — любая формула. Если множество X' не более чем счетно, то найдется счетное множество Y такое, что $X' \subseteq Y$ и $\varphi(x) \iff \varphi^Y(x)$ для всех $x \in Y$. □

§ 3.3 Иерархия Фон Неймана и $\in$ -индукция

Иерархией фон Неймана, или кумулятивной иерархией множеств называется трансфинитная последовательность $\langle \mathbb{V}_\xi \rangle_{\xi \in \text{Ord}}$ множеств $\mathbb{V}_\xi$, определяемых индукцией по ξ согласно такой схеме:

- $\mathbb{V}_0 = \emptyset$,
- для любого ординала ξ : $\mathbb{V}_{\xi+1} = \mathcal{P}(\mathbb{V}_\xi) = \{x : x \subseteq \mathbb{V}_\xi\}$,
- а если ординал λ предельный, то $\mathbb{V}_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \mathbb{V}_\xi$.

Все множества $\mathbb{V}_\xi$ транзитивны, и соотношение $\mathbb{V}_\xi \subseteq \mathbb{V}_\eta$ выполняется при $\xi \leq \eta$. Кроме того, мы увидим ниже, что каждое множество x принадлежит хотя бы одному из множеств $\mathbb{V}_\xi$ (теорема 3.3.8).

Следующее понятие дает возможность определить ранг $\mathbf{rnk} x$ независимо от построения иерархии фон Неймана.

Определение 3.3.1. Наименьший ординал ξ такой, что $x \in \mathbb{V}_{\xi+1}$ или, что эквивалентно, $x \subseteq \mathbb{V}_\xi$, называется *рангом по фон Нейману*, или просто *рангом* множества x , и обозначается $\mathbf{rnk} x$. $\square$

С известной долей приближения, можно сказать, что $\mathbf{rnk} x$ есть наименьшая длина трансфинитного построения, путем собирания из элементов, множества x из пустого множества $\emptyset$.

Определение 3.3.2. Транзитивным замыканием множества X называется множество $\mathbf{TC}(X) = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \dots = \bigcup_{n < \omega} X_n$,² где $X_0 = X$ и $X_{n+1} = \bigcup X_n$ для всех $n < \omega$.³ $\square$

Следствие 3.3.3. Для любого X , множество $\mathbf{TC}(X)$ есть наименьшее транзитивное множество, для которого $X \subseteq \mathbf{TC}(X)$. $\square$

Замечание 3.3.4. Пусть x — произвольное множество, и $X = \mathbf{TC}(x) \cup \{x\}$ (наименьшее транзитивное множество, удовлетворяющее $x \in X$). Согласно аксиоме Регулярности, отношение $\in \restriction X = (\in) \cap (X \times X)$ (т. е. ограничение обычной принадлежности на X) фундировано, а потому, согласно теореме 2.5.3, имеется единственная функция $f : X \rightarrow \mathbf{Ord}$, удовлетворяющая $f(y) = \sup_{z \in y} (f(z) + 1)$ для всех $y \in X$. Полагаем $\mathbf{rnk} x = f(x)$. $\square$

Упражнение 3.3.5. Докажите, что ранг $\mathbf{rnk} x$ по 3.3.4 совпадает с рангом $\mathbf{rnk} x$ по 3.3.1, и удовлетворяет равенству $\mathbf{rnk} y = \sup_{z \in y} (\mathbf{rnk} z + 1)$ для всех y . $\square$

С помощью транзитивных замыканий мы докажем следующее усиление теоремы 2.4.4 (второе утверждение):

Теорема 3.3.6 (принцип Регулярности для классов). *Каждый непустой класс X содержит $\in$ -минимальный элемент, т. е. найдется множество $y \in X$, удовлетворяющее $y \cap X = \emptyset$.*

Если класс A , удовлетворяет условию: для каждого множества x , из $x \subseteq A$ следует $x \in A$, то A — класс всех множеств.

² Ср. с определением 2.5.1. Фактически, $\mathbf{TC}(X) = \mathbf{TC}_\in(X)$ и $\in^{-1}(x) = x$.

³ Область $n < \omega$ тождественна области $\mathbb{N}$ натуральных чисел, см. 2.4.11.

Доказательство. Оба утверждения переходят одно в другое через дополнительный класс, поэтому ограничимся выводом первого. Раз $X \neq \emptyset$, берем элемент $x \in X$. Тогда $T = \text{TC}(\{x\})$ — транзитивное множество, и $x \in T$, так что множество $Y = X \cap T$ непусто. По аксиоме Регулярности, найдется элемент $y \in Y$, для которого $y \cap Y = \emptyset$. Мы утверждаем, что выполнено и $y \cap X = \emptyset$. Пусть напротив, $z \in y \cap X$. Тогда $z \in y \in Y \subseteq T$, так что $z \in T$ по транзитивности T . Значит, $z \in X \cap T = Y$, т. е. $z \in y \cap Y$, противоречие. $\square$

На теореме 3.3.6 основан следующий общий вариант трансфинитных индуктивных доказательств и построений.

Принцип 3.3.7 ($\in$ -индукция, ср. с 2.4.5, 2.4.6). Пусть $P(\xi)$ — некоторое свойство множеств, и для всякого x имеет место следующее: если $P(y)$ верно для всех множеств $y \in x$, то $P(x)$ также верно. Тогда $P(x)$ верно для всех множеств x .

Обосновываются также и индуктивные построения, когда каждому множеству x сопоставляется множество S_x в зависимости не только от x но и от уже построенных множеств S_y , $y \in x$. $\square$

Теорема 3.3.8. $\bigcup_{\xi \in \text{Ord}} \mathbb{V}_\xi = \mathbb{V}$, т. е. каждое множество x принадлежит хотя бы одному из множеств $\mathbb{V}_\xi$.

Доказательство. Пусть напротив, класс $X = \mathbb{V} \setminus \bigcup_{\xi \in \text{Ord}} \mathbb{V}_\xi$ непуст. По теореме 3.3.6, найдется множество $x \in X$, для которого $x \cap X = \emptyset$, т. е. $x \subseteq \mathbb{V}' = \bigcup_{\xi \in \text{Ord}} \mathbb{V}_\xi$. Тогда для каждого $y \in x$ имеются ординалы ξ , для которых $y \in \mathbb{V}_\xi$; пусть ξ_y — наименьший из них. Рассмотрим ординал $\xi = \bigcup_{y \in x} \xi_y$. По построению $x \subseteq \mathbb{V}_\xi$, а потому $x \in \mathbb{V}_{\xi+1}$, что противоречит выбору x . $\square$

§ 3.4 Иерархия по мощности транзитивного замыкания

Понятие транзитивного замыкания позволяет организовать множества в иерархию, отличающуюся от иерархии фон Неймана и ставящую во главу угла просто мощность транзитивного замыкания данного множества.

Определение 3.4.1. Если κ — бесконечный кардинал, то

$$\mathbb{H}_\kappa = \{x : \text{card TC}(x) < \kappa\}$$

— совокупность всех множеств x , чьи транзитивные замыкания $\text{TC}(x)$ имеют мощность не выше κ . В частности,

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_\omega &= \mathbb{HF} = \{x : \text{TC}(x) - \text{конечное множество}\}, \\ \mathbb{H}_{\omega_1} &= \mathbb{HC} = \{x : \text{TC}(x) \text{ не более чем счетно}\}. \end{aligned}$$

Множества из HF называются *наследственно конечными*, а множества из HC — *наследственно счетными*.⁴ $\square$

Лемма 3.4.2. $\mathbb{H}_\omega = \mathbb{V}_\omega$.

Если κ — бесконечный регулярный кардинал то $\mathbb{H}_\kappa \subseteq \mathbb{V}_\kappa$. Отсюда, по аксиоме Выделения, $\mathbb{H}_\kappa$ — множество при любом κ .

Доказательство. Докажем, что всякое множество $x \in \mathbb{H}_\kappa$ принадлежит $\mathbb{V}_\kappa$ при помощи $\in$ -индукции (см. 3.3.7). Если $y \in x$ то по определению $\text{TC}(y) \subseteq \text{TC}(x)$, так что $\text{card TC}(y) \leq \text{card TC}(x) < \kappa$ и $y \in \mathbb{H}_\kappa$. Значит, по индуктивному предположению, $y \in \mathbb{V}_\kappa$. Но κ , как и любой бесконечный кардинал, является предельным ординалом. Поэтому $\mathbb{V}_\kappa = \bigcup_{\gamma < \kappa} \mathbb{V}_\gamma$. Значит, по доказанному, для каждого $y \in x$ имеется ординал $\gamma < \kappa$, для которого $y \in \mathbb{V}_\gamma$. Через $\gamma(y)$ обозначим наименьший такой ординал. Вследствие регулярности κ , множество $X = \{\gamma(y) : y \in x\}$ мощности $\text{card } X \leq \text{card } x < \kappa$ ограничено в κ , т. е. имеется ординал $\alpha < \kappa$, для которого $X \subseteq \alpha$. Но тогда $x \subseteq \mathbb{V}_\alpha$, а потому $x \in \mathbb{V}_{\alpha+1} \subseteq \mathbb{V}_\kappa$.

Далее, если $n < \omega$ то множество $\mathbb{V}_n$ конечно (по индукции, поскольку $\mathbb{V}_{n+1} = \mathcal{P}(\mathbb{V}_n)$), а также и транзитивно (как и все множества $\mathbb{V}_\xi$ вообще), так что $\mathbb{V}_n \in \mathbb{H}_\omega$. Отсюда очевидно $\mathbb{V}_\omega \subseteq \mathbb{H}_\omega$. $\square$

Упражнение 3.4.3. Если $x \in \text{HC}$, то и $\text{TC}(x) \in \text{HC}$. $\square$

Упражнение 3.4.4. Докажите по индукции, что если $n < \omega$ то $\mathbb{V}_n$ — конечное множество, содержащее, в частности, натуральные числа $0, 1, 2, \dots, n-1$. При этом если $\mathbb{V}_n$ содержит N элементов, то следующее множество $\mathbb{V}_{n+1}$ содержит уже 2^N элементов.

Докажите, что $\text{HF} = \mathbb{V}_\omega = \bigcup_{n < \omega} \mathbb{V}_n$ — счетное множество, содержащее все натуральные числа и все кортежи натуральных чисел. $\square$

§ 3.5 Ординальная определимость

Множество x можно назвать *определимым*, если найдется такая $\in$ -формула $\varphi(v)$, без параметров и с одной свободной переменной v , что x — единственное множество, удовлетворяющее $\varphi(x)$, т. е. $\forall v (\varphi(v) \iff x = v)$. Это понятие, однако, не может быть формально определено в ZFC, другими словами, нет такой одной $\in$ -формулы $\delta(x)$ которая выделяла бы сразу все определимые множества. (Мы не будем отвлекаться на объяснения почему это так.) В то же время, более широкое понятие ординально определимого множества (т. е.

⁴ HF от hereditarily finite, HC от hereditarily countable. «Наследственность» означает, что рассматриваемое свойство выполнено не только для самого множества x , но и для всех множеств из его транзитивного замыкания $\text{TC}(x)$.

определимого $\in$ -формулой с ординалами в качестве параметров) допускает такое определение.

Определение 3.5.1. Формула $\text{od } x$ говорит следующее:

$\text{od } x :=$ существует ординал α и формула $\varphi(v)$, с ординалами $\xi < \alpha$ в роли параметров и с одной свободной переменной v , такие что $x \in \mathbb{V}_\alpha$ — единственное множество, для которого $\mathbb{V}_\alpha \models \varphi(x)$.

$\text{OD} = \{x : \text{od } x\}$ — класс *ординально определимых* множеств. $\square$

Таким образом, каждое множество $x \in \text{OD}$ определимо $\in$ -формулой вида $\mathbb{V}_\alpha \models \varphi(x)$, параметрами которой являются ординалы $\leq \alpha$. Обратно, если множество x ординально определимо в любом разумном неформальном смысле то, используя принцип отражения 3.2.6, мы находим ординал α такой что определение релятивизируется к $\mathbb{V}_\alpha$, и тогда $x \in \text{OD}$.

Вообще, если P — произвольное множество или класс, то рассматривается класс $\text{OD}(P)$ всех множеств, которые определимы формулами, содержащими ординалы и элементы множества P в роли параметров. В частности, при $P = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, рассматривается класс

$$\mathbf{ROD} = \text{OD}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \{x : \text{rod } x\}$$

всех *вещественно-ординально определимых*⁵ множеств, т. е. тех, которые определимы формулами, содержащими ординалы и элементы бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в качестве параметров. Здесь $\text{rod } x$ является модификацией формулы $\text{od } x$, состоящей в том, что формула $\varphi(v)$, кроме ординалов, может содержать элементы множества $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в качестве параметров.

Понятно, что $\text{Ord} \subseteq \text{OD} \subseteq \mathbf{ROD}$ и $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{ROD}$.

Классы OD и $\mathbf{ROD}$ не обязательно транзитивны. Например, множество $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{x : x \subseteq \mathbb{N}\}$ принадлежит OD , однако с аксиомами **ZFC** совместимо предположение, что существуют множества натуральных чисел $x \subseteq \mathbb{N}$, $x \notin \text{OD}$, см. гл. 9. Чтобы ингибировать этот эффект, определяют

$$\begin{aligned} \text{HOD} &= \{x : x \in \text{OD} \wedge \text{TC}(x) \subseteq \text{OD}\}, \\ \mathbf{HROD} &= \{x : x \in \mathbf{ROD} \wedge \text{TC}(x) \subseteq \mathbf{ROD}\}, \end{aligned}$$

⁵ Перевод термина «real-ordinal definable», где первое слово отражает возможность брать точки $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в роли параметров определения, дополнительно к ординалам. Употребление слова «real» в роли имени существительного применительно к точкам $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ характерно для англоязычной литературы по теории множеств; оно основано на известном отождествлении точек $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ с иррациональными вещественными числами. К сожалению, приемлемого перевода слова «real» в этом его значении на русский математический язык, по-видимому, нет.

— *транзитивные классы наследственно* ординально определимых множеств и *наследственно* вещественно-ординально определимых множеств, т. е. таких, которые сами, все их элементы, элементы элементов, и т. д., ординально определимы, или, соответственно, вещественно-ординально определимы.

Теорема 3.5.2 (теорема 24 в [99]). *Класс HOD — транзитивная модель ZFC. Класс HOD — транзитивная модель теории ZF + DC, где не обязательно верна полная аксиома выбора AC.* $\square$

§ 3.6 Слабые теории и их модели

Поскольку гипотеза существования модели теории **ZFC** выходит за рамки **ZFC** по теореме Гёделя, довольно часто приходится для тех или иных целей использовать модели более слабых теорий.

Сюда относится, прежде всего, теория Цермело **ZC**, которая отличается от **ZFC** только тем, что не содержит (схем) аксиом Подстановки и Собирания — но содержит все прочие аксиомы, включая аксиомы Степени, Выделения, и Выбора. В то время как существование моделей теории **ZFC** недоказуемо, модели (и даже, более точно, $\in$ -модели) теории **ZC** существуют.

Упражнение 3.6.1. Докажите, что если $\alpha > \omega$ — предельный ординал, то множество V_α — модель теории **ZC**. К числу этих моделей относится и множество $V_{\omega+\omega}$ — *естественная модель ZC*. $\square$

С другой стороны, рассматривается теория **ZFC**[−], т. е. **ZFC** без аксиомы Степени. Естественной $\in$ -моделью теории **ZFC**[−] служит множество HC = H_{ω_1} всех наследственно счетных множеств. Множество HC содержит, в частности, все натуральные числа и их множества, все элементы и счетные подмножества пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, все счетные ординалы, а также все точки пространств типа $\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, однако, разумеется, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \notin \text{HC}$, да и $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \notin \text{HC}$, и поэтому аксиома степени ложна в HC.

Упражнение 3.6.2. Докажите, что любое множество вида H_κ , где $\kappa \geq \omega_1$ — регулярный кардинал, в частности, множество HC = H_{ω_1} , является моделью **ZFC**[−]. $\square$

Упражнение 3.6.3. Выведите, используя только аксиомы теории **ZFC**[−], что для любых множеств X, Y существуют:

- (1) декартово произведение $X \times Y$ (методом 2.2.1);
- (2) множество $X^{<\omega}$ всех конечных кортежей из элементов X ;

- (3) транзитивное замыкание $\text{TC}(X)$;
- (4) функция ранга $f : \text{TC}(X) \rightarrow \text{Ord}$, как в 3.3.4;
- (5) множества $\mathbf{CIFORM}(X)$ и $\mathbf{SAT}(X)$.

Проверьте, что основные теоремы об ординалах из §§ 2.4, 2.5, включая 2.4.4, 2.4.5, 2.4.6, 2.5.3, 2.5.6, верны в теории $\mathbf{ZFC}^-$. $\square$

Следствие 3.6.4 (из 3.2.5). *Если $X \subseteq \mathbf{HC}$ счетно, то $X \in \mathbf{HC}$, и найдется счетное транзитивное множество $Y \in \mathbf{HC}$, для которого $X \subseteq Y$ и Y есть $\in$ -модель теории $\mathbf{ZFC}^-$.* $\square$

В то же время, теория $\mathbf{ZFC}^-$ недостаточно сильна для доказательства существования множества $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ всех подмножеств натурального ряда $\mathbb{N}$, а также существование вещественной прямой $\mathbb{R}$ и тому подобных множеств. В связи с этим рассматривается более сильная теория $\mathbf{ZFC}_{\aleph_0}^-$, полученная добавлением к $\mathbf{ZFC}^-$ следующей аксиомы.

Счетная Степень: для каждого множества X существует множество $\mathcal{P}_{\text{ctbl}}(X)$ всех не более чем счетных множеств $Y \subseteq X$.

Теория $\mathbf{ZFC}_{\aleph_0}^-$ уже доказывает существование декартовых произведений вида X^Y (произведение Y копий множества X), где Y не более чем счетно, и таких «континуальных» множеств, как польские пространства $\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и им подобные, и даже существование множества $\mathbf{HC}$ всех наследственно счетных множеств. Теория $\mathbf{ZFC}_{\aleph_0}^-$ также позволяет адекватно работать с борелевскими множествами и топологиями польских пространств. Её естественной моделью является множество

$$\mathbb{H}_{c+} = \{x : \text{card TC}(x) \leq c\}$$

всех таких множеств x , что транзитивное замыкание $\text{TC}(x)$ имеет мощность не выше мощности континуума $c = 2^{\aleph_0}$.

Упражнение 3.6.5. Докажите, что множество $\mathbb{H}_{c+}$ транзитивно, и содержит такие множества, как $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ω_1 . Докажите, используя мощностное соотношение $c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$, что $\mathbb{H}_{c+}$ — модель всех аксиом теории $\mathbf{ZFC}_{\aleph_0}^-$. Докажите то же для $\mathbb{H}_{\kappa}$ при условии, что κ — кардинал конфинальности $\geq c$. $\square$

§ 3.7 Теория Крипке – Платека

Здесь рассматривается еще более слабый, чем теория $\mathbf{ZFC}^-$, вариант системы Цермело – Френкеля, определение которого включает существенное ограничение типа $\in$ -формул в схемах аксиом.

Определение 3.7.1. Формула является *ограниченной*, если все ее кванторы ограничены, т. е. имеют вид $\exists x \in y$ и $\forall x \in y$. $\square$

К ограниченным относятся, например, все *арифметические* формулы — т. е. такие, все кванторы которых имеют вид $\exists x \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Вообще, многие важные отношения между множествами выражаются ограниченными формулами. Приводится список эквивалентностей, где слева стоит отношение, а справа — выражающая его ограниченная формула:

$$x \subseteq y \iff \forall z \in x (z \in y);$$

$$z = \{x, y\} \iff x \in z \wedge y \in z \wedge \forall u \in z (u = x \vee u = y);$$

$$z = \langle x, y \rangle \iff \exists u, v \in z (z = \{u, v\} \wedge u = \{x, x\} \wedge v = \{x, y\});$$

$$x \in \in y \iff \exists u \in y (x \in u);$$

$$x \in \in \in y \iff \exists u \in y \exists v \in u (x \in v);$$

— поэтому, например, $\exists x \in \in y \varphi(x, y)$ означает $\exists u \in y \exists x \in u \varphi(x, y)$;

$$z \text{ — (упорядоченная) пара} \iff \exists x \in \in z \wedge \exists y \in \in z (z = \langle x, y \rangle);$$

$$R \text{ — бинарное отношение} \iff \forall x \in R (x \text{ — пара});$$

$$x \in \text{dom } R \iff \exists p \in R \exists y \in \in p (p = \langle x, y \rangle);$$

$$y \in \text{ran } R \iff \exists p \in R \exists x \in \in p (p = \langle x, y \rangle);$$

$$x = \bigcup y \iff \forall z \in y (z \in \in x) \wedge \forall z \in \in x (z \in y);$$

$$\begin{aligned} X = \text{dom } R &\iff \forall x \in X (x \in \text{dom } R) \wedge \\ &\quad \wedge \forall p \in R \exists x \in X \exists y \in \in p (p = \langle x, y \rangle); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = \text{ran } R &\iff \forall y \in Y (y \in \text{ran } R) \wedge \\ &\quad \wedge \forall p \in R \exists y \in Y \exists x \in \in p (p = \langle x, y \rangle); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \text{ — функция} &\iff f \text{ — бинарное отношение} \wedge \forall p, q \in f \\ &\quad \forall x, y \in \in p \forall x', y' \in \in q (x = x' \implies y = y'); \end{aligned}$$

$$f(x) = y \iff \exists p \in f (p = \langle x, y \rangle);$$

$$z \text{ транзитивно} \iff \forall y \in z \forall x \in y (x \in z);$$

$$\xi \text{ — ординал} \iff \xi \text{ транзитивно} \wedge \forall x \in \xi (x \text{ транзитивно}).$$

$$\begin{aligned} g = f \upharpoonright X &\iff g \subseteq f \wedge \forall p \in g \exists x \in X \exists y \in \in p (p = \langle x, y \rangle) \wedge \\ &\quad \wedge \forall p \in f (\exists x \in X \exists y \in \in p (p = \langle x, y \rangle) \implies p \in g). \end{aligned}$$

Упражнение 3.7.2. Выразите ограниченными формулами отношения $Z = X \times Y$ и $Z = \bigcup Y$. Докажите, что формула

f — функция $\wedge R$ — бинарное отношение $\wedge$

$$\wedge \text{dom } f = X \wedge \text{ran } f \subseteq \text{Ord} \wedge \text{dom } R \cup \text{ran } R \subseteq X \wedge$$

$$\wedge \forall x, y \in X (\langle x, y \rangle \in R \implies f(x) \in f(y)) \wedge$$

$$\wedge \forall y \in X \forall \xi \in f(y) \exists x \in X (\langle x, y \rangle \in R \wedge \neg f(x) \in \xi)$$

ограничена и определяет отношение « R — бинарное отношение на X , а f — функция ранга для R ». Для этого замените подформулу $\text{ran } f \subseteq \text{Ord}$ на $\forall p \in f \forall x, \xi \in p (p = \langle x, \xi \rangle \implies \xi \text{ — ординал})$, далее, импликацию $\langle x, y \rangle \in R \implies f(x) \in f(y)$ в третьей строке на

$$\forall p \in R \forall a, b \in f \forall \xi \in a \forall \eta \in b$$

$$(p = \langle x, y \rangle \wedge a = \langle x, \xi \rangle \wedge b = \langle y, \eta \rangle \implies \xi \in \eta),$$

и так же устройте дело с четвертой строкой. $\square$

Ограниченные формулы находят массу применений в современной теории множеств в связи, например, с абсолютностью (см. § 3.8).

Определение 3.7.3. Теория $\mathbf{ZFC}_{\text{огр}}^-$ включает:

- (i) все аксиомы $\mathbf{ZFC}^-$ кроме Выделения, Собирания, Подстановки,
- (ii) схемы Выделения и Собирания (а тогда и Подстановки — по той же причине, что и для всей теории $\mathbf{ZFC}$, см. § 2.2) — но только для ограниченных формул Φ ,
- (iii) аксиомы, утверждающие существование множеств, указанных в упражнении 3.6.3, т. е. множеств $X \times Y$, $X^{<\omega}$, $\text{TC}(X)$, $\mathbf{Sat}(X)$, $\mathbf{ClForm}(X)$, и функции ранга $f : \text{TC}(X) \rightarrow \text{Ord}$. $\square$

Эта теория — практически, клон теории Крипке – Платека (о последней см. на русском языке в книге [48, гл. 7]). Мы, однако, опускаем схему аксиом фундирования (как в [48, стр. 241]), поскольку все приложения в данной книге связаны с транзитивными моделями теории $\mathbf{ZFC}_{\text{огр}}^-$ (*допустимыми множествами*) — где эта схема, очевидно, верна, — а не с формальным выводом из аксиом $\mathbf{ZFC}_{\text{огр}}^-$. Также нами опущено всё, связанное с *атомами* (праэлементами). Что касается шести аксиом из (iii) — на самом деле они следуют из (i) + (ii). Но этот вывод довольно сложен, поскольку, в отличие от $\mathbf{ZFC}$ и даже от $\mathbf{ZFC}^-$, здесь на каждом шаге применения схем Выделения, Собирания, Подстановки приходится проверять возможность записи тех или иных соотношений посредством ограниченных

формул, что, при отсутствии естественной интуиции работы с такими формулами, приводит к формулам еще более длинным, чем та, которая встречается, например, в упражнении 3.7.2. Поэтому мы предпочитаем сразу добавить эти утверждения в роли аксиом.

Упражнение 3.7.4. Докажите в $\mathbf{ZFC}_{\text{огр}}^-$, что если множество E состоит из упорядоченных пар, то $\text{dom } E$ и $\text{ran } E$ — множества. Воспользуйтесь тем, что $\text{dom } E \cup \text{ran } E \subseteq \bigcup \bigcup E$ по определению пары, и тем, что формулы $x \in \text{dom } E$ и $y \in \text{ran } E$ ограничены. $\square$

Однако трансфинитные индуктивные рассуждения уже не обязательно проходят в $\mathbf{ZFC}_{\text{огр}}^-$. Примером может служить доказательство теоремы 2.5.3 в части существования функции ранга, поскольку формула, определяющая ключевое множество D в этом доказательстве, не является ограниченной. То же относится и к теореме 2.5.6. Всё же эти результаты удастся сохранить, когда фундированность задана как бы извне.

Предложение 3.7.5. Пусть M — транзитивная модель теории $\mathbf{ZFC}_{\text{огр}}^-$. Тогда

- (i) если $X \in M$, и $R \in M$ — фундированное отношение на X , то соответствующая функция ранга $y \mapsto |y|_R$ из X в Ord (см. теорему 2.5.3) также принадлежит M , а потому и ординал $|R| = \sup_{x \in X} (|x|_R + 1)$ (полный ранг R) принадлежит M ;
- (ii) если дополнительно R — экстенциональное отношение на X , то соответствующая ему функция коллапса ϕ_R (см. теорему 2.5.6) также принадлежит M , а потому и транзитивное множество $\text{ran } \phi_R$ (область всех значений ϕ_R) принадлежит M ;
- (iii) если $\leq_X \in M$ — полное упорядочение множества $X \in M$, то ординал $\xi = \text{otp} \langle X; \leq_X \rangle$ и соответствующий порядковый изоморфизм из X на ξ также принадлежит M .

Доказательство. (i) Прежде всего, на базе формулы из 3.7.2 можно составить такую ограниченную $\in$ -формулу $\Phi(X, R, f, w)$, которая выражает следующее соотношение:

- (*) R — бинарное отношение на X , f — функция, $\text{dom } f \subseteq X$ является R -транзитивным множеством, $\text{ran } R \subseteq \text{Ord}$, $w \in \text{dom } f$, и f удовлетворяет условию (1) в 2.5.1 для всех $x \in \text{dom } f$,

— говорящее, что $w \in \text{dom } f$ и $f \in F$ в обозначениях доказательства теоремы 2.5.3. В этом рассуждении, множество Z задается, очевидно, ограниченной формулой, так что оно принадлежит M , и эта часть доказательства проходит без затруднений.

Напротив, множества Y и D определяются формулами с неограниченным квантором по f , так что они формально не являются множествами в $\mathbf{ZFC}_{\text{огр}}^-$ и не обязательно принадлежат M . Однако выбор элемента $y \in D$ можно провести на основании фундированности R в универсуме (и транзитивности модели M), а не в рамках аксиом $\mathbf{ZFC}_{\text{огр}}^-$ — т. е. обходя проблему существования D как множества в модели M . После этого, множество $X' = R^{-1}(y)$ принадлежит M по ограниченному Выделению, а затем ограниченная Подстановка с определенной выше формулой Φ приносит отображение $(x \mapsto f_x) \in M$, определенное на X' , откуда уже без проблем получается противоречие, как в доказательстве теоремы 2.5.3.

То же самое для (ii). Утверждение (iii) следует из (i). $\square$

§ 3.8 Абсолютность

Необходимость в понятии абсолютности возникает сразу, как только мы узнаем, что универсум $\mathbb{V}$ всех множеств имеет подклассы, например, классы **OD** и **ROD**, которые сами удовлетворяют аксиомам **ZFC** и поэтому могут рассматриваться как полноценные теоретико-множественные универсумы.

Предположим, что M — транзитивное множество или класс, который удовлетворяет аксиомам теории **ZFC** (или хотя бы значительной части **ZFC**, скажем, $\mathbf{ZFC}^-$). Пусть Φ — замкнутая формула с параметрами из M . Тогда можно ставить вопрос об истинности или ложности Φ не только в универсуме $\mathbb{V}$, но и в M . Если формула Φ одновременно истинна или одновременно ложна в M и в универсуме $\mathbb{V}$ всех множеств, то говорят что Φ *абсолютна для M* .

В сущности, мы уже встречались с понятием абсолютности в простой ситуации элементарных подмоделей. В некоторых других случаях абсолютность очевидна из-за простоты рассматриваемых формул: например, если M содержит множества x, y, z то формула $x = \{y, z\}$ абсолютна для M . Такие результаты часто могут быть получены на основе следующей достаточно очевидной леммы.

Лемма 3.8.1. *Пусть M — транзитивное множество или класс, в котором истинны все аксиомы $\mathbf{ZFC}_{\text{огр}}^-$. Тогда все замкнутые ограниченные формулы с параметрами из M абсолютны для M .*

В частности, формула $\text{ord}(\xi) := \xi$ — ординал абсолютна для M , а потому множество или класс всех M -ординалов

$$\text{Ord}^M = \{\xi \in M : \text{в } M \text{ истинно: } \xi \text{ — ординал}\}$$

совпадает с $\text{Ord} \cap M$ и является начальным сегментом в Ord .

Сверх того, если $N \in M$, а φ — замкнутая $\in$ -формула с параметрами из N , то предложение « $N \models \varphi$ » абсолютно для M .

Доказательство. Можно рассуждать, например, индукцией по построению формулы из подформул. При этом ключевой шаг — кванторный — проходит в силу того, что из-за транзитивности M всякий элемент множества $X \in M$ также принадлежит модели M .

В отношении второй части, имеем $\mathbf{Sat}(N) \in M$ по определению $\mathbf{ZFC}_{\text{огр}}^-$, т. е. существует множество $F \in M$, для которого в M истинно: $F = \mathbf{Sat}(N)$. Теперь достаточно проверить, что равенство $F = \mathbf{Sat}(N)$ выполнено и в универсуме всех множеств. Один способ такой проверки состоит в том, чтобы выразить равенство $F = \mathbf{Sat}(N)$ ограниченной формулой — это крайне длинно и нудно, однако. Второй способ состоит в доказательстве того, что определенное выше множество $F = \langle \mathbf{Sat}(N) \rangle$ внутри M совпадает с «настоящим» множеством $G = \mathbf{Sat}(N)$ универсуме всех множеств. Для этого доказывается, индукцией по построению формулы $\varphi \in \mathbf{ClForm}(N)$, что $\varphi \in F$, если и только если $\varphi \in G$. Мы оставляем это читателю. $\square$

Следующий результат об абсолютности свойства *фундированности* несколько менее тривиален. Он используется в доказательстве важных теорем абсолютности Мостовского и Шенфилда (см. ниже §5.9). Теорема 3.8.2 уже не верна для моделей более слабой теории $\mathbf{ZFC}_{\text{огр}}^-$ по тем же причинам, которые указаны выше для 3.7.5.

Теорема 3.8.2 (ср. [99], лемма 35). Пусть M — транзитивное множество или класс, в котором истинны все аксиомы $\mathbf{ZFC}^-$, и множество X с бинарным отношением E на X принадлежат M .

Тогда формула $\mathbf{wf}(X, E)$, говорящая, что E — фундированное отношение на X (в смысле определения 1.5.2), абсолютна для M .

Доказательство. Допустим, что предложение $\mathbf{wf}(X, E)$ ложно в M . Это означает, что существует непустое множество $Y \in M$, $Y \subseteq X$, не имеющее E -минимального элемента. Однако свойство «не иметь E -минимального элемента» абсолютно по лемме 3.8.1.

Пусть теперь $\mathbf{wf}(X, E)$ истинно в M . Согласно теореме 2.5.3 (которая верна и для $\mathbf{ZFC}^-$), в M существует функция ранга ρ для E . Но свойство быть функцией ранга выражается ограниченной, а потому абсолютной формулой (упражнение 3.7.2 и лемма 3.8.1). $\square$

§3.9 Модели, не являющиеся $\in$ -моделями

Нам придется рассматривать и такие теоретико-множественные структуры, которые не являются $\in$ -моделями в смысле §3.2, а среди

них — модели со счетной областью $\mathbb{N}$, т. е. структуры вида $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, где $\varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2$, т. е. ε — бинарное отношение на множестве натуральных чисел. На них распространяются все обозначения и соглашения § 3.1.

Выделяется особая категория таких моделей:

Определение 3.9.1. $\mathbf{E}_0 = \{\varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2 : \langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle \text{ — модель } \mathbf{ZFC}^-\}$.

Пусть $\varepsilon \in \mathbf{E}_0$. Модель $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ *фундирована*, если отношение ε фундировано, т. е. любое непустое множество $Y \subseteq \mathbb{N}$ содержит такой элемент $y \in Y$, что $x \not\varepsilon y$ для всех $x \in Y$. В этом случае определен ранг $|\varepsilon| \in \mathbf{Ord}$, см. § 2.5, причем $|\varepsilon| < \omega_1$ из-за счетности области. $\square$

Лемма 3.9.2. Пусть $\varepsilon \in \mathbf{E}_0$. Тогда отношение ε экстенционально в смысле определения 2.5.4. Кроме того, если ряд ординалов

$$\mathbf{Ord}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{N} : \text{в } \langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle \text{ истинно «} x \text{ — ординал»}\},$$

модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ вполне упорядочен отношением ε , то $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ фундирована, и ее ранг $|\varepsilon|$ равен порядковому типу $\mathbf{Ord}^\varepsilon$ в смысле ε .

Доказательство. Теория $\mathbf{ZFC}^-$ достаточно сильна, чтобы обосновать то определение ранга $\mathbf{rnk} x$ по фон Нейману, которое приведено в 3.3.4, а также доказать равенство упражнения 3.3.5. Таким образом, внутренняя функция ранга $f = \mathbf{rnk}^\varepsilon : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Ord}^\varepsilon$ модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ удовлетворяет соотношению $x \varepsilon y \implies f(x) \varepsilon f(y)$. Поэтому, раз ряд ординалов $\mathbf{Ord}^\varepsilon$ вполне упорядочен, нетрудно вывести фундированность отношения ε и равенство ранга порядковому типу. $\square$

Определение 3.9.3. Пусть $\varepsilon \in \mathbf{E}_0$. По определению, $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ — модель теории $\mathbf{ZFC}^-$. Поэтому можно определить следующее:

$(\mathbb{N})^\varepsilon$ — тот единственный элемент $x \in \mathbb{N}$, для которого в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ истинно: « x — множество натуральных чисел»;

$$\varepsilon^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{N} : y \varepsilon x\} \text{ — все } \varepsilon\text{-элементы данного } x \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Рассматривается следующий тип моделей, характеризующихся тем свойством, что их натуральный ряд может быть отождествлен с обычным множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Определение 3.9.4. Модель $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ теории $\mathbf{ZFC}^-$ называется ω -моделью, если ее натуральный ряд, т. е. множество

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^\varepsilon &= \varepsilon^{-1}((\mathbb{N})^\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : n \varepsilon (\mathbb{N})^\varepsilon\} = \\ &= \{n \in \mathbb{N} : \text{в } \langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle \text{ истинно «} n \text{ — натуральное число»}\} \end{aligned}$$

с порядком ε , подобно самому множеству $\mathbb{N}$ с обычным порядком.

Положим $\mathbf{E} = \{\varepsilon \in \mathbf{E}_0 : \langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle \text{ есть } \omega\text{-модель теории } \mathbf{ZFC}^-\}$. $\square$

§ 3.10 Фундированные ядра моделей

Даже ω -модели не обязательно фундированы, но каждая из них имеет некоторую фундированную часть! Рассмотрим произвольное отношение $\varepsilon \in \mathbf{E}$. Напомним (см. 2.5.1): если $x \in \mathbb{N}$, то

$$\mathrm{TC}_\varepsilon(x) = Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2 \cup \dots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n,$$

где $Y_0 = \varepsilon^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{N} : y \varepsilon x\}$ и $Y_{n+1} = \bigcup_{y \in Y_n} \varepsilon^{-1}(y)$, $\forall n$.

Определение 3.10.1. Пусть $\varepsilon \in \mathbf{E}$. Элемент $x \in \mathbb{N}$ называется ε -*фундированным*, если отношение $\varepsilon \upharpoonright \mathrm{TC}_\varepsilon(x)$ фундировано, т. е. любое множество $\emptyset \neq X \subseteq \mathrm{TC}_\varepsilon(x)$ содержит такой элемент $y \in X$, что $z \notin y$ для всех $z \in X$. Мы определяем множества

$\mathrm{WF}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ } \varepsilon\text{-фундировано}\}$ — *фундированное ядро* $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, и

$\mathrm{WFOrd}^\varepsilon = \mathrm{Ord}^\varepsilon \cap \mathrm{WF}_\varepsilon$ — все фундированные $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ -ординалы. $\square$

Упражнение 3.10.2. Докажите следующее: если $\varepsilon \in \mathbf{E}$, то выполнено $(\mathbb{N})^\varepsilon \in \mathrm{WF}_\varepsilon$. $\square$

Исследуем положение фундированной подмодели $\langle \mathrm{WF}_\varepsilon; \varepsilon \rangle$, т. е., более пунктуально, $\langle \mathrm{WF}_\varepsilon; \varepsilon \upharpoonright \mathrm{WF}_\varepsilon \rangle$, в модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$.

Лемма 3.10.3. Допустим, что $\varepsilon \in \mathbf{E}$. Тогда

- (i) если $x \in \mathbb{N}$, то $x \in \mathrm{WF}_\varepsilon \iff \varepsilon^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{N} : y \varepsilon x\} \subseteq \mathrm{WF}_\varepsilon$ — т. е. в частности фундированное ядро WF_ε транзитивно в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$;
- (ii) если $f \in \mathbb{N}$, в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ истинно: « f — функция», и если $x, y \in \mathbb{N}$ и в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ истинно « $f(x) = y$ » то $x, y \in \mathrm{WF}_\varepsilon$ — то тогда $f \in \mathrm{WF}_\varepsilon$;
- (iii) $\langle \mathrm{WF}_\varepsilon; \varepsilon \rangle$ — элементарная подмодель самой модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ относительно ограниченных формул;
- (iv) имеется единственное транзитивное множество $\mathfrak{M}_\varepsilon$ — называемое **стандартным множеством** модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ — и единственная биекция $\phi_\varepsilon : \mathrm{WF}_\varepsilon \xrightarrow{\mathrm{на}} \mathfrak{M}_\varepsilon$, удовлетворяющие эквивалентности $x \varepsilon y \iff \phi_\varepsilon(x) \in \phi_\varepsilon(y)$ для всех $x, y \in \mathrm{WF}_\varepsilon$;
- (v) множество $\mathrm{WFOrd}^\varepsilon$ вполне упорядочено отношением ε , является начальным сегментом Ord^ε в смысле ε , содержит $(\mathbb{N})^\varepsilon$, и замкнуто относительно сложения ординалов внутри модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$;
- (vi) если $x \in \mathbb{N}$ то $x \in \mathrm{WF}_\varepsilon \iff \mathrm{rnk}^\varepsilon(x) \in \mathrm{WFOrd}^\varepsilon$.

В (vi) через $\text{rnk}^\varepsilon(x)$ обозначен ранг фон Неймана множества x , определенный внутри модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, см. доказательство леммы 3.9.2.

Доказательство. Проверка утверждения (i) оставляется как несложное **упражнение** для читателя. Утверждение (ii) — простое следствие (i), а утверждение (iii) легко следует из (i) и леммы 3.8.1.

(iv) Мы утверждаем, что отношение $\varepsilon \upharpoonright \text{WF}_\varepsilon$ фундировано — если это доказано, то результат дается теоремой 2.5.6. Рассмотрим непустое множество $X \subseteq \text{WF}_\varepsilon$, и пусть $x \in X$. Если $X \cap \text{TC}_\varepsilon(x) = \emptyset$, то x — искомый ε -минимальный элемент множества X . Если же $X' = X \cap \text{TC}_\varepsilon(x) \neq \emptyset$, то существование такого элемента вытекает из фундированности x .

(v) Отношение $\varepsilon \upharpoonright \text{WFOrd}^\varepsilon$ фундировано по (iv). Далее, имеем $(\mathbb{N})^\varepsilon \in \text{WFOrd}^\varepsilon$ согласно результату 3.10.2. Для вывода замкнутости множества WFOrd^ε относительно суммы, пусть $\xi, \eta \in \text{WFOrd}^\varepsilon$, и пусть $\gamma = \xi + \eta$ в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$. Множества $\varepsilon^{-1}(\xi)$ (все ε -элементы ξ) и $\varepsilon^{-1}(\eta)$ фундированы, значит, вполне упорядочены отношением ε . Отсюда очевидна и вполне упорядоченность, значит, фундированность и множества $\varepsilon^{-1}(\gamma)$ — так как оно состоит из множества $\varepsilon^{-1}(\xi)$, за которым следует копия множества $\varepsilon^{-1}(\eta)$.

Результат (v) позволяет вывести (vi) «внешней» трансфинитной индукцией по $\text{rnk}^\varepsilon(x)$. Если $\text{rnk}^\varepsilon(x) = \xi \in \text{WFOrd}^\varepsilon$ и $y \varepsilon x$, то $\text{rnk}^\varepsilon(y) \varepsilon \xi$, т. е. $y \in \text{WF}_\varepsilon$ по индуктивному предположению, так что $x \in \text{WF}_\varepsilon$ согласно (i). Обратная импликация выводится из фундированности $\varepsilon \upharpoonright \text{TC}_\varepsilon(x)$. $\square$

§ 3.11 Стандартные множества моделей

Природа множеств $\mathfrak{M}_\varepsilon$, где $\varepsilon \in \mathbf{E}$, достаточно сложна. Грубая оценка дается следующей леммой.

Теорема 3.11.1. *Пусть $\varepsilon \in \mathbf{E}$ произвольно. Тогда ограниченная структура $\langle \text{WF}_\varepsilon; \varepsilon \rangle$, а следовательно, в силу изоморфизма, и множество $\mathfrak{M}_\varepsilon$, являются моделями теории $\mathbf{ZFC}_{\text{огр}}^-$.*

Доказательство. По лемме 3.10.3(iii), ограниченные формулы абсолютны между $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ и WF_ε . Поэтому Выделение для ограниченных формул в $\langle \text{WF}_\varepsilon; \varepsilon \rangle$ следует из Выделения в самой модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$.

Проверим Собираание для ограниченной формулы $\Phi(x, y)$ и множества $X \in \text{WF}_\varepsilon$ в $\langle \text{WF}_\varepsilon; \varepsilon \rangle$. Таким образом, предполагается, что

$$\forall x \varepsilon X \exists y \in \text{WF}_\varepsilon \text{ (в } \langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle \text{ истинно } \Phi(x, y)) \quad (1)$$

(из-за упомянутой абсолютности). Рассмотрим другую формулу,

$$\Phi'(x, y) := \Phi(x, y) \wedge \forall y' (\text{rnk}(y') < \text{rnk}(y) \implies \neg \Phi(x, y')),$$

— требующую, что y — множество наименьшего возможного ранга по фон Нейману из удовлетворяющих формуле $\Phi(x, y)$. Из соотношения (1) и леммы 3.10.3(vi) следует:

(*) « $\forall x \in X \exists y \Phi'(x, y)$ » истинно в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, причем для всех $x, y \in \mathbb{N}$, если $x \in X$ и $\Phi'(x, y)$ в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, то $y \in \text{WF}_\varepsilon$ и выполнено $\Phi(x, y)$.

Согласно Собираению в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, найдется элемент $Y \in \mathbb{N}$, удовлетворяющий « $\forall X \in X \exists y \in Y \Phi'(x, f(x))$ » в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, и далее, Выделение приносит элемент $Y' \in \mathbb{N}$, для которого « $Y' = \{y \in Y : \exists x \in X \Phi'(x, f(x))\}$ » в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$. При этом из (*) следует, что если $y \in \mathbb{N}$ и $y \in Y'$, то $y \in \text{WF}_\varepsilon$ — а значит и $Y' \in \text{WF}_\varepsilon$ по лемме 3.10.3(i), завершая доказательство.

Что до остальных аксиом $\mathbf{ZFC}_{\text{огр}}^-$ (т. е. пункты (i) и (ii) определения 3.7.3), то каждая из них выражает существование множества, ранг которого не превосходит $\rho + \omega$, где ρ — ранг некоторого данного множества. Например, $\text{rnk}(X^{<\omega}) \leq \text{rnk } X + \omega$. Поэтому, внутри $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, если $X \in \text{WF}_\varepsilon$, то и $X^{<\omega} \in \text{WF}_\varepsilon$ согласно (v) и (vi) леммы 3.10.3. Отдельно, аксиома бесконечности выполнена в $\langle \text{WF}_\varepsilon; \varepsilon \rangle$, так как $(\mathbb{N})^\varepsilon \in \text{WF}_\varepsilon$ согласно 3.10.2 — в конечном счете, это следует из того, что $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ является ω -моделью. $\square$

Если $\varepsilon \in \mathbf{E}$, то по теореме 3.11.1 стандартное множество $\mathfrak{M}_\varepsilon$ модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ — достаточно богатая (хотя и счетная) структура, заведомо содержащая $\mathbb{N}$, все натуральные числа, все кортежи из $\mathbb{N}^{<\omega}$ и само множество $\mathbb{N}^{<\omega}$, а также и другие множества — уже в зависимости от выбора ε .

Определение 3.11.2. Множество x представлено в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, если $x \in \mathfrak{M}_\varepsilon$. В этом случае пусть $(x)^\varepsilon = \phi_\varepsilon^{-1}(x) \in \text{WF}_\varepsilon$. По предыдущему, этим определены, в частности, такие элементы, как $(\mathbb{N}^{<\omega})^\varepsilon \in \text{WF}_\varepsilon$ и $(\mathbb{N})^\varepsilon \in \text{WF}_\varepsilon$, а также:

элемент $(n)^\varepsilon \in \text{WF}_\varepsilon$ — для каждого $n \in \mathbb{N}$;

элемент $(s)^\varepsilon \in \text{WF}_\varepsilon$ — для каждого кортежа $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. $\square$

При этом истинность ограниченных формул во всех трех моделях $\mathfrak{M}_\varepsilon$, $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, $\langle \text{WF}_\varepsilon; \varepsilon \rangle$ связывается следующим утверждением.

Лемма 3.11.3. Пусть $\varepsilon \in \mathbf{E}$, φ — замкнутая ограниченная формула с параметрами из $\mathfrak{M}_\varepsilon$, а $\bar{\varphi}$ получается из φ заменой каждого параметра $x \in \mathfrak{M}_\varepsilon$ на $(x)^\varepsilon \in \text{WF}_\varepsilon$. Тогда

$$\varphi \iff (\mathfrak{M}_\varepsilon \models \varphi) \iff (\langle \text{WF}_\varepsilon; \varepsilon \rangle \models \bar{\varphi}) \iff (\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle \models \bar{\varphi}).$$

Тем самым, в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ истинно следующее:

- (i) « $(\mathbb{N})^\varepsilon$ — множество всех натуральных чисел»;
- (ii) « $(\mathbb{N}^{<\omega})^\varepsilon$ — множество всех кортежей натуральных чисел».

Отсюда, в частности, следует, что определение элемента $(\mathbb{N})^\varepsilon$ по 3.11.2 на самом деле равносильно определению $(\mathbb{N})^\varepsilon$, данному в § 3.9.

Доказательство. Эквивалентности в порядке слева направо следуют из: леммы 3.8.1, изоморфности моделей $\langle \mathbf{WF}_\varepsilon; \varepsilon \rangle$ и $\langle \mathfrak{M}_\varepsilon; \in \rangle$ посредством ϕ_ε , и леммы 3.10.3(iii). Что до второй части, отношение « x — множество всех натуральных чисел» выражается ограниченной формулой

$$\langle x \text{ — ординал и } \forall \xi \in x \exists \eta \in \xi (\xi = \eta \cup \{\eta\}) \rangle. \quad \square$$

Таким образом, натуральные числа и их кортежи представлены в любой ω -модели. Множества «континуального» типа, такие, как множества $X \subseteq \mathbb{N}$, или $\subseteq \mathbb{N}^2$, или $\subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, или точки из $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, не могут все быть представлены в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ из-за счетности стандартного множества модели. Те же, которые представлены, допускают следующее простое описание.

Упражнение 3.11.4. Пусть $\varepsilon \in \mathbf{E}$. Докажите, что

- (1) точка $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_\varepsilon$, если и только если найдется такой элемент $\bar{x} \in \mathbf{WF}_\varepsilon$, что в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ истинно:

$$\langle \bar{x} \text{ — функция из } (\mathbb{N})^\varepsilon \text{ в } (\mathbb{N})^\varepsilon \text{ и } \bar{x}((n)^\varepsilon) = (m)^\varepsilon \rangle$$

всякий раз когда $x(n) = m$ — и тогда этот представляющий элемент $\bar{x}$ удовлетворяет равенству $\bar{x} = (x)^\varepsilon = \phi_\varepsilon^{-1}(x)$;

- (2) множество $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ принадлежит $\mathfrak{M}_\varepsilon$, если и только если если найдется такой элемент $\tau \in \mathbb{N}$ что множество $\varepsilon^{-1}(\tau)$ всех ε -элементов τ тождественно множеству $\{(s)^\varepsilon : s \in T\}$ — и тогда представляющий элемент τ удовлетворяет равенству $\tau = (T)^\varepsilon = \phi_\varepsilon^{-1}(T)$;
- (3) то же самое для множеств $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{N}^2$, и т. п. □

Здесь любопытно еще вот что. Если $\varepsilon \in \mathbf{E}$, и $R \in \mathfrak{M}_\varepsilon$ — фундированное отношение на множестве $X \in \mathfrak{M}_\varepsilon$, то соответствующая функция ранга принадлежит $\mathfrak{M}_\varepsilon$ (предложение 3.7.5 выше), а потому, вследствие изоморфизма, и в модели $\langle \mathbf{WF}_\varepsilon; \varepsilon \rangle$ будет истинно предложение «отношение $(R)^\varepsilon$ на $(X)^\varepsilon$ имеет функцию ранга», и это же будет истинно и в самой модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ по абсолютности леммы 3.10.3(iii) согласно результату упражнения 3.7.2 — так что в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$

истинно, что «отношение $(R)^\varepsilon$ фундировано». Однако если $R \in \mathfrak{M}_\varepsilon$ на самом деле **не** фундировано, то может случиться так, что ни одно из множеств $Y \subseteq X$, опровергающих фундированность этого отношения, не представлено в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, а потому, несколько парадоксально, $(R)^\varepsilon$ может оказаться фундированным в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$!

Исторические и библиографические замечания

Идея кумулятивной иерархии восходит к Мириманову [146]; но окончательное оформление в связи с аксиомой Регулярности и рангами множеств, было получено фон Нейманом [180].

Понятие ординальной определимости, основанное на идее Гёделя, было технически реализовано Майхиллом и Скоттом [151]. Имеется более простое определение класса OD, как замыкание класса $\{\forall_\xi : \xi \in \text{Ord}\}$ всех уровней иерархии фон Неймана относительно гёделевых операций из §8.1, но оно опирается на аппарат теории конструктивных множеств. См. об этом и о других деталях, связанных с ординальной определимостью, на русском языке в [99, разд. 14].

Теоремы 3.2.2 и 3.8.2 доказаны Мостовским [149, 150].

Модели теории множеств и других теорий изучает *теория моделей*, о которой см. книгу Кейслера и Чэна [71], а также [48].

Систематическое изучение нефундированных теоретико-множественных моделей и их фундированных ядер (стандартных частей) и стандартных множеств было начато Фридманом в [79]. Более поздние результаты см. в статье [139] или в статье Сморыньского в книге [86]. Ссылок на русском языке мы не нашли.

Глава 4

Дескриптивная теория множеств

Этому разделу современной теории множеств посвящена наша монография [19], где основания дескриптивной теории множеств изложены с достаточной полнотой. Однако мы сочли необходимым вкратце изложить здесь некоторые основные определения и конструкции дескриптивной теории множеств. Это сделано как из соображений удобства для читателя, так и для того, чтобы акцентировать определенные технические детали, связанные с истинностью аналитических формул в разных теоретико-множественных универсумах, о чем не было нужды рассказывать в [19].

Мы также добавили важный материал о преобразовании Σ_1^0 -формул через замену каждой переменной a типа $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ подходящим ограничением вида $a \upharpoonright t$ в § 4.10, для которого также не было нужды в книге [19].

Как это обычно делается в книгах по современной дескриптивной теории множеств, мы излагаем определения и результаты классической дескриптивной теории множеств параллельно с определениями и результатами эффективной дескриптивной теории множеств, так что первые в большинстве случаев вытекают из вторых. В отношении результатов и методов именно эффективной дескриптивной теории, мы следуем стилю, выбранному в книге [19], который практически не требует предварительного знакомства читателя с определениями и методами теории рекурсии.

§ 4.1 Польские пространства

Выйдя в начале XX века из теории функций, дескриптивная теория множеств долгое время развивалась, в основном, как теория точечных множеств вещественной прямой $\mathbb{R}$ и пространств $\mathbb{R}^n$. К середине 20-х годов выяснилось, что основные результаты в этой области могут быть обобщены на все несчетные *польские* (т. е. полные сепарабельные метрические) пространства. Систематическое изложение для польских пространств общего вида было впервые дано Хаусдорфом [54]. Несколько позже Куратовский доказал следующую теорему 4.1.1, которая делает дескриптивную теорию множеств вообще мало зависящей от выбора несчетного польского пространства.

Напомним несколько определений в связи с борелевскими множествами. *Борелевские множества* данного пространства X образуют наименьшую сигма-алгебру $\mathbf{Bor}(X)$ множеств $Y \subseteq X$, содержащую все открытые (тогда и все замкнутые) множества.

Пусть X, Y — борелевские множества в польских пространствах. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *борелевским*, если прообраз $f^{-1}[Y'] = \{x \in X: f(x) \in Y'\}$ любого открытого (а тогда, очевидно, и любого борелевского) множества $Y' \subseteq Y$ является борелевским множеством. Для этого необходимо и достаточно, чтобы *график*

$$\{\langle x, y \rangle \in X \times Y: y = f(x)\}$$

(т. е. сама f как множество пар) был борелевским множеством.

Если $f: X \rightarrow Y$ — борелевское отображение, то f -образ $f[X'] = \{f(x): x \in X'\}$ любого множества $X' \subseteq X$ называется его *борелевским образом*, а f -прообраз $X = f^{-1}[Y'] = \{x \in X: f(x) \in Y'\}$ любого множества $Y' \subseteq Y$ называется его *борелевским прообразом*.

Отображение $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ называется *борелевским изоморфизмом* X на Y , если f — борелевское отображение и биекция X на Y . В этом случае обратное отображение $f^{-1}: Y \xrightarrow{\text{на}} X$ будет борелевским изоморфизмом Y на X .

Теорема 4.1.1 (см. [122, § 37.II] или нашу книгу [19, § 2.6]). *Любые два несчетных польских пространства X, Y борелевски изоморфны, т. е. найдется борелевский изоморфизм $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$.* $\square$

Таким образом, по крайней мере в исследованиях тех вопросов дескриптивной теории, которые инвариантны (прямо или с соответствующими поправками) относительно борелевских изоморфизмов, можно ограничиться рассмотрением множеств в каком-нибудь одном, фиксированном несчетном польском пространстве.

В качестве такового в современных работах обычно используется пространство Бэра $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Этой практике следует и наша книга.

§ 4.2 Бэровские произведения

Пространство Бэра, или *бэровское пространство* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ образовано всеми бесконечными последовательностями натуральных чисел. Его топология порождена *бэровскими интервалами*, т. е. множествами вида $[s] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset x\}$, где s принадлежит множеству $\mathbb{N}^{<\omega}$ всех кортежей (конечных последовательностей) натуральных чисел.

Замкнутые множества пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ допускают следующее полезное представление. Множество $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ называется *деревом*, если мы имеем $s \in T \implies t \in T$ всякий раз когда кортежи $s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ удовлетворяют $t \subset s$. Множества вида

$$[T] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall m (x \restriction m \in T)\},$$

где $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ является деревом — это в точности все замкнутые подмножества $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, причем достаточно использовать лишь те деревья T , которые не имеют $\subseteq$ -максимальных (концевых) вершин.

Среди польских пространств выделяются пространства вида $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell}$, называемые *бэровскими произведениями*. Если $\ell = 0$, то $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^0 = \mathbb{N}^k$ — просто счетное дискретное пространство. Если же $\ell \geq 1$, то пространство $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell}$ гомеоморфно самому пространству Бэра $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathbb{N}^0 \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^1$ посредством отображения, ставящего каждому кортежу $x = \langle m_1, \dots, m_k, a_1, \dots, a_{\ell} \rangle \in \mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell}$ точку

$$H_{k\ell}(x) = \langle m_1, \dots, m_k, a_1(0), \dots, a_{\ell}(0), a_1(1), \dots, a_{\ell}(1), \dots \rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Следующее определение вводит ряд других полезных соответствий.

Определение 4.2.1. (i) Положим $\|i, j\| = 2^i(2j + 1) - 1$. Таким образом, $\|\cdot, \cdot\|$ — биекция из $\mathbb{N}^2$ на $\mathbb{N}$. Поэтому для каждого натурального n найдется единственная пара чисел $i = (n)_{\text{лев}}$ и $j = (n)_{\text{пра}}$ (левая и правая компоненты), для которых $n = \|i, j\|$. Определим

$$\|i_0, \dots, i_{k-1}, i_k\| = \|\|i_0, \dots, i_{k-1}\|, i_k\|,$$

индукцией по k , так что отображение $\langle i_0, \dots, i_{k-1} \rangle \mapsto \|i_0, \dots, i_{k-1}\|$ является биекцией $\mathbb{N}^k$ на $\mathbb{N}$ в каждой арности $k \geq 2$.

(ii) Определим перечисление $\mathbb{N}^{<\omega} = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ множества $\mathbb{N}^{<\omega}$ всех кортежей натуральных чисел так, что $s_0 = \Lambda$ (пустой кортеж), и по индукции если $n = \|i, j\|$ то $s_{n+1} = s_i \wedge j$ (кортеж s_i , продолженный числом j как самым правым членом; $\text{lh } s_n = \text{lh } s_i + 1$).

Упражнение. Используя то, что $i, j < n + 1$ при $n = \|i, j\|$, покажите, что определение s_n корректно, а отображение $n \mapsto s_n$ — биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющая условиям $s_n \subset s_m \implies n < m$

и $\text{lh } \mathbf{s}_n \leq n$. Поэтому, если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, то имеется единственный индекс $n = \mathbf{gn } s$ («гёделев номер» s), для которого $s = \mathbf{s}_n$. $\dashv$

Далее, через $\mathbf{s}_n^{\text{ext}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ мы обозначим кортеж $\mathbf{s}_n$, продолженный бесконечным числом нулей, т. е. $\mathbf{s}_n^{\text{ext}}(k) = 0$ для всех $k \geq \text{lh } \mathbf{s}_n$.

(iii) Если $\ell \geq 2$ и $a_0, \dots, a_{\ell-1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то $a = \llbracket a_0, \dots, a_{\ell-1} \rrbracket \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ определяется условием $a(n\ell + j) = a_j(n)$ для всех j и n . Этим, очевидно, определяется гомеоморфизм $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell}$ на бэровское пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. При $\ell = 2$, определим обратные отображения: если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ то $(a)_{\text{лев}}(n) = a(2n)$ и $(a)_{\text{пра}}(n) = a(2n + 1)$ для всех n , так что $a \mapsto \langle (a)_{\text{лев}}, (a)_{\text{пра}} \rangle$ — гомеоморфизм $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$.¹

(iv) Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$ то определим точку $(a)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ соотношением $(a)_n(k) = a(\llbracket n, k \rrbracket)$, $\forall k$. Отображение $a \mapsto \langle (a)_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ — гомеоморфизм бесконечного произведения $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(v) Произведение $\mathbb{N}^1 \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^1 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ гомеоморфно пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ посредством отображения $a \mapsto \langle a(0), a^- \rangle$, где точка $a^- \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ определена соотношением $a^-(k) = a(k+1)$, $\forall k$. Обратно, если $k \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то определим $k \wedge b = a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ так, чтобы выполнялись условия $a(0) = k$ и $a^- = b$. $\square$

Канторов дисконтинуум $2^{\mathbb{N}}$ можно рассматривать как компактное подмножество бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

§4.3 Борелевские и проективные множества

Борелевская иерархия множеств данного пространства $\mathbb{X}$ состоит из *борелевских классов*² $\Sigma_{\xi}^0[\mathbb{X}]$, $\Pi_{\xi}^0[\mathbb{X}]$, $\Delta_{\xi}^0[\mathbb{X}]$, или просто Σ_{ξ}^0 , Π_{ξ}^0 , Δ_{ξ}^0 , если выбор пространства $\mathbb{X}$ ясен из контекста, где $1 \leq \xi < \omega_1$. (Напомним, что ω_1 — это первый несчетный ординал.) Борелевские классы определяются трансфинитной индукцией по ξ :

$\Sigma_1^0[\mathbb{X}]$ состоит из всех открытых множеств пространства $\mathbb{X}$;

$\Sigma_{\xi}^0[\mathbb{X}]$ (для $\xi > 1$) содержит все счетные объединения множеств, которые принадлежат классам $\Pi_{\eta}^0[\mathbb{X}]$, $1 \leq \eta < \xi$;

$\Pi_{\xi}^0[\mathbb{X}]$ содержит все дополнения $\Sigma_{\xi}^0[\mathbb{X}]$ -множеств к пространству $\mathbb{X}$, так что множество $Y \subseteq \mathbb{X}$ принадлежит $\Pi_{\xi}^0[\mathbb{X}]$ если и только если его дополнение $\mathbb{X} \setminus Y$ принадлежит $\Sigma_{\xi}^0[\mathbb{X}]$;

¹ Индексы означают, условно говоря, левый и правый компоненты пары точек из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, в которую разворачивается данная точка $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

² Употребление слова «класс» в дескриптивной теории множеств не вполне согласовано с общим смыслом этого слова как объясняется в §2.3, поскольку все борелевские и иные подобные классы точечных множеств в польских пространствах заведомо являются множествами, а не собственными классами.

$\Delta_\xi^0[\mathbb{X}]$ содержит все множества, являющиеся одновременно множествами классов $\Sigma_\xi^0[\mathbb{X}]$ и $\Pi_\xi^0[\mathbb{X}]$.

Теорема 4.3.1 (2.2.1, 2.2.2, 2.2.5 в [19]). Пусть $1 \leq \xi < \omega_1$. В любом польском пространстве, класс Σ_ξ^0 замкнут относительно счетных объединений и конечных пересечений, класс Π_ξ^0 — относительно счетных пересечений и конечных объединений, класс Δ_ξ^0 — относительно конечных операций и дополнения. Каждый из классов Σ_ξ^0 , Π_ξ^0 , Δ_ξ^0 замкнут относительно непрерывных прообразов.

Если же польское пространство несчетно, то имеет место теорема иерархии: если $1 \leq \xi < \eta < \omega_1$ то

$$\Sigma_\xi^0 \cup \Pi_\xi^0 \subsetneq \Delta_\eta^0, \quad \Sigma_\xi^0 \not\subseteq \Pi_\xi^0, \quad \Pi_\xi^0 \not\subseteq \Sigma_\xi^0. \quad \square$$

При этом $\mathbf{Bor}(\mathbb{X}) = \bigcup_{1 \leq \xi < \omega_1} \Sigma_\xi^0[\mathbb{X}]$ — все борелевские множества любого данного польского пространства $\mathbb{X}$.

Более широкий класс точечных множеств образуют проективные множества. *Проективная иерархия* множеств в польских пространствах состоит из *проективных классов* Σ_n^1 , Π_n^1 , Δ_n^1 (A_n , CA_n , B_n в более ранней системе обозначений) точечных множеств, определяемых индукцией по $n \geq 1$ следующим образом:

$\Sigma_n^1[\mathbb{X}]$ содержит все проекции на $\mathbb{X}$ множеств из $\Pi_{n-1}^1[\mathbb{X} \times \mathbb{Y}]$ (или просто $\mathbf{G}_\delta$ -множеств в $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ при $n = 1$) для всевозможных польских пространств $\mathbb{Y}$ — и при этом

- (1) вполне достаточно взять какое-нибудь одно *несчетное* польское пространство $\mathbb{Y}$, например, $\mathbb{Y} = \mathbb{N}^\mathbb{N}$;
- (2) для получения всех множеств из $\Sigma_1^1[\mathbb{X}]$ достаточно проекций на $\mathbb{X}$ *замкнутых* множеств в $\mathbb{X} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$;

$\Pi_n^1[\mathbb{X}]$ содержит все дополнения множеств из $\Sigma_n^1[\mathbb{X}]$ к $\mathbb{X}$;

$\Delta_n^1[\mathbb{X}]$ содержит все множества, которые принадлежат одновременно к классу $\Sigma_n^1[\mathbb{X}]$ и к классу $\Pi_n^1[\mathbb{X}]$.

Наконец, $\bigcup_n \Sigma_n^1 = \bigcup_n \Pi_n^1$ — класс всех проективных множеств.

Замечание 4.3.2 (замечание 3.7.4 в [19]). Для множеств пространств $\mathbb{X} = \mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\ell$, вводится нулевой уровень проективной иерархии: классы $\Sigma_0^1 = \Sigma_1^0$, $\Pi_0^1 = \Pi_1^0$, $\Delta_0^1 = \Delta_1^0$ (открытые, замкнутые, и открыто-замкнутые множества). Тогда, подобно общему определению для Σ_{n+1}^1 , класс $\Sigma_1^1[\mathbb{X}]$ по теореме 5.1.1 равен классу всех проекций множеств $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ класса Π_0^1 . $\square$

Теорема 4.3.3 (6.10.1, 6.7.4 в [19]). Пусть $n \geq 1$. В любом польском пространстве, каждый из классов Σ_n^1 , Π_n^1 , Δ_n^1 замкнут относительно счетных объединений и пересечений, и борелевских прообразов; класс Σ_n^1 замкнут еще и относительно проекций и борелевских образов, а класс Δ_n^1 — относительно дополнения.

Если же польское пространство несчетно, то имеет место теорема иерархии: если $1 \leq n < m < \omega$, то

$$\Sigma_n^1 \cup \Pi_n^1 \subsetneq \Delta_m^1, \quad \Sigma_n^1 \not\subseteq \Pi_n^1, \quad \Pi_n^1 \not\subseteq \Sigma_n^1. \quad \square$$

Отсюда следует, что $\mathbf{Bor}(\mathbb{X}) \subseteq \Delta_1^1[\mathbb{X}]$ в любом польском пространстве $\mathbb{X}$. Мы увидим, что на самом деле здесь выполнено равенство.

§4.4 Аналитические формулы, термы

Структура пространств $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$, названных выше *бэровскими произведениями*, позволяет использовать простой язык аналитических формул для описания борелевских и проективных множеств, использующий два типа переменных, *тип 0* или *тип $\mathbb{N}$* с областью пробегания $\mathbb{N}$ (используются буквы k, l, m, n и т. п.) и *тип 1* или *тип $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$* с областью пробегания $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (буквы x, y, z, a, b, c и т. п.).

Разрешается образовывать *термы* (только типа $\mathbb{N}$, т. е. с областью пробегания $\mathbb{N}$) из переменных и натуральных чисел, при помощи некоторых функций, введенных в определении 4.2.1. Именно,

- 1) натуральные числа и переменные типа $\mathbb{N}$ — термы,
- 2) если σ — терм а x — переменная типа $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то $x(\sigma)$ и $\mathbf{gn}(x \upharpoonright \sigma)$ — термы,
- 3) если σ, τ — термы, то $\max\{\tau, \sigma\}$, $\tau + \sigma$, $\tau - \sigma$, $\tau \cdot \sigma$, τ^σ , $\llbracket \sigma, \tau \rrbracket$, $(\sigma)_{\text{лев}}$, $(\sigma)_{\text{пра}}$, $\mathbf{lhs}_\tau$, $\mathbf{s}_\tau^{\text{ext}}(\sigma)$, $\mathbf{gn}(\mathbf{s}_\tau^{\text{ext}} \upharpoonright \sigma)$ — термы,
- 4) если σ, τ — термы, и i — свободная переменная терма τ , не входящая в σ , то $\max_{i < \sigma} \tau(i)$ — терм (и i уже не является его свободной переменной).

Каждый терм имеет список *свободных переменных*, от которых он зависит. Для свободной переменной типа $\mathbb{N}$ в роли терма этот список состоит из самой этой свободной переменной. Для терма, полученного как в п. 2, этот список получается присоединением переменной a (типа $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) к списку свободных переменных терма σ . Для термов, полученных как в пп. 3 и 4, этот список получается объединением списков исходных термов (и, в случае п. 4, удалением из объединенного списка той переменной, которая связывается операцией $\max$). Таким образом, термы можно записывать в виде

$\tau := \tau(i_1, \dots, i_k; a_1, \dots, a_\ell)$, где выписаны все свободные переменные. Пара чисел k, ℓ называется *арностью* терма τ . Такой терм τ можно понимать и как функцию, (константу при $k = \ell = 0$), со значениями в $\mathbb{N}$, определенную на соответствующем пространстве $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$ на основе определения 4.2.1.³ Например, терм

$$\tau(m, n; a, b, c) := \max_{i < m-2} a(2^n + b(\text{lhs}_{3m}) + \text{gn}(c \upharpoonright i))$$

(арности 2, 3) является функцией из $\mathbb{N}^2 \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^3$ в $\mathbb{N}$.

Замечание 4.4.1. В данном определении мы отказываемся от термов типа $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, т. е. переменные типа $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ входят в аналитические формулы только через выражения $a(\tau)$ (τ — терм типа $\mathbb{N}$) в составе термов типа $\mathbb{N}$. Мы, однако, допустим вхождение в аналитические формулы выражений $(a)_{\text{лев}}$, $(a)_{\text{пра}}$, $(a)_\tau$, где a — переменная типа $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а τ, ν, μ — термы (типа $\mathbb{N}$) **как сокращения**. Именно, если $\varphi(a)$ — аналитическая формула с переменной a (типа $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$), и τ — терм, то формулы $\varphi((a)_{\text{лев}})$, $\varphi((a)_{\text{пра}})$, $\varphi((a)_\tau)$ понимаются как сокращенные записи формул, полученных из $\varphi(a)$ заменой всякого вхождения вида $a(\sigma)$ на, соответственно, $a(2\sigma)$, $a(2\sigma + 1)$, $a(\llbracket \tau, \sigma \rrbracket)$. $\square$

Упражнение 4.4.2. Покажите, что все термы являются непрерывными функциями. $\square$

Определение 4.4.3. Рассматривая произвольный терм $\tau = \tau(j_1, \dots, j_k; a_1, \dots, a_\ell)$, мы часто будем сокращать список $j_1, \dots, j_k$ до $\mathbf{j}$ (так что $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$) и список $a_1, \dots, a_\ell$ до $\mathbf{a}$ (так что $\mathbf{a} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$). Таким образом, $\tau = \tau(\mathbf{j}; \mathbf{a})$. Если при этом $m \in \mathbb{N}$, то мы полагаем

$$\mathbf{a} \upharpoonright m = \langle a_1 \upharpoonright m, \dots, a_\ell \upharpoonright m \rangle \quad -$$

кортеж из ℓ кортежей натуральных чисел равной длины m (не путать с простым ограничением $\mathbf{a} \upharpoonright m = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ при $m < \ell$). $\square$

Из непрерывности $\tau = \tau(\mathbf{j}; \mathbf{a})$ как функции из $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$ в $\mathbb{N}$ следует, что для любых $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$ и $\mathbf{a} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$ найдется число $m = m(\mathbf{j}; \mathbf{a})$ такое, что $\tau(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \tau(\mathbf{j}; \mathbf{b})$ всякий раз, когда $\mathbf{b} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$ и $\mathbf{a} \upharpoonright m = \mathbf{b} \upharpoonright m$. Мы собираемся доказать, что подходящее значение $m(\mathbf{j}; \mathbf{a})$ может быть вычислено посредством некоторого другого терма.

Определение 4.4.4. Пусть τ — произвольный терм. Определяется другой терм $\hat{\tau}$ (той же арности) индукцией по построению τ :

- 1) если τ — натуральное число или переменная типа $\mathbb{N}$, то $\hat{\tau} = 0$;

³ Чтобы остаться в области натуральных чисел, мы полагаем, в отношении операций $\sigma - \tau$ и τ^σ , что $0^0 = 0$, и $n - m = 0$ при $m > n$.

- 2) если τ есть $b(\sigma)$ или $\mathbf{gn}(b \upharpoonright \sigma)$, где σ — терм, то полагаем $\hat{\tau} = \max\{\hat{\sigma}, \sigma + 1\}$ или, соответственно, $\hat{\tau} = \max\{\hat{\sigma}, \sigma\}$;
- 3) если τ — терм вида $\max\{\mu, \nu\}$, $\mu + \nu$, $\mu \cdot \nu$, μ^ν , $\mu - \nu$, $\llbracket \mu, \nu \rrbracket$, $\mathbf{s}_\mu^{\text{ext}}(\nu)$, или $\mathbf{gn}(\mathbf{s}_\mu^{\text{ext}} \upharpoonright \nu)$ (где μ, ν — термы), то $\hat{\tau} = \max\{\hat{\mu}, \hat{\nu}\}$, а если τ — терм вида $(\sigma)_{\text{лев}}$, $(\sigma)_{\text{пра}}$, или $\mathbf{lhs}_\sigma$, то $\hat{\tau} = \hat{\sigma}$;
- 4) если τ — терм вида $\max_{i < \sigma} \nu(i)$, то $\hat{\tau} = \max\{\hat{\sigma}, \max_{i < \sigma} \hat{\nu}(i)\}$. $\square$

Лемма 4.4.5. Пусть $\tau = \tau(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \tau(j_1, \dots, j_k; a_1, \dots, a_\ell)$ — произвольный терм, $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$, и кроме того $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$ и $\mathbf{a}' \Vdash m = \mathbf{a} \Vdash m$, где $m = \hat{\tau}(\mathbf{j}; \mathbf{a})$. Тогда $\tau(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \tau(\mathbf{j}; \mathbf{a}')$ и $\hat{\tau}(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \hat{\tau}(\mathbf{j}; \mathbf{a}')$.

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по построению термина τ . Результат очевиден для случая 1 определения 4.4.4, и легко проводится через индуктивные шаги 3, 4 определения 4.4.4. Рассмотрим теперь индуктивный шаг 2, особенностью которого является то, что арность τ по сравнению с σ увеличивается за счет переменной a типа $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Мы рассмотрим только случай, когда $\tau(\mathbf{j}, \mathbf{a}, b)$ есть $b(\sigma(\mathbf{j}, \mathbf{a}))$, где σ — терм арности k, ℓ . (Случай, когда $\tau(\mathbf{j}, \mathbf{a}, b)$ есть $\mathbf{gn}(b \upharpoonright \sigma(\mathbf{j}, \mathbf{a}))$, вполне аналогичен.) Допустим, что $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$, $b, b' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$, и сверх того $\mathbf{a}' \Vdash m = \mathbf{a} \Vdash m$ и $b \upharpoonright m = b' \upharpoonright m$, где $m = \hat{\tau}(\mathbf{j}; \mathbf{a}, b)$.

По определению (пункт 2 определения 4.4.4), мы имеем $\hat{\sigma}(\mathbf{j}, \mathbf{a}) \leq m$, а потому, по индуктивному предположению, $\sigma(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \sigma(\mathbf{j}; \mathbf{a}')$ и $\hat{\sigma}(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \hat{\sigma}(\mathbf{j}; \mathbf{a}')$. И аналогично, $\sigma(\mathbf{j}, \mathbf{a}) + 1 \leq m$, откуда имеем равенство $b(\sigma(\mathbf{j}, \mathbf{a})) = b'(\sigma(\mathbf{j}, \mathbf{a}))$. Тем самым, $\tau(\mathbf{j}, \mathbf{a}, b) = \tau(\mathbf{j}, \mathbf{a}', b')$.

Для вывода равенства $\hat{\tau}(\mathbf{j}; \mathbf{a}, b) = \hat{\tau}(\mathbf{j}; \mathbf{a}', b')$, заметим, что

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(\mathbf{j}, \mathbf{a}, b) &= \max\{\hat{\sigma}(\mathbf{j}, \mathbf{a}), \sigma(\mathbf{j}, \mathbf{a}) + 1\}, \quad \text{и} \\ \hat{\tau}(\mathbf{j}, \mathbf{a}', b') &= \max\{\hat{\sigma}(\mathbf{j}, \mathbf{a}'), \sigma(\mathbf{j}, \mathbf{a}') + 1\}. \end{aligned}$$

Однако $\sigma(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \sigma(\mathbf{j}; \mathbf{a}')$ и $\hat{\sigma}(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \hat{\sigma}(\mathbf{j}; \mathbf{a}')$ (см. выше), так что правые части выделенных равенств равны друг другу. $\square$

§4.5 Эффективная иерархия

Определив понятие термина, мы теперь определяем несколько типов формул, которые строятся на основе этих термов. Именно:

атомарные — формулы вида $\tau = \tau'$, где τ, τ' — термы (например, переменные типа $\mathbb{N}$) — при этом мы допускаем неравенство $\tau < \tau'$ как сокращение соответствующей ограниченной (см. ниже) формулы $\exists k < \tau' (\tau + k = \tau')$;

аналитические — все формулы, которые получаются из элементарных при помощи логических связок и кванторов;

арифметические — те аналитические формулы, которые не включают кванторов типа 1 (т. е. по $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$);

ограниченные — арифметические формулы с кванторами только вида $\exists k < \tau$ и $\forall k < \tau$, где k — переменная типа $\mathbb{N}$ а τ — терм (в частности, все бескванторные формулы — ограниченные);

Σ_n^0 и Π_n^0 — арифметические формулы, соответственно, вида

$$\exists k_1 \forall k_2 \exists k_3 \dots \exists (\forall) k_n \varphi \quad \text{и} \quad \forall k_1 \exists k_2 \forall k_3 \dots \forall (\exists) k_n \varphi,$$

где φ — ограниченная формула;

Σ_n^1 и Π_n^1 — аналитические формулы, соответственно, вида

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \dots \exists (\forall) a_n \forall (\exists) t \varphi \quad \text{и} \quad \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 \dots \forall (\exists) a_n \exists (\forall) t \varphi,$$

где φ — ограниченная формула.

Любая аналитическая формула $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a}) := \varphi(j_1, \dots, j_k; a_1, \dots, a_\ell)$ определяет множество

$$\{\langle \mathbf{j}, \mathbf{a} \rangle \in \mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell : \varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a})\}$$

в соответствующем бэровском произведении $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$. Отсюда производится классификация точечных множеств, которая учитывает не только кванторный класс определяющей формулы, но и параметры, участвующие в определении. Именно, если задан кортеж параметров $\vec{a} = \langle a_1, \dots, a_j \rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^j$, то через $\Sigma_n^i(\vec{a})$ обозначается класс всех множеств в пространствах $\mathbb{N}^k \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\ell$, которые определимы Σ_n^i -формулами с параметрами из списка $a_1, \dots, a_j$. Класс $\Pi_n^i(\vec{a})$ определяется аналогично, а $\Delta_n^i(\vec{a}) = \Sigma_n^i(\vec{a}) \cap \Pi_n^i(\vec{a})$.

В частных случаях $j = 1$ (один параметр) и $j = 0$ (нет параметров) пишут $\Sigma_n^i(a)$ и Σ_n^i , и то же для Π, Δ .

Дополнительно, если мы имеем некоторое множество параметров $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то пусть $\Sigma_n^1[P] = \bigcup_{a_1, \dots, a_j \in P \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \Sigma_n^1(a_1, \dots, a_j)$ (множества, определимые Σ_n^1 -формулами с произвольными параметрами из P), и аналогично $\Pi_n^1[P], \Delta_n^1[P]$.

Пример 4.5.1. Множество $2^{\mathbb{N}} = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall k (a(k) < 2)\}$ (канторов дисконтинуум) является Π_1^0 -множеством в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Классы, обозначаемые с использованием букв Σ, Π, Δ , называются *эффективными*, в отличие от проективных классов $\Sigma_n^1, \Pi_n^1, \Delta_n^1$ и борелевских $\Sigma_\xi^0, \Pi_\xi^0, \Delta_\xi^0$. Однако проективная иерархия является лишь частным случаем эффективной:

Предложение 4.5.2. $X \in \Sigma_n^i$ тогда и только тогда, когда $X \in \Sigma_n^i(a)$ для какого-нибудь $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и то же для классов Π, Δ . $\square$

Замечание 4.5.3 (6.10.1 в [19]). Выполнено следующее:

- все классы Γ_n^i и $\Gamma_n^i(a)$ ($\Gamma = \Sigma, \Pi, \Delta$) замкнуты относительно конечных объединений и пересечений;
- классы Σ_n^i и $\Sigma_n^i(a)$ замкнуты относительно квантора $\exists^0$ (по переменной типа $\mathbb{N}$), т. е. проекции вдоль оси $\mathbb{N}$;
- классы Π_n^i и $\Pi_n^i(a)$ — относительно квантора $\forall^0$;
- классы Δ_n^i и $\Delta_n^i(a)$ — относительно дополнения;
- классы Σ_n^1 и $\Sigma_n^1(a)$ ($n \geq 1$) замкнуты относительно кванторов $\exists^1$, т. е. проекции вдоль оси $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и $\forall^0$;
- классы Π_n^1 и $\Pi_n^1(a)$ ($n \geq 1$) — относительно кванторов $\forall^1$, $\exists^0$;
- классы Δ_n^1 и $\Delta_n^1(a)$ ($n \geq 1$) — относительно $\forall^0$ и $\exists^0$. $\square$

§4.6 Выходим из произведений бэровских пространств

В ряде случаев нам придется по существу оценивать класс (в смысле проективной или эффективной иерархии) множеств в польских пространствах, которые не относятся к бэровским произведениям, но сводятся к последним при помощи того или иного преобразования, основанного на определенной выше биекции $n \mapsto s_n$ из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^{<\omega}$. Дополним последнюю так.

Определение 4.6.1. Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ то определим:

множество $T_{\{a\}} = \{s_k : a(k) = 1\} \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$;

функцию $f_{\{a\}} : \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$, так что $f_{\{a\}}(s_k) = s_n$ при $a(k) = n$;

функцию $\gamma_{\{a\}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$, так что $\gamma_{\{a\}}(k) = s_n$ при $a(k) = n$. $\square$

Определение 4.6.2. *Обобщенным бэровским произведением*, кратко ОБП, называется любое конечное произведение дискретных множеств $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^{<\omega}$ и пространств $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$, $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$, $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$. К примеру, $\mathbb{X} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \times (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$ — обобщенное бэровское произведение. Скажем, что множество

$$P \subseteq \mathbb{X} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \times (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$$

принадлежит какому-то классу Γ (например, Σ_3^0 или $\Pi_5^1(p)$), если этому классу Γ принадлежит *редуцированное* множество

$$P^{\text{red}} = \{\langle k, n, a, x, y, z \rangle \in \mathbb{N}^2 \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^3 : \langle k, s_n, a, T_{\{x\}}, \gamma_{\{y\}}, f_{\{z\}} \rangle \in P\}$$

уже в пространстве $\mathbb{N}^2 \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^4 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Для работы с множествами таких пространств удобно расширить язык аналитических формул из § 4.4, введя

- переменные s, t типа $\mathbb{N}^{<\omega}$ (т. е. с областью пробегания $\mathbb{N}^{<\omega}$);
- переменные S, T типа $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$;
- переменные γ, δ типа $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$;
- переменные f, g типа $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$.

Выбор типов дополнительных переменных обусловлен тем, что нам придется систематически иметь дело с множеством $\mathbb{N}^{<\omega}$ всех кортежей натуральных чисел, а также его соответственно с подмножествами, функциями из $\mathbb{N}^{<\omega}$ в $\mathbb{N}^{<\omega}$, и так далее.

Мы полагаем, что помимо термов типа $\mathbb{N}$, определенных в § 4.5,

- если s — переменная типа $\mathbb{N}^{<\omega}$ а k — переменная типа $\mathbb{N}$, то $\text{lh } s$, $\text{gn } s$ (длина и «гёделев номер» кортежа $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$) и $s^{\text{ext}}(k)$ являются термами типа $\mathbb{N}$, где s^{ext} обозначает кортеж $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, продолженный бесконечным числом нулей.

Наконец, к *атомарным формулам* мы относим

- (A) равенство термов типа $\mathbb{N}$, как в § 4.5;
- (B) формулы $s = t$, $s = \gamma(k)$, $s = f(t)$, где s, t — переменные типа $\mathbb{N}^{<\omega}$, k — переменная типа $\mathbb{N}$, γ — переменная типа $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$, а f — переменная типа $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$;
- (C) формулы вида $s \in T$, где T — переменная типа $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$, а s — переменная типа $\mathbb{N}^{<\omega}$.

Так определяется *расширенный язык аналитических формул*.

Определение 4.6.3. Классы формул этого расширенного языка вводятся аналогично § 4.5, но с поправкой, что тип 0 объединяет теперь кванторы по $\mathbb{N}$ и по $\mathbb{N}^{<\omega}$, тип 1 — кванторы по $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$, $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$, так что, например, формула с кванторной приставкой

$$\exists a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \forall T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \exists b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \forall f \in (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}} \exists s \in \mathbb{N}^{<\omega}$$

квалифицируется как Σ_4^1 , а формула только с кванторами по $\mathbb{N}$ и по $\mathbb{N}^{<\omega}$ — как арифметическая. $\square$

Мы умышленно определили расширенный язык в совершенно минимальной форме, например, не допуская термов типа $\mathbb{N}^{<\omega}$ — чтобы облегчить редукцию расширенного языка к узкому ниже в § 4.7. Тем не менее, многие важные отношения удастся выразить арифметическими (и даже ограниченными) формулами расширенного языка.

Упражнение 4.6.4. Докажите следующие эквивалентности, в которых $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $f: \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$, и $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$. Убедитесь, что формулы в правых частях имеют тип Π_1^0 .

$$\begin{aligned} T = \mathbf{T}_{\{a\}} &\iff \forall s (s \in T \iff a(\mathbf{gn} s) = 1); \\ \gamma = \gamma_{\{a\}} &\iff \forall s \forall n (s = \gamma(n) \iff \mathbf{gn} s = a(n)); \\ f = \mathbf{f}_{\{a\}} &\iff \forall s \forall t (s = f(t) \iff \mathbf{gn} s = a(\mathbf{gn} t)). \end{aligned} \quad \square$$

Упражнение 4.6.5. Пусть $s, t, u \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а S, T — деревья в $\mathbb{N}^{<\omega}$ (см. определения ниже в § 5.2). Докажите следующие эквивалентности и покажите, что их правые части являются арифметическими формулами расширенного языка.

$$\begin{aligned} s \subset t &\iff \mathbf{lh} s < \mathbf{lh} t \wedge \forall k < \mathbf{lh} s (s^{\mathbf{ext}}(k) = t^{\mathbf{ext}}(k)); \\ u = s^\wedge t &\iff \mathbf{lh} u = \mathbf{lh} s + \mathbf{lh} t \wedge \forall k < \mathbf{lh} s (s^{\mathbf{ext}}(k) = u^{\mathbf{ext}}(k)) \wedge \\ &\quad \wedge \forall k < \mathbf{lh} t \exists j (j = \mathbf{lh} s + k \wedge t^{\mathbf{ext}}(k) = u^{\mathbf{ext}}(j)); \\ s \subset x &\iff \forall k < \mathbf{lh} s (s^{\mathbf{ext}}(k) = x(k)); \\ T = S|_u &\iff \forall s, t \in \mathbb{N}^{<\omega} (s = u^\wedge t \implies (t \in T \iff s \in S)). \end{aligned} \quad \square$$

§ 4.7 Сведение расширенного языка к обычному

Однако этот расширенный язык легко сводится к языку аналитических формул в узком смысле, т. е. тому, который определен выше в §§ 4.4, 4.5. Именно, имея формулу Φ расширенного языка, определим *редуцированную* формулу $\Phi^{\mathbf{y}^{\mathbf{ex}}}$ языка в узком смысле так, что

- (1) каждая переменная s типа $\mathbb{N}^{<\omega}$ меняется переменной n_s типа $\mathbb{N}$ везде кроме вхождений в термы вида $\mathbf{lh} s$, $\mathbf{gn} s$, $s^{\mathbf{ext}}(k)$, а эти термы меняются на, соответственно, $\mathbf{lh}(n_s)$, n_s , $\mathbf{s}_{n_s}^{\mathbf{ext}}(k)$;
- (2) формулы $s = t$, $s = \gamma(k)$, $s = f(t)$ из (B) в § 4.6 меняются соответственно на $n_s = n_t$, $n_s = y_\gamma(k)$, $n_s = z_f(n_t)$, где y_γ и z_f — переменные типа $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;
- (3) каждое вхождение $s \in T$ переменной T типа $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ меняется на $x_T(n_s) = 1$, где x_T — переменная типа $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Пример 4.7.1. Рассмотрим формулу расширенного языка

$$\Phi(T) := \forall s \exists t (s \in T \implies t \in T \wedge s \subset t),$$

выражающую тот факт, что множество $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ не имеет $\subset$ -максимальных элементов. Или, элиминируя отношение $\subset$,

$$\forall s \exists t (s \in T \implies t \in T \wedge \text{lh } s < \text{lh } t \wedge \forall k < \text{lh } s (s^{\text{ext}}(k) = t^{\text{ext}}(k))).$$

Обозначая теперь через m, n, x новые переменные n_s, n_t, x_T , получаем следующую формулу $\Phi^{y\text{зк}}(x)$:

$$\begin{aligned} \forall m \exists n (x(m) = 1 \implies x(n) = 1 \wedge \\ \wedge \text{lh } s_m < \text{lh } s_n \wedge \forall k < \text{lh } s_m (s_m^{\text{ext}}(k) = s_n^{\text{ext}}(k))). \end{aligned}$$

Понятно, что $\Phi^{y\text{зк}}(x) \iff \Phi(T_{\{x\}})$, каково бы ни было $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Результат этого простого, но показательного примера может быть обобщен в виде следующей теоремы, доказательство которой мы опустим ввиду прозрачности результата и элементарности доказательства индукцией по построению формул начиная от элементарных.

Теорема 4.7.2. Пусть $\Phi(k, s, a, T, \gamma, f)$ — формула расширенного языка со свободными переменными типов $\mathbb{N}, \mathbb{N}^{<\omega}, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega}), (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}, (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$ в порядке следования.⁴ Тогда мы имеем

$$\Phi(k, s_n, a, T_{\{x\}}, \gamma_{\{y\}}, f_{\{z\}}) \iff \Phi^{y\text{зк}}(k, n, a, x, y, z)$$

для всех $k, n \in \mathbb{N}$ и $a, x, y, z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Следовательно, если

$$P = \{\langle k, s, a, T, \gamma, f \rangle : \Phi(k, s, a, T, \gamma, f)\}$$

(множество в $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \times (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$), то редуцированное множество P^{red} определения 4.6.2 удовлетворяет

$$P^{\text{red}} = \{\langle k, n, a, x, y, z \rangle \in \mathbb{N}^2 \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^4 : \Phi^{y\text{зк}}(k, n, a, x, y, z)\}. \quad \square$$

Тем самым, если некоторое множество в обобщенном бэровском произведении определено формулой расширенного языка, то соответствующее редуцированное множество определяется соответствующей формулой узкого языка. Отметим также, что при переходе от Φ к $\Phi^{y\text{зк}}$ структура кванторной приставки меняется лишь тем, что кванторы по $\mathbb{N}^{<\omega}$ превращаются в кванторы по $\mathbb{N}$, а кванторы по $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega}), (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}, (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$ превращаются в кванторы по $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

⁴ Для уменьшения громоздкости, мы приняли, что данная формула имеет всего одну свободную переменную в каждом из шести типов.

$(\exists^0 \exists^0 \rightarrow \exists^0)$	$\exists i \exists j \varphi(i, j)$	$\iff$	$\exists m \varphi((m)_{\text{лев}}, (m)_{\text{пра}})$
$(\forall^0 \forall^0 \rightarrow \forall^0)$	$\forall i \forall j \varphi(i, j)$	$\iff$	$\forall m \varphi((m)_{\text{лев}}, (m)_{\text{пра}})$
$(\exists^1 \exists^1 \rightarrow \exists^1)$	$\exists a \exists b \varphi(a, b)$	$\iff$	$\exists c \varphi((c)_{\text{лев}}, (c)_{\text{пра}})$
$(\forall^1 \forall^1 \rightarrow \forall^1)$	$\forall a \forall b \varphi(a, b)$	$\iff$	$\forall c \varphi((c)_{\text{лев}}, (c)_{\text{пра}})$
$(\forall^0 \exists^0 \rightarrow \exists^1 \forall^0)$	$\forall i \exists j \varphi(i, j)$	$\iff$	$\exists a \forall i \varphi(i, a(i))$
$(\exists^0 \forall^0 \rightarrow \forall^1 \exists^0)$	$\exists i \forall j \varphi(i, j)$	$\iff$	$\forall a \exists i \varphi(i, a(i))$
$(\exists^1 \exists^0 \rightarrow \exists^1)$	$\exists a \exists j \varphi(a, j)$	$\iff$	$\exists b \varphi((b)_{\text{лев}}, (b)_{\text{пра}}(0))$
$(\forall^1 \forall^0 \rightarrow \forall^1)$	$\forall a \forall j \varphi(a, j)$	$\iff$	$\forall b \varphi((b)_{\text{лев}}, (b)_{\text{пра}}(0))$
$(\forall^0 \exists^1 \rightarrow \exists^1 \forall^0)$	$\forall i \exists a \varphi(i, a)$	$\iff$	$\exists b \forall i \varphi(i, (b)_i)$
$(\exists^0 \forall^1 \rightarrow \forall^1 \exists^0)$	$\exists i \forall a \varphi(i, a)$	$\iff$	$\forall b \exists i \varphi(i, (b)_i)$

Правила преобразования аналитических формул

Обозначения к таблице см. определение 4.2.1 и замечание 4.4.1. Верхний индекс при кванторе обозначает тип переменной (0 – по $\mathbb{N}$, 1 – по $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$). Предпоследняя эквивалентность $(\forall^0 \exists^1 \rightarrow \exists^1 \forall^0)$ выражает счётную аксиому выбора, а последняя $(\exists^0 \forall^1 \rightarrow \forall^1 \exists^0)$ – двойственное утверждение.

Следствие 4.7.3. *Формула Φ расширенного языка является Σ_n^i -формулой если и только если таковой является соответствующая формула $\Phi^{\text{узк}}$ узкого языка. Следовательно, если множество в обобщенном бэровском произведении определяется Σ_n^i -формулой расширенного языка то оно принадлежит классу Σ_n^i .*

То же для классов Π_n^i и Δ_n^i (для множеств), а также для формул с параметрами и определяемых ими множеств, равно как и для проективных классов Σ_n^1 , Π_n^1 , Δ_n^1 . $\square$

§4.8 Преобразование аналитических формул

Таблица эквивалентностей со стр. 90 позволяет, за счет упрощения кванторной приставки, приводить сложные аналитические формулы к такому виду который сразу дает возможность судить о типе определяемого множества.

Определение 4.8.1. Аналитическая формула Φ языка из §4.5 называется *практически Σ_n^i -формулой*, если ее можно привести к Σ_n^i -виду при помощи преобразований из таблицы со стр. 90 и общелогических эквивалентностей. Формула Φ расширенного языка из §4.6 называется *практически Σ_n^i -формулой*, если таковой является

редуцированная формула $\Phi^{\text{узк}}$. Аналогично для Π_n^i . $\square$

Понятно, что множества, определяемые практически Σ_n^i -формулами, имеют тот же класс Σ_n^i . И то же для Π_n^i .

Вот несколько примеров.

Правило 4.8.2. Пусть $n \geq 1$. Любая формула, имеющая вид $\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \dots \exists (\forall) a_n \Psi$, где Ψ — арифметическая формула, является практически Σ_n^1 -формулой. И то же для Π_n^1 . Для доказательства, рассмотрим, к примеру, формулу φ вида

$$\exists a \forall b \exists k \forall t \psi(a, b, k, t),$$

где ψ — ограниченная формула, при $n = 2$. Кванторная приставка имеет вид $\exists^1 \forall^1 \exists^0 \forall^0$, и ее можно привести к виду $\exists^1 \forall^1 \forall^1 \exists^0$, а затем к виду $\exists^1 \forall^1 \exists^0$ преобразованиями $(\exists^0 \forall^0 \rightarrow \forall^1 \exists^0)$ и $(\forall^1 \forall^1 \rightarrow \forall^1)$.

Тем самым, любая арифметическая формула является практически Σ_1^1 -формулой и практически Π_1^1 -формулой, т. е. преобразуется к эквивалентному Σ_1^1 -виду и к эквивалентному Π_1^1 -виду. $\square$

Правило 4.8.3. Следующее «правило» часто используется для быстрого определения типа данной формулы. Допустим, что аналитическая формула Φ уже записана в виде $\mathbf{Q}\psi$, где $\mathbf{Q}$ — строка кванторов, а ψ — ограниченная *или даже арифметическая* формула, причем кванторы типа 0 могут располагаться произвольным образом по отношению к кванторам типа 1, в том числе и между ними. Удалим из $\mathbf{Q}$ все кванторы типа 0, и пусть $\mathbf{Q}^{\text{тип } 1}$ — полученная строка кванторов, содержащая теперь только кванторы типа 1 — ее мы называем *кванторной приставкой, редуцированной к типу 1*.

Редуцированная кванторная приставка $\mathbf{Q}^{\text{тип } 1}$ имеет класс Σ_n^1 или Π_n^1 для некоторого $n \geq 1$. Именно, она имеет класс Σ_n^1 , если включает ровно n чередующихся блоков кванторов⁵, начинающихся с блока $\exists$, и она имеет класс Π_n^1 в том же случае, но начинается с блока $\forall$. Подчеркнем: здесь принимаются во внимание лишь кванторы типа 1.

Теперь постановительная часть.

- (I) Если редуцированная приставка $\mathbf{Q}^{\text{тип } 1}$ имеет класс Σ_n^1 (где $n \geq 1$), то формула Φ является практически Σ_n^1 -формулой, т. е. ее можно преобразовать к эквивалентному Σ_n^1 -виду, а потому множество, определяемое такой формулой, имеет класс Σ_n^1 , либо класс $\Sigma_n^1(p)$, если формула содержит параметр $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
- (II) Если же редуцированная приставка $\mathbf{Q}^{\text{тип } 1}$ имеет класс Π_n^1 , то Φ является практически Π_n^1 -формулой, в аналогичном смысле.

⁵ Блок кванторов — это несколько (может быть, и один) соседних кванторов $\exists$ или несколько соседних кванторов $\forall$. Блоки чередуются, если $\exists$ сменяет $\forall$.

Для обоснования, последовательно применим к Φ преобразования $(\forall^0 \exists^1 \rightarrow \exists^1 \forall^0)$ и $(\exists^0 \forall^1 \rightarrow \forall^1 \exists^0)$ нужное число раз, чтобы вынести все кванторы типа 1 налево от кванторов типа 0. При этом структура последовательности кванторов типа 1 не меняется. Затем применяем к полученной формуле преобразования $(\exists^1 \exists^1 \rightarrow \exists^1)$ и $(\forall^1 \forall^1 \rightarrow \forall^1)$ нужное число раз, чтобы привести каждый блок кванторов типа 1 к одному квантору. Наконец, используем пример 4.8.2. $\square$

Добавим еще несколько примеров.

Правило 4.8.4. При $n \geq 1$, если $\varphi(a, b, i, j)$ есть Σ_n^1 -формула, то практически Σ_n^1 -формулами являются формулы

$$\exists a \varphi(a, b, i, j), \quad \exists i \varphi(a, b, i, j), \quad \forall i \varphi(a, b, i, j)$$

— согласно правилу 4.8.3, поскольку добавление кванторов $\exists a, \exists i, \forall i$ (но не $\forall a!$) к приставке класса Σ_n^1 не выводит из этого класса. $\square$

Правило 4.8.5. Отрицание Σ_n^i -формулы является *практически* Π_n^i -формулой: оно преобразуется к эквивалентному Π_n^i -виду при помощи общелогических эквивалентностей $\neg \exists a \varphi(a) \iff \forall a \neg \varphi(a)$ и $\neg \forall a \varphi(a) \iff \exists a \neg \varphi(a)$. И, разумеется, наоборот. $\square$

Правило 4.8.6. В том же смысле, конъюнкция двух Σ_n^i -формул, а также дизъюнкция двух Σ_n^i -формул — являются *практически* Σ_n^i -формулами. И то же для классов Π_n^i . Например, для Σ_1^1 ,

$$\exists a \forall t \varphi(a, t) \wedge \exists x \forall k \varphi(x, k) \iff \exists a \exists x \forall t \forall k (\varphi(a, t) \wedge \varphi(x, k)),$$

после чего применим преобразования $(\exists^1 \exists^1 \rightarrow \exists^1)$ и $(\forall^0 \forall^0 \rightarrow \forall^0)$, чтобы привести пары кванторов к одиночным кванторам. $\square$

§ 4.9 Классификация функций и точек

Теория множеств отождествляет функции с их графиками. Поэтому, если $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — польские пространства и $X \subseteq \mathbb{X}$, то функция $f : X \rightarrow \mathbb{Y}$ имеет класс K , или является K -функцией (где K — борелевский, проективный, или иной класс точечных множеств), если этому классу K принадлежит ее график $\Gamma_f = \{\langle x, f(x) \rangle : x \in X\}$ как множество в $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Здесь важно также, что любая точка $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является функцией $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, следовательно, подмножеством пространства $\mathbb{N}^2$, и в этом смысле ее можно рассматривать с точки зрения нашей классификации функций (т. е. подмножеств пространства $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$). Таким образом, по определению точка $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит, скажем, классу Δ_n^1

если этому классу принадлежит ее график $\Gamma_f = \{\langle m, k \rangle : f(m) = k\}$. Всё сказанное распространяется и на точки таких пространств, как $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$ и $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$ (см. определение 4.6.2), понимаемые как множества в обобщенных бэровских произведениях $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$ и $\mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega}$.

Следующий простой результат связывает класс точки f с классом ее *синглтона*, т. е. одноэлементного множества $\{f\}$.

Лемма 4.9.1 (см. лемму 6.9.1 в [19]). *Пусть $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $n \geq 1$. Следующие условия эквивалентны:*

$$\begin{aligned} f \text{ имеет класс } \Delta_n^1, & \quad f \text{ имеет класс } \Sigma_n^1, \\ \{f\} \text{ имеет класс } \Delta_n^1, & \quad \{f\} \text{ имеет класс } \Sigma_n^1. \end{aligned}$$

То же для классов $\Sigma_n^1(p)$ и $\Delta_n^1(p)$ для любого $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

То же верно и для точек $f \in (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$ и $f \in (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$. $\square$

Для нас будет важна следующая теорема.

Теорема 4.9.2 (элиминация Δ_1^1 -параметров). *Пусть $n \geq 1$, и $\varphi(x)$ является Σ_n^1 -формулой расширенного языка из § 4.6, которая содержит в роли параметров точки класса Δ_1^1 пространств $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$, $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$. Тогда $X = \{x : \varphi(x)\}$ — множество класса Σ_1^1 .*

То же для произвольного $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и классов $\Sigma_n^1(p)$ и $\Delta_1^1(p)$.

То же для классов Π_n^1 и $\Pi_n^1(p)$ вместо Σ_n^1 и $\Sigma_n^1(p)$.

Доказательство. Пусть, для простоты, φ есть $\varphi(x, a)$ с единственным параметром $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и $a \in \Delta_1^1$. Имеем

$$x \in X \iff \exists b (b \in A \wedge \varphi(x, b)),$$

где $A = \{a\}$ есть Δ_1^1 -множество по лемме 4.9.1. Заменив вхождение $b \in A$ подходящей Σ_1^1 -формулой, определяющей A , и применив подходящим образом преобразования формул из § 4.8, мы преобразуем правую часть выделенной эквивалентности к Σ_n^1 -виду. $\square$

Упражнение 4.9.3. Докажите, используя результат 4.6.4, что если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то множества $\{T_{\{a\}}\}$, $\{\gamma_{\{a\}}\}$, $\{f_{\{a\}}\}$ принадлежат классу $\Pi_1^0(a)$ и, следовательно, классу $\Delta_1^1(a)$ — а тогда сами точки $T_{\{a\}}$, $\gamma_{\{a\}}$, $f_{\{a\}}$ пространств $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$, $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$, $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$ принадлежат классу $\Delta_1^1(a)$ согласно лемме 4.9.1. $\square$

§ 4.10 Приведение формул к регулярной форме

Здесь вводится еще одно преобразование аналитических формул, к форме, которая имеет наиболее важное значение для исследования первого уровня проективной иерархии.

Идея преобразования состоит в следующем. Рассмотрим любую аналитическую формулу $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a})$ со списком свободных переменных арности k, ℓ , т. е. $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a})$ есть $\varphi(j_1, \dots, j_k; a_1, \dots, a_\ell)$. Если φ — *бескванторная* формула, то список $\mathbf{j}; \mathbf{a}$ ее свободных переменных объединяет свободные переменные всех термов, входящих в φ , а из непрерывности термов (упражнение 4.4.2) следует, что для любых $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$ и $\mathbf{a} \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\ell$ найдется число $m = m(\mathbf{j}; \mathbf{a})$ такое, что $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a}) \iff \varphi(\mathbf{j}; \mathbf{b})$ всякий раз, когда $\mathbf{b} \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\ell$ и $\mathbf{a} \Vdash m = \mathbf{b} \Vdash m$. Мы собираемся доказать, что, как и для случая термов, подходящее значение $m(\mathbf{j}; \mathbf{a})$ может быть вычислено посредством некоторого терма, причем это будет верно не только для бескванторных, но и для ограниченных аналитических формул.

Определение 4.10.1. Пусть φ — произвольная *ограниченная* аналитическая формула. Мы определяем *терм* $\widehat{\varphi}$ индукцией по построению φ следующим образом:

- 1) если φ — атомарная формула, т. е. $\tau = \tau'$, где τ, τ' — произвольные термы, то $\widehat{\varphi} = \max\{\widehat{\tau}, \widehat{\tau'}\}$;
- 2) если φ есть одна из формул $\exists i < \sigma \psi(i)$ или $\forall i < \sigma \psi(i)$, то $\widehat{\varphi} = \max\{\widehat{\sigma}, \max_{i < \sigma} \widehat{\psi}(i)\}$;
- 3) если φ — формула вида $\psi \wedge \chi$, $\psi \vee \chi$, $\psi \implies \chi$, $\psi \iff \chi$, то $\widehat{\varphi} = \max\{\widehat{\psi}, \widehat{\chi}\}$, а если φ есть $\neg \psi$, то просто $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$. $\square$

Лемма 4.10.2. Пусть $\varphi := \varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a}) := \varphi(j_1, \dots, j_k; a_1, \dots, a_\ell)$ — *ограниченная формула*, $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$, а также $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\ell$, и $\mathbf{b} \Vdash m = \mathbf{a} \Vdash m$, где $m = \widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{a})$. Тогда $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a}) \iff \varphi(\mathbf{j}; \mathbf{b})$ и $\widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{b})$.

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по построению формулы φ . Результат имеет место для случая 1 определения 4.10.1 согласно лемме 4.4.5, и легко проводится через индуктивный шаг 3 определения 4.10.1. Рассмотрим теперь индуктивный шаг 2.

Рассматривается формула $\varphi(\mathbf{j}, \mathbf{a}) := \exists i < \sigma(\mathbf{j}, \mathbf{a}) \psi(i, \mathbf{j}, \mathbf{a})$, где ψ — *ограниченная формула* арности $k+1, \ell$. Предположим, что $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\ell$, $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$, и сверх того $\mathbf{b} \Vdash m = \mathbf{a} \Vdash m$, где $m = \widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{a})$.

По определению (пункт 2 определения 4.10.1), мы имеем $\widehat{\sigma}(\mathbf{j}, \mathbf{a}) \leq m$, а потому $\sigma(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \sigma(\mathbf{j}; \mathbf{b})$ и $\widehat{\sigma}(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \widehat{\sigma}(\mathbf{j}; \mathbf{b})$ согласно лемме 4.4.5. И аналогично, если $i < \sigma(\mathbf{j}, \mathbf{a})$ то $\widehat{\psi}(i, \mathbf{j}, \mathbf{a}) \leq m$, откуда, по индуктивному предположению, следует $\psi(i, \mathbf{j}; \mathbf{a}) \iff \psi(i, \mathbf{j}; \mathbf{b})$ и $\widehat{\psi}(i, \mathbf{j}; \mathbf{a}) = \widehat{\psi}(i, \mathbf{j}; \mathbf{b})$. Тем самым, сразу $\varphi(\mathbf{j}, \mathbf{a}) \iff \varphi(\mathbf{j}, \mathbf{b})$.

Для вывода равенства $\widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{b})$, заметим, что

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{a}) &= \max\{\widehat{\sigma}(\mathbf{j}; \mathbf{a}), \max_{i < \sigma(\mathbf{j}; \mathbf{a})} \widehat{\psi}(i, \mathbf{j}; \mathbf{a})\}, \quad \text{и} \\ \widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{b}) &= \max\{\widehat{\sigma}(\mathbf{j}; \mathbf{b}), \max_{i < \sigma(\mathbf{j}; \mathbf{b})} \widehat{\psi}(i, \mathbf{j}; \mathbf{b})\}. \end{aligned}$$

Однако мы имеем $\sigma(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \sigma(\mathbf{j}; \mathbf{b})$ и $\widehat{\sigma}(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \widehat{\sigma}(\mathbf{j}; \mathbf{b})$, и кроме того $\widehat{\psi}(i, \mathbf{j}; \mathbf{a}) = \widehat{\psi}(i, \mathbf{j}; \mathbf{b})$ для каждого $i < \sigma(\mathbf{j}, \mathbf{a})$ (см. выше), так что правые части выделенных равенств равны друг другу. $\square$

Следующее определение вводит то преобразование, о котором говорилось в начале этого пункта.

Определение 4.10.3. Если $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a}) := \varphi(j_1, \dots, j_k; a_1, \dots, a_\ell)$ — ограниченная формула, то через $\overline{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{n}) := \varphi(j_1, \dots, j_k; n_1, \dots, n_\ell)$ обозначим следующую (также ограниченную) формулу

$$\varphi(j_1, \dots, j_k; \mathbf{s}_{n_1}^{\text{ext}}, \dots, \mathbf{s}_{n_\ell}^{\text{ext}}) \wedge \\ \wedge \text{lh } \mathbf{s}_{n_1} = \dots = \text{lh } \mathbf{s}_{n_\ell} \geq \widehat{\varphi}(j_1, \dots, j_k; \mathbf{s}_{n_1}^{\text{ext}}, \dots, \mathbf{s}_{n_\ell}^{\text{ext}}).$$

Если формула $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a}) := \exists j' \psi(j', \mathbf{j}; \mathbf{a})$ является Σ_1^0 -формулой, т. е. $\psi(j', \mathbf{j}; \mathbf{a})$ — ограниченная формула, то через $\overline{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{n})$ обозначим Σ_1^0 -формулу $\exists j' < \text{lh}(\mathbf{s}_{n_1}) \overline{\psi}(j', \mathbf{j}; \mathbf{n})$. $\square$

Сразу отметим важное свойство *монотонности* формул $\overline{\varphi}$.

Предложение 4.10.4. В условиях определения 4.10.3, если $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^\ell$, $\overline{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{n})$ выполнено, и кортеж $\mathbf{n}' = \langle n'_1, \dots, n'_\ell \rangle \in \mathbb{N}^\ell$ удовлетворяет $\mathbf{s}_{n_i} \subset \mathbf{s}_{n'_i}$ для $i = 1, \dots, \ell$, и

$$\text{lh } \mathbf{s}_{n'_1} = \dots = \text{lh } \mathbf{s}_{n'_\ell} = m' \geq m = \text{lh } \mathbf{s}_{n_1} = \dots = \text{lh } \mathbf{s}_{n_\ell},$$

то и $\overline{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{n}')$ имеет место.

Доказательство. Для случая ограниченных формул, достаточно доказать, что $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{s}_{n_1}^{\text{ext}}, \dots, \mathbf{s}_{n_\ell}^{\text{ext}})$ влечет $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{s}_{n'_1}^{\text{ext}}, \dots, \mathbf{s}_{n'_\ell}^{\text{ext}})$ — при условии, что $m \geq \widehat{\varphi}(j_1, \dots, j_k; \mathbf{s}_{n_1}^{\text{ext}}, \dots, \mathbf{s}_{n_\ell}^{\text{ext}})$. Однако $\mathbf{s}_{n'_i}^{\text{ext}} \upharpoonright m = \mathbf{s}_{n_i}^{\text{ext}} \upharpoonright m = \mathbf{s}_{n_i}$ для всех i , так что результат следует из леммы 4.10.2. А случай Σ_1^0 -формул легко сводится к уже рассмотренному. $\square$

Теперь доказывается следующая полезная теорема, раскрывающая суть данного преобразования формул. Заметим, что переменные a_i типа 1 входят в правые части соотношений (1) и (2) теоремы только через термы вида $\mathbf{gn}(a_i \upharpoonright m)$.

Теорема 4.10.5. Если $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a}) := \varphi(j_1, \dots, j_k; a_1, \dots, a_\ell)$ — ограниченная аналитическая формула, то эквивалентность

$$\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a}) \iff \overline{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{gn}(a_1 \upharpoonright m), \dots, \mathbf{gn}(a_\ell \upharpoonright m)) \quad (1)$$

имеет место для всех $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$, $\mathbf{a} \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\ell$, и $m \geq \widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{a})$.

Если же $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a})$ является Σ_1^0 -формулой, то эквивалентность

$$\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a}) \iff \exists m \overline{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{gn}(a_1 \upharpoonright m), \dots, \mathbf{gn}(a_\ell \upharpoonright m)) \quad (2)$$

имеет место для всех $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$ и $\mathbf{a} \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\ell$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$ и $\mathbf{a} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\ell}$. Для случая ограниченной формулы φ , рассмотрим произвольное значение $m \geq \widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{a})$, и положим $n_i = \mathbf{gn}(a_i \upharpoonright m)$ и $b_i = \mathbf{s}_{n_i}^{\text{ext}}$ для $i = 1, \dots, \ell$, и пусть $\mathbf{n} = \langle n_1, \dots, n_{\ell} \rangle$ и $\mathbf{b} = \langle b_1, \dots, b_{\ell} \rangle$. Тогда $\mathbf{a} \Vdash m = \mathbf{b} \Vdash m$, поэтому

$$\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a}) \iff \varphi(\mathbf{j}; \mathbf{b}) \quad \text{и} \quad \widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{b}).$$

по лемме 4.10.2. Более того, $\mathbf{lhs}_{n_1} = \dots = \mathbf{lhs}_{n_{\ell}} = m \geq \widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{a}) = \widehat{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{b})$, так что $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{b}) \iff \overline{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{n})$. Отсюда и следует результат.

Для случая Σ_1^0 -формулы $\varphi := \exists j' \psi(j', \mathbf{j}; \mathbf{a})$, где ψ — ограниченная формула, по определению $\overline{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{n}) := \exists j' < \mathbf{lh}(\mathbf{s}_{n_1}) \overline{\psi}(j', \mathbf{j}; \mathbf{n})$. Если $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a})$ выполнено, то мы имеем $\psi(j', \mathbf{j}; \mathbf{a})$ для некоторого $j' \in \mathbb{N}$. Пусть $m = 1 + \max\{j', \widehat{\psi}(j', \mathbf{j}; \mathbf{a})\}$. Тогда, по уже доказанному, мы получим $\overline{\psi}(j', \mathbf{j}; \mathbf{n})$, где $\mathbf{n} = \langle n_1, \dots, n_{\ell} \rangle$ и $n_i = \mathbf{gn}(a_i \upharpoonright m)$ для $i = 1, \dots, \ell$, так что $\overline{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{n})$ имеет место. Обратно, если $m \in \mathbb{N}$, $n_i = \mathbf{gn}(a_i \upharpoonright m)$ для $i = 1, \dots, \ell$, $\mathbf{n} = \langle n_1, \dots, n_{\ell} \rangle$, и $\overline{\varphi}(\mathbf{j}; \mathbf{n})$ выполнено, то мы имеем $\overline{\psi}(j', \mathbf{j}; \mathbf{n})$ для некоторого $j' < \mathbf{lh}(\mathbf{s}_{n_1})$, а потому и $\psi(j', \mathbf{j}; \mathbf{a})$ по уже доказанному, так что $\varphi(\mathbf{j}; \mathbf{a})$ имеет место. $\square$

Исторические и библиографические замечания

Причиной предпочтения пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (в частности, перед вещественной прямой $\mathbb{R}$) являются некоторые топологические свойства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, в частности, нульмерность (см. комментарий 2 в [29, с. 725]), но главным образом то обстоятельство, что структура $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ допускает использование простого языка аналитических формул для описания точечных множеств и их свойств (см. §4.5), что позволяет чрезвычайно упростить техническую сторону изложения. В то же время, пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ мало уступает вещественной прямой в плане геометрической наглядности, поскольку оно изоморфно «бэровской прямой», т. е. множеству всех иррациональных чисел $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ через известное соответствие $x \mapsto \frac{1}{|x(0)+1|} + \frac{1}{|x(1)+1|} + \frac{1}{|x(2)+1|} + \dots$, $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, использующее цепные дроби, или через более прямое построение, указанное в книге [1, с. 155]. «Бэровская прямая» $\mathbb{I}$ рассматривается как основная область, например, в лузинских «Лекциях» [135].

Проективные множества введены Н. Н. Лузиным (см. [129]) как «проективные множества Лебега», однако ссылка на Лебега здесь не соответствует истории вопроса; об этом см. подробнее в статье [52, §3.1].

Эффективные варианты иерархий классической дескриптивной теории восходят к работам Клини по теории рекурсии начала и середины 1950х годов. Наглядно связь обоих подходов была продемонстрирована в работах Аддисона [59, 60], где также были представлены доказательства эффективных вариантов некоторых классических теорем.

Глава 5

Первый проективный уровень, часть 1: основные структуры

Первый уровень проективной иерархии образован классами Σ_1^1 , Π_1^1 , Δ_1^1 и соответствующими эффективными классами, Σ_1^1 , Π_1^1 , Δ_1^1 , а также их параметризованными вариантами $\Sigma_1^1(\vec{a})$, $\Pi_1^1(\vec{a})$, $\Delta_1^1(\vec{a})$, где $\vec{a}$ — кортеж точек пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Этот уровень успешно исследуется в дескриптивной теории множеств с самого ее начала. В целом первому проективному уровню посвящена значительная часть нашей предыдущей монографии [19].

Настоящая глава излагает некоторые главные определения, результаты и технические методы в этой области, необходимые для понимания дальнейшего изложения, — хотя детали доказательств будут обычно опускаться, со ссылкой на соответствующие разделы книги [19]. В то же время, мы будем обращать особое внимание на те моменты, которые не имели большого значения в контексте тематики [19], но которые весьма важны в связи с абсолютностью и другими метаматематическими аспектами, которые будут представлены в следующих главах.

В конце главы рассматриваются более специальные вопросы, в частности, кодировка борелевских множеств точками бэровского пространства, а также теоремы абсолютности. В этом разделе мы отчасти выйдем на второй проективный уровень.

§ 5.1 А-множества

Мы начнем с результата, дающего альтернативное определение проективных классов Σ_1^1 и Π_1^1 как класса А-множеств и класса СА-множеств соответственно.

Напомним, что *суслинской системой* называется любое индексированное семейство $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ множеств F_s — обычно множеств данного польского пространства. Суслинская система $\mathfrak{F}$ множеств F_s *регулярна*, если она *монотонна* (т. е. $F_{s \wedge n} \subseteq F_s$ для всех s и n), *измельчающаяся* (т. е. для любой точки $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ диаметры множеств $F_{a \upharpoonright n}$ стремятся к 0), и *неисчезающая* (т. е. для каждой точки $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ пересечение $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_{a \upharpoonright m}$ непусто). Результатом *А-операции* над суслинской системой $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ объявляется множество

$$A[\mathfrak{F}] = A \cdot \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}} = \bigcup_{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_{a \upharpoonright m}.$$

Здесь по определению $a \upharpoonright m = \langle a(0), a(1), \dots, a(m-1) \rangle$ есть кортеж из m начальных членов бесконечной последовательности $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

А-множеством в данном польском пространстве называется любое множество, которое получается применением А-операции к какой-то суслинской системе замкнутых множеств этого пространства. Множества, дополнительные к А-множествам в данном пространстве, т. е. дополнения А-множеств, называются *СА-множествами*.

Теорема 5.1.1 (3.2.2, 3.2.4, 3.3.2, 7.4.1 в [19]). *В любом польском пространстве $\mathbb{X}$ следующие классы множеств (i) — (v) совпадают:*

- (i) *класс всех А-множеств;*
- (ii) *класс всех Σ_1^1 -множеств;*
- (iii) *класс всех множеств, которые можно получить применением А-операции к какой-то **регулярной** суслинской системе замкнутых множеств в $\mathbb{X}$;*
- (iv) *класс всех множеств, которые можно получить применением А-операции к какой-то суслинской системе $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ **борелевских** множеств в $\mathbb{X}$;*
- (v) *если $\mathbb{X}$ — бэровское произведение, то класс всех множеств, которые получаются применением А-операции к какой-то суслинской системе **открыто-замкнутых** множеств в $\mathbb{X}$.*

Если же $\mathbb{X}$ — бэровское произведение, и $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то следующие классы множеств (vi), (vii) совпадают:

- (vi) *класс всех $\Sigma_1^1(p)$ -множеств;*

(vii) *класс всех множеств, получаемых применением А-операции к какой-то регулярной суслинской системе $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$, которая сама имеет класс $\Delta_1^0(p)$ в том смысле, что множество $P_{\mathfrak{F}} = \{\langle s, x \rangle : s \in \mathbb{N}^{<\omega} \wedge x \in F_s\}$ принадлежит $\Delta_1^0(p)$.*

Доказательство (эскиз, см. подробнее в [19], где результат в отношении (vii) не столь точен). Чтобы вывести включение (iv) $\subseteq$ (ii), заметим, что множество $X = \mathbf{A}[\mathfrak{F}]$ равно проекции, т. е. непрерывному образу, множества

$$P = \{\langle x, a \rangle \in \mathbb{X} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall m (x \in F_{a \upharpoonright m})\}.$$

Однако P — борелевское множество, ибо $P = \bigcap_m \bigcup_{\text{lh } s = m} F_s \times [s]$, где $[s] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset x\}$, следовательно, и Σ_1^1 -множество по теореме 4.3.3, так что его проекция принадлежит тому же классу Σ_1^1 по той же теореме. В «эффективном» варианте того же утверждения, т. е. когда доказывается (vii) $\subseteq$ (vi), то же самое множество

$$P = \{\langle x, a \rangle : \forall m (x \in F_{a \upharpoonright m})\} = \{\langle x, a \rangle : \forall m (\langle \text{gn}(a \upharpoonright m), x \rangle \in P_{\mathfrak{F}})\}$$

принадлежит классу $\Pi_1^0(p)$, так что X принадлежит $\Sigma_1^1(p)$.

Вывод соотношения (ii) $\subseteq$ (v) мы проведем для пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. (Случай произвольного бэровского произведения аналогичен.) Рассмотрим произвольное Σ_1^1 -множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Согласно предложению 4.5.2, X есть $\Sigma_1^1(p)$ для некоторого параметра $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, т. е. X определимо Σ_1^1 -формулой с параметром p . Другими словами, найдется такая Π_1^0 -формула $\varphi(x, y, z)$, что $X = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists y \varphi(x, y, p)\}$. Отсюда, по теореме 4.10.5 (в двойственной форме), найдется ограниченная формула $\overline{\varphi}(i, j, k)$, для которой

$$X = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists y \forall m \overline{\varphi}(\text{gn}(x \upharpoonright m), \text{gn}(y \upharpoonright m), \text{gn}(p \upharpoonright m))\}. \quad (1)$$

Теперь положим $F_s = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \overline{\varphi}(\text{gn}(x \upharpoonright m), s, \text{gn}(p \upharpoonright m))\}$ для каждого кортежа $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, где $m = \text{lh } s$. Множества F_s , очевидно, открыто-замкнуты, а с другой стороны, из (1) следует, что $X = \mathbf{A}[\mathfrak{F}]$, где $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$. Чтобы получить еще и регулярность, переопределяем $F'_s = \bigcap_{t \subseteq s} F_t$.

В «эффективном» варианте, т. е. когда доказывается включение (vi) $\subseteq$ (vii), мы сразу начинаем с $\Sigma_1^1(p)$ -множества X и Π_1^0 -формулы φ таких, как выше. Проверка того, что полученная система $\mathfrak{F}$ имеет класс $\Delta_1^0(p)$ в смысле (vii), при помощи преобразований из п. 4.8 не вызывает затруднений. $\square$

Определение 5.1.2. Пусть $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ — суслинская система множеств F_s некоторого польского пространства $\mathbb{X}$. Каждой точке

$x \in \mathbb{X}$ сопоставляется сечение $F^x = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : x \in F_s\}$, и отображение $x \mapsto F^x$ из $\mathbb{X}$ в $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ называется *ассоциированным отображением* для системы $\mathfrak{F}$. $\square$

Понятно, что $F_s = \{x \in \mathbb{X} : s \in F^x\}$, так что суслинские системы и ассоциированные отображения находятся во взаимно однозначном соответствии. При этом 1) непрерывные отображения соответствуют системам открыто-замкнутых множеств F_s , и 2) регулярные системы соответствуют случаю, когда каждое множество F^x является деревом в $\mathbb{N}^{<\omega}$. С другой стороны, множество $A = \mathbf{A}[\mathfrak{F}]$ тождественно множеству всех таких точек $x \in \mathbb{X}$, что сечение $F^x \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ целиком содержит некоторую *ветвь*, т. е. множество вида $\{a \upharpoonright m : m \in \mathbb{N}\}$, где $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Это заставляет нас уделить внимание деревьям в $\mathbb{N}^{<\omega}$.

§5.2 Деревья и ранги

Напомним, что $2^{<\omega} \subsetneq \mathbb{N}^{<\omega}$ — множество всех кортежей натуральных чисел; при этом $\text{lh } s$ есть *длина* $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $n \in \mathbb{N}$ то $s^\wedge n \in \mathbb{N}^{<\omega}$ получается присоединением n к s в качестве самого правого члена. Запись $s \subset t$ означает, что кортеж t — собственное продолжение кортежа s . Непустое множество $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ называется *деревом*, если $t \in T$ выполнено всякий раз когда $s \in T$, $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $t \subset s$. Каждое непустое дерево содержит *пустой кортеж* Λ .

Определение 5.2.1. Обозначим **Tree** множество всех деревьев $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$. Если $s \in T \in \mathbf{Tree}$, то s называется *вершиной* дерева T .

Вершина $s \in T$ называется *точкой фундированности* дерева T , если T не имеет *бесконечных ветвей*, проходящих через s , т. е. нет таких бесконечных последовательностей $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $s \subset a$ и $a \upharpoonright m \in T$ для всех m . Множество T_{wf} всех таких вершин называется *областью фундированности* дерева T . Понятно, что если $s, t \in T$ и $s \subseteq t$, то из $s \in T_{\text{wf}}$ следует $t \in T_{\text{wf}}$.

Дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ называется *фундированным*, если $T = T_{\text{wf}}$, т. е. все $s \in T$ являются точками фундированности. $\square$

Эквивалентно, дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ фундировано, если и только если множество $\llbracket T \rrbracket = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall m (x \upharpoonright m \in T)\}$ — пустое. Далее, вершина $s \in T$ принадлежит T_{wf} , если и только если *обрезанное дерево* $T \upharpoonright_s = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : s^\wedge t \in T\}$ фундировано. Заметим, что $T = T \upharpoonright_\Lambda$.

Упражнение 5.2.2. Докажите, что отношение $\preceq$, обратное к $\subseteq$ (т. е. $s \preceq t$, если $t \subseteq s$) фундировано на T_{wf} в смысле определения §1.5. Отсюда следует, что дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ фундировано в смысле определения 5.2.1, если и только если отношение $\preceq$ фундировано на T в смысле определения §1.5. $\square$

Согласно теореме 2.5.3, это означает, что каждой вершине $s \in T_{\text{wf}}$ единственным образом сопоставляется ординал $|s|_T < \omega_1$, называемый *рангом* вершины s в дереве T , так, что $|s|_T = \sup_{t \in T, s \subset t} (|t|_T + 1)$ для всех $s \in T_{\text{wf}}$. Это соотношение можно переписать в более удобном виде, как соединение следующих двух свойств:

- (1) если s принадлежит множеству $\text{Max } T$ всех концевых, т. е. Σ -максимальных вершин дерева T , то $|s|_T = 0$;
- (2) если $s \in T_{\text{wf}} \setminus \text{Max } T$ то $|s|_T = \sup_{s \wedge k \in T} (|s \wedge k|_T + 1)$.¹

Мы дополнительно определяем

- (3) если $s \in T \setminus T_{\text{wf}}$, то $|s|_T = \infty$, где символ бесконечности ∞ понимается как специальное значение, большее, чем любой ординал, и символизирующее нефундированность;²
- (4) $|T| = |\Lambda|_T$ (ранг самого дерева T).

Лемма 5.2.3. Пусть $T \in \mathbf{Tree}$. Тогда

- (i) если $s \in T$ то $|s|_T = |T \upharpoonright_s|$ — в частности, $|\Lambda|_T = |T|$;
- (ii) если $u \in T_{\text{wf}}$, то $|u|_T = \{|v|_T : u \subset v \in T\}$;
- (iii) если дерево T фундировано то $|T| = \{|s|_T : s \in T, s \neq \Lambda\}$, т. е. другими словами ко всякому ординалу $\xi < |T|$ найдется вершина $s \in T$, $s \neq \Lambda$, для которой $|s|_T = |T \upharpoonright_s| = \xi$.

Доказательство (эскиз). (i) Если $s \notin T_{\text{wf}}$ то по определению $|s|_T = |T \upharpoonright_s| = \infty$, поэтому предполагаем, что $s \in T_{\text{wf}}$. Доказываем трансфинитной индукцией по $|s|_T$. Если $|s|_T = 0$ то $s \in \text{Max } T$, и тогда $T \upharpoonright_s = \{\Lambda\}$, так что и $|T \upharpoonright_s| = 0$. Пусть теперь $s \notin \text{Max } T$. Тогда

$$|s|_T = \sup_{s \wedge k \in T} (|s \wedge k|_T + 1) = \sup_{s \wedge k \in T} (|T \upharpoonright_{s \wedge k}| + 1) = \sup_{\langle k \rangle \in T \upharpoonright_s} (|\langle k \rangle|_T + 1),$$

по индуктивному предположению, так что $|s|_T = |\Lambda|_{T \upharpoonright_s} = |T \upharpoonright_s|$.

(ii) Доказываем трансфинитной индукцией по $|u|_T$. Если $|u|_T = 0$ то u — концевая вершина дерева T , так что в обеих частях равенства из (ii) стоит $0 = \emptyset$. Пусть $|u|_T > 0$. Если $u \subset v \in T$, то мы имеем $u \wedge k \subseteq v$ для какого-то k , именно, $k = v \upharpoonright_{1h u}$, так что по индуктивному предположению $|u \wedge k|_T \geq |v|_T$. Однако $|u \wedge k|_T < |u|_T$ по определению (2), так что $|v|_T < |u|_T$. Обратно, пусть $\xi < |u|_T$;

¹ Если принять, что $\sup$ пустого множества равен 0, то равенство из (2) становится тривиально справедливым и при $s \in \text{Max } T$.

² Если теперь мы примем, что $\infty + 1 = \infty$, то с учетом сказанного в сноске 1 равенство из (2) будет иметь место для всех $s \in T$, в том числе при $s \notin T_{\text{wf}}$.

требуется найти кортеж $v \in T$, для которого $u \subset v$ и $|v|_T = \xi$. По определению (2) найдется кортеж вида $u^\wedge k \in T$ ($k \in \mathbb{N}$), для которого $\xi \leq |T|u^\wedge k$. Если на самом деле $\xi = |T|u^\wedge k$, то просто берем $v = u^\wedge k$. Если же $\xi < |T|u^\wedge k$ строго, то по индуктивному предположению имеется кортеж $v \in T$, для которого $u^\wedge k \subset v$ и $|v|_T = \xi$. Но тогда и $u \subset v$, что и требовалось.

Наконец, (iii) следует из (ii) при $u = \Lambda$. $\square$

По определению, мы имеем $|T| = \infty$ для любого нефундированного дерева T , что не учитывает особенности его фундированной части T_{wf} . Поэтому определяем

$$(5) \quad |T|_{\text{св}} = \sup_{s \in T_{\text{wf}} \setminus \{\Lambda\}} (|s|_T + 1), \text{ ранг по Кантору – Бендиксону.}$$

В любом случае мы имеем $|T|_{\text{св}} < \omega_1$.

Упражнение 5.2.4. Докажите следующее.

(1) $|T|_{\text{св}} = |T|$ для любого фундированного дерева T . (Именно для этого кортеж Λ удален в (5) из области суммирования!)

(2) Если $T_{\text{wf}} = \emptyset$ либо $T = T_{\text{wf}} = \{\Lambda\}$ то $|T|_{\text{св}} = 0$. $\square$

Определение 5.2.5. Обозначим через $\mathbf{WFT}$ и $\mathbf{IFT} = \mathbf{Tree} \setminus \mathbf{WFT}$ множества³ всех фундированных, и соответственно нефундированных, деревьев $T \in \mathbf{Tree}$. Если $\xi < \omega_1$, то определяем

$$\mathbf{WFT}_\xi = \{T \in \mathbf{WFT} : |T| = \xi\} \quad \text{и} \quad \mathbf{IFT}_\xi = \{T \in \mathbf{IFT} : |T|_{\text{св}} = \xi\},$$

и далее $\mathbf{WFT}_{<\xi} = \bigcup_{\eta < \xi} \mathbf{WFT}_\eta$, и $\mathbf{IFT}_{<\xi} = \bigcup_{\eta < \xi} \mathbf{IFT}_\eta$. $\square$

Лемма 5.2.6. Если $\xi < \omega_1$ то $\mathbf{WFT}_\xi \neq \emptyset$ и $\mathbf{IFT}_\xi \neq \emptyset$.

Доказательство. Для множеств $\mathbf{WFT}_\xi$ рассуждаем индукцией по ξ . Если $\xi = 0$, то дерево $T = \{\Lambda\}$ по определению принадлежит множеству $\mathbf{WFT}_0$. Пусть теперь $0 < \xi < \omega_1$. По индуктивному предположению, для каждого $\eta < \xi$ имеется дерево $T(\eta) \in \mathbf{WFT}_\eta$. Возьмем произвольное перечисление $\xi = \{\eta : \eta < \xi\} = \{\eta_n : n \in \mathbb{N}\}$ множества всех меньших ординалов. Тогда

$$T(\xi) = \{\Lambda\} \cup \{n^\wedge s : n \in \mathbb{N} \wedge s \in T(\eta_n)\} \in \mathbf{WFT}_\xi, \quad \text{и}$$

$$T'(\xi) = \{\Lambda\} \cup \{0^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n+1)^\wedge s : s \in T(\eta_n)\} \in \mathbf{IFT}_\xi,$$

где 0^n — кортеж из n нулей. $\square$

Сверх их роли в теории А-множеств и СА-множеств (о чем см. следующий параграф), множества $\mathbf{WFT}$ и $\mathbf{WFT}_\xi$ систематически используются в дескриптивной теории множеств для кодировки счетных ординалов, т. е. если $\xi < \omega_1$, то любое дерево $T \in \mathbf{WFT}_\xi$ можно рассматривать как код ординала ξ .

³ $\mathbf{WFT}$ и $\mathbf{IFT}$ — от well-founded tree и ill-founded tree.

§ 5.3 Конституанты

Следующее определение вводит *разложение на конституанты* для Σ_1^1 -множеств и Π_1^1 -множеств, особенно важное как техническое средство изучения структуры класса Π_1^1 .

Определение 5.3.1. Пусть $\mathbb{X}$ — польское пространство, а борелевские множества $F_s \subseteq \mathbb{X}$ ($s \in \mathbb{N}^{<\omega}$) образуют регулярную суслинскую систему $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$. Рассматривается множество

$$A = \mathbf{A}[\mathfrak{F}] = \bigcup_{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_{a \upharpoonright m}$$

— класса Σ_1^1 согласно теореме 5.1.1, по идущей из классической дескриптивной теории множеств традиции называемое *внутренним*, и дополнительное Π_1^1 -множество $C = \mathbf{C}[\mathfrak{F}] = \mathbb{X} \setminus A$, называемое *внешним*. Из-за регулярности каждое сечение $F^x = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : x \in F_s\}$, где $x \in \mathbb{X}$, — дерево в $\mathbb{N}^{<\omega}$, и при этом ясно, что

$$A = \{x \in \mathbb{X} : F^x \in \mathbf{IFT}\} \quad \text{и} \quad C = \{x \in \mathbb{X} : F^x \in \mathbf{WFT}\}.$$

Для любого ординала $\xi < \omega_1$, положим

$$\begin{aligned} C_\xi &= \mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}] = \{x \in \mathbb{X} : \text{дерево } F^x \text{ фундировано и } |F^x| = \xi\}; \\ A_\xi &= \mathbf{A}_\xi[\mathfrak{F}] = \{x \in \mathbb{X} : F^x \text{ не фундировано и } |F^x|_{\text{св}} = \xi\}. \end{aligned}$$

Эти множества A_ξ и C_ξ называются *конституантами* соответственно Σ_1^1 -множества $A = \mathbf{A}[\mathfrak{F}]$ и Π_1^1 -множества $C = \mathbf{C}[\mathfrak{F}]$. Понятно, что $C = \bigcup_{\xi < \omega_1} C_\xi$ и конституанты C_ξ попарно дизъюнкты, и соответственно $A = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$ и конституанты A_ξ попарно дизъюнкты. Конституанты A_ξ называются *внутренними*, а C_ξ — *внешними*.

Также определяются *аппроксимации*

$$C_{<\xi} = \mathbf{C}_{<\xi}[\mathfrak{F}] = \bigcup_{\eta < \xi} C_\eta \quad \text{и} \quad A_{<\xi} = \mathbf{A}_{<\xi}[\mathfrak{F}] = \bigcup_{\eta < \xi} A_\eta$$

множеств $C = \mathbf{C}[\mathfrak{F}]$ и $A = \mathbf{A}[\mathfrak{F}]$ соответственно. □

Определение 5.2.5, если проанализировать его с этой точки зрения, доставляет хороший пример разложения на конституанты.

Пример 5.3.2. В польском пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$, множество **Tree** всех деревьев замкнуто, а потому само является польским пространством. Множества $F_s = \{T \in \mathbf{Tree} : s \in T\}$ ($s \in \mathbb{N}^{<\omega}$) открыто-замкнуты в **Tree**, и сечения $F^T = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : T \in F_s\}$ удовлетворяют равенству $F^T = T$. Поэтому соответствующее множество $C = \mathbf{C}[\mathfrak{F}] \subseteq \mathbf{Tree}$ (где $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$) тождественно множеству **WFT**

всех фундированных деревьев, а множество $A = \mathbf{A}[\mathfrak{F}] = \mathbf{Tree} \setminus C$ — множеству $\mathbf{IFT}$ всех нефундированных деревьев.

Каждая же из конститuant A_ξ (соответственно C_ξ) в этом случае тождественна множеству $\mathbf{IFT}_\xi$ (соответственно, множеству $\mathbf{WFT}_\xi$) из определения 5.2.5. То же самое верно и для аппроксимаций. $\square$

Отметим следующие свойства конститuant и аппроксимаций.

Теорема 5.3.3 (лемма 4.3.4 в [19]). *В условиях определения 5.3.1 все множества A_ξ, C_ξ являются борелевскими. В частности, множества $\mathbf{IFT}_\xi$ и $\mathbf{WFT}_\xi$ из определения 5.2.5 — борелевские.* $\square$

Теорема 5.3.4 (ограничение индексов, теорема 4.4.1 в [19]). *В условиях определения 5.3.1, для любого Σ_1^1 -множества $Y \subseteq C$ имеется такой ординал $\lambda < \omega_1$, что $Y \subseteq C_{<\lambda} = \bigcup_{\xi < \lambda} C_\xi$.*

Следовательно, множество C является борелевским, если и только если $C = C_{<\lambda}$ для некоторого ординала $\lambda < \omega_1$, т. е. все конститuantы C_ξ , $\xi \geq \lambda$, пусты.

Доказательство. Результат изложен в книге [19] для случая, когда суслинская система $\mathfrak{F}$ в определении 5.3.1 образована замкнутыми множествами. Однако результат легко обобщается на регулярные суслинские системы $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ произвольных борелевских множеств F_s . Именно, в обозначениях 5.3.1, отображение $x \mapsto F^x$ из $\mathbb{X}$ в $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ — борелевское, так как его график $P = \{\langle x, F^x \rangle : x \in \mathbb{X}\}$ удовлетворяет $P = \bigcap_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}} P_s$, где каждое множество

$$P_s = \{\langle x, T \rangle \in \mathbb{X} \times \mathbf{Tree} : s \in T \iff x \in F_s\}$$

— борелевское из-за борелевости множеств F_s . Значит, множество $Y' = \{F^x : x \in Y\}$ удовлетворяет $Y' \subseteq \mathbf{WFT}$ и имеет класс Σ_1^1 согласно теореме 4.3.3 как борелевский прообраз Σ_1^1 -множества $\mathbf{IFT}$.

Но суслинская система примера 5.3.2 образована открыто-замкнутыми множествами, так что можно применить результат в частной форме. Это приносит ординал $\lambda < \omega_1$, для которого $Y' \subseteq \mathbf{WFT}_{<\lambda}$. Но тогда и $Y \subseteq C_{<\lambda}$, так как $C_\xi = \{x : F^x \in \mathbf{WFT}_\xi\}$. $\square$

Следствие 5.3.5 (теорема Суслина, 4.4.5 в [19]). *Если $\mathbb{X}$ — польское пространство, то $\mathbf{Bor}(\mathbb{X}) = \Delta_1^1[\mathbb{X}]$.* $\square$

Этот результат позволяет рутинно использовать Δ_1^1 для обозначения класса всех борелевских множеств в польских пространствах (или в том польском пространстве, которое рассматривается).

Следствие 5.3.6 (13.1.1 в [19]). *Любое множество класса Σ_1^1 , Π_1^1 , или Σ_2^1 в польском пространстве есть объединение борелевских множеств в числе не более $\aleph_1$.* $\square$

§ 5.4 Эффективная определимость конститuant и некоторых других множеств

Понятно, что множества, введенные определением 5.2.5, расположены в пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$, которое, не являясь бэровскими произведением в узком смысле § 4.2, отнесено к *обобщенным* бэровским произведениям в определении 4.6.2. Следующая теорема оценивает класс этих множеств — см. об этом в §§ 4.6 и 4.7.

Теорема 5.4.1. (i) *Множество **Tree** всех деревьев $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ принадлежит классу Π_1^0 (в пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$), и имеется каноническая⁴ Π_1^0 -формула $\text{tree}(T)$ расширенного языка из § 4.6, определяющая **Tree**, т. е. $\text{tree}(T) \iff T \in \mathbf{Tree}$ для всех $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$.*

(ii) *Множество **IFT** и следующие множества*

$$\begin{aligned} L &= \{ \langle S, T \rangle \in \mathbf{Tree} \times \mathbf{Tree} : |S| \leq |T| \}, \\ M &= \{ \langle S, T \rangle \in \mathbf{Tree} \times \mathbf{Tree} : T \in \mathbf{IFT} \vee |S| < |T| \}, \end{aligned}$$

принадлежат классу Σ_1^1 , и имеются канонические Σ_1^1 -формулы расширенного языка, соответственно, $\text{ift}(T)$, $\varphi_L(S, T)$, $\varphi_M(S, T)$, определяющие эти множества в том же смысле, что и в (i).⁵

(iii) *Множества **WFT**, $\{ \langle S, t \rangle : S \in \mathbf{Tree} \wedge t \in S_{\mathbf{wf}} \}$, а также*

$$\begin{aligned} L_{<} &= \{ \langle S, T \rangle \in \mathbf{WFT} \times \mathbf{WFT} : |S| < |T| \}, \text{ и} \\ L_{\leq} &= \{ \langle S, T \rangle \in \mathbf{WFT} \times \mathbf{WFT} : |S| \leq |T| \}, \end{aligned}$$

принадлежат классу Π_1^1 , и имеются канонические Π_1^1 -формулы, соответственно, $\text{wft}(T)$, $\varphi_{\mathbf{wf}}(S, t)$, $\varphi_{<}(S, T)$, $\varphi_{\leq}(S, T)$, определяющие эти множества в том же смысле, что и выше, т. е. например $t \in S_{\mathbf{wf}} \iff \varphi_{\mathbf{wf}}(S, t)$ для всех $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ и $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

⁴ Как правило, доказывая принадлежность того или иного точечного множества X к определенному проективному или эффективному классу (в данном случае Π_1^0), мы всегда можем получить, хотя бы в принципе, некоторую конкретную формулу соответствующего типа, которая определяет это множество X (т. е. в данном случае Π_1^0 -формулу). Такие конкретные формулы называются *каноническими*. Вообще говоря, логическим основам теории множеств не противоречит то, что доказательство принадлежности некоторого множества X к определенному классу не приносит даже в принципе никакой конкретной определяющей формулы. Именно поэтому мы в некоторых случаях будем подчеркивать существование канонических формул.

⁵ Неравенство $|S| \leq |T|$ в определении L означает, что имеет место одно из двух: либо (1) $T \in \mathbf{IFT}$ а $S \in \mathbf{Tree}$ — любое дерево, либо (2) $S, T \in \mathbf{WFT}$ и $|S| \leq |T|$. Соответственно, соотношение $T \in \mathbf{IFT} \vee |S| < |T|$ в определении множества M означает, что либо (1) как выше, либо (2') $S, T \in \mathbf{WFT}$ и $|S| < |T|$.

Доказательство (эскиз). (i) Используя ограниченные формулы из примера 4.6.5 для $s \subset t$ и $s \subset x$, мы вводим Π_1^0 -формулу

$$\mathbf{tree}(T) := \forall s \forall t (s \subset t \wedge t \in T \implies s \in T),$$

выражающую то, что множество $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ является деревом. Теперь определим $\mathbf{wft}(T)$ как формулу

$$\forall b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\mathbf{tree}(T) \wedge \exists s (s \notin T \wedge s \subset b)).$$

Понятно, что $\mathbf{wft}(T) \iff T \in \mathbf{WFT}$. Далее, вся подформула (...) под квантором $\forall b$ — арифметическая, поэтому вся $\mathbf{wft}$ является *практически* Π_1^1 -формулой в смысле правила 4.8.3. В качестве же канонической Σ_1^1 -формулы $\mathbf{ift}(T)$ для множества $\mathbf{IFT}$ можно взять

$$\exists b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\mathbf{tree}(T) \wedge \forall s (s \subset b \implies s \in T)).$$

О результате для множеств $\mathbf{IFT}$, L , M из (ii), и о соответствующих канонических формулах см. теорему 7.2.1 в книге [19].

Вывод (iii) на базе (ii) довольно прост. Сначала берем $\mathbf{wft}(T) := \neg \mathbf{ift}(T)$ и ссылаемся на правило 4.8.5. Далее, $t \in S_{\mathbf{wf}}$ равносильно $S|_t \in \mathbf{WFT}$, т. е. формуле $\mathbf{wft}(S|_t)$, которую записываем в виде

$$\forall U (U = S|_t \implies \mathbf{wft}(U)), \quad (1)$$

где подформула $U = S|_t$ — арифметическая, см. пример 4.6.5. После этого мы относим формулу (1) к типу Π_1^1 на основе правил из § 4.8. Наконец, касательно множеств $L_{<}$ и $L_{\leq}$, мы берем формулы

$$\begin{aligned} \varphi_{<}(S, T) &:= \mathbf{wft}(S) \wedge \mathbf{wft}(T) \wedge \neg \varphi_L(S, T), \\ \varphi_{\leq}(S, T) &:= \mathbf{wft}(S) \wedge \mathbf{wft}(T) \wedge \neg \varphi_M(S, T), \end{aligned}$$

где φ_L и φ_M — формулы из (ii). □

Упражнение 5.4.2. Докажите, что для формул

$$\begin{aligned} \varepsilon(S, T) &:= \varphi_L(S, T) \wedge \varphi_L(T, S) \quad (\text{типа } \Sigma_1^1), \\ \varepsilon'(S, T) &:= \varphi_{\leq}(S, T) \wedge \varphi_{\leq}(T, S) \quad (\text{типа } \Pi_1^1), \end{aligned}$$

определенных на базе формул теоремы 5.4.1, выполнено следующее: если $S, T \in \mathbf{Tree}$, то

$$\varepsilon(S, T) \iff S, T \in \mathbf{IFT} \vee (S, T \in \mathbf{WFT} \wedge |T| = |S|);$$

$$\varepsilon'(S, T) \iff S, T \in \mathbf{WFT} \wedge |T| = |S|. \quad \square$$

Результат о борелевости, т. е. классе Δ_1^1 конститuant (теорема 5.3.3) уточняется следующей важной «эффективной» теоремой.

Теорема 5.4.3 (теорема 7.4.1 в [19]). *Допустим, что $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ является регулярной суслинской системой множеств некоторого бэровского произведения $\mathbb{X}$ — класса $\Delta_1^1(p)$ в том смысле, что имеются Σ_1^1 -формула $\Phi_{\mathfrak{F}}(s, x)$ и Π_1^1 -формула $\Psi_{\mathfrak{F}}(s, x)$, обе с единственным параметром p , определяющие множество $P_{\mathfrak{F}} = \{\langle s, x \rangle : s \in \mathbb{N}^{<\omega} \wedge x \in F_s\}$, так что*

$$P_{\mathfrak{F}} = \{\langle s, x \rangle \in \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \Phi_{\mathfrak{F}}(s, x)\} = \{\langle s, x \rangle \in \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \Psi_{\mathfrak{F}}(s, x)\}.$$

Тогда найдутся зависящие только от $\Phi_{\mathfrak{F}}, \Psi_{\mathfrak{F}}$ канонические Σ_1^1 -формулы $\bar{\sigma}_{\mathfrak{F}}(x)$, $\sigma_{\mathfrak{F}}(T, x)$, $\sigma'_{\mathfrak{F}}(T, x)$, и Π_1^1 -формулы $\bar{\pi}_{\mathfrak{F}}(x)$, $\pi_{\mathfrak{F}}(T, x)$, $\pi'_{\mathfrak{F}}(T, x)$, все с единственным параметром p , и такие, что для любых $x \in \mathbb{X}$, $\xi < \omega_1$, и дерева $T \in \mathbf{WFT}_{\xi}$ выполнены соотношения:

- (i) $x \in C[\mathfrak{F}] \iff \bar{\pi}_{\mathfrak{F}}(x)$ и $x \in A[\mathfrak{F}] \iff \bar{\sigma}_{\mathfrak{F}}(x)$;
- (ii) $x \in C_{\xi}[\mathfrak{F}] \iff \sigma_{\mathfrak{F}}(T, x) \iff \pi_{\mathfrak{F}}(T, x)$;
- (iii) $x \in A_{\xi}[\mathfrak{F}] \iff \sigma'_{\mathfrak{F}}(T, x) \iff \pi'_{\mathfrak{F}}(T, x)$.

Доказательство. Будем считать, что $\mathbb{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; случай произвольного несчетного бэровского произведения отличается лишь большей громоздкостью. Положим $T_{\mathfrak{F}}(x) = \{s : \langle s, x \rangle \in P_{\mathfrak{F}}\}$ для $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(i) Если $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ то из-за регулярности системы $\mathfrak{F}$ множество $T_{\mathfrak{F}}(x)$ — дерево в $\mathbb{N}^{<\omega}$, и по определению $x \in C[\mathfrak{F}]$ равносильно $T_{\mathfrak{F}}(x) \in \mathbf{WFT}$. Соотношение $T_{\mathfrak{F}}(x) \in \mathbf{WFT}$ можно записать в виде

$$\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \exists s \in \mathbb{N}^{<\omega} (s \subset a \wedge s \notin T_{\mathfrak{F}}(x)). \quad (1)$$

Заменив здесь $s \notin T_{\mathfrak{F}}(x)$ на $\langle s, x \rangle \notin P_{\mathfrak{F}}$, и это выражение — на $\neg \Phi(s, x)$, а отношение $s \subset a$ — формулой примера 4.6.5, а затем воспользовавшись правилами из § 4.8, мы находим, что (1) является практически Π_1^1 -формулой — ее (а точнее, результат ее приведения к Π_1^1 -виду) берем в роли $\bar{\pi}_{\mathfrak{F}}(x)$, а ее отрицание — в роли $\bar{\sigma}_{\mathfrak{F}}(x)$.

(ii) Согласно результату упражнения 5.4.2, если $\xi < \omega_1$ и $T \in \mathbf{WFT}_{\xi}$, а $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ произвольно, то

$$x \in C_{\xi}[\mathfrak{F}] \iff C_{\xi}[\mathfrak{F}] \in \mathbf{WFT}_{\xi} \iff \varepsilon(T, T_{\mathfrak{F}}(x)) \iff \varepsilon'(T_{\mathfrak{F}}(x), T).$$

Однако, используя правила 4.8.6 и 4.8.4, нетрудно убедиться, что $\varepsilon(T, S)$ является практически Σ_1^1 -формулой. В самом деле, чтобы элиминировать вставку $T_{\mathfrak{F}}(x)$, перепишем $\varepsilon(T, T_{\mathfrak{F}}(x))$ в виде

$$\exists S (S = T_{\mathfrak{F}}(x) \wedge \varepsilon(T, S))$$

а затем заменим равенство $S = T_{\mathfrak{F}}(x)$ практически Σ_1^1 -формулой

$$\forall t \in \mathbb{N}^{<\omega} ((\Psi(t, x) \implies t \in S) \wedge (t \in S \implies \Phi(t, x))).^6$$

Итак, в качестве $\sigma_{\mathfrak{F}}(T, x)$ можно взять формулу $\varepsilon(T, T_{\mathfrak{F}}(x))$.

Формула же $\pi_{\mathfrak{F}}(T, x)$ тем же способом извлекается из практически Π_1^1 -формулы $\varepsilon'(T_{\mathfrak{F}}(x), T)$, которую следует переписать в виде

$$\forall S (S = T_{\mathfrak{F}}(x) \implies \varepsilon'(T, S)).$$

(iii) Здесь вывод базируется на следующем факте, несложное доказательство которого мы оставляем читателю.

(*) Если $\xi < \omega_1$, $T \in \mathbf{WFT}_{\xi}$, а $S \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ — произвольное дерево, то $S \in \mathbf{IFT}_{\xi}$, если и только если $S \notin \mathbf{WFT}_{\xi}$ и

$$\left. \begin{aligned} \forall v \in T \setminus \{\Lambda\} \exists u \in S (|v|_T = |u|_S) \wedge \\ \wedge \forall u \in S (|T| \leq |u|_S \vee \exists v \in T \setminus \{\Lambda\} (|v|_T = |u|_S)) \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Обозначим формулу (2) через $\Gamma(S, T)$. Для оценки ее сложности нам потребуются формулы

$$\begin{aligned} \chi(u, S, T) &:= u \in S \wedge \varphi_L(T, S \upharpoonright_u), \\ \chi'(u, S, T) &:= u \in S \wedge \neg \varphi_M(S \upharpoonright_u, T), \\ \psi(u, S, v, T) &:= u \in S \wedge v \in T \wedge \varepsilon(S \upharpoonright_u, T \upharpoonright_v), \\ \psi'(u, S, v, T) &:= u \in S \wedge v \in T \wedge \varepsilon'(S \upharpoonright_u, T \upharpoonright_v), \end{aligned}$$

где ε и ε' — формулы из упражнения 5.4.2. Отметим, что ψ и χ являются практически Σ_1^1 -формулами а ψ' и χ' — соответственно, практически Π_1^1 -формулами: вставки $S \upharpoonright_u$ и $T \upharpoonright_v$ элиминируются как указано в доказательстве теоремы 5.4.1, вывод (iii) из (ii). И при этом для любых деревьев $T \in \mathbf{WFT}$ и S и любых $u \in S$ и $v \in T$:

$$\left. \begin{aligned} \chi(u, S, T) &\iff \chi'(u, S, T) \iff |T| \leq |u|_S; \\ \psi(u, S, v, T) &\iff \psi'(u, S, v, T) \iff |u|_S = |v|_T. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Поэтому в указанном случае формула $\Gamma(S, T)$ эквивалентна любой из следующих двух формул:

⁶ Заметьте, что для записи равенства $S = T_{\mathfrak{F}}(x)$ Σ_1^1 -формулой нужны обе формулы, $\Phi_{\mathfrak{F}}$ (типа Σ_1^1) и $\Psi_{\mathfrak{F}}$ (типа Π_1^1), определяющие одно и то же множество $P_{\mathfrak{F}}$; каждая из них в отдельности и сама по себе искомого результата не даст.

$$\begin{aligned}
\gamma(S, T) &:= \forall v \in T \setminus \{\Lambda\} \exists u \in S \psi(u, S, v, T) \wedge \\
&\quad \wedge \forall u \in S (\chi(u, S, T) \vee \exists v \in T \setminus \{\Lambda\} \psi(u, S, v, T)); \\
\gamma'(S, T) &:= \forall v \in T \setminus \{\Lambda\} \exists u \in S \psi'(u, S, v, T) \wedge \\
&\quad \wedge \forall u \in S (\chi'(u, S, T) \vee \exists v \in T \setminus \{\Lambda\} \psi'(u, S, v, T));
\end{aligned}$$

первая из которых является практически Σ_1^1 -формулой согласно правилам § 4.8, а вторая — практически Π_1^1 -формулой. Это позволяет нам взять в качестве $\sigma'_{\mathfrak{F}}(T, x)$ формулу $\neg \pi_{\mathfrak{F}}(T, x) \wedge \gamma(T_{\mathfrak{F}}(x), T)$, а в качестве $\pi'_{\mathfrak{F}}(T, x)$ формулу $\neg \sigma_{\mathfrak{F}}(T, x) \wedge \gamma'(T_{\mathfrak{F}}(x), T)$, в которых $T_{\mathfrak{F}}(x)$ элиминируется как указано выше. $\square$

§ 5.5 Решета

Иной подход к множествам первого проективного уровня в классической дескриптивной теории множеств был связан с решетами. Главный момент здесь состоит в том, что множество $\mathbb{N}^{<\omega}$ всех кортежей натуральных чисел, вместо порядка по продолжению $\subseteq$, оснащается *порядком Лузина – Серпинского* $<_{\text{лс}}$, который определяется на $\mathbb{N}^{<\omega}$ так, что $s <_{\text{лс}} t$, когда

- либо найдется такое число $i < \min\{\text{lh } s, \text{lh } t\}$, что $s(i) < t(i)$, но $s \upharpoonright i = t \upharpoonright i$,
- либо кортеж s — собственное продолжение кортежа t .

Пустой кортеж Λ — $<_{\text{лс}}$ -наибольший элемент в $\mathbb{N}^{<\omega}$, а убрав его, мы получаем множество $\mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}$, линейно упорядоченное отношением $<_{\text{лс}}$ подобно множеству рациональных чисел $\mathbb{Q}$. При этом справедливо

Предложение 5.5.1. *Дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ фундировано, если и только если $T \setminus \{\Lambda\}$ вполне упорядочено порядком $<_{\text{лс}}$.* $\square$

Это замечание приводит нас к следующему определению.

Определение 5.5.2. *Решетом для данного пространства $\mathbb{X}$ называется любое семейство $\mathbf{R} = \langle R_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ борелевских множеств $R_s \subseteq \mathbb{X}$, индексированное кортежами $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, и удовлетворяющее $R_\Lambda = \emptyset$. В этом случае каждой точке $x \in \mathbb{X}$ сопоставляется сечение*

$$R^x = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : x \in R_s\} \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}.$$

Оно может быть, а может и не быть вполне упорядоченным в смысле порядка $<_{\text{лс}}$, т. е. всё пространство разбивается на два множества:

$$\text{внешнее} : C = \mathbf{C}[\mathbf{R}] = \{x \in \mathbb{X} : R^x \text{ вполне } <_{\text{лс}}\text{-упорядочено}\};$$

$$\text{внутреннее} : A = \mathbf{A}[\mathbf{R}] = \{x \in \mathbb{X} : R^x \text{ не вполне упорядочено}\};$$

которые в свою очередь разбиваются на *конституанты*

$$C_\xi = \mathbf{C}_\xi[\mathbf{R}] = \{x \in C : R^x \text{ имеет порядковый тип } \xi \text{ в } <_{\text{лс}}\},$$

$$A_\xi = \mathbf{A}_\xi[\mathbf{R}] = \{x \in A : \text{наибольший вполне упорядоченный начальный сегмент } R^x \text{ имеет тип } \xi \text{ в } <_{\text{лс}}\},$$

где $\xi < \omega_1$, так что $C = \bigcup_{\xi < \omega_1} C_\xi$ и $A = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$. Конституанты A_ξ принято называть *внутренними*, а конституанты C_ξ — *внешними*.

Определяются и аппроксимации $C_{<\xi} = C_{<\xi}[\mathbf{R}] = \bigcup_{\eta < \xi} C_\eta$ множества $C = C[\mathbf{R}]$ и аналогично $A_{<\xi} = A_{<\xi}[\mathbf{R}]$. $\square$

Если $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ — регулярная суслинская система борелевских множеств польского пространства $\mathbb{X}$, то, положив $R_s = F_s$ для всех $s \in \mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}$, и $R_\Lambda = \emptyset$, мы получим решето $\mathbf{R} = \langle R_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$. При этом $C[\mathbf{R}] = C[\mathfrak{F}]$ согласно предложению 5.5.1, т. е. внешние множества суслинской системы $\mathfrak{F}$ и соответствующего решета $\mathbf{R}$ совпадают, и соответственно совпадают и внутренние множества, т. е. $A[\mathbf{R}] = A[\mathfrak{F}]$. Конституанты, однако, не совпадают, поскольку в условиях 5.5.1 ранг дерева T не обязательно равен порядковому типу множества $T \setminus \{\Lambda\}$ в смысле $<_{\text{лс}}$. Тем не менее, имеет место следующая теорема, о которой см. в [19, § 4.6].

Теорема 5.5.3. *Если $\mathbf{R}$ — решето из борелевских множеств польского пространства $\mathbb{X}$, то конституанты A_ξ и C_ξ — борелевские множества, причем внешние конституанты C_ξ подчиняются принципу ограничения как в теореме 5.3.4.* $\square$

Пример 5.5.4. В польском пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\})$ всех множеств $U \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}$ (= произведение $2^{\mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}}$), множества

$$R_s = \{U \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\} : s \in U\} \quad (\text{для каждого } s \in \mathbb{N}^{<\omega})$$

открыто-замкнуты, а сечения $R^U = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : U \in R_s\}$ удовлетворяют условию $R^U = U$. Поэтому СА-множество $C = C[\mathbf{R}]$, порождаемое решетом $\mathbf{R} = \langle R_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$, тождественно множеству $\mathbf{WO}$ всех вполне $<_{\text{лс}}$ -упорядоченных множеств $U \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}$, а соответствующее А-множество $A = \mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}) \setminus C$ тождественно множеству $\mathbf{IO}$ всех не вполне $<_{\text{лс}}$ -упорядоченных $U \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}$. Каждая из конституант C_ξ равна множеству $\mathbf{WO}_\xi$ всех вполне упорядоченных множеств $U \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}$, имеющих порядковый тип $\text{отр } U = \xi$. Поэтому множества $\mathbf{WO}_\xi$ — борелевские по теореме 5.5.3. $\square$

На самом деле оба типа разложений на конституанты, т. е. через суслинские системы и через решета, сводятся к одной общей схеме, о чем см. в книге [19, § 4.6]. При этом для множеств и конституант определений 5.5.2 и 5.5.4 имеет место следующая теорема, подобная теореме 5.4.3. Ее доказательство, в целом близкое к доказательству последней, оставляется читателю в качестве довольно трудоемкого **упражнения**.

Теорема 5.5.5. *Допустим, что $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а $\mathbf{R} = \langle R_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ — решето из множеств бэровского произведения $\mathbb{X}$, класса $\Delta_1^1(p)$ в том смысле, что множество $\{\langle s, x \rangle : s \in \mathbb{N}^{<\omega} \wedge x \in R_s\}$ принадлежит $\Delta_1^1(p)$. Тогда найдутся такие Σ_1^1 -формулы $\overline{\sigma}_{\mathbf{R}}(x)$, $\sigma_{\mathbf{R}}(S, x)$, $\sigma'_{\mathbf{R}}(S, x)$, и Π_1^1 -формулы $\overline{\pi}_{\mathbf{R}}(x)$, $\pi_{\mathbf{R}}(S, x)$, $\pi'_{\mathbf{R}}(S, x)$, все с единственным параметром p , что для любых $x \in \mathbb{X}$, $\xi < \omega_1$, и множества $S \in \mathbf{WO}_\xi$ выполнены соотношения:*

- (i) $x \in C[R] \iff \bar{\pi}_R(x) \text{ и } x \in A[R] \iff \bar{\sigma}_R(x);$
- (ii) $x \in C_\varepsilon[R] \iff \sigma_R(S, x) \iff \pi_R(S, x);$
- (iii) $x \in A_\varepsilon[R] \iff \sigma'_R(S, x) \iff \pi'_R(S, x).$

□

§ 5.6 Униформизация, редукция, отделимость

В этом разделе мы изложим несколько важных теорем классической дескриптивной теории множеств, которые, хотя и не относятся непосредственно к главной теме нашей книги, но фигурируют в некоторых доказательствах. Это теоремы униформизации, редукции, отделимости, и теоремы о борелевских образах, объединяемые (также и вместе с другими подобными, обычно более сложными результатами) под названием: *структурная теория проективных классов*.

Мы начинаем с принципа униформизации. Пусть X, Y – произвольные (скажем, польские) пространства. Если $P \subseteq X \times Y$ то часто пишут $P(x, y)$ вместо $\langle x, y \rangle \in P$. Множество

$$\text{dom } P = \{x : \exists y P(x, y)\} \subseteq X$$

называется *проекцией* множества P (на пространство X).

Множество $P \subseteq X \times Y$ называется *однозначным*, или *униформным*, если для любого $x \in X$ существует не более одного $y \in Y$ такого что $P(x, y)$; это означает, собственно говоря, что P – график частичной функции $X \rightarrow Y$. Если $P \subseteq Q \subseteq X \times Y$, P однозначно, и $\text{dom } P = \text{dom } Q$, то пишут, что множество P *униформизует* Q .

Построить, для данного $Q \subseteq X \times Y$, униформизирующее множество $P \subseteq Q$ – значит выбрать по точке y_x в каждом непустом сечении $(Q)_x = \{y \in Y : \langle x, y \rangle \in Q\}$, где $x \in X$; множество P всех пар вида $\langle x, y_x \rangle$ и будет униформизирующим. Поэтому униформизирующие множества существуют по аксиоме выбора. Задача, однако, становится много более сложной, если требуется «эффективный» выбор, т. е. например мы хотим, чтобы униформизирующее множество P принадлежало определенному проективному классу. Принципом **Униформизации**, или просто **Униформизацией**, для данного класса точечных множеств Γ называется утверждение о том, что любое множество Q из Γ в произведении $X \times Y$ двух польских пространств можно униформизовать множеством $P \subseteq Q$ того же класса Γ .

Теорема 5.6.1 (см. 8.4.1, 8.5.1, 8.5.4 в [19]). *Принцип Униформизации выполнен для класса Π_1^1 , т. е. каждое Π_1^1 -множество P в произведении двух польских пространств $X \times Y$ можно униформизовать множеством того же класса Π_1^1 .*

Принцип Униформизации для любого класса Π_n^1 влечет Униформизацию и для класса Σ_{n+1}^1 следующего проективного уровня, так что принцип Униформизации выполнен и для класса Σ_2^1 .

Но принцип Униформизации не имеет места для класса Σ_1^1 , и более того существует множество $Q \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}$ класса Π_1^0 , не униформизируемое никаким Σ_1^1 -множеством. Принцип Униформизации также не имеет места для класса Π_2^1 .

□

Теорема сохраняет силу и для эффективных классов точечных множеств в бэровских произведениях (также и для более широкой категории *рекурсивно представимых* польских пространств), т. е. **Униформизация** имеет место для классов Π_1^1 , Σ_2^1 и вообще классов $\Pi_1^1(p)$, $\Sigma_2^1(p)$ для любого параметра $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, но не для двойственных классов Σ_1^1 , Π_2^1 , $\Sigma_1^1(p)$, $\Pi_2^1(p)$.

С **Униформизацией** традиционно связываются еще два свойства классов точечных множеств, которые формулируются для данного (например, проективного) класса Γ следующим образом:

Редукция: любую пару множеств X, Y из Γ в польском пространстве $\mathbb{X}$ двух можно *редуцировать*, т. е. существует пара множеств $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$ того же класса Γ , для которой $X' \cup Y' = X \cup Y$.

Отделимость: любую пару *дизъюнктных* множеств X, Y из Γ в польском пространстве $\mathbb{X}$ двух можно *отделить* множеством симметричного класса $\Gamma \cap \mathbb{C}\Gamma$, т. е. существует такое множество $Z \subseteq \mathbb{X}$, принадлежащее классу Γ вместе со своим дополнением $\mathbb{X} \setminus Z$, что $X \subseteq Z$, но $Y \cup Z = \emptyset$ (*отделяющее множество*).

Как **Редукция** так и **Отделимость** (в отличие от **Униформизации**!) выполнены для симметричных классов Δ_n^i и Δ_n^i . Например, для проверки **Редукции**, просто берем $X' = X$ и $Y' = Y \setminus X$. Поэтому оба принципа рассматриваются только для Σ - и Π -классов. Здесь имеет место:

Теорема 5.6.2 (см. [19, гл. 8]). *Для любого проективного класса Σ_n^1 или Π_n^1 , Униформизация влечет Редукцию для того же класса, а последняя — Отделимость для двойственного класса, соответственно, Π_n^1 или Σ_n^1 . Поэтому и вследствие теоремы 5.6.1, Редукция выполнена для классов Π_1^1 и Σ_2^1 , а Отделимость — для двойственных классов Σ_1^1 и Π_2^1 .*

В то же время, Редукция и Униформизация не выполнены для классов Σ_1^1 и Π_2^1 , а Отделимость не выполнена для классов Π_1^1 и Σ_2^1 .

Доказательство (положительная часть). Чтобы редуцировать пару множеств X, Y униформизуем множество $(X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$. Чтобы отделить дизъюнктные множества X, Y редуцируем их дополнения. $\square$

Подобно теореме 5.6.1, эта теорема верна для эффективных классов.

Любопытный феномен состоит в том, что законы **Униформизации**, **Редукции**, **Отделимости** для второго проективного уровня обращаются по сравнению с первым уровнем иерархии. В его основе лежит перенос свойства **Униформизации** с любого класса Π_n^1 на Σ_{n+1}^1 . При определенных условиях имеет место и двойственный перенос $\Sigma_n^1 \rightarrow \Pi_{n+1}^1$, см. § 7.7.

Принципам **Униформизации**, **Редукции** и **Отделимости** родственна следующая теорема Лузина об однозначных Δ_1^1 -образах, доказательство которой см., например, 2.6.2(iii) и 11.1.2 в книге [19], а в отношении результата (iv) — у Куратовского [122, с. 458]. Напомним, что *точкой конденсации* множества X называется любая точка $x \in X$, всякая окрестность которой пересекает X по несчетному множеству.

Теорема 5.6.3. (i) Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — множество класса $\Delta_1^1(a)$, и $f : X \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — взаимно однозначная функция класса $\Delta_1^1(a)$ (как множество пар), то полный образ $Y = f[X] = \{f(x) : x \in X\}$ есть множество класса $\Delta_1^1(a)$.

(ii) В частности, если $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — борелевское множество (= класс Δ_1^1), и $f : X \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — взаимно однозначная борелевская функция, то образ $Y = f[X]$ есть борелевское множество.

(iii) Обратно, если $Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — борелевское множество, то найдется замкнутое множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и взаимно однозначная непрерывная функция $f : X \xrightarrow{\text{на}} Y$.

(iv) Если же $\emptyset \neq Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — борелевское множество, каждая точка которого является точкой конденсации, то найдется взаимно однозначная непрерывная функция $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} Y$. $\square$

§ 5.7 Кодировка борелевских множеств

Элементы пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ могут быть использованы для кодировки математических объектов самой различной природы, характеризующихся тем свойством, что они, неформально говоря, содержат лишь счетное число битов информации. В частности, ими можно кодировать борелевские множества.

5.7А Кодировка простых борелевских множеств

Напомним, что $\mathbb{N}^{<\omega} = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ — фиксированное рекурсивное перечисление всех кортежей натуральных чисел (без повторений), см. определение 4.2.1, и $[s] = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset a\}$ (бэровский интервал) для $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. А если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$, то $(a)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, см. 4.2.1(iv).

Определение 5.7.1. Если $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то полагаем:

$$\mathbb{G}[c] = \bigcup_{c(n)=1} [s_n] ; \quad \mathbb{F}[c] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{G}[c] ;$$

$$\mathbb{G}_\delta[c] = \bigcap_n \mathbb{G}[(c)_n] ; \quad \mathbb{F}_\sigma[c] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{G}_\delta[c] = \bigcup_n \mathbb{F}[(c)_n] . \quad \square$$

Упражнение 5.7.2. Докажите, что множества вида $\mathbb{G}[c]$, $\mathbb{F}[c]$, $\mathbb{G}_\delta[c]$, $\mathbb{F}_\sigma[c]$, где $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — это, соответственно, все открытые, замкнутые, $\mathbf{G}_\delta$, и $\mathbf{F}_\sigma$ множества пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Упражнение 5.7.3. Подберите арифметические формулы, выражающие отношения принадлежности к кодируемым множествам, т. е. отношения $x \in \mathbb{G}[c]$, $x \in \mathbb{F}[c]$, $x \in \mathbb{G}_\delta[c]$, $x \in \mathbb{F}_\sigma[c]$. Например, для $x \in \mathbb{G}[c]$ подойдет формула $\exists n (c(n) = 1 \wedge s_n \subset x)$. $\square$

5.7Б Кодировка всех борелевских множеств

Разумеется, эту кодирующую технику можно распространить на классы Σ_3^0 , Π_3^0 , Σ_4^0 , Π_4^0 , и т. д.. Но как кодировать произвольные борелевские множества? Ответ содержится в следующем определении.

Определение 5.7.4. Через **ВС** обозначим множество всех таких пар $\varkappa = \langle T, f \rangle$, что $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ — непустое фундированное дерево, а $f: \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$. Таким образом, $\mathbf{BC} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \times (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$. Пары $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}$ называются *борелевскими кодами*.

Если $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}$, то зададим множество $B_\varkappa(s) = B_{Tf}(s) \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для каждой вершины $s \in T$ индукцией по рангу $|s|_T$:

(I) если $s \in \text{Max } T$ (т. е. s — конечная вершина дерева T), то по определению $f(s) \in \mathbb{N}^{<\omega}$ — и если при этом $f(s) \neq \Lambda$, то $B_\varkappa(s) = B_{Tf}(s) = [f(s)] = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(s) \subset a\}$ (бэровский интервал в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$), но $B_\varkappa(s) = B_{Tf}(s) = \emptyset$ при $f(s) = \Lambda$;

(II) если $s \in T \setminus \text{Max } T$, то $B_\varkappa(s) = B_{Tf}(s) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{s \wedge n \in T} B_\varkappa(s \wedge n)$.

Наконец, пусть $B_\varkappa = B_{Tf} = B_\varkappa(\Lambda)$, где Λ — пустой кортеж. $\square$

Понятно, что в этом определении играют роль только значения функции f на множестве $\text{Max } T$ всех конечных вершин дерева T . Тем не менее, по формальным соображениям, мы хотим здесь рассматривать именно всюду определенные функции $f: \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$.

Следующий пример из [19], § 9.5 показывает, как получать борелевские коды бэровских интервалов и более сложных множеств.

Пример 5.7.5. (1) Если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ то пусть $\varkappa[s] = \langle T, f \rangle$, где $T = \{\Lambda\}$ и $f(\Lambda) = s$ (а значения $f(t)$, $t \neq \Lambda$, роли не играют). Тогда $\varkappa[s] \in \mathbf{BC}$ и $B_{\varkappa[s]} = [s] = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset a\}$ (бэровский интервал) при $s \neq \Lambda$, но $B_{\varkappa[s]} = \emptyset$ при $s = \Lambda$.

(2) Если $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}$ и $|T| \geq 1$, то $N = \{n \in \mathbb{N} : \langle n \rangle \in T\} \neq \emptyset$, ($\langle n \rangle$ — кортеж с одним членом n). Положим

$$T_n = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : n \wedge t \in T\} \quad \text{и} \quad f_n(t) = f(n \wedge t)$$

для $n \in N$. Тогда $\varkappa_n = \langle T_n, f_n \rangle \in \mathbf{BC}$, $|T_n| = |\langle n \rangle|_T$ (ранг кортежа $\langle n \rangle$ в T), $B_{\varkappa_n} = B_\varkappa(\langle n \rangle)$ для всех n , и $B_\varkappa = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{n \in N} B_{\varkappa_n}$.

(3) Пусть $\varkappa_n = \langle T_n, f_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, являются кодами (из **BC**) множеств $X_n = B_{\varkappa_n}$. Положим $\nabla_{n \in \mathbb{N}} \varkappa_n = \langle T', f' \rangle$, где

$$T' = \{\Lambda\} \cup \{n \wedge t : n \in \mathbb{N} \wedge t \in T_n\}$$

и $f'(n \wedge t) = f_n(t)$ для всех n и $t \in \text{Max } T_n$. Тогда $\varrho = \langle T', f' \rangle \in \mathbf{BC}$ и $B_\varrho = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_n B_{\varkappa_n}$. Эта операция может быть использована и в случае неполной области индексов: если $u \subseteq \mathbb{N}$, то $\nabla_{n \in u} \varkappa_n = \varrho$, где

$$\varrho = \langle T', f' \rangle \in \mathbf{BC}, \quad T' = \{\Lambda\} \cup \{n \wedge t : n \in u \wedge t \in T_n\},$$

и $f'(n \wedge t) = f_n(t)$ для всех $n \in u$ и $t \in \text{Max } T_n$. В этом случае снова имеем $B_\varrho = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{n \in u} B_{\varkappa_n}$.

(4) Пусть $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}$ и $X = B_\varkappa$. Положим $\neg \varkappa = \nabla_{n \in \mathbb{N}} \varkappa_n$, где $\varkappa_n = \varkappa$, $\forall n$; тогда $(\neg \varkappa) \in \mathbf{BC}$ и $B_{\neg \varkappa} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus B_\varkappa$.

(5) Если $\varkappa_n$ — коды из $\mathbf{BC}$, то определим коды

$$\bigwedge_{n \in u} \varkappa_n = \nabla_{n \in u} (\neg \varkappa_n) \quad \text{и} \quad \bigvee_{n \in u} \varkappa_n = \neg (\bigwedge_{n \in u} \varkappa_n),$$

так что по предыдущему $B_{\bigwedge_n \varkappa_n} = \bigcap_n B_{\varkappa_n}$ и $B_{\bigvee_n \varkappa_n} = \bigcup_n B_{\varkappa_n}$. В частности, для случая двух данных кодов (т. е. $u = \{1, 2\}$), коды

$$\varkappa_1 \wedge \varkappa_2 = \bigwedge_{n=1,2} \varkappa_n \quad \text{и} \quad \varkappa_1 \vee \varkappa_2 = \bigvee_{n=1,2} \varkappa_n$$

удовлетворяют $B_{\varkappa_1 \wedge \varkappa_2} = B_{\varkappa_1} \cap B_{\varkappa_2}$ и $B_{\varkappa_1 \vee \varkappa_2} = B_{\varkappa_1} \cup B_{\varkappa_2}$. Также определим $\varkappa_1 \setminus \varkappa_2 = \varkappa_1 \cap (\neg \varkappa_2)$ — тогда $B_{\varkappa_1 \setminus \varkappa_2} = B_{\varkappa_1} \setminus B_{\varkappa_2}$. $\square$

Упражнение 5.7.6. Пусть $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Определите коды $\varkappa_c(\mathbf{G})$, $\varkappa_c(\mathbf{F})$, $\varkappa_c(\mathbf{G}_\delta)$, $\varkappa_c(\mathbf{F}_\sigma)$ из $\mathbf{BC}$ для множеств, соответственно, $\mathbb{G}[c]$, $\mathbb{F}[c]$, $\mathbb{G}_\delta[c]$, $\mathbb{F}_\sigma[c]$ определения 5.7.1. Например, подойдет $\varkappa_c(\mathbf{F}) = \nabla_{n \in u} \varrho_n$, где $u = \{n : c(n) = 1\}$ и $\varrho_n = \varkappa[s_n]$. (В исключительном случае $\mathbb{F}[c] = \emptyset$ подойдет $\varkappa_c(\mathbf{F}) = \varkappa[\Lambda]$.) $\square$

Таким образом, кодировка определения 5.7.4 включает достаточно естественным образом более простую кодировку из § 5.7А.

5.7В Связь с борелевской иерархией

Согласно следующей лемме, кодировка определения 5.7.4 охватывает все борелевские множества, и даже обеспечивает простую поуровневую связь с борелевской иерархией.

Лемма 5.7.7. Все борелевские множества в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и только они, допускают представление в виде $B_\varkappa$, $\varkappa \in \mathbf{BC}$. Для любого ординала ρ , $1 \leq \rho < \omega_1$, класс всех Π_ρ^0 -множеств $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ равен классу всех множеств вида $B_\varkappa$, $\varkappa \in \pi_\rho = \{\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC} : |T| = \rho\}$.

Доказательство. Первое утверждение следует из второго, поэтому доказываем второе. В одну сторону, доказываем, что если $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \pi_\rho$, то $B_\varkappa$ — множество класса Π_ρ^0 . Достаточно вывести следующее утверждение — в самом деле, нужный результат получится при $s = \Lambda$, когда $|\Lambda|_T = |T| = \rho$.

(†) Пусть $s \in T$, и $\gamma = |s|_T$. Тогда: если $\gamma = 0$, то $\mathbf{B}_\kappa(s)$ — либо бэровский интервал, либо пустое множество, а если $\gamma > 0$, то $\mathbf{B}_\kappa(s)$ — множество класса Π_γ^0 .

Доказываем трансфинитной индукцией по γ . Для $\gamma = 0$ см. определение 5.7.4(I). Пусть $\gamma \geq 1$. Если $s^\wedge n \in T$, то $|s^\wedge n|_T < |s|_T = \gamma$, так что, по индуктивному предположению, $\mathbf{B}_\kappa(s^\wedge n)$ — бэровский интервал, либо пустое множество, либо множество класса Π_η^0 , где $\eta < \gamma$. А так как снова по определению $\mathbf{B}_\kappa(s) = \mathbb{N}^\mathbb{N} \setminus \bigcup_{s^\wedge n \in T} \mathbf{B}_\kappa(s^\wedge n)$, то множество $\mathbf{B}_\kappa(s)$ принадлежит Π_γ^0 , что и требовалось.

В обратную сторону, индукцией по ρ доказываем, что каждое Π_ρ^0 -множество $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ имеет вид $X = \mathbf{B}_\kappa$ для какого-то кода $\kappa \in \boldsymbol{\pi}_\rho$.

Пусть $\rho = 1$, т. е. X — замкнутое множество; $X = \llbracket R \rrbracket$, где $R = R_X = \{x \upharpoonright n : x \in X \wedge n \in \mathbb{N}\}$ — дерево без конечных вершин в $\mathbb{N}^{<\omega}$. Зафиксировав перечисление $(\mathbb{N}^{<\omega} \setminus R) \cup \{\Lambda\} = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$,⁷ берем код $\kappa_R = \langle T, f_R \rangle$, где $T = \{\Lambda\} \cup \{\langle n \rangle : n \in \mathbb{N}\}$ и $f_R(\langle n \rangle) = t_n$, $\forall n$.

Пусть теперь $\rho > 1$. Тогда $X = \mathbb{N}^\mathbb{N} \setminus \bigcup_n X_n$, где каждое X_n есть $\Pi_{\eta_n}^0$ -множество для подходящего ординала $\eta_n < \rho$, причем из-за монотонности борелевских классов можно считать, что последовательность ординалов η_n неограничена в ρ . По индуктивному предположению, $X_n = \mathbf{B}_{\kappa_n}$, где $\kappa_n \in \boldsymbol{\pi}_{\eta_n}$. Из-за неограниченности, код $\langle T, f \rangle = \nabla_{n \in \mathbb{N}} \kappa_n$ (пример 5.7.5(3)) удовлетворяет $|T| = \rho$, и кроме того $\mathbf{B}_\kappa = \mathbb{N}^\mathbb{N} \setminus \bigcup_n \mathbf{B}_{\kappa_n} = X$. $\square$

Понятно, что если $P \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ — борелевское множество, то все сечения $(P)_x = \{y : \langle x, y \rangle \in P\}$ — также борелевские. Следующий результат показывает, что в этом случае коды для сечений можно выбирать эффективным образом.

Лемма 5.7.8 (следствие 9.7.3 в [19]). *Если $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, а $P \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ является $\Delta_1^1(p)$ -множеством, то найдется такая $\Delta_1^1(p)$ -функция $f : \mathbb{N}^\mathbb{N} \rightarrow \mathbf{BC}$, что $(P)_x = \mathbf{B}_{f(x)}$ для каждого $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$.* $\square$

5.7Г Борелевские множества других пространств

Имея кодировку борелевских множеств в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, не составляет труда закодировать и борелевские множества некоторых других пространств. Например, множества вида $\mathbf{B}_\kappa \cap 2^\mathbb{N}$, $\kappa \in \mathbf{BC}$ — это в точности все борелевские множества канторова дисконтинуума $2^\mathbb{N}$.

Кодировку множеств в бэровских произведениях, можно получить при помощи гомеоморфизмов определения 4.2.1. Например, для

⁷ Пустой кортеж Λ добавлен к множеству $\mathbb{N}^{<\omega} \setminus R$ только для того, чтобы построение подходило и для особого случая $R = \mathbb{N}^{<\omega}$.

пространства $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$, гомеоморфизм $H(x) = \langle (x)_{\text{лев}}, (x)_{\text{пра}} \rangle : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$, задается условиями $(x)_{\text{лев}}(n) = x(2n)$ и $(x)_{\text{пра}}(n) = x(2n+1)$. Если $\varkappa \in \mathbf{BC}$, то положим $B_{\varkappa}^2 = H[B_{\varkappa}] = \{H(x) : x \in B_{\varkappa}\}$, получая кодировку всех борелевских множеств в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$.

Среди множеств $X \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ естественным образом выделяются полные и частичные функции, поэтому определяем

$$\mathbf{PFC} = \{\varkappa \in \mathbf{BC} : B_{\varkappa}^2 \text{ — частичная функция из } \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ в } \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$$

и $\mathbf{FC} = \{\varkappa \in \mathbf{PFC} : \text{dom } B_{\varkappa}^2 = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ (коды, соответственно, частичных и всюду определенных борелевских функций из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$).

§ 5.8 Определимость кодировки

Задав кодировку каких-либо математических структур, весьма важно выяснить, каковы свойства тех отношений между кодами, которые соответствуют главным отношениям между кодируемыми структурами. Следующая теорема относится к этому типу результатов. Коль скоро множество кодов $\mathbf{BC}$ расположено в пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \times (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$, переменные T, f в формулах из теоремы пробегают, соответственно, множества $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$, $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$. Так что речь идет о формулах расширенного языка из § 4.6.

Теорема 5.8.1. *Множество $\mathbf{BC}$ и множества*

$$\begin{aligned} W &= \{\langle \varkappa, x \rangle : \varkappa \in \mathbf{BC} \wedge x \in B_{\varkappa}\}, \\ W' &= \{\langle \varkappa, x \rangle : \varkappa \in \mathbf{BC} \wedge x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus B_{\varkappa}\} \end{aligned}$$

принадлежат Π_1^1 , и при этом имеются определенные канонические Π_1^1 -формулы $\mathbf{bc}(T, f)$, $\pi(T, f, x)$, и $\pi'(T, f, x)$, определяющие эти множества в том смысле, что $\mathbf{bc}(T, f) \iff \varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}$,

$$\begin{aligned} \pi(T, f, x) &\iff \varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC} \wedge x \in B_{\varkappa}, \\ \pi'(T, f, x) &\iff \varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC} \wedge x \notin B_{\varkappa}. \end{aligned}$$

Если $\xi < \omega_1$, то множество $\mathbf{\Pi}_{\xi}$ — борелевское, и при этом имеются канонические формулы $\varphi(T, f, T')$ типа Σ_1^1 и $\psi(T, f, T')$ типа Π_1^1 , определяющие эти множества в том смысле, что

$$\varphi(T, f, T') \iff \psi(T, f, T') \iff \langle T, f \rangle \in \mathbf{\Pi}_{\xi}$$

всякий раз, когда $\xi < \omega_1$ и $T' \in \mathbf{WFT}_{\xi}$.

Доказательство. О первой части теоремы (множества $\mathbf{BC}$, W , W' и соответствующие формулы) см. 9.5.6 и 9.5.8 в нашей книге [19]. Что до второй части (множества $\mathbf{\pi}_\varepsilon$), то по определению и согласно предложению 5.4.2 подойдут формулы:

$$\varphi(T, f, T') := f \in (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}} \wedge \varepsilon(T, T'),$$

$$\varphi(T, f, T') := f \in (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}} \wedge \varepsilon'(T, T'). \quad \square$$

Следствие 5.8.2. Если $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и код $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}$ принадлежит классу $\Delta_1^1(c)$ (т. е., более аккуратно, $T, f \in \Delta_1^1(c)$), то и кодируемое множество $B_\varkappa \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет класс $\Delta_1^1(c)$.

Доказательство. Имеем $x \in B_\varkappa \iff \pi(T, f, x) \iff \neg \pi'(T, f, x)$, где π и π' — Π_1^1 -формулы теоремы 5.8.1, откуда следует, что $B_\varkappa \in \Delta_1^1(T, f)$. Остается воспользоваться теоремой 4.9.2. $\square$

§ 5.9 Теоремы абсолютности

Здесь читателю следует освежить материал § 3.8. Следующая теорема абсолютности ценна тем, что позволяет вывести абсолютность аналитической формулы на основании анализа только её синтаксического строения, но без учета ее математического содержания.

Теорема 5.9.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивное множество или класс, в котором истинны все аксиомы $\mathbf{ZFC}^-$. Тогда

- (i) (принцип абсолютности Мостовского) каждая Π_1^1 -формула Φ с параметрами из $\mathfrak{M} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ абсолютна для $\mathfrak{M}$;
- (ii) (принцип абсолютности Шенфилда) если $\omega_1 \subseteq \mathfrak{M}$, то то же верно для Σ_2^1 -формул.

Доказательство. Доказывая (i), мы можем предполагать, согласно теореме 4.10.5, что формула Φ имеет вид $\forall x \exists m \bar{\varphi}(\mathbf{gn}(x \upharpoonright m))$, где $\bar{\varphi}$ — некоторая ограниченная формула с параметрами из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая предложению 4.10.4, т. е. $\bar{\varphi}(i) \implies \bar{\varphi}(j)$ при условии, что $\mathbf{s}_i \subset \mathbf{s}_j$. Последнее означает, что множество $T = \{\mathbf{s}_i : \neg \bar{\varphi}(i)\}$ является деревом в $\mathbb{N}^{<\omega}$, и мы имеем $T \in \mathfrak{M}$, так как формула $\bar{\varphi}$ — арифметическая и, следовательно, абсолютная. С другой стороны, по определению, формула Φ эквивалентна (как в $\mathfrak{M}$, так и в универсуме всех множеств) предложению: «дерево T фундировано». Но последнее равносильно фундированности на T отношения, обратного $k \subseteq$ (см. упражнение 5.2.2). Остается сослаться на теорему 3.8.2.

Доказательство принципа Шенфилда более сложно. На русском языке оно изложено в [6, с. 305], а в форме упражнений с набросками доказательств оба утверждения даны в [163], упр. 12 к гл. 9. $\square$

Замечание 5.9.2. Утверждение (i) теоремы 5.9.1 переносится также на Σ_1^1 -формулы, а (ii) на Π_2^1 -формулы. Более того, *односторонняя* абсолютность распространяется на следующий уровень. Например, каждая Π_2^1 -формула с параметрами из $\mathfrak{M} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, истинная в универсуме $\mathbb{V}$ всех множеств, истинна и в $\mathfrak{M}$, а для Σ_2^1 -формул верно обратное. Если же $\omega_1 \subseteq \mathfrak{M}$, то сказанное верно и для соответственно Π_3^1 -формул и Σ_3^1 -формул. $\square$

Теорема 5.9.1 относится к числу наиболее цитируемых технических результатов в современной дескриптивной теории множеств, поскольку позволяет доказать при помощи элементарной ссылки на характер определимости такие результаты, прямое доказательство которых потребовало бы определенной (а часто и весьма значительной) работы. Укажем несколько относительно простых примеров утверждений об абсолютности, связанных с кодировкой борелевских множеств; они иллюстрируют возможности теоремы 5.9.1.

Следствие 5.9.3. Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивное множество или класс, в котором истинны все аксиомы $\mathbf{ZFC}^-$. Тогда:

- (i) если $a \in \mathfrak{M}$, $u \subseteq \mathbb{N}$, $u \in \Sigma_1^1(a)$, то $u \in \mathfrak{M}$, а если дополнительно $\omega_1 \subseteq \mathfrak{M}$, то заключение верно даже с посылкой $u \in \Sigma_2^1(a)$;
- (ii) аналогично, если $a \in \mathfrak{M}$, $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $x \in \Delta_1^1(a)$, то $x \in \mathfrak{M}$, а если $\omega_1 \subseteq \mathfrak{M}$, то то же верно даже с посылкой $x \in \Delta_2^1(a)$;
- (iii) множество $(\mathbf{BC})^{\mathfrak{M}}$, т. е. $\mathbf{BC}$, определенное в $\mathfrak{M}$, совпадает с $\mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, — другими словами, любое $\varkappa \in \mathfrak{M}$ принадлежит $\mathbf{BC}$ если и только если в $\mathfrak{M}$ истинно что $\varkappa \in \mathbf{BC}$;
- (iv) аналогично, множество $(\mathbf{PFC})^{\mathfrak{M}}$ совпадает с $\mathbf{PFC} \cap \mathfrak{M}$, а если дополнительно $\omega_1 \subseteq \mathfrak{M}$, то и $(\mathbf{FC})^{\mathfrak{M}}$ совпадает с $\mathbf{FC} \cap \mathfrak{M}$;
- (v) если $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, то множество

$$(B_{\varkappa})^{\mathfrak{M}} = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M} : \text{в } \mathfrak{M} \text{ истинно } x \in B_{\varkappa}\},$$

т. е. множество $B_{\varkappa}$ определенное в $\mathfrak{M}$, совпадает с $B_{\varkappa} \cap \mathfrak{M}$;

- (vi) если коды $\varkappa = \langle T, f \rangle$ и $\varrho = \langle T', f' \rangle$ принадлежат $\mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ то соотношение $B_{\varkappa} \subseteq B_{\varrho}$ равносильно $(B_{\varkappa})^{\mathfrak{M}} \subseteq (B_{\varrho})^{\mathfrak{M}}$, равенство $B_{\varkappa} = B_{\varrho}$ равносильно равенству $(B_{\varkappa})^{\mathfrak{M}} = (B_{\varrho})^{\mathfrak{M}}$, а равенство $B_{\varkappa} \cap B_{\varrho} = \emptyset$ — равенству $(B_{\varkappa})^{\mathfrak{M}} \cap (B_{\varrho})^{\mathfrak{M}} = \emptyset$;
- (vii) если $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ и $B_{\varkappa} \neq \emptyset$, то и $B_{\varkappa} \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$.

Доказательство. Например, чтобы доказать (iii), мы можем сослаться на то, что « $\langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}$ » есть Π_1^1 -формула по теореме 5.8.1.

Для доказательства (vi) мы используем Π_1^1 -формулы $\pi(T, f, x)$ и $\pi'(T, f, x)$ теоремы 5.8.1, при помощи которых соотношение $B_\varkappa \subseteq B_\varrho$ выражается Π_1^1 -формулой $\forall x (\neg \pi'(T, f, x) \implies \pi(T', f', x))$ как в модели $\mathfrak{M}$ так и в универсуме всех множеств.

Для доказательства утверждения (vii), выражаем непустоту множества $B_\varkappa$ Σ_1^1 -формулой $\exists x (\neg \pi'(T, f, x))$.

Для доказательства утверждения (iv) выражаем отношение $\varkappa \in \mathbf{RFC}$ подходящей Π_1^1 -формулой, составленной на основе формул теоремы 5.8.1, а отношение $\varkappa \in \mathbf{FC}$ — подходящей Π_2^1 -формулой. $\square$

Упражнение 5.9.4. Докажите утверждения (iii), (v) теоремы, не опираясь на теорему 5.9.1.

Для доказательства равенства $(B_\varkappa)^\mathfrak{M} = B_\varkappa \cap \mathfrak{M}$, возьмите $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ и $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \cap \mathfrak{M}$ и проверьте, что формула $x \in B_\varkappa$ абсолютна для $\mathfrak{M}$. «Вычисление» истинности $x \in B_\varkappa$ представляет-ся как заключительный шаг «вычисления» истинности предложений вида $x \in B_\varkappa(s)$, $s \in T$, индукцией по $|s|_T$. Это последнее начинается с множества $\{s \in \mathbf{Max} T : f(s) \neq \Lambda \wedge x \in [f(s)]\} \in \mathfrak{M}$, а индуктивные переходы, следующие определению 5.7.4, абсолютны для $\mathfrak{M}$. $\square$

Следствие 5.9.5. Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивное множество или класс, в котором истинны все аксиомы $\mathbf{ZFC}$. Тогда

- (i) множества вида $B_\varkappa$, где $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, и множества $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ из класса $\Delta_1^1(\mathfrak{M}) = \bigcap_{a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \cap \mathfrak{M}} \Delta_1^1(a)$ — это одно и то же, и
- (ii) функции вида $B_\varkappa^2$, где $\varkappa \in \mathbf{FC} \cap \mathfrak{M}$, и функции $f : \mathbb{N}^\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^\mathbb{N}$ из класса $\Delta_1^1(\mathfrak{M})$ — это одно и то же.

На самом деле, имеет место более сильный результат: искомый борелевский код для $\Delta_1^1(a)$ -множества X в (i) можно выбрать даже в классе $\Delta_1^1(a)$ — и тогда он принадлежит модели $\mathfrak{M}$ согласно следствию 5.9.3(i), (ii). Об этом см. теорему 9.7.1 в книге [18].

Доказательство. (i) Слева направо, пусть $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$. Найдутся точки $a, b \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \cap \mathfrak{M}$, для которых $T = T_{\{a\}}$ и $f = f_{\{b\}}$. Тогда $T \in \Delta_1^1(a)$ и $f \in \Delta_1^1(b)$ (см. упражнение 4.9.3). Берем сшивку $c \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \cap \mathfrak{M}$, заданную через $c(2n) = a(n)$ и $c(2n+1) = b(n)$. Тогда T и f принадлежат $\Delta_1^1(c)$. Остается воспользоваться следствием 5.8.2.

В обратную сторону, пусть $X = \{x : \varphi(a, x)\} = \{x : \psi(a, x)\}$ — множество из $\Delta_1^1(a)$, где $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \cap \mathfrak{M}$, а φ, ψ — формулы типов Σ_1^1 и Π_1^1 соответственно. Эквивалентность

$$\forall x (\varphi(a, x) \iff \psi(a, x)) \quad (1)$$

выражается Π_2^1 -формулой с параметром $a \in \mathfrak{M}$, поэтому она верна и в $\mathfrak{M}$, см. замечание 5.9.2, так что эквивалентные формулы φ и ψ определяют Δ_1^1 -множество в $\mathfrak{M}$. Значит, по теореме Суслина (следствие 5.3.5), найдется код $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathfrak{M}$ такой, что в $\mathfrak{M}$ истинно:

$$\varkappa \in \mathbf{BC} \wedge \forall x (x \in B_\varkappa \iff \varphi(a, x) \iff \psi(a, x)). \quad (2)$$

Вследствие (1), формула (2) эквивалентна следующей формуле:

$$\varkappa \in \mathbf{BC} \wedge \forall x ((\varphi(a, x) \implies x \in B_\varkappa) \wedge (x \in B_\varkappa \implies \psi(a, x))). \quad (3)$$

Заменив в ней $\varkappa \in \mathbf{BC}$, первое вхождение $x \in B_\varkappa$, и второе вхождение $x \in B_\varkappa$ на формулы теоремы 5.8.1 соответственно $\mathbf{bc}(T, f)$, $\pi'(T, f, x)$, и $\pi(T, f, x)$, мы получим, очевидно, Π_1^1 -формулу, которая истинна в $\mathfrak{M}$ по выбору кода $\varkappa$. Значит, соотношение (3) выполнено и в универсуме $\mathbb{V}$ по теореме 5.9.1, так что $\varkappa \in \mathbf{BC}$ и $X = B_\varkappa$ в $\mathbb{V}$ согласно эквивалентности (1).

Утверждение (ii) можно вывести как простое следствие утверждения (i), а можно и доказать отдельно, следуя доказательству (i). $\square$

Исторические и библиографические замечания

А-операция была открыта П. С. Александровым [61], возможно, не без участия Н. Н. Лузина и М. Я. Суслина. О некоторых исторических аспектах в связи с открытием А-операции и А-множеств в современной перспективе см. в работах [51, 108, 127, 23]. А-множества были введены в математику М. Я. Суслиным, см. [171], и по его имени часто называются *суслинскими множествами*, а также *аналитическими множествами*. Соответственно СА-множества называются *косуслинскими*, и *аналитическими дополнениями*. Разложение на конstituанты в форме § 5.3 впервые появилось в статье Лузина и Серпинского [137] (где и доказаны главные результаты, представленные в § 5.3), а в форме § 5.5 (т. е. в связи с решетками) — в их же статье [138]. Однако понятие решета в явном виде было введено Н. Н. Лузиным в статье [130]. Конструкция, вполне равносильная решетку из примера 5.5.4, известна из более ранней работы Лебега [125]. Подробнее об истории вопроса см. в обзорной статье В. А. Успенского [52].

Порядок Лузина – Серпинского введен в статье [138]; иногда в работах по теории рекурсии он называется порядком Клини – Брауэра.

В основополагающих работах Лузина [130] и книга [135], фигурируют только конstituанты, порожденные решетками, причем вместо множества индексов $\mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}$, как в нашем изложении, рассматривается подобное ему множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Проблема **Униформизации** была введена в дескриптивную теорию множеств Н. Н. Лузиным в работе [131]. Положительная часть теоремы 5.6.1 была доказана для класса Π_1^1 Кондо [120] на основе метода эффективного

выбора точки в непустом Π_1^1 -множестве по П. С. Новикову [136, 42], и перенесена на классы $\Pi_1^1(p)$ Аддисоном [60, 59]. Отрицательное утверждение теоремы 5.6.1 основано на контрпримере П. С. Новикова из [152].

Наилучший результат об униформизации Σ_1^1 -множеств принадлежит В. А. Янкову [57] и фон Нейману [181]: каждое Σ_1^1 -множество униформируется множеством, принадлежащим наименьшей σ -алгебре, содержащей все Σ_1^1 -множества (тогда и все Π_1^1 -множества). Самых Σ_1^1 -множеств для этого недостаточно по теореме 5.6.1, и даже разностей Σ_1^1 -множеств недостаточно (4F.22 в книге [148]).

Теорема **Отделимости** для класса Σ_1^1 была доказана Н. Н. Лузиным в работе [130, п. 42]. Примеры неотделимых Π_1^1 -множеств были даны П. С. Новиковым [152]. Принцип **Редукции** ввел Куратовский [123].

Принципиальный шаг в исследовании второго проективного уровня был сделан П. С. Новиковым. Используя открытый им метод минимального индекса, он доказал в статье [153], что законы отделимости обращаются на втором проективном уровне, т. е. **Отделимость** имеет место для класса Σ_2^1 , но не для Π_2^1 . О важности этого результата см. комментарии Н. Н. Лузина в работе [27, § 23]. Несколько позже Куратовский [123] доказал **Редукцию** для Σ_2^1 . Этот цикл исследований был продолжен замечательной работой Н. Н. Лузина и П. С. Новикова [136], указавшей метод эффективного выбора точки в произвольном непустом Π_1^1 -множестве, используя который, Кондо [120] получил теорему **Униформизации** для класса Π_1^1 (теорема 5.6.1 нашей книги) — а тогда и для класса Σ_2^1 , поскольку элементарное рассуждение переносит принцип **Униформизации** с любого Π -класса на следующий за ним Σ -класс. Соответствующие результаты для эффективных классов были получены Аддисоном [60, 59] достаточно прямолинейной модификацией классических доказательств.

Наиболее доступное изложение главных результатов (с доказательствами) классического этапа развития дескриптивной теории множеств содержится в статьях В. Я. Арсенина и А. А. Ляпунова [2], А. А. Ляпунова [39] и Е. А. Щеголькова [56], опубликованных в специальном номере журнала «Успехи математических наук»; они частично перекрываются со статьей [37]. В отношении только результатов и проблематики, можно упомянуть более краткие обзоры [22, 45, 46, 47] и более поздние [11, 52].

О кодах борелевских множеств. Еще Н. Н. Лузин указывал (см., например, [130, п. 30]), что построение борелевского множества может быть представлено в форме счетной трансфинитной последовательности простых операций. Формализация этой идеи в точное определение кодировки борелевских множеств была выполнена Соловеем в [169], где в роли кодов выступали точки из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Результаты § 5.8 и следствие 5.9.3 в той или иной форме содержатся в [169]. Мы выбрали в § 5.7Б более прозрачный вариант кодировки, наглядно представляющий «древовидное» построение борелевских множеств из бэровских интервалов — с точностью до несущественных деталей, эта кодировка следует кодировке из [176, § 1].

Теорема абсолютности 5.9.1 доказана Мостовским [150] в отношении утверждения (i), и Шенфилдом [162] в отношении утверждения (ii).

Глава 6

Первый проективный уровень, часть 2: свойства регулярности

Продолжая изложение теории первого уровня проективной иерархии, мы перейдем теперь к несколько более специальным вопросам, касающимся таких понятий, как мера, категория и совершенное ядро.

§ 6.1 Основные свойства регулярности

Под этим названием объединяются различные свойства точечных множеств, среди которых традиционно центральное место занимают следующие три свойства, пришедшие в дескриптивную теорию множеств из общей теории множеств, анализа, и топологии.

Свойство совершенного ядра. Множество X польского пространства $\mathbb{X}$ имеет *свойство совершенного ядра*, если либо X не более чем счетно, либо X содержит совершенное подмножество.

Множество $Y \subseteq \mathbb{X}$ называется *совершенным*, если оно замкнуто и не имеет изолированных точек. По Кантору, любое такое множество в польском пространстве имеет мощность континуума $\mathfrak{c}$. Таким образом, множество, имеющее свойство совершенного ядра, не может служить контрпримером к континуум-гипотезе **СН**.

Свойство Бэра. Множество X пространства $\mathbb{X}$ имеет *свойство Бэра*, если имеется такое открытое множество $U \subseteq \mathbb{X}$, что симметрическая разность $X \triangle U = (X \setminus U) \cup (U \setminus X)$ — тощая.

Тощими (или множествами первой категории) в пространстве $\mathbb{X}$ называются счетные объединения множеств, нигде не плотных в $\mathbb{X}$. Множества, дополнительные к тощим, называются *котощими*.

Измеримость. Множество X пространства $\mathbb{X}$ μ -измеримо, где μ — борелевская σ -конечная мера на алгебре всех борелевских множеств в $\mathbb{X}$, если существуют борелевские множества $U, D \subseteq \mathbb{X}$, для которых $\mu(D) = 0$ и $X \triangle U \subseteq D$.

Борелевская мера на пространстве $\mathbb{X}$ — это любая счетно аддитивная мера μ , заданная на σ -алгебре всех борелевских подмножеств $\mathbb{X}$, принимающая значения в области $[0, +\infty]$, и удовлетворяющая $\mu(\mathbb{X}) > 0$ и $\mu(\{x\}) = 0$ для каждой точки $x \in \mathbb{X}$. Борелевская мера μ называется σ -конечной, если $\mathbb{X}$ — счетное объединение множеств конечной меры, и *вероятностной*, если $\mu(\mathbb{X}) = 1$.

Пример 6.1.1. Через λ обозначим ту единственную борелевскую меру на канторовом дисконтинууме $2^{\mathbb{N}}$, что для любой пары дизъюнктивных конечных $u, v \subseteq \mathbb{N}$ множество

$$Z_{uv} = \{a \in 2^{\mathbb{N}} : \forall i \in u (a(i) = 0) \wedge \forall i \in v (a(i) = 1)\}$$

удовлетворяет условию $\lambda(Z_{uv}) = 2^{-m}$, где $m = \text{card } u + \text{card } v$. Понятно, что λ — вероятностная мера, т. е. $\lambda(\mathbb{N}) = 1$. Иногда, по формальным причинам, меру λ продолжают на всё пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ по тривиальности, т. е. условием $\lambda(\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus 2^{\mathbb{N}}) = 0$. $\square$

Мера λ фигурирует в одной теореме эргодической теории, связанной с отношением эквивалентности E_0 , которое определяется на множестве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (тем самым и на $2^{\mathbb{N}}$) так: $a E_0 b$, когда $a(n) = b(n)$ для всех, кроме, возможно, конечного числа, значений $n \in \mathbb{N}$.

Определение 6.1.2. Множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ называется E_0 -инвариантным, если эквивалентность $a \in X \iff b \in X$ выполнена для всех точек $a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющих отношению $a E_0 b$. Соответственно, множество $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ E_0 -инвариантно в $2^{\mathbb{N}}$, если эквивалентность $a \in X \iff b \in X$ выполнена для всех точек $a, b \in 2^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющих отношению $a E_0 b$. $\square$

Теорема 6.1.3 (0-1 закон, теорема 5.7.1 в [19]). Пусть множество $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ E_0 -инвариантно. Тогда

- (i) либо множество X является λ -измеримым, причем $\lambda(X) = 0$ или $\lambda(X) = 1$, либо же множество X λ -неизмеримо, причем $\lambda_*(X) = 0$ и $\lambda^*(X) = 1$, где через λ^* и λ_* обозначены верхняя и нижняя меры, соответствующие мере λ ;
- (ii) множество X либо тощее в $2^{\mathbb{N}}$, либо котощее, либо не имеет свойства Бэра ни на каком бэровском интервале;
- (iii) утверждение (ii) верно и для пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Мера λ , т. е. в сущности мера Хаара на $2^{\mathbb{N}}$ — наиболее простая из всех вероятностных мер на $2^{\mathbb{N}}$, в частности, из-за своей инвариантности относительно ряда преобразований этого пространства, и своей простой определимости. Рассматриваются, однако, и другие меры на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $2^{\mathbb{N}}$, которые, вообще говоря, не инвариантны.

Главная же задача, рассматриваемая дескриптивной теорией множеств в отношении свойств регулярности, состоит в следующем. Если $\mathbf{K}$ — некоторый класс точечных множеств в польских пространствах, например, один из проективных классов, то верно ли, что каждое множество из $\mathbf{K}$ имеет то или иное из указанных свойств. Можно было бы подумать, что ответ зависит не только от класса $\mathbf{K}$ (что очевидно), но и от выбора польского пространства $\mathbb{X}$ и меры μ для свойства измеримости. Это, однако, не так.

Здесь будет удобно ввести следующие обозначения, в которых $\mathbf{K}$ — произвольный класс проективной или эффективной иерархий и « $\mathbf{K}$ -множество» означает, как обычно, «множество из класса $\mathbf{K}$ »:

$\text{PK}(\mathbf{K})$: всякое $\mathbf{K}$ -множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет свойство совершенного ядра, т. е. X либо счетно, либо содержит подмножество, являющееся совершенным множеством в $\mathbb{X}$;

LM(K): всякое **K**-множество $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ является λ -измеримым, где мера λ — та, которая определена в примере 6.1.1;

BP(K): всякое **K**-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет свойство Бэра.

Меру и категорию можно рассматривать как разные способы оценки величины точечных множеств. Понятно, что есть множества малые как в смысле меры так и в смысле категории — например, конечные, которые являются тощими и имеют меру 0. Соответственно, их дополнения — ко-тощие множества полной меры. Однако существуют множества, большие в одном смысле, и малые в другом — например, множество $2^{\mathbb{N}}$ тощее, но $\lambda(2^{\mathbb{N}}) = 1$. Следующая лемма приносит даже более сильный результат.

Лемма 6.1.4. Пусть $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — борелевское множество, а $f : X \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — борелевская функция. Если X — не тощее множество, то найдется такое борелевское множество $Y \subseteq X$, что разность $X \setminus Y$ — тощая, а образ $Z = f[Y] = \{f(y) : y \in Y\}$ удовлетворяет $\lambda(Z) = 0$. Аналогично, если $\lambda(X) > 0$, то найдется такое борелевское множество $Y \subseteq X$, что $\lambda(X \setminus Y) = 0$, а образ $Z = f[Y]$ — тощее множество.

Доказательство. Для вывода первого утверждения, пусть, для простоты, $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Если $\varepsilon > 0$, то ко всякому бэровскому интервалу $[s] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subseteq x\}$ найдутся меньший бэровский интервал $[t] \subseteq [s]$ и такое множество $X' \subseteq [t]$, что $\lambda(f[X']) < \varepsilon$. Рассматривая кортежи $s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в какой-то последовательности, беря для них значения $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{8}, \dots$, и объединяя полученные множества X' , мы получим ко-тощее множество $Y' \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которого $\lambda(f[Y']) < \varepsilon$. Беря $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ и пересекая соответствующие множества Y' , мы получаем искомое множество Y . $\square$

§6.2 Независимость свойств регулярности от пространства и меры

Сразу возникает следующий вопрос: взяв эти частные формулировки (т. е. для бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, либо для $2^{\mathbb{N}}$ и одной специальной меры для свойства измеримости), не упустили ли мы чего-нибудь важного в отношении других польских пространств и мер. Негативный ответ (не упустили) дается следующей теоремой.

Теорема 6.2.1. Если **K** — проективный класс Σ_n^1 , Π_n^1 , или Δ_n^1 , где $n \geq 1$, а $\mathbb{X}$ — несчетное польское пространство, то

- (i) РК(**K**) равносильно тому, что всякое **K**-множество $X \subseteq \mathbb{X}$ имеет свойство совершенного ядра;

- (ii) $\text{BP}(\mathbf{K})$ равносильно тому, что всякое $\mathbf{K}$ -множество $X \subseteq \mathbb{X}$ имеет свойство Бэра. $\square$
- (iii) $\text{LM}(\mathbf{K})$ равносильно тому, что всякое $\mathbf{K}$ -множество $X \subseteq \mathbb{X}$ измеримо в смысле любой борелевской σ -конечной меры на $\mathbb{X}$;

Доказательство (набросок). Для вывода (i) мы используем тот факт, что все несчетные польские пространства борелевски изоморфны по теореме 4.1.1, и отдельно теорему 6.3.1 ниже — чтобы доказать, что образ совершенного множества при таком изоморфизме сам содержит совершенное подмножество. Для вывода (ii) достаточно вспомнить один факт из теории польских пространств: всякое польское пространство $\mathbb{X}$ становится гомеоморфным бэровскому пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ после удаления из $\mathbb{X}$ некоторого тощего $\mathbf{F}_{\sigma}$ -множества.

Для вывода (iii) придется немного поработать. Конечно, разные борелевские меры на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ могут быть непохожи одна на другую, однако, как показывает следующая лемма, при определенных условиях между двумя мерами можно установить нечто вроде изоморфизма. Через $<_{\text{lex}}$ обозначим лексикографический порядок на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, т. е. если $a \neq b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то $a <_{\text{lex}} b$, когда найдется число $m \in \mathbb{N}$, для которого $a \upharpoonright m = b \upharpoonright m$, но $a(m) < b(m)$. Используется еще одно определение.

Определение 6.2.2 (11.4.1, 11.4.2 в [19]). Пусть K — один из классов точечных множеств, например, класс Δ_1^1 или $\Delta_1^1(a)$, где $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Борелевская конечная мера μ на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ называется *K-мерой*, или *мерой класса K*, если этому классу принадлежит ее код

$$\text{Cod}_{<}(\mu) = \{ \langle s, m, n \rangle \in \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \mu([s]) < \frac{m}{n} \}. \quad \square$$

В частности, мера λ имеет класс Δ_1^0 . Отметим, что мера μ легко восстанавливается, если мы знаем множество $\text{Cod}_{<}(\mu)$.

Лемма 6.2.3. *Предположим, что $s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и μ, ν — вероятностные меры на $2^{\mathbb{N}}$ класса $\Delta_1^1(c)$. Тогда существуют $\mathbf{G}_{\delta}$ -множества $X, Y \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ и борелевский изоморфизм $h : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, для которых:*

- (i) $\mu(X) = \nu(Y) = 1$;
- (ii) множества X, Y и отображение h имеют класс $\Delta_1^1(c)$;
- (iii) отображение h переводит μ в ν , т. е. если $B \subseteq X$ — борелевское множество то $\mu(B) = \nu(X[h])$.

Доказательство. Рассмотрим деревья

$$T = \{s \in 2^{<\omega} : \mu([s]) > 0\} \quad \text{и} \quad U = \{s \in 2^{<\omega} : \nu([s]) > 0\}$$

и соответствующие замкнутые множества

$$X' = [T] = \{x \in 2^{\mathbb{N}} : \forall m (x \restriction m \in T)\} \quad \text{и} \quad Y' = [U].$$

Понятно, что $\mu(X') = \nu(Y') = 1$. Далее, положим

$$f(x) = \mu(\{x' \in X' : x' <_{\text{lex}} x\}) \quad \text{и} \quad g(y) = \nu(\{y' \in Y' : y' <_{\text{lex}} y\})$$

для $x \in X'$ и $y \in Y'$. Нетрудно проверить (оставляется в качестве **упражнения**), что $f : X' \xrightarrow{\text{на}} [0, 1]$ и $g : Y' \xrightarrow{\text{на}} [0, 1]$ — непрерывные отображения, переводящие меру μ и ν соответственно в обычную лебегову меру на отрезке $[0, 1]$. Более того, отображения f, g *почти биективны* в том смысле, что найдутся счетные множества $P, Q \subseteq [0, 1]$, для которых:

- (1) f -прообраз $f^{-1}[p] = \{x \in X' : f(x) = p\}$ любого числа $p \in P$ содержит ровно две точки, а f -прообраз любого $p \in [0, r] \setminus P$ содержит ровно одну точку из X' , и
- (2) g -прообраз любого числа $q \in Q$ содержит ровно две точки, а g -прообраз любого $q \in [0, r] \setminus Q$ — ровно одну точку из Y' .

Например, чтобы найти P , заметим, что, по определению X' , единственная возможность того, что точки $x <_{\text{lex}} y$ в X' удовлетворяют $f(x) = f(y)$, состоит в том, что $<_{\text{lex}}$ -интервал $(x, y) = \{z \in 2^{\mathbb{N}} : x <_{\text{lex}} z <_{\text{lex}} y\}$ не имеет общих элементов с X' — поскольку в противном случае (x, y) целиком содержит некоторый непустой бэровский интервал $X' \cap [s]$ в X' , так что $\mu(X' \cap [s]) > 0$. Но таких пар $x <_{\text{lex}} y$ в X' может быть только счетно много, а потому множество P всех соответствующих значений функции f не более чем счетно. То же самое для Q .

Множество $R = P \cup Q \subseteq [0, 1]$ всё еще счетно, а потому

$$X = \{x \in X' : f(x) \notin R\} \quad \text{и} \quad Y = \{y \in Y' : g(y) \notin R\}$$

— это $\mathbf{G}_\delta$ -множества, причем $\mu(X) = \nu(Y) = 1$, а ограниченные функции

$$f \restriction X : X \xrightarrow{\text{на}} [0, 1] \setminus R \quad \text{и} \quad g \restriction Y : Y \xrightarrow{\text{на}} [0, 1] \setminus R$$

взаимно однозначны, а также непрерывны и переводят меру, соответственно, μ и ν в лебегову меру на $[0, 1]$. Следовательно, сквозное отображение $h(x) = g^{-1}(f(x))$ — борелевская биекция из X на Y , переводящая μ в ν .

Наконец, класс $\Delta_1^1(c)$ обоих полученных множеств и отображения h выводится из нашего предположения, что коды $\text{Cod}_<(\mu)$ и $\text{Cod}_<(\nu)$ данных мер сами принадлежат $\Delta_1^1(c)$. Этот последний шаг также оставляется читателю как **упражнение**. $\square$ (лемма)

Теперь обратимся к утверждению (iii) теоремы. Прежде всего, коль скоро все несчетные польские пространства борелевски изоморфны и любой борелевский изоморфизм сохраняет проективные классы от первого уровня иерархии и выше, можно не ограничивая общности считать, что $\mathbb{X} = 2^{\mathbb{N}}$ и, таким образом, данная мера ν на $\mathbb{X}$ является борелевской σ -конечной мерой на $2^{\mathbb{N}}$.

Другое достаточно простое рассуждение, которое мы здесь не приводим, позволяет ограничиться случаем *вероятностной* меры ν на $2^{\mathbb{N}}$. Тогда, согласно лемме 6.2.3, существуют $\mathbf{G}_\delta$ -множества $X, Y \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ и борелевский изоморфизм $h : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, для которых $\lambda(X) = \nu(Y) = 1$ и h переводит λ в ν .

Если теперь $B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является ν -неизмеримым множеством некоторого проективного класса $\mathbf{K} = \Sigma_n^1, \Pi_n^1, \Delta_n^1$, $n \geq 1$, то $B' = B \cap Y$ остается ν -неизмеримым $\mathbf{K}$ -множеством, так что его h -образ $A' = h^{-1}[B']$ λ -неизмерим. А с другой стороны, борелевские изоморфизмы сохраняют проективный класс, так что A' остается множеством класса $\mathbf{K}$. $\square$ (теорема)

§ 6.3 Первый проективный уровень

Прояснив этот вопрос о независимости свойств регулярности от выбора польского пространства и меры, вернемся к упомянутой выше главной задаче о регулярности точечных множеств. Все борелевские (класс Δ_1^1) множества в любом польском пространстве, разумеется, измеримы в смысле любой борелевской меры и, благодаря σ -аддитивности понятий, связанных с категорией, имеют свойство Бэра. В частности, выполнено $\text{LM}(\Delta_1^1)$ и $\text{BP}(\Delta_1^1)$. Этот результат усиливается следующей теоремой Лузина [128] (мера и категория) – Суслина [171] (совершенное ядро).

Теорема 6.3.1 (= теоремы 5.3.1, 3.4.1 в [19]). *Выполняются утверждения $\text{LM}(\Sigma_1^1)$, $\text{BP}(\Sigma_1^1)$, $\text{PK}(\Sigma_1^1)$, т. е. другими словами любое Σ_1^1 -множество X польского пространства $\mathbb{X}$ измеримо в смысле каждой борелевской σ -конечной меры на $\mathbb{X}$, имеет свойство Бэра в $\mathbb{X}$, и, если несчетно, то содержит совершенное подмножество.*

Мы также имеем $\text{LM}(\Pi_1^1)$ и $\text{BP}(\Pi_1^1)$. $\square$

Следствие 6.3.2. *Любое Σ_1^1 -множество X польского пространства $\mathbb{X}$ либо не более чем счетно, либо имеет мощность континуума. Любое Π_1^1 -множество X польского пространства $\mathbb{X}$ либо имеет мощность $\leq \aleph_1$, либо имеет мощность континуума.* $\square$

Доказательство. Для Σ_1^1 -множеств, результат следует из теоремы, так как любое множество польского пространства, содержащее

совершенное подмножество, имеет мощность континуума. В частности, первая часть следствия верна для борелевских множеств. Теперь результат для Π_1^1 -множеств дается ссылкой на следствие 5.3.6. $\square$

Результат теоремы для Π_1^1 в отношении меры и категории — очевидное следствие результата для Σ_1^1 , поскольку если какое-то множество измеримо или имеет свойство Бэра, то то же справедливо и для дополнительного множества. В отличие от этого, свойство совершенного ядра **не** переходит с Σ_1^1 на двойственный класс Π_1^1 . С другой стороны, все попытки построить несчетное Π_1^1 -множество без совершенного ядра — и тогда мощности $\aleph_1$ независимо от континуум-гипотезы — в рамках классической дескриптивной теории выполнить не удалось. Эти обстоятельства привело к тому, что следующая проблема была осознана как один из центральных вопросов уже в первые годы развития дескриптивной теории множеств — в сущности, в самой первой «дескриптивной» заметке Н. Н. Лузина [128], где сказано:

Мощность множеств, дополнительных к A -множествам, не известна; эти множества не являются обязательно A -множествами.

Эта же проблема стоит под номером 1 в списке «основных проблем дескриптивной теории функций» в статье П. С. Новикова [43].

Проблема мощности / совершенного ядра для Π_1^1 . Какова мощность Π_1^1 -множеств? Верно ли, что, подобно множествам класса Σ_1^1 , всякое несчетное Π_1^1 -множество содержит совершенное ядро — и тогда имеет мощность континуума?

Специально анализу этой проблемы и соответствующих проблем для меры и категории посвящена следующая глава, где, в частности, будет показано, как проблема совершенного ядра для Π_1^1 связана с проблемой мощности для множеств этого класса, а также и с некоторыми вопросами в контексте конститuant Π_1^1 -множеств (см. § 7.4).

§ 6.4 Мера, категория и борелевская кодировка

Возвращаясь к кодировке борелевских множеств из § 5.7, мы приведем здесь два результата о сложности кодировки некоторых соотношений, связанных с мерой и категорией множеств вида $\mathbf{B}_\kappa$; они понадобятся нам в дальнейшем. Достаточно непростые доказательства этих результатов можно найти в нашей книге [19] (следствие 11.4.7 и следствие 11.5.8).

По аналогии с теоремой 5.8.1, переменные T и f в формулах предложений 6.4.1 и 6.4.2 пробегают, соответственно, множества $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$

и $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$. Напомним, что $[s] = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset a\}$ — бэровский интервал в пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для каждого $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

Предложение 6.4.1. *Если $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и μ — вероятностная мера класса $\Delta_1^1(p)$ на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то множество*

$$C_{<}(\mu) = \{\langle \varkappa, t, n \rangle \in \mathbf{BC} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \lambda(B_{\varkappa}) < \frac{m}{n}\}$$

принадлежит классу $\Pi_1^1(p)$, причем имеется каноническая Π_1^1 -формула $\pi_{<}(T, f, t, n)$ с единственным параметром p , определяющая это множество в том смысле, что

$$\pi_{<}(T, f, t, n) \iff \varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC} \wedge \lambda(B_{\varkappa}) < \frac{m}{n}.$$

То же верно и для аналогично определяемых множеств $C_{\leq}(\mu)$, $C_{>}(\mu)$, $C_{\geq}(\mu)$ — в частности, для них имеются канонические Π_1^1 -формулы $\pi_{\leq}(T, f, t, n)$, $\pi_{>}(T, f, t, n)$, $\pi_{\geq}(T, f, t, n)$. $\square$

Предложение 6.4.2. *Множества*

$$\begin{aligned} C_{<}^+ &= \{\langle \varkappa, s \rangle \in \mathbf{BC} \times \mathbb{N}^{<\omega} : [s] \setminus B_{\varkappa} \text{ — тощее множество}\}; \\ C_{<}^- &= \{\langle \varkappa, s \rangle \in \mathbf{BC} \times \mathbb{N}^{<\omega} : [s] \setminus B_{\varkappa} \text{ — не тощее множество}\}; \\ C_{\cap}^+ &= \{\langle \varkappa, s \rangle \in \mathbf{BC} \times \mathbb{N}^{<\omega} : [s] \cap B_{\varkappa} \text{ — тощее множество}\}; \\ C_{\cap}^- &= \{\langle \varkappa, s \rangle \in \mathbf{BC} \times \mathbb{N}^{<\omega} : [s] \cap B_{\varkappa} \text{ — не тощее множество}\} \end{aligned}$$

принадлежат Π_1^1 , и для них существуют канонические Π_1^1 -формулы $\pi_{<}^+(T, f, s)$, $\pi_{<}^-(T, f, s)$, $\pi_{\cap}^+(T, f, s)$, $\pi_{\cap}^-(T, f, s)$. $\square$

Приведем здесь, в качестве упражнения, одно важное следствие.

Упражнение 6.4.3 (11.4.8 в [19]). Пусть $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Докажите, используя предложение 6.4.1 и лемму 5.7.8, что если множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит классу $\Delta_1^1(p)$, и $r \in \mathbb{Q}$, то множество $D_{<} = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \mu((P)_x) < r\}$ и аналогично определяемые множества $D_{\leq}$, $D_{>}$, $D_{\geq}$ принадлежат этому же классу $\Delta_1^1(p)$. $\square$

Приведем еще несколько результатов об абсолютности некоторых соотношений, связанных с кодировкой меры и категории.

Следствие 6.4.4. *Предположим, что $\mathfrak{M}$ — транзитивное множество или класс, в котором истинны все аксиомы $\mathbf{ZFC}^-$. Тогда:*

- (i) *если $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ и $t, n \in \mathbb{N}$ то неравенство $\lambda(B_{\varkappa}) < \frac{m}{n}$ абсолютно для $\mathfrak{M}$, и то же для неравенств $\leq$, $>$, $\geq$;*
- (ii) *если $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ и $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ то предположение «множество $[s] \setminus B_{\varkappa}$ тощее» абсолютно для $\mathfrak{M}$, и то же для $[s] \cap B_{\varkappa}$.*

Доказательство. Нужно применить результаты предложений 6.4.1 и 6.4.2 и сослаться на теорему 5.9.1. $\square$

Исторические и библиографические замечания

Все борелевские множества в любом польском пространстве, разумеется, измеримы в смысле любой борелевской меры и благодаря σ -аддитивности понятий, связанных с категорией, имеют свойство Бэра. Вопрос о наличии совершенного ядра («свойства совершенного ядра») у несчетных борелевских множеств не столь прост: прямая индукция по построению множеств с помощью борелевских операций не проходит. Решение было найдено П. С. Александровым в работе [61] и Ф. Хаусдорфом в работе [88] независимо и разными методами. Доказательство, данное Александровым, привело к открытию М. Я. Суслиным A -операции и A -множеств, т. е. Σ_1^1 -множеств. Н. Н. Лузин в работе [128] и М. Я. Суслин в работе [171] установили, что A -множества имеют все три свойства регулярности: для них выполняется теорема 6.3.1 этой книги.

Свойство совершенного ядра в особенности привлекало внимание математиков из-за его связи с континуум-гипотезой. Уже на современном этапе развития дескриптивной теории множеств, теорема Александра – Хаусдорфа нашла далеко идущие обобщения. Например, Сильвером [165] было установлено, что если E — борелевское (и даже Π_1^1) отношение эквивалентности на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то либо имеется лишь счетное число классов E -эквивалентности, либо существует совершенное множество из попарно E -неэквивалентных точек. О дальнейших исследованиях в этом направлении см. книги [18] и [19] на русском языке, а также [81, 95, 106, 117]. Мы обратимся к этим вопросам в §18.4 в конце настоящей книги.

Глава 7

Свойства регулярности и проблемы Лузина – Новикова

Второй проективный уровень состоит из классов Σ_2^1 , Π_2^1 , Δ_2^1 и соответствующих эффективных классов Σ_2^1 , Π_2^1 , Δ_2^1 с параметром $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или без него. В целом результаты здесь много беднее, чем для первого проективного уровня. В частности, не удастся и, по-видимому, никогда не удастся доказать или опровергнуть утверждения о регулярности, измеримости, свойстве Бэра, свойстве совершенного ядра для множеств второго проективного уровня.

Такое в высшей степени необычное «решение» этих проблем классической дескриптивной теории множеств, поставленных Н. Н. Лузиным в 1920-х и 30-х годах, было найдено значительно позже и на основе методов современной теории множеств, таких как конструктивность по Гёделю и форсинг (вынуждение) по Коэну. Изложение этих методов входит в содержание настоящей книги.

В этой главе мы изложим и прокомментируем главные результаты о проблемах регулярности и еще об одной группе проблем: о несчетных последовательностях борелевских множеств ограниченного борелевского ранга.

§ 7.1 Проблемы регулярности

Теорема 6.3.1 показывает, что любое Σ_1^1 -множество в польском пространстве имеет свойство совершенного ядра и свойство Бэра и измеримо в смысле любой σ -конечной борелевской меры на этом пространстве. Формально, эти результаты могут быть выражены как $РК(\Sigma_1^1)$, $LM(\Sigma_1^1)$, $ВР(\Sigma_1^1)$. Конечно, измеримость и свойство Бэра переносятся и на класс Π_1^1 дополнительных множеств.

Все предпринятые в классической дескриптивной теории попытки распространить эти результаты на более высокие проективные классы, т. е. доказать или же опровергнуть хотя бы утверждения $РК(\Pi_1^1)$, $LM(\Sigma_2^1)$, $ВР(\Sigma_2^1)$, оказались неудачными. Очень быстро эти проблемы были осознаны как трудные и, вероятно, центральные в дескриптивной теории множеств. Более того, Н. Н. Лузин высказывает в заметках, опубликованных в 1925 г., убеждение, что в классе проективных множеств эти проблемы вообще неразрешимы, т. е. на содержащиеся в них вопросы невозможно дать никакого определенного ответа. Именно, Н. Н. Лузин пишет в работе [129]:

*Неизвестно и никогда не будет известно, имеет ли каждое несчетное множество данного семейства [семейства проективных множеств] мощность континуума, является оно или нет множеством третьей категории [множеством, не имеющим свойства Бэра], измеримо ли оно.*¹

Таким образом, речь идет о проблемах мощности, меры и категории для проективных множеств. Особый интерес представляли ограниченные варианты этих проблем, относящиеся к тем минимальным проективным классам, для которых положительный результат не достигается применением таких результатов классической дескриптивной теории, как теорема 6.3.1. Можно упомянуть две проблемы этого рода, из списка «основных проблем дескриптивной теории функций» в статье П. С. Новикова [43]², т. е. **проблему мощности / совершенно-го ядра для Π_1^1 -множеств** (см. § 6.3) и следующую проблему:

Проблема измеримости для Σ_2^1 . Верно ли, что, подобно множествам класса Σ_1^1 и Π_1^1 , всякое Σ_2^1 -множество измеримо по Лебегу?

Следуя выдержке из Лузина, мы добавляем к этой последней проблеме и ее аналог для категории:

¹ Перевод с французского оригинала [129] дан по книге [29].

² Этот список содержит, дословно по тексту [43], 1) проблему мощности дополнения к A -множеству, 2) проблему измеримости проекций дополнений к A -множеству, и 3) проблему делимости проективных множеств высших классов. Таким образом, в принятой в данной книге терминологии, для первых двух проблем речь идет о мощности Π_1^1 -множеств и об измеримости множеств класса Σ_1^1 .

Проблема свойства Бэра для Σ_2^1 . Верно ли, что, подобно множествам класса Σ_1^1 и Π_1^1 , всякое Σ_2^1 -множество имеет свойство Бэра?

Итак, развитие классической дескриптивной теории множеств привело к проблемам о наличии свойств регулярности у точечных множеств, как в целом для класса всех проективных множеств, так и в их «минимальной» с точки зрения участвующего в них проективного класса (разумеется, не считая доказуемых утверждений для класса Σ_1^1) и наиболее непосредственной форме. Здесь следует отметить, что Σ_2^1 -случай проблем измеримости и свойства Бэра, строго говоря, не минимален, поскольку Δ_2^1 — собственный подкласс класса Σ_2^1 , и для него эти проблемы также неразрешимы. Поэтому Δ_2^1 -варианты этих проблем также заслуживают включения в список — хотя вообще класс $\Sigma_2^1 = A_2$ привлекал больше внимания в классической дескриптивной теории, чем класс $\Delta_2^1 = B_2$. Это приводит нас к следующему формализованному в стиле § 6.1 списку проблем о свойствах регулярности точечных множеств:

$$\text{PK}(\Pi_1^1), \quad \text{LM}(\Delta_2^1), \quad \text{BP}(\Delta_2^1), \quad \text{LM}(\Sigma_2^1), \quad \text{BP}(\Sigma_2^1). \quad (*)$$

Успешное изучение этих проблем стало возможным только после открытия таких методов современной теории множеств, как *конструктивность* и *форсинг* — см. об этом в следующих разделах книги.

§ 7.2 Анализ проблем. Неразрешимость

На диаграмме рис. 1 графически представлены основные связи между пятью гипотезами из списка (*) в § 7.1.

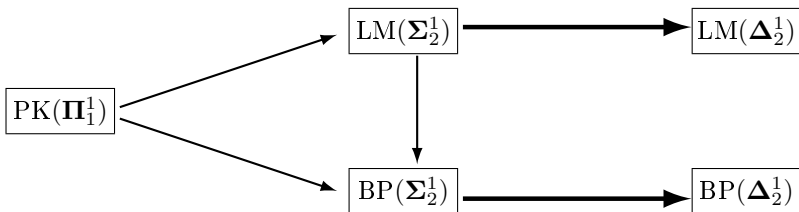


Рис. 1: Стрелки изображают доказуемые импликации между гипотезами, причем жирные стрелки изображают те импликации, которые получаются из тривиальных соображений — поскольку $\Delta_2^1 \subseteq \Sigma_2^1$, а простые стрелки — те импликации, которые будут доказаны ниже, см. следствие 10.2.3 и теорема 12.4.1.

Но каждая из пяти гипотез сама по себе оказывается неразрешимой — другими словами, ее нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Более точно, оказывается, что гипотезы *неразрешимы* в рамках аксиоматической теории множеств Цермело–Френкеля **ZFC**.³ Главный результат о неразрешимости свойств регулярности проективных множеств формулируется в следующей общей теореме.

Теорема 7.2.1. *Каждая из гипотез списка (*) неразрешима в теории **ZFC**, т. е. ее (гипотезу) нельзя ни доказать, ни опровергнуть, исходя из аксиом этой теории. Более точно,*

- (i) *утверждение, что все пять гипотез имеют отрицательное решение (т. е. в указанных классах имеются соответствующие контрпримеры), не противоречит аксиомам **ZFC**;*
- (ii) *утверждение, что все пять гипотез имеют положительное решение (т. е. все множества указанных классов имеют требуемые свойства), не противоречит аксиомам **ZFC**;*
- (iii) *более того, утверждение, что вообще каждое проективное множество имеет все три рассматриваемых свойства регулярности, не противоречит аксиомам **ZFC**.*

Дополнительно,

- (iv) *все импликации, обозначенные на диаграмме на с. 135 стрелками обоих видов, доказуемы в **ZFC**, однако*
- (v) *обратные импликации, и вообще любые другие попарные связи между этими гипотезами, кроме указанных стрелками на диаграмме на с. 135, недоказуемы в **ZFC**.*
- (vi) *все утверждения о непротиворечивости и недоказуемости в пунктах (ii), (i), (iii), (v), остаются в силе также и по отношению к теориям **ZFC** + **CH** и **ZFC** + $\neg$ **CH**, т. е. с добавленной континуум-гипотезой **CH** либо с добавленным отрицанием континуум-гипотезы.*

³ Сейчас, после длительной проработки оснований всех главных разделов математики с начала XX века, считается твердо установленным, что любое математическое рассуждение может быть преобразовано в доказательство из аксиом **ZFC** (или, как говорят, в *вывод в теории **ZFC***). И в этом контексте, недоказуемость какого-то положения **P** в **ZFC** означает его недоказуемость в математике. Соответственно *неразрешимость* какой-либо математической проблемы, т. е. невозможность дать ни положительный, ни отрицательный ответ на поставленный вопрос, приравнивается к её неразрешимости в теории **ZFC**. Последняя же означает, что ни предложение **P**, выражающее данную проблему, ни его отрицание $\neg$ **P** не имеют вывода в теории **ZFC**.

Эта теорема справедлива в молчаливом предположении, что сама аксиоматика **ZFC** непротиворечива. Такое предположение обязательно, так как в противоречивой теории по законам математической логики можно доказать любое утверждение. Более того, доказательство частей (ii) и (iii) теоремы требует допустить непротиворечивость более сильной аксиоматики **ZFCI**, получаемой из **ZFC** добавлением аксиомы о существовании строго (или слабо) недостижимого кардинала, по крайней мере в отношении свойства совершенного ядра, а также в отношении свойства измеримости выше класса Σ_2^1 . Не входя в обсуждение этого сложного вопроса, отметим, что нет никаких оснований сомневаться в непротиворечивости и этих аксиоматик.

Возвращаясь к диаграмме, стоит отметить удивительную асимметрию. Утверждение $LM(\Sigma_2^1) \implies BP(\Sigma_2^1)$ доказуемо (см. теорему 12.4.1 ниже), но обратное утверждение недоказуемо, что говорит о глубоком различии между измеримостью и свойством Бэра.

Теорема 7.2.1 — это сводная теорема, соединяющая результаты, полученные в разное время и разными математиками, но главные результаты в ней принадлежат Гёделю [83], П. С. Новикову [43], Мэнсфилду [140], Соловею [169, 168], а также Райзонье и Стерну [157] в отношении вывода $BP(\Sigma_2^1)$ из $LM(\Sigma_2^1)$. К этой теореме относятся и работы В. А. Любецкого [30, 31, 35]. Главным содержанием нескольких следующих глав этой книги будет изложение доказательств всех отдельных утверждений, из которых составлена эта теорема, а также, по необходимости, введение в те методы (конструктивность по Гёделю и форсинг), на которых эти доказательства основаны.

§ 7.3 План доказательства главной теоремы

Мы начнем в главе 8 с изложения основ теории конструктивности по Гёделю, с приложением к доказательству утверждения (i) теоремы 7.2.1 в § 8.8. Собственно говоря, мы покажем, что аксиома конструктивности $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ влечет существование множеств неизмеримых и не имеющих свойства Бэра в классе Δ_2^1 (на самом деле даже в Δ_2^1) и множеств не имеющих свойства совершенного ядра в классе Π_1^1 (и даже в Π_1^1). А поскольку аксиома $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ не противоречит аксиоматике **ZFC**, отсюда и следует требуемый результат о непротиворечивости существования контрпримеров.

В доказательстве теоремы 7.2.1 большую роль играют понятия точек *коэновских* (генерических по Коэну) и *случайных* (генерических по Соловею). Если задано польское пространство $\mathbb{X}$, например, вещественная прямая $\mathbb{R}$ или бэровское пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то точка $x \in \mathbb{X}$ является коэновской над какой-то транзитивной моделью $\mathfrak{M}$

теории **ZFC**, если её нельзя включить ни в какое тощее борелевское множество в $\mathbb{X}$, имеющее код в $\mathfrak{M}$. Аналогично вводится понятие случайной точки над $\mathfrak{M}$, только тощие множества заменяются множествами меры 0 в смысле заранее заданной меры на $\mathbb{X}$.

Соответственно, в отношении свойства совершенного ядра, большую роль будут играть ординалы вида $\omega_1^{\mathfrak{M}}$ (первый несчетный кардинал в данной транзитивной модели $\mathfrak{M}$, см. § 8.5).

Эти понятия представляют особый интерес в случае, когда $\mathfrak{M} = \mathbb{L}$ (класс всех множеств, конструктивных по Гёделю — см. главу 8 о конструктивности), или $\mathfrak{M} = \mathbb{L}[a]$, где $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (класс всех множеств, конструктивных относительно данной точки $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$). Множество **Coh** $\mathbb{L}$ всех генерических точек над $\mathbb{L}$, и множество **Rand** $\mathbb{L}$ всех случайных точек над $\mathbb{L}$, а также их релятивизованные варианты **Coh** $\mathbb{L}[a]$ и **Rand** $\mathbb{L}[a]$, где $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — сами по себе замечательные теоретико-множественные объекты, о свойствах которых см. [15] или главу 10 книги. Здесь для нас, однако, важна глубокая связь этих множеств с проблемами меры и категории множеств второго проективного уровня, и аналогичная связь ординалов вида $\omega_1^{\mathbb{L}[a]}$ с проблемой совершенного ядра для множеств класса Π_1^1 . Эта связь, выраженная теоремой 10.2.1 и следствием 10.2.2, в одну сторону устанавливается в главе 10 на основе методов теории конструктивности, о которых см. главу 8, а в обратную сторону — в главе 11, уже при помощи метода вынуждения (форсинга), введение в который содержится в главе 9.

Таким образом, лужинские проблемы удастся свести к некоторым свойствам множеств вида **Coh** $\mathbb{L}[a]$, **Rand** $\mathbb{L}[a]$ и ординалов вида $\omega_1^{\mathbb{L}[a]}$, где $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Исследуя последние в разных моделях теории **ZFC**, мы доказываем неразрешимость классических проблем регулярности в главе 13 и уточняем структуру доказуемых связей между проблемами в главе 14. В этих разделах форсинг играет ключевую роль.

Отдельная глава 12 содержит вывод свойства Бэра из измеримости для множеств класса Σ_2^1 (одна из импликаций диаграммы со стр. 135), где также фигурируют множества вида **Coh** $\mathbb{L}[a]$ и **Rand** $\mathbb{L}[a]$.

§ 7.4 О последовательностях конститuant

Возвращаясь к проблеме совершенного ядра для Π_1^1 -множеств, рассмотрим разложение $C = \bigcup_{\xi < \omega_1} C_\xi$ некоторого Π_1^1 -множества C в польском пространстве $\mathbb{X}$ на конститuantы, как указано в определении 5.3.1. Возможны три и только три случая.

1. Каждая конститuantа C_ξ не более чем счетна, и число непустых конститuant C_ξ не более чем счетно.

В этом случае само множество C , очевидно, не более чем счетно.

2. Каждая конститuantа C_ξ не более чем счетна, но имеется несчетно много непустых конститuant C_ξ .

В этом случае множество C имеет мощность ровно $\aleph_1$, и кроме того C не содержит совершенных подмножеств! В самом деле, если $Y \subseteq C$ — замкнутое множество, то по теореме 5.3.4 найдется ординал $\lambda < \omega_1$, для которого $Y \subseteq \bigcup_{\xi < \lambda} C_\xi$, т. е. Y счетно — противоречие.

3. Имеется хотя бы одна несчетная конститuantа C_ξ .

Тогда C_ξ , как несчетное борелевское множество, имеет совершенное подмножество по теореме 6.3.1, так что и само C содержит совершенное подмножество и имеет мощность континуума.

Следствие 7.4.1 (Лузин). *Любое множество класса Π_1^1 в польском пространстве либо не более чем счетно, либо имеет мощность $\aleph_1$, либо имеет мощность континуума $\mathfrak{c}$. При этом*

- (i) *для существования несчетного Π_1^1 -множества, не имеющего совершенных подмножеств, необходимо и достаточно, чтобы существовало разложение на конститuantы, как в определении 5.3.1, имеющие тип 2 из трех указанных.*
- (ii) *для существования Π_1^1 -множества мощности строго между $\aleph_0$ и $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало разложение на конститuantы, как в определении 5.3.1, имеющее тип 2 из трех указанных, и при этом $\aleph_1 < \mathfrak{c}$ строго. $\square$*

Итак, проблемы мощности и совершенного ядра для Π_1^1 -множеств, в сущности равносильны: контрпримеры для обеих существуют одновременно, по крайней мере в предположении, что $\aleph_1 < \mathfrak{c}$.

В то время как имеются совершенно элементарные примеры разложений на конститuantы типов 1 и 3, в отношении типа 2 вопрос намного более сложен. Существуют ли в действительности разложения типа 2, или, что эквивалентно, несчетные Π_1^1 -множества без совершенных подмножеств? Эту проблему невозможно решить в рамках классической дескриптивной теории множеств, поскольку согласно теореме 7.2.1 на вопрос о существовании такого Π_1^1 -множества (или такого разложения на конститuantы) вообще нельзя дать определенный ответ в обычном понимании.

Этот вопрос допускает дальнейший обстоятельный анализ, приводящий к не менее интересным проблемам, которые мы рассмотрим в следующем параграфе. Следующее определение вводит терминологию, которая нам пригодится при обсуждении этих проблем.

Определение 7.4.2. Чтобы не повторяться, под *последовательностью конституант* мы договоримся понимать

- (А) любую последовательность множеств вида $A_\xi = \mathbf{A}_\xi[\mathfrak{F}]$ или $C_\xi = \mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}]$, $\xi < \omega_1$, где $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ — регулярная суслинская система борелевских множеств F_s данного польского пространства, а также
- (В) любую последовательность множеств вида $A_\xi = \mathbf{A}_\xi[\mathbf{R}]$ или $C_\xi = \mathbf{C}_\xi[\mathbf{R}]$, $\xi < \omega_1$, где $\mathbf{R} = \langle R_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}}$ — решето из борелевских множеств R_s данного польского пространства,

как в § 5.3 и § 5.5 соответственно. Следуя старой традиции в дескриптивной теории множеств (см. Н. Н. Лузин [133]),

- конституанты A_ξ и C_ξ типа (А) мы называем *явными*, а конституанты A_ξ и C_ξ типа (В) *действительными*;
- для каждого из типов (А), (В), конституанты вида C_ξ , т. е. конституанты Π_1^1 -множества $C = \bigcup_{\xi < \omega_1} C_\xi$, будем называть *внешними*, а конституанты вида A_ξ , т. е. конституанты Σ_1^1 -множества $A = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$, — *внутренними*.

А если пара последовательностей $\langle C_\xi \rangle_{\xi < \omega_1}$ и $\langle A_\xi \rangle_{\xi < \omega_1}$ соответственно внешних и внутренних конституант получилась из одной и той же суслинской системы либо одного и того же решета, то эти последовательности назовем *сопряженными*. $\square$

Построения, упомянутые в (А) и (В), приводят, вообще говоря, к разным последовательностям конституант. Тем не менее, их основные свойства совпадают. В частности, трихотомия случаев 1, 2, 3 выше, следствие 7.4.1, а также те результаты о последовательностях конституант, которые обсуждаются ниже в § 7.5 в связи с лузинскими проблемами о конституантах, в равной степени относятся как к конституантам вида (А) так и к конституантам вида (В).

Определение 7.4.3. Последовательность конституант A_ξ или C_ξ называется *ограниченной по индексу* если существует такой ординал $\xi_0 < \omega_1$, что все члены с индексами $\xi > \xi_0$ суть пустые множества. Соответственно, *неограниченная по индексу* последовательность конституант — это последовательность, которая содержит бесконечно много непустых членов. $\square$

Замечание 7.4.4. В этой терминологии следствие 7.4.1(i) можно переформулировать так: *для (1) существования несчетного Π_1^1 -множества, не имеющего совершенных подмножеств, необходимо*

и достаточно, чтобы (2) существовала неограниченная по индексу последовательность внешних конституант, все члены которой — не более чем счетные множества. $\square$

§ 7.5 Проблемы Лузина о конституантах

Согласно теореме 7.2.1 и следствию 7.4.1, проблема существования таких последовательностей внешних конституант, как в замечании 7.4.4, неразрешима. Однако в 1930-е гг. это не было известно, и математики, работавшие в дескриптивной теории множеств, рассматривали разные модификации этой проблемы, пытаясь нащупать перспективу для содержательного исследования. Работая в этом направлении, Н. Н. Лузин ввел следующее фундаментальное понятие.

Определение 7.5.1. Совокупность или последовательность, состоящая из борелевских множеств, называется *ограниченной по рангу*, если существует такой ординал $\rho < \omega_1$, что каждое множество данной совокупности или каждый член данной последовательности есть множество борелевского класса Σ_ρ^0 . $\square$

Например, ограниченной по рангу является, очевидно, любая счетная последовательность. Однако совокупность всех борелевских множеств (в любом заданном несчетном польском пространстве) не ограничена по рангу по теореме иерархии (см. теорему 4.3.3).

Следующие проблемы о конституантах сформулированы Лузиным в ряде работ 1930-х гг., в частности в [27, п. 1], [134, п. 8].

Проблема I. Существует ли неограниченная по индексу последовательность внешних конституант, каждый член которой, т. е. каждая конституанта C_ξ , $\xi < \omega_1$, содержит ровно одну точку?

Проблема II. Существует ли неограниченная по индексу последовательность внешних конституант, все члены которой — не более чем счетные множества?

Проблема III. Существует ли неограниченная по индексу, но ограниченная по рангу последовательность внешних конституант?

Проблема IV. Существует ли неограниченная по индексу последовательность внешних конституант, члены которой можно заключить в попарно непересекающиеся борелевские множества, образующие ограниченное по рангу семейство?

Нумерация проблем взята нами из лужинских работ [27], [134] где каждая из проблем напечатана с красной строки с употреблением слова «проблема» и указанного номера. Возрастание номера

соответствует убыванию силы требований, предъявляемых к последовательности конститuant. В частности, требования, предъявляемые проблемой III, слабее требований проблемы II ввиду того, что всякое не более чем счетное множество (вообще, всякое множество F_σ) принадлежит борелевскому классу Σ_2^0 .

Из четырех сформулированных проблем, проблема II была в особенности хорошо известна в классической дескриптивной теории множеств благодаря тому, что она эквивалентна фундаментальной проблеме РК(Π_1^1) мощности / совершенного ядра для Π_1^1 -множеств, т. е. существование требуемой последовательности конститuant равносильно существованию несчетного Π_1^1 -множества без совершенно ядра, см. замечание 7.4.4.

Проблема III также привлекала внимание Лузина, и он обращался к анализу этой проблемы и некоторых ее аспектов в ряде других работ 30-х годов помимо указанных (в частности, см. книгу [135, гл. III] и статьи [132], [133]). В этих работах Лузин поставил еще несколько вопросов о существовании решет с определенными требованиями к конститuantам, два из которых мы здесь упомянем. Для сохранения единства терминологии и ссылок, мы сформулируем эти вопросы под названиями: проблема IIIa, проблема IIIb, поскольку они в известном смысле являются вариантами проблемы III.

Проблема IIIa (п. 1 в [132]). Существует ли неограниченная по индексу последовательность внешних конститuant, среди членов которой можно выделить несчетное число непустых борелевских множеств, образующих ограниченное по рангу семейство?

Проблема IIIb (п. 5 в [133]). Существует ли неограниченная по индексу последовательность внешних конститuant, среди членов которой можно выделить несчетное ограниченное по рангу семейство непустых множеств, и при этом все конститuantы непусты?

К этой серии принадлежит и следующая проблема, поставленная Лузиным в статье [26, п. 5], где она названа «основной проблемой теории аналитических совокупностей» (без сообщения ей какого-либо номера). За неимением более подходящего варианта, мы присваиваем здесь этой проблеме аббревиатуру ОПТАС.

Проблема ОПТАС. Существует ли пара сопряженных последовательностей конститuant $\langle C_\xi \rangle_{\xi < \omega_1}$ и $\langle A_\xi \rangle_{\xi < \omega_1}$, хотя бы одна⁴ из которых неограничена по индексу, но обе ограничены по рангу?

⁴ Здесь можно не ограничивая общности потребовать неограниченность по индексу именно последовательности внутренних конститuant $\langle A_\xi \rangle_{\xi < \omega_1}$. В самом деле, если последняя ограничена по индексу, т. е. все, кроме счетного их числа, множества A_ξ пусты, то множество $A = \bigcup_\xi A_\xi$ — очевидно, борелевское, а то

Замечание 7.5.2. В работах Н. Н. Лузина чаще рассматривались *действительные* конституанты в смысле определения 7.4.2, т. е. те, которые производятся решетками — в частности, это относится к работам [27], [134], содержащим серию проблем I, II, III, IV. В других работах, в частности, в статье [133], Н. Н. Лузин рассматривает *явные* конституанты — те, которые определяются через суслинские системы. Суть однако в том, что обе системы конституант обладают одними и теми же главными свойствами — в частности, всё сказанное ниже о *решениях* проблем о конституантах (включая теоремы неразрешимости) в равной степени относится к обеим этим системам.

Сверх того, решения проблем о конституантах не меняются, если разрешить суслинские системы и решета, состоящие не только из замкнутых, но и из произвольных *борелевских* множеств. $\square$

Подобно проблемам из § 7.2, связанным со свойствами регулярности, некоторые из этих проблем, а именно, проблемы II, III, IV, IIIa, IIIb, оказались **неразрешимыми**, причем

- 1) эквивалентными в том смысле, что из существования последовательности конституант, удовлетворяющей требованиям одной (любой) из них, следует существование последовательности конституант, удовлетворяющей требованиям любой другой проблемы по выбору из этих пяти,
- 2) и сверх того эквивалентными, в том же смысле, проблеме мощности / совершенного ядра для Π_1^1 -множеств (замечание 7.4.4).

Проблемы же I и ОПТАС оказалась, напротив, **разрешимыми в отрицательном направлении**: последовательностей требуемых видов нет, и это факт, который доказывается в **ZFC**, т. е. обычными средствами теории множеств. При этом разница обеспечивается для проблемы I не требованием одноэлементности как таковым, а подразумеваемой этим требованием непустотой каждой внешней конституанты. Добавив это требование непустоты к проблемам II и III, мы также получаем проблемы, разрешимые отрицательно. Что касается проблемы ОПТАС, то ее разрешимость обусловлена некоторыми далеко не очевидными свойствами именно внутренних конституант.

Доказательства этих теорем о неразрешимости и разрешимости проблем о конституантах будут изложены в главах 15 и 16, см. § 16.1.

Недавно некоторые из результатов, связанных с последовательностями конституант ограниченного борелевского ранга, удалось рас-

гда и дополнительное Π_1^1 -множество $C = \bigcup_{\xi} C_{\xi}$ — также борелевское, и потому последовательность внешних конституант $\langle C_{\xi} \rangle_{\xi < \omega_1}$ будет ограниченной по индексу согласно теореме 5.3.4. В обратную сторону это рассуждение не проходит.

пространить на более широкий тип ω_1 -последовательностей, порождаемых Π_1^1 -нормами, об этом см. в статье [74].

§ 7.6 Узкая проблема континуума

Математики, работающие в области теории множеств, всегда рассматривали как один из наиболее важных вопросов о соотношении двух простейших несчетных мощностей — мощности $\aleph_1$ множества всех не более чем счетных трансфинитов и мощности континуума вещественных чисел $\mathfrak{c}$. Внимание специалистов было привлечено к таким фундаментальным проблемам, как

- канторова *проблема континуума* (состоящая в доказательстве или опровержении континуум-гипотезы $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$),
- гильбертова проблема эффективного полного упорядочения континуума вещественных чисел, и
- восходящая к Лебегу задача эффективного доказательства неравенства $\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$, т. е. эффективного (без аксиомы выбора) определения множества мощности ровно $\aleph_1$, состоящего из вещественных чисел.

Эти вопросы, относящиеся не только к теории множеств, но и к основаниям математики в широком смысле, рассматривались многими крупными математиками начала и первой половины XX века. Большой интерес они вызывали, в частности, у Н. Н. Лузина, пытавшегося найти подход к их решению с помощью методов дескриптивной теории множеств. Анализ этого круга вопросов привел Лузина к глубокой идее аналогии между точками действительной прямой и борелевскими множествами ограниченного ранга, в свете которой была весьма естественной постановка в «Лекциях» [135, гл. III] и в работах [132, 133, 134, 26, 27] следующих двух проблем, которые ставят те же вопросы, что и проблемы о ограниченных по рангу последовательностях конститuant из § 7.5, но в более широком контексте:

Узкая проблема континуума, УПК. ⁵ Можно ли эффективно разбить континуум вещественных чисел на $\aleph_1$ непустых борелевских множеств ограниченного борелевского ранга?

Узкая проблема Лебега, УПЛ. Можно ли эффективно построить последовательность из $\aleph_1$ попарно различных борелевских множеств вещественной прямой ограниченного борелевского ранга?

⁵ Во французском оригинале, *problème restreint du continu*. В англоязычной литературе, *restreint* переводится как *restricted*, см., например, [176]. На русский язык иногда переводится как *ограниченная*.

Следующая развернутая цитата из [28, с. 203] или [29, с. 173] раскрывает мотивацию Лузина в связи с «узкими проблемами».

Следовательно, на основании предыдущего, было бы очень желательно получить некоторые общие результаты, касающиеся разложения континуума на трансфинитную бесконечность множеств $\mathfrak{v}_\alpha$, измеримых в ограниченных классах. Это в некотором роде ослабленная проблема континуума, мы ее назовем узкой проблемой континуума.

С другой стороны, Лебег поставил проблему: узнать, можно ли назвать множество различных точек, перенумерованных при помощи всех трансфинитных чисел второго класса по Кантору. Лишь после того, как будет найдено положительное решение этой проблемы, можно считать установленным, что мощность континуума сравнима с мощностью множества всех трансфинитных чисел второго класса по Кантору. Поэтому было бы вполне естественно стараться назвать трансфинитную бесконечность множеств $\mathcal{C}_\alpha$, не пустых, измеримых в ограниченных классах. Это тоже ослабленная проблема; мы ее назовем узкой проблемой Лебега.

Исследования Штерна [175, 176] и Кановея [8, 10] показали, что, с одной стороны, в самом общем контексте **ZFC** обе проблемы решаются отрицательно (т. е. ни то, ни другое построение эффективно невыполнимо на базе аксиом **ZFC**), а с другой стороны, добавляя к **ZFC**, например, непротиворечивую аксиому конструктивности, можно получить и положительные решения проблем. Об этом см. главу 17.

§ 7.7 Структура высших проективных классов

Возвращаясь теперь к «основным проблемам дескриптивной теории функций» по П. С. Новикову [43], упомянутым выше в § 7.1, отметим, что третьей в списке стоит проблема делимости в высших проективных классах, ставшая особенно интересной после собственных исследований П. С. Новикова, показавших, что законы делимости для второго проективного уровня обратны законам делимости для первого уровня (см. § 5.6).

Что касается **Униформизации**, **Редукции**, и **Отделимости** для третьего и более высоких уровней, то здесь ситуация похожа на ту, которая имеет место для свойств регулярности (хотя и на один уровень выше). Именно, аксиомы **ZFC** недостаточно сильны, чтобы доказать или опровергнуть **Униформизацию**, **Редукцию**, или **Отделимость** для классов Σ_n^1 и Π_n^1 при $n \geq 3$. Здесь однако приносят пользу дополнительные аксиомы.

Например, аксиома конструктивности $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ (о ней см. главу 8) влечет **Униформизацию** и **Редукцию** для класса Σ_n^1 и, соответственно, **Отделимость** для класс Π_n^1 при любом $n \geq 3$ — т. е. совершенно аналогично результатам для классов второго уровня иерархии. Этот результат принадлежит, в разных частях, П. С. Новикову [43] и Аддисону [59, 60], а доказательство в контексте современной дескриптивной теории множеств изложено на русском языке в [6, § 13].

Другое решение приносит *аксиома детерминированности* **AD**. Именно, 1) если $n \geq 3$ нечетно, то, подобно первому уровню, **Униформизация** и **Редукция** выполнены для класса Π_n^1 , но не для Σ_n^1 , а **Отделимость** — наоборот, для класса Σ_n^1 , но не для Π_n^1 , но 2) если $n \geq 4$ четно, то, подобно второму уровню, **Униформизация** и **Редукция** выполнены для класса Σ_n^1 , но не для Π_n^1 , а **Отделимость** — наоборот, для класса Π_n^1 , но не для Σ_n^1 . Об аксиоме детерминированности и ее следствиях и, в частности, об этих результатах Мартина [141] и Московакиса [147] см. [49, гл. 8] или книгу [19, главы 14, 15], а в плане сравнения с аксиомой выбора — книгу [9].

Как видно, аксиомы $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ и **AD** дают весьма разную картину в отношении принципов **Униформизации**, **Редукции**, и **Отделимости** для третьего и более высоких уровней. Но они сходятся в отношении *четных* уровней, т. е. каждая из них, например, влечет **Отделимость** для классов Π_n^1 с четными индексами $n \geq 4$, хотя технически в силу совершенно разных причин. С другой стороны, имеются (весьма сложные) модели аксиом **ZFC**, в которых **Отделимость** не верна для класса Π_n^1 с наперед заданным четным или нечетным индексом $n \geq 4$, см. [7], так что и здесь, как и для свойств регулярности, имеет место неразрешимость.

Исторические и библиографические замечания

Проблемы о свойствах регулярности точечных множеств, вместе с другими лузинскими проблемами в этой области, постоянно фигурировали в качестве важных нерешенных задач в отечественных обзорах исследований по классической дескриптивной теории множеств, см., например, Л. В. Келдыш [22], П. С. Новиков и Л. В. Келдыш [45, 46], П. С. Новиков и А. А. Ляпунов [47]. О конституантах в связи с построением несчетных последовательностей борелевских множеств ограниченного ранга говорится в монографии Куратовского [122, с. 495]. К различным аспектам этих проблем обращались П. С. Новиков [42, с. 242], Л. В. Келдыш [21], А. А. Ляпунов [38], Е. А. Селивановский [160], а позже, начиная с 1960х годов — Соловей [168, 169], Стерн [175, 174, 176], и др. Анализ этих проблем специально посвящены статьи В. А. Успенского и В. Г. Кановея [11, 52, 53], В. Г. Кановея и В. А. Любецкого [17], и поэтому мы не будем особо останавливаться на исторических аспектах этих проблем.

Глава 8

Конструктивность по Гёделю

Среди всех мыслимых множеств с очевидностью выделяются такие, которые допускают простое определение или явное построение с помощью простых операций; назовем их «конструктивными». Это — интуитивное понятие: оно зависит и от выбора разрешенных средств определения или построения и от выбора исходных множеств для этих определений, построений. К счастью, оказывается, что все разумные варианты определения конструктивности приводят к очень небольшому числу действительно разных результатов. Наиболее известным и полезным является определение *конструктивности по Гёделю*.

§8.1 Общее понятие конструктивности

Определение конструктивных множеств известно в нескольких вариантах, дающих один и тот же результат. Для нас более удобен вариант статьи [83], прямо основанный на следующих восьми *гёделевых операциях* (даны по более удобному списку из книги [73]):

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_1(X, Y) &= \{X, Y\}, \quad \mathfrak{F}_2(X, Y) = X \setminus Y; \\ \mathfrak{F}_3(X, Y) &= \{\langle x, y \rangle \in X : y \in Y\}; \\ \mathfrak{F}_4(X, Y) &= X \cap \mathbf{ran} Y = \{x \in X : \exists y (\langle y, x \rangle \in Y)\}; \\ \mathfrak{F}_5(X, Y) &= \{\langle x, y \rangle \in X : x \in y\}; \\ \mathfrak{F}_6(X, Y) &= \{\langle x, y \rangle \in X : \langle y, x \rangle \in Y\}; \\ \mathfrak{F}_7(X, Y) &= \{\langle x, y, z \rangle \in X : \langle x, z, y \rangle \in Y\}; \\ \mathfrak{F}_8(X, Y) &= \{\langle x, y, z \rangle \in X : \langle z, x, y \rangle \in Y\}.\end{aligned}$$

Особенностью именно этого списка является то, что $\mathfrak{F}_n(X, Y) \subseteq X$ при $n \geq 2$. Известны другие варианты гёделевых операций — они отличаются второстепенными деталями, связанными с особенностями изложения в той или иной книге, но общим знаменателем является следующая теорема (см. [73, стр. 195], [99, лемма 31], [100, 13.4]):

Теорема 8.1.1. *Если $\varphi(x, x_1, \dots, x_m)$ — ограниченная формула, то имеется такая $(m+1)$ -арная суперпозиция F операций $\mathfrak{F}_i$, что $f(X, p_1, \dots, p_m) = \{x \in X : \varphi(x, p_1, \dots, p_m)\}$ для любых множеств $X, p_1, \dots, p_m$.* $\square$

Напомним, что $\mathbf{Ord}$ — это класс всех ординалов.

Определение 8.1.2 (конструктивные множества). Определим полное упорядочение $\leq$ класса $T = \{0, 1, \dots, 8\} \times \mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$ так:

$\langle i, \xi, \eta \rangle \leq \langle i', \xi', \eta' \rangle$ когда либо $\max\{\xi, \eta\} < \max\{\xi', \eta'\}$ либо $\max\{\xi, \eta\} = \max\{\xi', \eta'\}$, но $\langle \xi, \eta \rangle < \langle \xi', \eta' \rangle$ лексикографически, либо $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$, и $i < i'$.

Область определения порядка $\leq$ — это собственный класс T , но нетрудно проверить, что совокупность $T_{i\xi\eta}$ всех $\leq$ -предшественников любой тройки $\langle i, \xi, \eta \rangle \in T$ — множество, а не собственный класс. Через $\kappa(i, \xi, \eta) \in \mathbf{Ord}$ обозначим порядковый тип $T_{i\xi\eta}$ в смысле $\leq$. Тогда отображение $K(i, \xi, \eta) = 1 + \kappa(i, \xi, \eta)$ будет порядковым изоморфизмом $\langle T; \leq \rangle \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{Ord} \setminus \{0\}$. Обратные функции обозначим K_0, K_1, K_2 , т. е. если $K(i, \xi, \eta) = \gamma$ то $K_0(\gamma) = i$, $K_1(\alpha) = \xi$, $K_2(\alpha) = \eta$.

Легко видеть, что $K_1(\gamma) < \gamma$ и $K_2(\gamma) < \gamma$ для всех $\gamma \geq 1$. Это позволяет определить последовательность множеств $\mathbf{F}_\gamma$ индукцией по $\gamma \in \mathbf{Ord}$, при помощи следующей схемы:

$$\mathbf{F}_\gamma = \begin{cases} \emptyset & \text{при } \gamma = 0; \\ \mathfrak{F}_{K_0(\gamma)}(\mathbf{F}_{K_1(\gamma)}, \mathbf{F}_{K_2(\gamma)}) & \text{при } \gamma > 0 \text{ и } K_0(\gamma) > 0; \\ \{\mathbf{F}_\nu : \nu < \gamma\} & \text{при } \gamma > 0 \text{ и } K_0(\gamma) = 0. \end{cases}$$

Наконец, положим $\mathbb{L} = \{\mathbf{F}_\gamma : \gamma \in \mathbf{Ord}\}$ — класс всех конструктивных (по Гёделю) множеств. $\square$

Итак, конструктивные множества получаются в ходе определенного трансфинитного индуктивного построения, начиная с пустого множества. Каждый шаг этого построения состоит либо в применении одной из гёделевых операций из данного выше списка к какой-то паре уже построенных множеств (причем обеспечивается, что в ходе построения будут перебраны все пары), либо же в собирании всех уже построенных множеств в одно множество. При этом каждое множество из $\mathbb{L}$ конструируется неограниченное число раз:

Упражнение 8.1.3. Пусть $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Докажите, используя $\mathfrak{F}_2$, что найдется ординал $\gamma > \alpha$, для которого $\mathbf{F}_\gamma = \emptyset$, а также, если и $\xi \in \mathbf{Ord}$, то найдется ординал $\gamma > \alpha$, для которого $\mathbf{F}_\gamma = \mathbf{F}_\xi$.

Докажите, используя $\mathfrak{F}_0$, что $\{\mathbf{F}_n : n < \omega\} = \mathbf{HF}$ (все наследственно конечные множества). $\square$

Следующее модифицированное определение позволяет начать не с пустого множества, а с некоторого данного множества.

Определение 8.1.4 (относительная конструктивность). Для любого множества $X \subseteq \mathbb{L}$, пусть $\vartheta = \vartheta(X)$ — наименьший ординал, для которого $X \subseteq \{\mathbf{F}_\xi : \xi < \vartheta\}$. (Например, в случае, когда $X = a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, мы всегда имеем $\vartheta(a) = \omega$.)

Переопределим K в 8.1.2 как единственный порядковый изоморфизм $K : \langle T; \leq \rangle \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{Ord} \setminus \{0, \vartheta\}$; таким образом, обратные функции K_0, K_1, K_2 определены на множестве $\mathbf{Ord} \setminus \{0, \vartheta\}$ (все ординалы кроме 0 и ϑ). Определим $\mathbf{F}_\xi[X]$ индукцией по $\xi \in \mathbf{Ord}$, в соответствии со схемой 8.1.2, но со специальным пунктом: $\mathbf{F}_\vartheta[X] = X$.

Заметим, что $\mathbf{F}_\xi[X] = \mathbf{F}_\xi$ при $\xi < \vartheta$, так что $X = \mathbf{F}_\vartheta[X] \subseteq \{\mathbf{F}_\xi[X] : \xi < \vartheta\}$. Наконец, определяется

$$\mathbb{L}[X] = \{\mathbf{F}_\gamma[X] : \gamma \in \mathbf{Ord}\}$$

— класс всех множеств конструктивных относительно X . $\square$

Упражнение 8.1.5. Докажите, трансфинитной индукцией по ξ , что $\text{rnk } \mathbf{F}_\xi[X] \leq \xi$. $\square$

Определение 8.1.6 (гёделевы упорядочения). Если $x, y \in \mathbb{L}$, то отношение $x <^{\text{гёд}} y$ означает, что x встречается в последовательности множеств $\mathbf{F}_\gamma$ раньше y .

Если $X \subseteq \mathbb{L}$ и $x, y \in \mathbb{L}[X]$, то отношение $x <_X^{\text{гёд}} y$ означает, что x встречается в последовательности множеств $\mathbf{F}_\gamma[X]$ раньше y . $\square$

Нетрудно проверить, что класс $\mathbb{L}$ совпадает с $\mathbb{L}[X]$ для любого $X \in \mathbb{L}$. Следующая теорема получена Гёделем в [83] именно в этом частном случае, но общий результат доказывается аналогично.

Теорема 8.1.7. Пусть $X \subseteq \mathbb{L}$.

Класс $\mathbb{L}[X]$ транзитивен, и в нем выполнены все аксиомы **ZFC**.

Класс $\mathbb{L}[X]$ содержит X и все ординалы и является наименьшим классом с этим свойством, где выполнены все аксиомы **ZFC**.

Отношение $<_X^{\text{гёд}}$ есть полное упорядочение класса $\mathbb{L}[X]$, порядково подобное Ord . В частности, отношение $<^{\text{гёд}}$ есть полное упорядочение класса $\mathbb{L}$, порядково подобное Ord . $\square$

Транзитивность классов вида $\mathbb{L}[X]$ обеспечивается тем очевидным свойством гёделевых операций, что $\mathfrak{F}_i(X, Y) \subseteq \{X, Y\} \cup X \cup Y$.

§8.2 Конструктивная иерархия

Для изучения структуры класса $\mathbb{L}$ конструктивные множества располагают в иерархию множеств $\mathbb{L}_\xi$, которые определяются трансфинитной индукцией по ξ , так что

$\mathbb{L}_0 = \emptyset$ (пустое множество);

$\mathbb{L}_{\xi+1} = \mathcal{P}(\mathbb{L}_\xi) \cap \mathbf{cl}(\mathbb{L}_\xi \cup \{\mathbb{L}_\xi\})$, где $\mathbf{cl}(X)$ — замыкание множества X относительно гёделевых операций, т. е. наименьшее замкнутое относительно операций $\mathfrak{F}_i$ множество Y , для которого $X \subseteq Y$;

$\mathbb{L}_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \mathbb{L}_\xi$ для предельных ординалов λ .

Аналогично определяют и иерархию относительной конструктивности — в соответствии с определением 8.1.4. Например, для $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,

$\mathbb{L}_0[a] = \emptyset$;

$\mathbb{L}_{\xi+1}[a] = \mathcal{P}(\mathbb{L}_\xi[a]) \cap \mathbf{cl}(\mathbb{L}_\xi[a] \cup \{\mathbb{L}_\xi[a]\})$;

$\mathbb{L}_\omega[a] = \{a\} \cup \bigcup_{n < \omega} \mathbb{L}_n[a] = \{a\} \cup \text{HF}$;

$\mathbb{L}_\lambda[a] = \bigcup_{\xi < \lambda} \mathbb{L}_\xi[a]$ для предельных ординалов $\lambda > \omega$.

Эти иерархии и их варианты служат предметом глубоких исследований в современной теории множеств, с ключевым термином *fine structure*, о более раннем этапе которых см., например, [49, гл. 5] на русском языке. Нам же в этой книге будет достаточно следующего более элементарного определения иерархии, просто объединяющего на одном уровне все множества, конструируемые до данного шага:

$$\mathbb{F}_\gamma = \{\mathbf{F}_\xi : \xi < \gamma\} \quad \text{и} \quad \mathbb{F}_\gamma[x] = \{\mathbf{F}_\xi[x] : \xi < \gamma\} \text{ — при } x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Понятно, что каждое множество $\mathbb{F}_\gamma[x]$ — начальный сегмент всего класса $\mathbb{L}[x]$ в смысле порядка $<_x^{\text{гёд}}$ определения 8.1.6.

§ 8.3 Абсолютность гёделева построения

Описанное в § 8.1 трансфинитное построение никак не использует аксиому Степени, а потому может быть проведено средствами более слабой теории $\mathbf{ZFC}^-$ (т. е., напомним, $\mathbf{ZFC}$ без аксиомы Степени) — т. е. аксиом $\mathbf{ZFC}^-$ достаточно для доказательства тех базовых свойств порядка $\leq$, функций K и K_i , самих отображений $\gamma \mapsto \mathbf{F}_\gamma$ и $\xi, X \mapsto \mathbf{F}_\xi[X]$, и полных порядков вида $<_X^{\text{гёд}}$, о которых шла речь в § 8.1. В частности, в $\mathbf{ZFC}^-$, множества $\mathbf{F}_\gamma$ и $\mathbf{F}_\xi[X]$ определены для всех ординалов γ, ξ и любого множества $X \subseteq \mathbb{L} = \{\mathbf{F}_\gamma : \gamma \in \text{Ord}\}$, в частности, для $X = a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Теорема 8.1.7 также верна в $\mathbf{ZFC}^-$, с очевидной заменой $\mathbf{ZFC}$ на $\mathbf{ZFC}^-$.

Отсюда, в частности, следует, что если $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель $\mathbf{ZFC}^-$, $\xi \in \text{Ord}^{\mathfrak{M}} = \text{Ord} \cap \mathfrak{M}$, и $a \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то внутри $\mathfrak{M}$ определены множества $\mathbf{F}_\xi$ и $\mathbf{F}_\xi[a]$, которые, для внешнего наблюдателя, обозначаются, как обычно, через $(\mathbf{F}_\xi)^{\mathfrak{M}}$ и $(\mathbf{F}_\xi[a])^{\mathfrak{M}}$. Следующий результат об абсолютности был установлен Гёделем при гораздо более мягких требованиях к $\mathfrak{M}$ чем быть моделью $\mathbf{ZFC}^-$ (см. [99], разд. 11).

Предложение 8.3.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивное множество или класс, в котором истинны все аксиомы $\mathbf{ZFC}^-$, и $a \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда последовательность $\langle \mathbf{F}_\xi[a] \rangle_{\xi \in \text{Ord} \cap \mathfrak{M}}$ абсолютна для $\mathfrak{M}$, т. е. $\mathbf{F}_\xi[a] = (\mathbf{F}_\xi[a])^{\mathfrak{M}}$ для любого ординала $\xi \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство (набросок). Проверяем абсолютность функций K и K_i и операций $\mathfrak{F}_n$ (на основе теоремы 3.8.1), а затем доказываем равенство $\mathbf{F}_\xi[a] = (\mathbf{F}_\xi[a])^{\mathfrak{M}}$ трансфинитной индукцией по ξ . $\square$

Взяв класс $\mathbb{L}$ в качестве $\mathfrak{M}$ в 8.3.1, Гёдель получил:

Следствие 8.3.2. $\mathbb{L} = (\mathbb{L})^{\mathbb{L}}$, т. е. совокупность всех множеств $x \in \mathbb{L}$, которые определены как конструктивные множества внутри универсума $\mathbb{L}$, совпадает с самим классом $\mathbb{L}$. $\square$

Дальше нам потребуется лемма, в определенном смысле обобщающая результат 8.3.1 на нефундированные модели. В ней используются обозначения из §§ 3.9, 3.11. Напомним, что если $\varepsilon \in \mathbf{E}$, то $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ — ω -модель теории $\mathbf{ZFC}^-$, $\mathbf{WF}_\varepsilon$ — фундированное ядро этой модели, $\phi_\varepsilon : \langle \mathbf{WF}_\varepsilon; \varepsilon \rangle \xrightarrow{\text{на}} \langle \mathfrak{M}_\varepsilon; \in \rangle$ — единственный изоморфизм на транзитивное множество $\mathfrak{M}_\varepsilon$, и $(x)^\varepsilon = \phi_\varepsilon^{-1}(x) \in \mathbf{WF}_\varepsilon$ для $x \in \mathfrak{M}_\varepsilon$.

Лемма 8.3.3. *Предположим, что $\varepsilon \in \mathbf{E}$, $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \cap \mathfrak{M}_\varepsilon$, $\gamma \in \mathbf{Ord} \cap \mathfrak{M}_\varepsilon$, $x \in \mathfrak{M}_\varepsilon$, и $\bar{x} = (x)^\varepsilon$, $\bar{a} = (a)^\varepsilon$, $\bar{\gamma} = (\gamma)^\varepsilon$. Тогда $x = \mathbf{F}_\gamma[a]$, если и только если в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ истинно $\bar{x} = \mathbf{F}_{\bar{\gamma}}[\bar{a}]$.*

Доказательство. Для уменьшения громоздкости, пусть $\bar{y} = (y)^\varepsilon$ для всех $y \in \mathfrak{M}_\varepsilon$. Формулы « x — ординал» и $x \in y$ ограничены, а потому лемма 3.11.3 дает $\bar{\gamma} \in \mathbf{WFOrd}^\varepsilon$, и кроме того,

$$\{\alpha \in \mathbf{Ord}^\varepsilon : \text{в } \langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle \text{ истинно } \alpha < \bar{\gamma}\} = \{\bar{\xi} : \xi < \gamma\}.$$

Далее, опуская громоздкие но достаточно очевидные детали, мы получаем при помощи леммы 3.11.3 следующее:

- (1) если $\gamma \in \mathbf{Ord} \cap \mathfrak{M}_\varepsilon$ и $n = K_0(\gamma)$, $\xi = K_1(\gamma)$, $\eta = K_2(\gamma)$ — при этом, заметим, $n \leq 8$ и $\xi, \eta < \gamma$ строго, — то в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ истинно $\bar{n} = K_0(\bar{\gamma})$, $\bar{\xi} = K_1(\bar{\gamma})$, $\bar{\eta} = K_2(\bar{\gamma})$, и $\bar{\xi}, \bar{\eta} \varepsilon \bar{\gamma}$.

На основании этого, мы доказываем:

- (2) если $\gamma \in \mathbf{Ord} \cap \mathfrak{M}_\varepsilon$, то множество $x = \mathbf{F}_\gamma[a]$ принадлежит $\mathfrak{M}_\varepsilon$, и в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ истинно $\bar{x} = \mathbf{F}_{\bar{\gamma}}[\bar{a}]$.

Рассуждаем индукцией по γ . Опуская тривиальные части, пусть $\gamma \geq 1$ и $\gamma \neq \omega$, и пусть $n = K_0(\gamma)$, $\xi = K_1(\gamma)$, $\eta = K_2(\gamma)$. Допустим, что, к примеру, $n = 6$ (остальные случаи аналогичны), т. е. $x = \mathfrak{F}_6(y, z)$, где $y = \mathbf{F}_\xi[a]$ и $z = \mathbf{F}_\eta[a]$. Тогда $\xi, \eta < \gamma$, следовательно, по индуктивной гипотезе, $y, z \in \mathfrak{M}_\varepsilon$, и элементы $\bar{y}, \bar{z} \in \mathbf{WF}_\varepsilon$ удовлетворяют $\bar{y} = \mathbf{F}_{\bar{\xi}}[\bar{a}]$, $\bar{z} = \mathbf{F}_{\bar{\eta}}[\bar{a}]$ в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$.

Пусть $\bar{w} \in \mathbb{N}$ — тот элемент, для которого в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ истинно $\bar{w} = \mathfrak{F}_6(\bar{y}, \bar{z})$; $\bar{w} = (w)^\varepsilon$, где $w \in \mathfrak{M}_\varepsilon$. Тогда $\bar{w} = \mathbf{F}_{\bar{\gamma}}[\bar{a}]$ в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ согласно (1). А с другой стороны, « $\bar{w} \subseteq \bar{y}$ » истинно в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ по определению $\mathfrak{F}_6$, а $\bar{y} \in \mathbf{WF}_\varepsilon$. Отсюда $\bar{w} \in \mathbf{WF}_\varepsilon$ по лемме 3.10.3(i). Но тогда $w = \mathfrak{F}_6(y, z)$ благодаря лемме 3.11.3 (действие $\mathfrak{F}_6$ выражается ограниченной формулой), откуда $w = x$, что и требовалось. $\square$

§ 8.4 Аксиома конструктивности

Верно ли, что все множества конструктивны (принадлежат $\mathbb{L}$), или, наоборот, существуют неконструктивные множества? Этот вопрос можно задать и в форме: верна ли *аксиома конструктивности*

$$\begin{aligned} \mathbb{V} = \mathbb{L} & \quad \text{есть предложение} & \quad \forall x \exists \xi \in \text{Ord} (x = \mathbf{F}_\xi); \\ \mathbb{V} = \mathbb{L}[X] & \quad \text{есть предложение} & \quad \forall x \exists \xi \in \text{Ord} (x = \mathbf{F}_\xi[X]) \\ & & \quad (\text{для произвольного } X). \end{aligned}$$

Теорема 8.4.1. *Предположим, что теория **ZFC** непротиворечива.¹ Тогда ни отрицание аксиомы $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ ни сама аксиома $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ не могут быть доказаны в **ZFC**. Говоря другими словами, как аксиома конструктивности $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ так и ее отрицание $\mathbb{V} \neq \mathbb{L}$ совместимы с аксиомами **ZFC**, или, что то же самое, не противоречат аксиомам **ZFC**, или проще говоря, непротиворечивы.² $\square$*

Теорема 8.4.2. *Аксиома выбора **АС** и обобщенная континуум-гипотеза **ГСН** истинны в классе $\mathbb{L}$ всех конструктивных множеств, а также в любом классе вида $\mathbb{L}[a]$, где $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Доказательство (набросок). С аксиомой выбора всё просто: полное упорядочение $\prec_a^{\text{гед}}$ класса $\mathbb{L}[a]$ определимо в $\mathbb{L}[a]$ согласно предложению 8.3.1, что и позволяет выбирать в $\mathbb{L}[a]$ элемент в любом непустом множестве A как $\prec_a^{\text{гед}}$ -наименьший элемент в A .

¹ См. замечание после теоремы 7.2.1.

² Правильнее: непротиворечивы *относительно* **ZFC**, т. е. при (часто молчаливом) допущении непротиворечивости самой теории **ZFC**.

Лемма 8.4.3. *Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то мы имеем $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{F}_{\omega_1}[a]$ — т. е. если $x \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то $x = \mathbf{F}_{\xi}[a]$ для некоторого ординала $\xi < \omega_1$, — и даже $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{HC} \subseteq \mathbb{F}_{\omega_1}[a]$.* $\square$

Доказательство этой ключевой леммы основано на теореме Скулема — Лёвенгейма 3.2.5 (или принципе отражения 3.2.6), абсолютности как в 8.3.1, и теореме 3.2.2 о свёртке по Мостовскому, и достаточно громоздко; мы его не включаем в эту книгу. Интересующийся читатель может ознакомиться с ним по книгам [73], [99] или [49, гл. 5], где, правда, рассмотрен только случай, когда исходный параметр $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ отсутствует — но обобщение на $\mathbb{L}[a]$, где $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, не вносит никаких существенных сложностей.

Возвращаясь к **СН**, мы видим, что если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{V} = \mathbb{L}[a]$, то по лемме имеется не более чем $\aleph_1$ точек $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, так что $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. $\square$

Вторая часть теоремы 8.4.1, т. е. непротиворечивость отрицания аксиомы конструктивности (формально выражаемого неравенством $\mathbb{V} \neq \mathbb{L}$), была установлена Коэном [73] при помощи форсинга.

Для нас здесь важно, что коль скоро аксиома $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ непротиворечива (при молчаливом допущении непротиворечивости **ZFC**), непротиворечиво и любое ее следствие. Это относится и к такому известному (даже вне собственно теории множеств) следствию аксиомы конструктивности, как обобщенная континуум-гипотеза.

Закончим мы этот раздел еще одним полезным результатом.

Лемма 8.4.4. *Если $\mathfrak{M}$ — транзитивное множество, в котором истинны все аксиомы $\mathbf{ZFC}^-$, $\xi = \mathfrak{M} \cap \text{Ord}$, и $a \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то в $\mathfrak{M}$ истинно $\mathbb{V} = \mathbb{L}[a]$, если и только если $\mathfrak{M} = \mathbb{F}_{\xi}[a]$ — и в этом случае ординал ξ предельный.*

Доказательство. Гёделево построение абсолютно для модели $\mathfrak{M}$ согласно 8.3.1. Отметим также, что ординал ξ предельный: иначе модель $\mathfrak{M}$ имела бы наибольший ординал, что несовместимо с аксиомами **ZFC**[−] (почему? — **упражнение**). Допустим, что в $\mathfrak{M}$ истинно $\mathbb{V} = \mathbb{L}[a]$, т. е., формально, истинно « $\forall x \exists \eta \in \text{Ord} (x = \mathbf{F}_{\eta}[a])$ ». По определению ξ , и в силу указанной абсолютности, отсюда следует, что $\mathfrak{M} = \{\mathbf{F}_{\eta}[a] : \eta < \xi\} = \mathbb{F}_{\xi}[a]$ (так как ξ — предельный ординал).

Вывод обратной импликации столь же прост. $\square$

Вообще, имеется масса приложений конструктивности, относящихся к дескриптивной теории множеств. Но перед тем, как перейти к этому материалу, нам придется остановиться на особенностях конструктивности в области бэровского пространства.

§ 8.5 Кардиналы конструктивных универсумов

Пусть $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Класс $\mathbb{L}[a]$ транзитивен, содержит все ординалы (т. е. $\text{Ord} \subseteq \mathbb{L}[a]$), и удовлетворяет всем аксиомам **ZFC** по теореме 8.1.7. Следовательно, в $\mathbb{L}[a]$ существует первый несчетный ординал — который обозначается через $\omega_1^{\mathbb{L}[a]}$, т. е. « ω_1 внутри $\mathbb{L}[a]$ », и вообще, если $1 \leq \xi \in \text{Ord}$, то существует ξ -ый по величине несчетный кардинал $\omega_\xi^{\mathbb{L}[a]} = \aleph_\xi^{\mathbb{L}[a]} \in \text{Ord}$ внутри класса $\mathbb{L}[a]$. В частности, через $\omega_\xi^{\mathbb{L}} = \aleph_\xi^{\mathbb{L}} \in \text{Ord}$ обозначается ξ -ый по величине несчетный кардинал внутри класса $\mathbb{L}$, а через $\omega_1^{\mathbb{L}} = \aleph_1^{\mathbb{L}}$ — первый такой кардинал.

Для нас будет важен следующий результат, связывающий счетность ординалов $\omega_1^{\mathbb{L}[a]}$ и множеств вида $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Лемма 8.5.1. *Пусть $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} < \omega_1$, если и только если множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ счетно.*

Доказательство. Согласно теореме 8.4.2, в классе $\mathbb{L}[a]$ выполнена континуум-гипотеза, а потому имеется биекция между множеством $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и ординалами $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}[a]}$. $\square$

Какова на самом деле величина ординалов вида $\omega_1^{\mathbb{L}[a]}$? В конструктивном универсуме $\mathbb{L}$ мы, разумеется, имеем $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} = \omega_1$ для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — просто потому, что $\mathbb{L}[a] = \mathbb{L} = \mathbb{V}$ истинно в $\mathbb{L}$. С другой стороны, форсинг склейки кардиналов из § 9.7 приносит модель, где $\omega_1^{\mathbb{L}} < \omega_1$ строго, и даже более сложную *модель Соловея* (см. § 13.6), в которой вообще $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} < \omega_1$ для *всех* $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Согласно следующей лемме, эта гипотеза, т. е. $\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\omega_1^{\mathbb{L}[a]} < \omega_1)$, влечет неожиданное следствие для всех ординалов вида $\omega_\xi^{\mathbb{L}[a]}$, $\xi < \omega_1$.

Лемма 8.5.2. *Если $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} < \omega_1$ для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то кардинал $\aleph_1 = \omega_1$ универсума строго недостижим в любом классе вида $\mathbb{L}[a]$, $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и при этом даже $\omega_\xi^{\mathbb{L}[a]} < \omega_1$ для всех $\xi < \omega_1$ и $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Доказательство. Пусть, по избежание двусмысленностей, $\kappa = \aleph_1$. Выведем сначала, что

(*) если $\xi < \kappa$, то найдется точка $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которой $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}[b]}$.

Действительно, найдется полное упорядочение $\prec$ множества $\mathbb{N}$ по типу ξ . Множество $\prec$ есть множество пар натуральных чисел, и поэтому оно кодируется некоторой точкой $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; например, $b(n) = 1$ при $n = 2^k \cdot 3^j$ и $k \prec j$, и $b(n) = 0$ иначе. Тогда $\prec$ принадлежит $\mathbb{L}[b]$, следовательно, ординал ξ счетен в $\mathbb{L}[b]$, так что $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}[b]}$.

Теперь предположим противное утверждению леммы: $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, но κ не есть строго недостижимый кардинал в $\mathbb{L}[a]$. Коль скоро все классы $\mathbb{L}[x]$, $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяют **ГСН** (см. § 8.4), предположение противного распадается на два случая.

Случай 1: κ — непредельный кардинал в $\mathbb{L}[a]$, т. е. найдется такой ординал ξ , что $\kappa = \omega_{\xi+1}^{\mathbb{L}[a]}$. Тогда $\lambda = \omega_{\xi}^{\mathbb{L}[a]} < \kappa$. Поэтому по (*) найдется точка $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которой $\lambda < \omega_1^{\mathbb{L}[a,b]}$. Подытожим: $\lambda = \omega_{\xi}^{\mathbb{L}[a]} < \kappa = \omega_{\xi+1}^{\mathbb{L}[a]}$, т. е. строго между λ и κ не может быть $\mathbb{L}[a]$ -кардиналов, тем более, $\mathbb{L}[a, b]$ -кардиналов. Однако $\lambda < \omega_1^{\mathbb{L}[a,b]}$ — это означает, что $\omega_1 = \kappa \leq \omega_1^{\mathbb{L}[a,b]}$, так что фактически $\omega_1 = \kappa = \omega_1^{\mathbb{L}[a,b]}$. Но по условию $\omega_1^{\mathbb{L}[a,b]} < \omega_1$ — противоречие.

Случай 2: κ — предельный кардинал в $\mathbb{L}[a]$, т. е. найдется такой предельный ординал ξ , что $\kappa = \omega_{\xi}^{\mathbb{L}[a]}$, и при этом κ сингулярен в $\mathbb{L}[a]$, так что найдется множество $X \subseteq \kappa$ мощности $\text{card } X = \lambda = \omega_{\eta}^{\mathbb{L}[a]} < \kappa$ в $\mathbb{L}[a]$, где $\eta < \xi$, и неограниченное в κ . Согласно (*), существует точка $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которой $\lambda < \omega_1^{\mathbb{L}[b]}$, так что имеется функция $f \in \mathbb{L}[b]$, $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} X$. При этом, если $n \in \mathbb{N}$, то $f(n) \in \kappa$, т. е. $f(n)$ — некоторый ординал $< \kappa$, так что снова по (*), существует точка $b_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которой $f(n) < \omega_1^{\mathbb{L}[b_n]}$. А это означает, что имеется функция $g_n \in \mathbb{L}[b_n]$, $g_n : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} f(n) = \{\eta : \eta < f(n)\}$. Но вследствие неограниченности множества X в κ , мы имеем

$$\kappa = \bigcup_{\xi \in X} \{\eta : \eta < \xi\} = \{g_n(k) : n, k \in \mathbb{N}\},$$

т. е. ординал $\kappa = \omega_1$ счетен, противоречие.

Для доказательства последнего утверждения леммы, достаточно вспомнить, что любой недостижимый кардинал κ удовлетворяет $\kappa = \aleph_{\kappa}$, см. § 2.7. Применив это утверждение внутри $\mathbb{L}[a]$, имеем: если $\xi < \kappa$, то $\omega_{\xi}^{\mathbb{L}[a]} < \omega_{\kappa}^{\mathbb{L}[a]} = \kappa$. $\square$

§ 8.6 Конструктивность и континуум

Понятно, что конструктивное построение — это достаточно сложный трансфинитный процесс, вовлекающий ординалы и иные множества, даже если мы интересуемся только теми результатами, которые касаются бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и иных подобных пространств. Тем не менее, можно вывести определимость той части гёделева построения, которая дает результат в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, посредством подходящей аналитической формулы.

Определение 8.6.1. Положим $\mathbf{f}_\xi[a] = \mathbf{F}_\xi[a]$, если $\mathbf{F}_\xi[a] \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а иначе определим $\mathbf{f}_\xi[a] = \mathbf{0}$, где точка $\mathbf{0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ определяется через $\mathbf{0}(n) = 0$, $\forall n$, так что $\mathbf{f}_\xi[a]$ всегда принадлежит $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Через $\omega_1^{\mathbb{L}[a]}$ обозначим первый несчетный кардинал в классе $\mathbb{L}[a]$.

Через $\prec_a$ обозначим порядок $<_a^{\text{ед}}$ ограниченный на $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Далее речь пойдет у нас об определмости последовательности $\langle \mathbf{f}_\xi[a] \rangle_{\xi < \omega_1}$, где $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ фиксировано. Для этой цели нам будет нужна кодировка счетных ординалов при помощи множеств

$$\mathbf{WFT}_\xi = \{T \in \mathbf{WFT} : |T| = \xi\}.$$

Точнее говоря, если $\xi < \omega_1$ то все деревья $T \in \mathbf{WFT}_\xi$ — т. е. все фундированные деревья $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ ранга ξ — будут рассматриваться как коды ординала ξ .

Теорема 8.6.2. (i) Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ то

$$\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathbb{F}_{\omega_1}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathbb{F}_{\omega_1^{\mathbb{L}[a]}}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{\mathbf{f}_\xi[a] : \xi < \omega_1^{\mathbb{L}[a]}\}$$

и множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ вполне упорядочивается отношением $\prec_a$ по типу $\omega_1^{\mathbb{L}[a]}$.

(ii) Найдутся Σ_1^1 -формула $\varphi(T, a, x)$ и Π_1^1 -формула $\psi(T, a, x)$ такие, что для любых $T \in \mathbf{WFT}$ и $a, x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ выполнена эквивалентность $x = \mathbf{f}_{|T|}[a] \iff \varphi(T, a, x) \iff \psi(T, a, x)$.

(iii) Множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и отношение $\prec_a$ принадлежат $\Sigma_2^1(a)$.

(iv) Пусть $a, p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $n \geq 2$, и $P \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^4$. Тогда множество

$$U = \{\langle a, y, z \rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^3 : \forall x \prec_a y \, P(a, x, y, z)\}$$

имеет класс $\Sigma_n^1(p)$ при условии, что $P \in \Sigma_n^1(p)$, и имеет класс $\Pi_n^1(p)$ при условии, что $P \in \Pi_n^1(p)$.

Доказательство (набросок). (i) Сразу из леммы 8.4.3 следует равенство $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathbb{F}_{\omega_1}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{\mathbf{f}_\xi[a] : \xi < \omega_1\}$, а также то, что длина $\prec_a$ не превосходит ω_1 . Теперь, почему ω_1 можно заменить на $\omega_1^{\mathbb{L}[a]}$? Дело в том, что индуктивная конструкция множеств $\mathbf{F}_\xi[a]$ абсолютна для $\mathbb{L}[a]$, (согласно предложению 8.3.1), т. е. может быть проведена в $\mathbb{L}[a]$ с тем же конечным результатом. Однако в $\mathbb{L}[a]$ все точки $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ появляются до шага $\omega_1^{\mathbb{L}[a]}$, опять согласно лемме 8.4.3!

Доказательство утверждения (ii) вынесено в отдельный § 8.7.

(iii) Из (i) следует что $x \in \mathbb{L}[a] \iff \exists T (T \in \mathbf{WFT} \wedge x = \mathbf{f}_{|T|}[a])$.
 Заменим равенство $x = \mathbf{f}_{|T|}[a]$ Σ_1^1 -формулой $\varphi(T, a, x)$ из (ii) и воспользуемся тем что $\mathbf{WFT} \in \Pi_1^1$ (см. теорему 5.4.1). Что же касается порядка $\prec_a$, то по определению $x \prec_a y$ равносильно тому, что

$$\exists \eta < \omega_1 (y = \mathbf{f}_\eta[a] \wedge \underbrace{\forall \xi < \eta (y \neq \mathbf{f}_\xi[a])}_{\vartheta(a, y, \eta)} \wedge \exists \xi < \eta (x = \mathbf{f}_\xi[a])) \quad (1)$$

Теперь нам придется немного повозиться, чтобы привести подформулу ϑ к Π_1^1 -виду. Собственно, нужно как-то представить квантор $\forall \xi < \eta$ как арифметический (в контексте схемы из § 4.5).

Напомним, что если $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ — дерево и $s \in T$, то $T|_s = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : s^\wedge t \in T\}$ — обрезанное дерево. Если при этом $T \in \mathbf{WFT}$ то $T|_s \in \mathbf{WFT}$ для всех s , и $\{\xi : \xi < |T|\} = \{|T|_s| : s \in T\}$.

Отсюда следует $\vartheta(a, y, |T|) \iff \forall s \in T (y \neq \mathbf{f}_{|T|_s|}[a])$ для любого $T \in \mathbf{WFT}$ и $a, y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Это позволяет привести формулу (1) к искомому Σ_2^1 -виду (от аргументов x, y, a) при помощи (i) и теоремы 5.4.1, а именно, к виду

$$\exists T, S \in \mathbf{WFT} (y = \mathbf{f}_{|T|}[a] \wedge \wedge \forall s \in T (y \neq \mathbf{f}_{|T|_s|}[a]) \wedge |S| < |T| \wedge x = \mathbf{f}_{|S|}[a]).$$

Понятно, что ключевым моментом является превращение квантора $\forall \xi < \eta$ подформулы ϑ в квантор $\forall s$ над $\mathbb{N}^{<\omega}$, который не влияет на класс формулы.

(iv) Для простоты, параметр p опустим. Результат для класса Π_n^1 получается просто по определению из уже доказанного (iii):

$$U(a, y, z) \iff \forall x (x \prec_a y \implies P(a, x, y, z)).$$

Однако для класса Σ_n^1 придется немного поработать. Понятно, что формула $U(a, y, z)$ равносильна следующей формуле:

$$\exists \eta < \omega_1 (y = \mathbf{f}_\eta[a] \wedge \underbrace{\forall \xi < \eta \exists x (x = \mathbf{f}_\xi[a] \wedge P(a, x, y, z))}_{\tau(a, x, \eta, y, z)}),$$

где формула $\tau(a, x, \eta, y, z)$ выражает тот факт что $\langle a, \mathbf{f}_\xi[a], y, z \rangle \in P$ для любого $\xi < \eta$. Приведение формулы τ к Σ_n^1 -виду, а затем и всей выделенной формулы к Σ_n^1 -виду, осуществляется теми же рассуждениями что и выше в доказательстве пункта (iii). $\square$

§ 8.7 Доказательство ключевого утверждения

Утверждение (ii) теоремы 8.6.2 доказывается одним из двух способов. Первый из них состоит в том, чтобы кодировать всю гёделеву конструкцию до шага ω_1 (где фигурируют, очевидно, только не более чем счетные множества) посредством точек $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Это, в принципе, аналогично кодировке счетных ординалов, или кодировке борелевских множеств в § 5.7Б, но технические подробности много более сложны и чрезвычайно громоздки; в деталях всё рассуждение проведено П. С. Новиковым [43] и Аддисоном [60, 59]. Второй вариант доказательства, состоящий в сведении всей конструкции к счетным моделям, более универсален, и именно его мы здесь изложим, чтобы дать читателю представление о механизмах таких рассуждений.

Возвращаясь к общему материалу § 3.1, мы рассмотрим его применительно к моделям вида $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ из § 3.9, где $\varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2$. Коль скоро область $M = \mathbb{N}$ этих моделей фиксирована, положим $\mathbf{Form} = \mathbf{Form}(\mathbb{N})$ и $\mathbf{CIFORM} = \mathbf{CIFORM}(\mathbb{N})$; тогда $\mathbf{CIFORM} \subseteq \mathbf{Form} \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$.

Замечание 8.7.1. Множества кортежей-формул $\mathbf{Form}$, $\mathbf{CIFORM}$ и $\mathbf{ZFC}^-$ (все кортежи из $\mathbf{CIFORM}$, являющиеся аксиомами $\mathbf{ZFC}^-$) рекурсивны, т. е. принадлежат Δ_1^0 . $\square$

Пусть $\mathbf{Sat}(\varepsilon) = \mathbf{Sat}(\mathbb{N}, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathbf{CIFORM} : \langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle \models \varphi\}$ для $\varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2$.

Лемма 8.7.2. *Множество*

$$\{\langle \varepsilon, \mathbf{Sat}(\varepsilon) \rangle : \varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$$

является арифметическим. Следовательно, множество

$$\mathbf{Truth} = \{\langle \varepsilon, \varphi \rangle : \varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2 \wedge \varphi \in \mathbf{Sat}(\varepsilon)\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathbb{N}^{<\omega}$$

принадлежит Δ_1^1 .

Доказательство. Пара $\langle \varepsilon, F \rangle$ принадлежит первому множеству, если и только если $F = \mathbf{Sat}(\varepsilon)$. Это равенство выражается конечным числом условий, соответствующих индуктивному определению истинности $\in$ -формул, см. определение 3.1.2. Понятно, что эти условия сводятся к некоторым арифметическим формулам, откуда и следует результат. См. об этом в несколько иной ситуации в книгах [50, стр. 44] или [156, XII на стр. 440].

Что касается второго множества, то

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon, \varphi \rangle \in \mathbf{Truth} &\iff \exists F (F = \mathbf{Sat}(\varepsilon) \wedge \varphi \in F) \\ &\iff \forall F (F = \mathbf{Sat}(\varepsilon) \implies \varphi \in F). \end{aligned} \quad \square$$

Следствие 8.7.3. Множества $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}$ принадлежат Δ_1^1 .

Доказательство. Соотношение $\varepsilon \in \mathbf{E}_0$ равносильно формуле

$$\forall \varphi \in \mathbb{N}^{<\omega} (\varphi \in \mathbf{ZFC}^- \implies \langle \varepsilon, \varphi \rangle \in \mathbf{Truth}),$$

а соотношение $\varepsilon \in \mathbf{E}$ — тому, что $\varepsilon \in \mathbf{E}_0$ и каждый элемент $k \in \mathbb{N}$, для которого $\langle \varepsilon, \langle k \in \mathbb{N} \rangle \rangle \in \mathbf{Truth}$ (или, что равносильно, $k \in (\mathbb{N})^\varepsilon$), имеет лишь конечное число ε -предшественников. $\square$

Доказательство (утверждение (ii) теоремы 8.6.2). Возьмем в качестве $\varphi(T, a, x)$ такую формулу:

$$\begin{aligned} a, x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \wedge T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} - \text{дерево} \wedge \exists \varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2 \exists \bar{a}, \tau, \bar{x}, \bar{\gamma} \in \mathbb{N} \\ (\varepsilon \in \mathbf{E} \wedge a = \phi_\varepsilon(\bar{a}) \wedge T = \phi_\varepsilon(\tau) \wedge x = \phi_\varepsilon(\bar{x}) \wedge \\ \wedge \text{в } \langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle \text{ истинно } \langle \tau \in \mathbf{WFT} \wedge \bar{\gamma} = |\tau| \in \mathbf{Ord} \wedge \bar{x} = \mathbf{f}_{\bar{\gamma}}[\bar{a}] \rangle). \end{aligned}$$

Здесь по предыдущему всё под квантором $\exists \varepsilon$ — арифметическое или в худшем случае Δ_1^1 . Например, для подформулы $x = \phi_\varepsilon(\bar{x})$ (и двух ей подобных) это следует из результата упражнения 3.11.4, поскольку отношение «элемент $\bar{x} \in \mathbb{N}$ представляет точку $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ » выражается арифметической формулой. А подформула об истинности сводится к Δ_1^1 по лемме 8.7.2. Таким образом, $\varphi(T, a, x)$ — действительно Σ_1^1 -формула.³

Остается проверить что так определенная формула φ в самом деле удовлетворяет требованию (ii) теоремы 8.6.2.

Предположим что $T \in \mathbf{WFT}$, $\xi = |T|$, и $a, x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Часть 1. Допустим, что выполнено $\varphi(T, a, x)$. Таким образом, имеется отношение $\varepsilon \in \mathbf{E}$ и элементы $\bar{a}, \tau, \bar{x}, \bar{\gamma} \in \mathbb{N}$, для которых $a = \phi_\varepsilon(\bar{a})$, $T = \phi_\varepsilon(\tau)$, $x = \phi_\varepsilon(\bar{x})$, и

$$\text{предложение } \langle \bar{\gamma} = |\tau| \wedge \bar{x} = \mathbf{f}_{\bar{\gamma}}[\bar{a}] \rangle \text{ истинно в } \langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle. \quad (1)$$

Требуется доказать, что $x = \mathbf{f}_{|T|}[a]$. Отметим, что заранее **не** предполагается, что $\bar{\gamma} \in \mathbf{WF}_\varepsilon$, т. е. пока мы считаем, что $\bar{\gamma}$ не обязательно соответствует какому-то настоящему ординалу $\gamma \in \mathfrak{M}_\varepsilon$ — но, конечно, $\bar{\gamma} \in \mathbf{Ord}^\varepsilon$, коль скоро вообще рассматривается предложение « $\bar{x} = \mathbf{f}_{\bar{\gamma}}[\bar{a}]$ ».

По определению, $a, T, x \in \mathfrak{M}_\varepsilon$. Далее, раз $T \in \mathbf{WFT} \cap \mathfrak{M}_\varepsilon$, ординал $\xi = |T|$ и функция ранга $\rho(t) = |t|_T$ принадлежат модели $\mathfrak{M}_\varepsilon$ согласно предложению 3.7.5. Поэтому $\xi = \phi_\varepsilon(\bar{\xi})$ и $\rho = \phi_\varepsilon(\bar{\rho})$ для подходящих элементов $\bar{\xi} = (\xi)^\varepsilon$ и $\bar{\rho} = (\rho)^\varepsilon$ в $\mathbf{WF}_\varepsilon$. Тогда предложение

³ Мы отвлекаемся от того, что, скажем, отношение $\varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2$ нужно еще кодировать точкой $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, поскольку это не сопряжено с большими проблемами.

« $\bar{\rho}$ — функция ранга для дерева τ , и $\bar{\xi} = |\tau|$ » (2)

истинно в моделях $\langle \text{WF}_\varepsilon; \varepsilon \rangle$ и $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ согласно лемме 3.11.3. (Рассматриваемая формула — ограниченная, см. упражнение 3.7.2.) Таким образом, из-за (1) мы имеем $\bar{\xi} = \bar{\gamma}$, т. е. « $\bar{x} = \mathbf{f}_\xi[\bar{a}]$ » истинно в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$. Отсюда по лемме 8.3.3 следует, что на самом деле $x = \mathbf{f}_\xi[a] = \mathbf{f}_{|\tau|}[a]$.

Часть 2. Допустим, что, обратно, $x = \mathbf{f}_\xi[a]$, где $\xi = |\tau|$. Согласно следствию 3.6.4, найдется счетное транзитивное множество $\mathfrak{M} \subseteq \text{HC}$, содержащее T, a, x, ξ и являющееся моделью $\mathbf{ZFC}^-$. Формула $x = \mathbf{f}_\xi[a]$ истинна в $\langle \mathfrak{M}; \in \rangle$ согласно предложению 8.3.1. Равенство $\xi = |\tau|$ также остается истинным в $\langle \mathfrak{M}; \in \rangle$ согласно 3.7.5. Рассмотрим такое $\varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2$ что модель $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ изоморфна модели $\langle \mathfrak{M}; \in \rangle$. Понятно что $\varepsilon \in \mathbf{E}$, модель $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ фундирована и тождественна своему фундированному ядру WF_ε , и $\phi_\varepsilon : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\varepsilon$ есть изоморфизм модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ на $\langle \mathfrak{M}; \in \rangle$.

Положим $\tau = (T)^\varepsilon$, $\bar{x} = (x)^\varepsilon$, $\bar{a} = (a)^\varepsilon$, $\bar{\xi} = (\xi)^\varepsilon$. Тогда, по изоморфизму, формула « $\bar{\gamma} = |\tau| \wedge \bar{x} = \mathbf{f}_{\bar{\xi}}[\bar{a}]$ » истинна в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$. Взяв $\bar{\gamma} = \bar{\xi}$, мы получим $\varphi(T, a, x)$.

А в качестве Π_1^1 -формулы ψ можно взять следующую:

$$\begin{aligned} a, x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \wedge T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} - \text{дерево} \wedge \forall \varepsilon \in \mathbf{E} \forall \bar{a}, \tau, \bar{x}, \bar{\gamma} \in \mathbb{N} \\ (\text{если } a = \phi_\varepsilon(\bar{a}) \wedge T = \phi_\varepsilon(\tau) \wedge x = \phi_\varepsilon(\bar{x}), \\ \text{то в } \langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle \text{ истинно } \langle \bar{\gamma} = |\tau| \implies \bar{x} = \mathbf{f}_{\bar{\gamma}}[\bar{a}] \rangle). \quad \square \end{aligned}$$

§ 8.8 Контрпримеры к свойствам регулярности

Здесь мы изложим некоторые из наиболее известных следствий аксиомы конструктивности $\mathbb{V} = \mathbb{L}$, относящихся к свойствам регулярности точечных множеств. Надо отметить, что, поскольку областью рассмотрения являются точки бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и пространств, легко сводящихся к $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, все следствия аксиомы $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ являются и следствиями более слабой гипотезы $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}$, а в контексте чисто проективной иерархии (т. е. когда мы не думаем о выборе параметров из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для эффективных определений) — даже гипотезы $\exists a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}[a])$. Этот момент находит отражение в формулировке следующей теоремы, которая доказана, в разных ее частях, Гёделем [83] и П. С. Новиковым [43]. К обозначениям: см. §§ 6.1, 7.1.

Теорема 8.8.1. *Допустим, что $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}[a]$. Тогда ни одна из трех гипотез $\text{PK}(\Pi_1^1(a))$, $\text{BP}(\Delta_2^1(a))$, $\text{LM}(\Delta_2^1(a))$ не выполняется — другими словами, в пространстве Бэра существуют:*

- несчетное $\Pi_1^1(a)$ -множество без совершенного ядра,
- $\Delta_2^1(a)$ -множество $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, неизмеримое в смысле меры λ , и

— $\Delta_2^1(a)$ -множество, не имеющее свойства Бэра.

Доказательство. В отношении измеримости и свойства Бэра, контрпримеры можно построить на основании известного в теории меры неизмеримого множества Витали.

Для измеримости, строим искомый контрпример в пространстве $2^{\mathbb{N}}$. Напомним, что для $a, b \in \mathbb{N}$, $a E_0 b$ означает, что множество $\{n : a(n) \neq b(n)\}$ конечно. Предполагая $2^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}[a]$, выберем в каждом E_0 -классе $\prec_a$ -наименьший элемент, и пусть X — множество всех выбранных элементов. (В наших предположениях, $\prec_a$ есть полное упорядочение пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.) Отношение E_0 похоже на отношение Витали на $\mathbb{R}$ (которое делает вещественные числа x, y эквивалентными, когда разность $x - y$ рациональна) в том, что по элементарным соображениям всякое множество $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, имеющее ровно один общий элемент с каждым E_0 -классом эквивалентности, λ -неизмеримо и не имеет свойства Бэра в $\mathbb{N}$. Поэтому остается проверить, что X — множество класса $\Delta_2^1(a)$. Имеем, для $x \in 2^{\mathbb{N}}$:

$$x \in X \iff \forall y \prec_a x (y \in 2^{\mathbb{N}} \implies \neg (y E_0 x)),$$

откуда $X \in \Delta_2^1(a)$ следует по теореме 8.6.2(iv).

Теперь о контрпримере для совершенного ядра. В предположении $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}[a]$, множество $\Xi = \{\langle x, T \rangle : T \in \mathbf{WFT} \wedge x = \mathbf{f}_{|T|}[a]\}$ принадлежит $\Pi_1^1(a)$: это следует из теорем 5.4.1 и 8.6.2(ii). По теореме униформизации 5.6.1, найдется *однозначное* $\Pi_1^1(a)$ -множество $C \subseteq \Xi$ такое что $\text{dom } C = \text{dom } \Xi$. Другими словами, C — график функции η с областью определения $\text{dom } \eta = \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. При этом равенство $x = \mathbf{f}_{|\eta(x)|}[a]$ выполнено для каждого $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, откуда следует, что функция η на самом деле даже взаимно однозначна, а значит ее область значений $R = \text{ran } \eta = \{\eta(x) : x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ несчетна вместе с областью определения $\text{dom } \eta = \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. С другой стороны, по построению мы имеем $R \subseteq \mathbf{WFT}$ и множество R принадлежит классу $\Sigma_2^1(a)$, поскольку C есть $\Pi_1^1(a)$ и

$$T \in R \iff \exists x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\langle x, T \rangle \in C).$$

Заметим, что множество R содержит не более одной точки в каждом множестве $\mathbf{WFT}_{\xi} = \{T \in \mathbf{WFT} : |T| = \xi\}$, поскольку если $|\eta(x)| = |\eta(y)|$ то $x = \mathbf{f}_{|\eta(x)|}[a] = \mathbf{f}_{|\eta(y)|}[a] = y$. Поэтому множество R не может содержать совершенных подмножеств. (Если $X \subseteq R$ — совершенное множество то по принципу ограничения 5.3.4 найдется ординал $\vartheta < \omega_1$ такой что $X \subseteq \bigcup_{\xi < \vartheta} \mathbf{WFT}_{\xi}$, противоречие. Применимость 5.3.4 к последовательности множеств $\mathbf{WFT}_{\xi}$ следует из сказанного в примере 5.3.2.) Итак, R есть несчетное $\Sigma_2^1(a)$ -множество

в $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ без совершенного ядра.⁴ Отображение $a \mapsto T_{\{a\}}$, указанное в определении 4.6.1, позволяет получить такое же множество и в бэровском пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, которое мы обозначим через X .

Чтобы извлечь отсюда $\Pi_1^1(a)$ -множество с тем же свойством, заметим, что по теореме 5.6.1 найдется равномерное $\Pi_1^1(a)$ -множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ такое что $X = \text{dom } P = \{x : \exists y (\langle x, y \rangle \in P)\}$. (Униформность означает, как обычно, что для каждой точки $x \in X$ имеется ровно одна точка y , для которой $\langle x, y \rangle \in P$.) Если $Q \subseteq P$ — совершенное множество, то его проекция $A = \text{dom } Q \subseteq X = \text{dom } P$ несчетна, ибо Q и P равномерны, и является Σ_1^1 -множеством. По теореме 6.3.1, найдется совершенное множество $Y \subseteq A \subseteq X$. Но X не имеет совершенных подмножеств, противоречие. $\square$

Следствие 8.8.2 (= часть (i) теоремы 7.2.1). *Конъюнкция отрицаний гипотез $\text{RK}(\Pi_1^1)$, $\text{BP}(\Delta_2^1)$, $\text{LM}(\Delta_2^1)$ (т. е. утверждение о существовании контрпримеров в указанных классах) не противоречит аксиомам **ZFC**.*

Доказательство. Возьмем какую-нибудь простую точку a , например $a(n) = 0$, $\forall n$. Тогда $a \in \mathbb{L}$ и $\mathbb{L} = \mathbb{L}[a]$, так что аксиома конструктивности $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ влечет $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}[a]$, и, следовательно, влечет конъюнкцию отрицаний гипотез $\text{RK}(\Pi_1^1)$, $\text{BP}(\Delta_2^1)$, $\text{LM}(\Delta_2^1)$ по теореме 8.8.1. Остается воспользоваться тем, что сама аксиома конструктивности непротиворечива по теореме 8.4.1. $\square$

Доказанная теорема может быть уточнена в отношении свойства RK . Рассмотрим следующий вариант гипотезы $\text{RK}(\mathbf{K})$:

$\text{RK}^-(\mathbf{K})$: всякое $\mathbf{K}$ -множество $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, являющееся графиком всюду определенной функции из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (тогда по необходимости несчетное), содержит совершенное подмножество.

Понятно, что $\text{RK}(\mathbf{K})$ влечет $\text{RK}^-(\mathbf{K})$.

Лемма 8.8.3. *Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}[a]$ то не выполняется гипотеза $\text{RK}^-(\Pi_1^1(a))$, и тем самым не выполняется $\text{RK}(\Pi_1^1(a))$.*

Доказательство. Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим, что построенная там функция η удовлетворяет $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \text{dom } \eta$, так что выполнено $\neg \text{RK}^-(\Pi_1^1(a))$. $\square$

⁴ Мы придем к тому же результату, если определим R как множество, состоящее из $<_a$ -наименьших элементов T_ξ в каждом $\mathbf{WFT}_\xi$. Заметим, что доказательство теоремы в основном тексте не обращается прямо к гёделеву полному упорядочению $<_a$ множества $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, хотя, конечно, использует последовательность $\langle f_\xi[a] \rangle_{\xi < \omega_1}$.

§8.9 Совершенные множества конструктивных точек

Здесь мы вкратце изложим другой подход к построению контрпримеров к свойству совершенного ядра, который основан на следующей теореме Грошек – Сламана из статьи [84].

Теорема 8.9.1. *Предположим что $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \not\subseteq \mathbb{L}[a]$. Тогда множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не содержит совершенного подмножества.*

Доказательство. Допустим что $X \subseteq \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — совершенное множество и выведем включение $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}[a]$. Не ограничивая общности можно считать что $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$. Тогда $T = \{x \upharpoonright n : x \in X \wedge n \in \mathbb{N}\} \subseteq 2^{<\omega}$ — совершенное дерево и $X = [T] = \{x \in 2^{\mathbb{N}} : \forall n (x \upharpoonright n \in T)\}$. Более того, существует единственная биекция $\gamma : 2^{<\omega}$ на множество $T^{\text{ветв}}$ всех точек ветвления дерева T , сохраняющая $\subseteq$ и такая, что $b(s^{\wedge} i) = b(s)^{\wedge} i$ для всех $s \in 2^{<\omega}$ и $i = 0, 1$. Ею порождается гомеоморфизм $\Gamma : 2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} X$, определенный так что $\Gamma(b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma(b \upharpoonright n)$ для всех n , т. е. $\gamma(b \upharpoonright n) \subseteq \Gamma(b)$, $\forall n$.

Через $[T]^{\text{ec}}$ («ес» от *eventually constant*) обозначим множество всех таких $x \in [T]$, что $b = \gamma^{-1}(x) \in 2^{<\omega}$ почти постоянна, т. е. или $b(k) = 0$ для почти всех (кроме конечного числа) k или $b(k) = 1$ для почти всех k . Множество $G_0 = [T] \setminus [T]^{\text{ec}} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ счетно; мы утверждаем что, более того, найдется множество $G \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, $G \in \mathbb{L}[a]$, счетное в $\mathbb{L}[a]$ и удовлетворяющее $G_0 \subseteq G$.

В самом деле, раз множество $X = [T] \subseteq \mathbb{L}[a]$ несчетно, мы имеем $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} = \omega_1$. Пусть $2^{\mathbb{N}} = \{b_\xi : \xi < \omega_1\}$ — произвольное перечисление точек пространства $2^{\mathbb{N}}$ в $\mathbb{L}[a]$. Поскольку G_0 счетно, найдется такой ординал $\vartheta < \omega_1$, что $G_0 \subseteq G = \{b_\xi : \xi < \vartheta\}$; множество G — искомое.

Зафиксируем перечисление $G = \{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ в $\mathbb{L}[a]$: последовательность $\vec{g} = \langle g_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ принадлежит классу $\mathbb{L}[a]$.

Теперь мы утверждаем что для каждого $b \in 2^{\mathbb{N}}$ найдутся такие точки $x, y \in X$, что b рекурсивно относительно $x, y, \vec{g}$. Приняв этот факт на веру, мы получаем $2^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}[a]$, поскольку $X \subseteq \mathbb{L}[a]$ и $\vec{g} \in \mathbb{L}[a]$; тем самым, и $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}[a]$.

Доказательство этого ключевого факта основано на достаточно тонкой процедуре кодировки z при помощи $\vec{g}$ и пары точек X ; одной точки не хватает! Предполагаем, не ограничивая общности, что $g_0 \in [T] \setminus [T]^{\text{ec}}$. В ходе конструкции, которая состоит из ω шагов, мы строим последовательности чисел $k[r], j[r], t[r]$ ($r \in \mathbb{N}$).

Полагаем $j[0] = k[0] = t[0] = 0$.

Индуктивный шаг r ($r \geq 0$) производится так.

- (1_r) Возьмем наименьшее число $n = n[r] > t[r]$ такое что $g_{j[r]}(n) \neq b(r)$ и продолжение $(g_{j[r]} \upharpoonright n)^{\wedge} b(r)$ кортежа $g_{j[r]} \upharpoonright n$ дополнительным членом $b(r)$ принадлежит дереву T . Полагаем $j[r+1]$ равным наименьшему числу $j > j[r]$ такому, что $(g_{j[r]} \upharpoonright n[r])^{\wedge} b(r) \subset g_j$ и $g_j \in [T] \setminus [T]^{\text{ec}}$.
- (2_r) Положим $s[r] = \min\{s : \forall i < j[r+1] (g_i \upharpoonright s \neq g_{j[r+1]} \upharpoonright s)\}$. Теперь через $k[r+1]$ обозначим наименьшее число $k > k[r]$ такое, что $g_k \in [T] \setminus [T]^{\text{ec}}$, $g_k \neq g_{k[r]}$, но $g_k \upharpoonright (s[r]+1) = g_{k[r]} \upharpoonright (s[r]+1)$.

(3_r) Полагаем $t[r+1] = \min\{t > t[r] : \forall i < k[r+1] (g_i \upharpoonright t \neq g_{k[r+1]} \upharpoonright t)\}$.

Из построения немедленно следует, что $t[r] < n[r] < s[r] < t[r+1]$, и кроме того выполнены равенства

$$g_{j[r]} \upharpoonright n[r] = g_{j[r+1]} \upharpoonright n[r] \quad \text{и} \quad g_{k[r]} \upharpoonright (s[r] + 1) = g_{k[r+1]} \upharpoonright (s[r] + 1),$$

так что найдутся такие (единственные) точки $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$, что

$$g_{j[r]} \upharpoonright n[r] = x \upharpoonright n[r] \quad \text{и} \quad g_{k[r]} \upharpoonright (s[r] + 1) = y \upharpoonright (s[r] + 1).$$

для всех r . При этом все $g_{j[r]}, g_{k[r]}$ принадлежат дереву T , следовательно, $x, y \in T$.

Покажем, как, зная x, y и $\vec{g}$, восстановить b . Утверждается, что выполнены следующие соотношения, элиминирующие T :

- (A) $n[r] = \min\{n > t[r] : x(n) \neq g_{j[r]}(n)\}$;
- (B) $j[r+1] = \min\{j > j[r] : x \upharpoonright i_r = g_j \upharpoonright i_r\}$, где $i_r = \min\{d : y(d) \neq g_{k[r]}(d)\}$;
- (C) $k[r+1] = \min\{k > k[r] : y \upharpoonright n[r+1] = g_k \upharpoonright n[r+1]\}$.

Равенство (A) следует из определения (1_r) в силу того что $g_{j[r]} \upharpoonright n[r] = x \upharpoonright n[r]$. Для вывода равенства (B), прежде всего заметим, что выполнено неравенство $i_r \leq t[r+1]$, поскольку $g_{k[r]} \upharpoonright t[r+1] \neq g_{k[r+1]} \upharpoonright t[r+1] = y \upharpoonright t[r+1]$. Тем самым $i_r \leq n[r+1]$, а потому $x \upharpoonright i_r = g_{j[r+1]} \upharpoonright i_r$. С другой стороны, по построению выполнено неравенство $i_r > s[r]$, так что $g_j \upharpoonright i_r \neq g_{j[r+1]} \upharpoonright i_r = x \upharpoonright i_r$ при любом $j < j[r+1]$. Наконец, докажем равенство (C). Соотношение $y \upharpoonright n[r+1] = g_{k[r+1]} \upharpoonright n[r+1]$ следует просто потому что $n[r+1] \leq s[r+1]$. С другой стороны если $k < k[r+1]$ то мы имеем $g_k \upharpoonright t[r+1] \neq g_{k[r+1]} \upharpoonright t[r+1] = y \upharpoonright t[r+1]$. Остается заметить что $t[r+1] \leq n[r+1]$.

Итак, зная что $j[0] = k[0] = 0$, мы можем вычислить значения $j[r]$, $k[r]$, $n[r]$ индукцией по r по следующей схеме, использующей уже доказанные равенства (A), (B), (C):

$$(j[r], k[r]) \rightarrow n[r] \rightarrow i_r \rightarrow j[r+1] \rightarrow n[r+1] \rightarrow k[r+1].$$

Эта схема рекурсивна относительно $x, y \in \mathbb{L}[a]$ и последовательности $\vec{g} = \langle g_k \rangle_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{L}[a]$, так что последовательности чисел $j[r], k[r], n[r]$ принадлежат $\mathbb{L}[a]$. Поэтому мы имеем $b \in \mathbb{L}[a]$, поскольку $b(r) = 1 - g_{j[r]}(n[r])$ для всех r . $\square$

Следствие 8.9.2. Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ несчетно, то существует несчетное $\Pi_1^1(a)$ -множество без совершенного ядра.

Доказательство. В случае, когда $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}[a]$, результат уже получен теоремой 8.8.1. Поэтому предположим, что $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \not\subseteq \mathbb{L}[a]$. Тогда по теореме мы имеем несчетное (по условию) $\Sigma_2^1(a)$ -множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ без совершенного ядра. Отсюда с помощью теоремы униформизации извлекается такое же множество и в классе $\Pi_1^1(a)$, см. доказательство теоремы 8.8.1. $\square$

Упомянем еще одно любопытное следствие теоремы 8.9.1.

Следствие 8.9.3. Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \not\subseteq \mathbb{L}[a]$, и множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ несчетно, то $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не является Σ_1^1 -множеством.

Доказательство. Результат следует из теоремы: любое несчетное Σ_1^1 -множество имеет совершенное подмножество. $\square$

Упражнение 8.9.4. Почему следствие 8.9.3 перестанет быть верным если мы удалим условие $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \not\subseteq \mathbb{L}[a]$? $\square$

Исторические и библиографические замечания

Конструктивные множества были введены Гёделем [82, 83] в конце 1930х годов с целью доказательства непротиворечивости аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы (см. §8.4). Более подробно об этих первых приложениях конструктивности см. на русском языке в книгах [73], [99], [49, гл. 5].

Теорема 8.8.1 о свойстве совершенного ядра и измеримости была впервые объявлена Гёделем в статье [82], но ее доказательство никогда не появилось в печати (а в более подробной статье Гёделя [83] об этих результатах вообще не упоминается). Соответствующие результаты с полными доказательствами впервые опубликовал П. С. Новиков [43]. К этой статье [43] восходят те методы оценки сложности гёделева конструктивного построения с точки зрения проективной иерархии, которые лежат в основе результатов §§8.6–8.8 этой главы. Уже в варианте *эффективной* иерархии, эта техника была позже изложена в статьях Аддисона [59, 60].

Касательно контрпримеров теоремы 8.8.1, П. С. Новиков замечает в статье [43, с. 316], что сами контрпримеры (т. е. определенные проективные множества) определены средствами теории **ZFC**, и только лишь доказательство того, что они обладают требуемыми свойствами, использует аксиому конструктивности, или, как в нашем изложении, более слабое предположение $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}[a]$.

Теорема 8.9.1 доказана в [84]; приведенное здесь доказательство соответствующим образом адаптировано и несколько упрощено. Первоначально следствие 8.9.3 было доказано в [179] совершенно другим методом.

Глава 9

Основы форсинга и простейшие генерические расширения

В этой главе изложены основные принципы форсинга, как одного из двух, пожалуй, основных методов современной теории множеств. Другой метод — это теория конструктивности по Гёделю; о ней см. главу 8. Эти два метода широко используются для решения проблем дескриптивной теории множеств, в определенном смысле дополняя друг друга, о чем пойдет речь в нескольких следующих главах.

Целью данной главы является краткое изложение важнейших определений и основных технических результатов. Мы приводим их без доказательств, но в форме, достаточной для всех приложений форсинга в настоящей книге — при условии, что читатель имеет некоторое знакомство с форсингом и его хотя бы наиболее простыми приложениями. Так что нижеследующее можно назвать скорее напоминанием чем действительно самодостаточным изложением основ этого метода.

Достаточно подробное изложение основ форсинга (включая доказательство основных технических теорем) интересующийся читатель найдет, на русском языке, в книгах [49, гл. 4], [99], [73], [55, гл. 9 и приложение II], а также в [64, 100, 121, 169] на английском языке, Это — наши базовые ссылки, касающиеся форсинга и теорем 9.2.6, 9.2.8, 9.2.9, 9.2.10, 9.3.2 ниже в этой главе.

§9.1 Форсинг и генерические расширения

С технической точки зрения форсинг — это особый метод расширения транзитивных (см. § 3.2) моделей теории множеств Цермело — Френкеля **ZFC** до моделей той же теории, обладающих дополнительными свойствами. Если форсинг используется для доказательств непротиворечивости, то в расширении должна выполняться гипотеза, совместимость которой мы хотим доказать.

Для применений форсинга, фиксируется транзитивное множество или класс $\mathfrak{M}$, в котором выполнены все аксиомы **ZFC** — такое множество или класс $\mathfrak{M}$ называется *исходной моделью*, и обычно для обозначения этой модели и ее расширений принято использовать готические буквы. Например, $\mathfrak{M}$ может быть счетной моделью, классом вида $\mathbb{L}[x]$, или даже универсумом всех множеств $\mathbb{V}$.

Пусть $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}; \leq \rangle \in \mathfrak{M}$ — частично упорядоченное (ЧУ) множество, с порядком $\leq$. Оно, собственно, и называется *форсингом*¹, или *множеством вынуждающих «условий»*. Элементы множества $\mathbb{P}$ называются (*вынуждающими*) *«условиями»*.² Если $p \leq q$, то «условие» p называется *более сильным*.³ «Условия» $p, q \in \mathbb{P}$ называются

- *совместимыми* (в $\mathbb{P}$), если найдется условие $r \in \mathbb{P}$ такое, что $r \leq p$ и $r \leq q$;
- *несовместимыми* в противном случае.

Множество $D \subseteq \mathbb{P}$ называется:

- *предплотным* (в $\mathbb{P}$), если каждое «условие» $p \in \mathbb{P}$ совместимо в $\mathbb{P}$ с некоторым $q \in D$.
- *плотным* (в $\mathbb{P}$), когда $\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in D (q \leq p)$;
- *открыто плотным*, если, дополнительно к плотности, еще и
$$\forall p \in D \forall q \in \mathbb{P} (q \leq p \implies q \in D);$$
- *антицепью*, когда любые $p \neq q$ в D несовместимы в $\mathbb{P}$.

¹ Таким образом, слово форсинг используется как для названия метода в целом так и для обозначения конкретного ЧУ множества в рамках применения этого метода. В англоязычных публикациях во втором смысле обычно используется термин *forcing notion*, но подходящего перевода второго слова на русский язык в данном контексте нет.

² Для удобства читателя, слово *условие* будет браться в кавычки всегда когда речь идет об элементе выбранного ЧУ множества в контексте форсинга.

³ Т. е. вынуждающим больше свойств генерических расширений (см. ниже о последних). Это стандартное (хотя отнюдь не общепринятое — см., например, [64]) соглашение не всегда согласуется с интуицией, поскольку для многих форсингов отношение порядка $\leq$ оказывается обратным к отношению включения $\subseteq$. Но к этому нужно привыкнуть.

- максимальной антицепью, когда любая другая антицепь $D' \subseteq \mathbb{P}$, удовлетворяющая $D \subseteq D'$, тождественна D .

Таким образом, множество D плотно в $\mathbb{P}$, когда для всякого «условия» $p \in \mathbb{P}$ найдется более сильное «условие» $q \in D$, и открыто плотно, если, дополнительно, любое «условие» q , более сильное, чем некоторое «условие» $p \in D$, само принадлежит D . Предплотность — относительно слабое требование: к примеру, любое плотное множество и любая максимальная антицепь — предплотны.

Определение 9.1.1. Множество $G \subseteq \mathbb{P}$ называется $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, если выполнены следующие три требования:

- если $p, q \in G$ то найдется $r \in G$, для которого $r \leq p$ и $r \leq q$;
- если $p \in G$, $q \in \mathbb{P}$, $p \leq q$, то $q \in G$;
- если множество $D \subseteq \mathbb{P}$, $D \in \mathfrak{M}$ плотно то $G \cap D \neq \emptyset$. □

Другими словами, множество G — генерическое, когда 1) любые два «условия» из G совместимы в G , 2) любое «условие» $q \in \mathbb{P}$, более слабое, чем некоторое «условие» $p \in G$, само принадлежит G , и наконец 3) G имеет непустое пересечение с любым множеством $D \in \mathfrak{M}$, плотным в $\mathbb{P}$. Следующий результат показывает, что третье условие распространяется на большее семейство множеств.

Упражнение 9.1.2. Докажите, что если $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель **ZFC**, множество $Q \in \mathfrak{M}$, $Q \subseteq \mathbb{P}$ предплотно в ЧУ множестве $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$, а множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, то $G \cap Q \neq \emptyset$. Воспользуйтесь тем, что в данных условиях множество $D = \{p \in \mathbb{P} : \exists q \in Q (p \leq q)\}$ плотно в $\mathbb{P}$ и принадлежит $\mathfrak{M}$. □

Несколько слов о существовании генерических множеств.

Упражнение 9.1.3. Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель теории **ZFC**, $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ — ЧУ множество, причем как само множество $\mathbb{P}$ так и его $\mathfrak{M}$ -степень $\mathcal{P}^{\mathfrak{M}}(\mathbb{P}) = \mathcal{P}(\mathbb{P}) \cap \mathfrak{M} = \{D \in \mathfrak{M} : D \subseteq \mathbb{P}\}$ счетны в $\mathfrak{M}$. Докажите, что тогда $\mathbb{P}$ -генерические над $\mathfrak{M}$ множества существуют. Используйте пересчет, внутри модели $\mathfrak{M}$, всех плотных множеств $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbb{P}$, натуральными числами. □

С другой стороны, если $\mathbb{P}$ — ЧУ множество, не сводящееся к объединению изолированных цепей, то не существует множеств, $\mathbb{P}$ -генерических над универсумом $\mathbb{V}$ всех множеств.

Упражнение 9.1.4. Докажите, что если $\mathbb{P} = \mathbb{N}^{<\omega}$ с порядком $s \leq t$ когда $t \subseteq s$ (форсинг Коэна, см. ниже), то $\mathbb{P}$ -генерических над универсумом $\mathbb{V}$ множеств нет. □

Замечание 9.1.5. Иметь открытый вопрос существования генерических множеств не всегда удобно. Например, часто бывает желательно рассматривать генерические расширения всего универсума $\mathbb{V}$, классов вида $\mathbb{L}[a]$, или иных несчетных моделей. В этом случае можно использовать *булевозначные* расширения $\mathbb{V}^{(\mathbb{P})}$ универсума $\mathbb{V}$, или же нижеследующий принцип 9.1.6, в сущности, равносильный рассмотрению булевозначного расширения. $\square$

Предложение 9.1.6. Пусть $\mathbb{P}$ — ЧУ множество в универсуме всех множеств $\mathbb{V}$. Предположение о том, что

в некотором «виртуальном» более широком универсуме $\mathbb{V}^+$ (например, вида $\mathbb{V}^{(\mathbb{P})}$) для всякого $p \in \mathbb{P}$ имеется $\mathbb{P}$ -генерическое над $\mathbb{V}$ множество $G \subseteq \mathbb{P}$, содержащее p ,

не приводит нас ни к каким противоречиям или же необоснованным выводам. $\square$

§9.2 Структура генерических расширений

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная транзитивная модель аксиом **ZFC**. Оказывается, что любое генерическое множество G определяет расширение $\mathcal{M}[G]$ исходной модели $\mathcal{M}$, которое удовлетворяет аксиомам **ZFC** вместе с $\mathcal{M}$. Некоторая сложность здесь состоит в том, чтобы понять, какие множества следует присоединить к $\mathcal{M}$ вместе с генерическим множеством G , чтобы сохранить все аксиомы. Для этого служат две системы *имен* для таких присоединяемых множеств.

Определение 9.2.1 (имена). Пусть $\mathbb{P}$ — любое ЧУ множество, а $G \subseteq \mathbb{P}$, то определим G -интерпретацию $t[G]$ равенством

$$t[G] = \{s[G] : \exists p \in G (\langle p, s \rangle \in t)\},$$

т. е. индукцией по рангу $\text{rnk } t$. (Понятно, что если $\langle p, s \rangle \in t$, то $\text{rnk } s < \text{rnk } t$ строго.) $\mathbb{P}$ -именем назовем любое множество t , употребляемое в контексте этих интерпретаций или отношения вынуждения, как в следующем параграфе. $\square$

Например, определим, используя $\in$ -индукцию,

$$\check{x} = \{\langle p, \check{y} \rangle : p \in \mathbb{P} \wedge y \in x\}$$

для всякого множества x — каноническое $\mathbb{P}$ -имя для x . В частности, $\check{\emptyset} = \check{\emptyset} = \emptyset$, $\check{1} = \mathbb{P} \times \{\check{\emptyset}\}$, вообще $\check{n} = \mathbb{P} \times \{\check{j} : j < n\}$ для $n \in \mathbb{N}$.

Упражнение 9.2.2. Докажите, что $\check{x}[G] = x$, а имя $\underline{G} = \{\langle p, \check{p} \rangle : p \in \mathbb{P}\}$ удовлетворяет $\underline{G}[G] = G$ для любого непустого $G \subseteq \mathbb{P}$.

Докажите, что если $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель **ZFC** и $x \in \mathfrak{M}$, то $\check{x} \in \mathfrak{M}$, а также и $\underline{G} \in \mathfrak{M}$. Кроме того, каково бы ни было $\mathbb{P}$ -имя $t \in \mathfrak{M}$, множество $\mathbf{PE}(t) = \{s : \exists p (\langle p, s \rangle \in t)\}$ всех *потенциальных элементов* для t также принадлежит $\mathfrak{M}$, и при этом мы имеем $t[G] \subseteq \{s[G] : s \in \mathbf{PE}(t)\}$ для любого G (и даже независимо от $\mathbb{P}$). $\square$

Таким образом, каждое множество $x \in \mathfrak{M}$ имеет каноническое имя $\check{x} \in \mathfrak{M}$, и в то же время некоторые множества не из $\mathfrak{M}$ также имеют имена в $\mathfrak{M}$. Собственно говоря, если $t \in \mathfrak{M}$ является $\mathbb{P}$ -именем, то $t[G] \in \mathfrak{M}[G]$ по очевидным соображениям, и обратно, каждое множество из $\mathfrak{M}[G]$ имеет имя в $\mathfrak{M}$ по нижеследующей теореме 9.2.6.

Общее соглашение 9.2.3. Обычным соглашением является отождествление $\check{x}$ и x в тех случаях, когда такое отождествление не приводит к двусмысленности. Мы будем иногда проводить такое отождествление для случая, когда x принадлежит таким множествам, как $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{<\omega}$ и $\mathbf{Ord}$. $\square$

Вторая система имен, называемых *простыми*, носит ограниченный характер: она связана лишь с теми множествами из расширения $\mathfrak{M}[G]$, которые являются подмножествами множеств из исходной модели $\mathfrak{M}$, но с другой стороны эта система проще, поскольку не требует $\in$ -индукции.

Определение 9.2.4. *Простым $\mathbb{P}$ -именем* для модели $\mathfrak{M}$ называется всякое множество $t \subseteq \mathbb{P} \times \mathfrak{M}$. Если при этом $G \subseteq \mathbb{P}$, то определяется *простая G -интерпретация* $t[G] = \{x : \exists p \in G (\langle p, x \rangle \in t)\}$. $\square$

Однако простые имена сводятся к именам определения 9.2.1.

Упражнение 9.2.5. Допустим, что $t \in \mathfrak{M}$, $t \subseteq \mathbb{P} \times \mathfrak{M}$, т. е. t — простое имя. Положим $\hat{t} = \{\langle p, \check{x} \rangle : \langle p, x \rangle \in t\}$. Докажите, что $t[G] = \hat{t}[G]$ для любого множества $G \subseteq \mathbb{P}$. $\square$

Следующая *теорема существования и единственности* определяет структуру генерического расширения $\mathfrak{M}[G]$ через расширяющее множество G и имена, принадлежащие исходной модели $\mathfrak{M}$.

Теорема 9.2.6. *Если $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ — ЧУ множество, а множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, то существует единственное транзитивное множество или класс $\mathfrak{M}[G]$, для которого*

- (i) $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}[G]$, $\mathfrak{M}$ транзитивна в $\mathfrak{M}[G]$ (т. е. если $x \in \mathfrak{M}$, $y \in \mathfrak{M}[G]$, и $y \in x$, то $y \in \mathfrak{M}$), $G \in \mathfrak{M}[G]$, ординалы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}[G]$ совпадают, и все аксиомы **ZFC** выполнены в $\mathfrak{M}[G]$;
- (ii) $\mathfrak{M}[G]$ — минимальный класс удовлетворяющий (i).

Для $\mathfrak{M}[G]$ выполнено равенство $\mathfrak{M}[G] = \{t[G] : t \in \mathfrak{M}\}$, причем

- (iii) если $X, Y \in \mathfrak{M}$, $x \in \mathfrak{M}[G]$, и $x \in X^Y$, то найдется такое $\mathbb{P}$ -имя $t \in \mathfrak{M}$, что $x = t[G]$, и кроме того $t[G'] \in X^Y$ для любого $\mathbb{P}$ -генерического над $\mathfrak{M}$ множества $G' \subseteq \mathbb{P}$;
- (iv) если $x \in \mathfrak{M}[G]$, $\varphi(\cdot)$ — произвольная $\in$ -формула, и $\varphi(x)$ истинно в $\mathfrak{M}[G]$, то найдется такое $\mathbb{P}$ -имя $t \in \mathfrak{M}$, что $x = t[G]$, и кроме того $\exists x \varphi(x) \implies \varphi(t[G'])$ истинно в $\mathfrak{M}[G']$ для любого $\mathbb{P}$ -генерического над $\mathfrak{M}$ множества $G' \subseteq \mathbb{P}$. $\square$

Такая модель $\mathfrak{M}[G]$ называется $\mathbb{P}$ -генерическим расширением модели $\mathfrak{M}$ посредством присоединения множества G .

Определение 9.2.7. ЧУ множество $\mathbb{P}$ удовлетворяет κ -условию антицепей (κ — бесконечный кардинал) если каждая антицепь $A \subseteq \mathbb{P}$ имеет мощность $< \kappa$ (строго), а условие счетности антицепей, кратко ССС — это $\aleph_1$ -условие антицепей. $\square$

Теорема 9.2.8. Пусть κ — несчетный регулярный кардинал в модели $\mathfrak{M}$, ЧУ множество $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ удовлетворяет в $\mathfrak{M}$ κ -условию антицепей, и множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$. Тогда κ остается регулярным кардиналом и в $\mathfrak{M}[G]$.

В частности, если $\mathbb{P}$ удовлетворяет ССС в $\mathfrak{M}$, то все кардиналы модели $\mathfrak{M}$ остаются кардиналами в $\mathfrak{M}[G]$. $\square$

К этой теореме следует добавить, что конечные кардиналы, т. е. натуральные числа, а также кардинал счетной мощности $\aleph_0 = \omega$, остаются кардиналами в любом расширении модели $\mathfrak{M}$. Что касается несчетных кардиналов, то они могут «склеиваться» с меньшими кардиналами в подходящих генерических расширениях, см. § 9.7.

Следующая теорема указывает некоторые случаи, когда разные ЧУ множества производят одни и те же генерические расширения.

Теорема 9.2.9. Пусть $\mathbb{P}, \mathbb{P}' \in \mathfrak{M}$ — два ЧУ множества. Тогда

- (i) если $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{P}$, множество $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{P}$ плотно в $\mathbb{P}$, а $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, то пересечение $G' = G \cap \mathbb{P}'$ будет $\mathbb{P}'$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, и $\mathfrak{M}[G'] = \mathfrak{M}[G]$;
- (ii) в том же случае, если $G' \subseteq \mathbb{P}'$ является $\mathbb{P}'$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, то множество $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists p \in G' (p \leq q)\}$ будет $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, и $\mathfrak{M}[G'] = \mathfrak{M}[G]$;
- (iii) если $r \in \mathbb{P}$, $\mathbb{P}_{\leq r} = \{p \in \mathbb{P} : p \leq r\}$, и множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, то $G_{\leq r} = \{p \in G : p \leq r\}$ будет $\mathbb{P}_{\leq r}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$ множеством, и $\mathfrak{M}[G_{\leq r}] = \mathfrak{M}[G]$;

- (iv) в том же случае, если множество $G' \subseteq \mathbb{P}_{\leq r}$ является $\mathbb{P}_{\leq r}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, то $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists p \in G' (p \leq q)\}$ будет $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$ множеством, и $\mathfrak{M}[G'] = \mathfrak{M}[G]$;
- (v) если множества $\mathbb{P}, \mathbb{P}'$ порядково изоморфны в $\mathfrak{M}$, и $h \in \mathfrak{M} : \mathbb{P} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{P}'$ — некоторый порядковый изоморфизм, а $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, то множество $G' = \{h(p) : p \in G\}$ будет $\mathbb{P}'$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, и $\mathfrak{M}[G'] = \mathfrak{M}[G]$. $\square$

Следующая теорема показывает особенности случая, когда данное ЧУ множество $\mathbb{P}$ равно произведению $\mathbb{P}' \times \mathbb{P}''$ двух ЧУ множеств $\mathbb{P}', \mathbb{P}''$ (с порядком $\langle p', p'' \rangle \leq_{\mathbb{P}} \langle q', q'' \rangle$, когда $p' \leq_{\mathbb{P}'} q'$ и $p'' \leq_{\mathbb{P}''} q''$).

Теорема 9.2.10 (теорема о произведении для форсинга). *Если $\mathbb{P}', \mathbb{P}'' \in \mathfrak{M}$ — два ЧУ множества, то*

- (i) *каждое $\mathbb{P}' \times \mathbb{P}''$ -генерическое над $\mathfrak{M}$ множество имеет вид $G' \times G''$, где множество $G' \subseteq \mathbb{P}'$ является $\mathbb{P}'$ -генерическим над $\mathfrak{M}$ а множество $G'' \subseteq \mathbb{P}''$ является $\mathbb{P}''$ -генерическим над $\mathfrak{M}[G']$ (и над $\mathfrak{M}$) — и при этом $\mathfrak{M}[G'] \cap \mathfrak{M}[G''] = \mathfrak{M}$;*
- (ii) *обратно, если множество $G' \subseteq \mathbb{P}'$ — $\mathbb{P}'$ -генерическое над $\mathfrak{M}$, а множество $G'' \subseteq \mathbb{P}''$ — $\mathbb{P}''$ -генерическим над $\mathfrak{M}[G']$, то множество $G' \times G''$ будет $\mathbb{P}' \times \mathbb{P}''$ -генерическим над $\mathfrak{M}$. $\square$*

§9.3 Отношение вынуждения

В теории форсинга определяется *отношение вынуждения*, также называемое *форсингом*, или *отношением форсинга*, и типично обозначаемое как

$p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi(t_1, \dots, t_n)$ — словами: p вынуждает формулу $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ над $\mathfrak{M}$, — где $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ есть ЧУ множество, $p \in \mathbb{P}$, $t_1, \dots, t_n \in \mathfrak{M}$ понимаются как имена, а $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — любая $\in$ -формула, т. е. формула языка **ZFC**.

Дополнительно, определяют $\Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi(t_1, \dots, t_n)$ (т. е. без p), когда имеет место $p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi(t_1, \dots, t_n)$ для любого $p \in \mathbb{P}$.

Достаточно сложное определение отношения $\Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}}$ происходит внутри модели $\mathfrak{M}$ индукцией по сложности формулы φ , начиная от самых простых формул вида $t \in t'$ и $t = t'$, а для этих последних — индукцией по рангу фон Неймана rnk имен t, t' . Мы не приводим здесь это определение; однако всё что нам нужно знать об отношении вынуждения — это следующая теорема 9.3.2, доказательство которой здесь также не приводится.

Определение 9.3.1 (интерпретация формул). Пусть $\mathbb{P}$ — любое ЧУ множество, а $G \subseteq \mathbb{P}$, то определим G -интерпретацию $\varphi[G]$ любой формулы φ с именами в роли параметров как результат замены каждого имени t в φ на $t[G]$. $\square$

Следующая теорема излагает основные свойства вынуждения.

Теорема 9.3.2. Допустим, что $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель ZFC, а $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная $\in$ -формула. Тогда вынуждение формулы φ определимо в $\mathfrak{M}$, в том смысле что совокупность

$$\{\langle \mathbb{P}, p, t_1, \dots, t_n \rangle : \mathbb{P} \in \mathfrak{M} \text{ есть ЧУ множество} \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \\ \wedge t_1, \dots, t_n \in \mathfrak{M} \wedge p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi(t_1, \dots, t_n)\}$$

(очевидно, собственный класс в $\mathfrak{M}$) определима в $\mathfrak{M}$ $\in$ -формулой.

Пусть теперь $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ — фиксированное ЧУ множество, а φ — замкнутая формула с именами из $\mathfrak{M}$ в роли параметров. Тогда

(ii) если множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, то

$$\varphi[G] \text{ истинно в } \mathfrak{M}[G] \iff \exists p \in G (p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi);$$

(iii) если модель $\mathfrak{M}$ счетна, и $p \in \mathbb{P}$, то $p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi$, если и только если предложение $\varphi[G]$ истинно в $\mathfrak{M}[G]$, каково бы ни было $\mathbb{P}$ -генерическое над $\mathfrak{M}$ множество $G \subseteq \mathbb{P}$, содержащее p ;

(iv) множество $\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi \text{ или } p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \neg \varphi\}$ плотно в $\mathbb{P}$ и принадлежит модели $\mathfrak{M}$;

(v) если $p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi$, и $q \in \mathbb{P}$, $q \leq p$, то и $q \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi$;

(vi) $p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \neg \varphi \iff \neg \exists q \leq p (q \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi)$;

(vii) $p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \exists x \psi(x) \iff \forall q \leq p \exists r \leq q \exists t \in \mathfrak{M} (p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \psi(t))$;

(viii) $p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \forall x \psi(x) \iff \forall t \in \mathfrak{M} (p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \psi(t))$;

(ix) $p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi \wedge \psi \iff p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi \wedge p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \psi$;

(x) $p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi \vee \psi \iff \forall q \leq p \exists r \leq q (r \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \varphi \vee r \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \psi)$.

Если $X \in \mathfrak{M}$, то дополнительно:

(x) $p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \exists x \in \check{X} \psi(x) \iff \forall q \leq p \exists r \leq q \exists x \in X (p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \psi(\check{x}))$;

(xi) $p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \forall x \in \check{X} \psi(x) \iff \forall x \in X (p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}} \psi(\check{x}))$. $\square$

В утверждениях (vi), (vii), (x), (x) предполагается, что $q, r \in \mathbb{P}$.

Собственно говоря, утверждение (iii) теоремы можно рассматривать как определение отношения $\Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}}$. Однако и тогда для доказательства хотя бы возможности определить это отношение *внутри* модели $\mathfrak{M}$ (первое утверждение теоремы) всё равно приходится так или иначе параллельно строить то вспомогательное индуктивное определение отношения вынуждения, о котором говорилось выше.

§9.4 Форсинг Коэна

Как уже указывалось, применение форсинга начинается с того, что фиксируется *исходная модель* $\mathfrak{M}$ и *множество вынуждающих условий* — некоторое ЧУ множество $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$. Выбор последнего является ключевым фактором, поскольку именно комбинаторные и мощностные свойства множества $\mathbb{P}$ обычно определяют структуру и свойства соответствующих генерических расширений.

Из нетривиальных (т. е. тех, которые действительно производят собственные расширения исходной модели, вводя новые множества) возможностей наиболее простым (и в то же время богатым с точки зрения приложений) является *форсинг Коэна*. Он принадлежит к широкому классу форсингов, которые присоединяют к исходной модели простейший действительно новый объект — им может быть какое-то множество натуральных чисел $u \subseteq \mathbb{N}$ или же точка пространства Бэра $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или иного польского пространства.

Определение 9.4.1. *Форсинг Коэна* есть множество $\mathbf{C} = \mathbb{N}^{<\omega}$ всех кортежей (конечных последовательностей) натуральных чисел, с порядком $s \leq t$ (s сильнее), если $t \subseteq s$. $\square$

Подчеркнем, что форсинг-порядок $\leq$ на $\mathbf{C}$ **обратен** порядку $\subseteq$ по продолжению кортежей — и это будет довольно типичным случаем в приложениях, так что к такой инверсии порядка лучше привыкнуть. Вследствие этой инверсии и согласно общим определениям в §9.1, множество $D \subseteq \mathbf{C}$ плотно в $\mathbf{C}$, если для любого кортежа $t \in \mathbf{C}$ существует кортеж $s \in D$, удовлетворяющий $t \subseteq s$.

Теорема 9.4.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель ZFC. Тогда $\mathbf{C} \in \mathfrak{M}$, и кроме того*

- (i) *если множество $G \subseteq \mathbf{C}$ является $\mathbf{C}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, то точка $a = a_G = \bigcup G$ принадлежит $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и мы имеем:*

$$(1) \quad G = \{a \restriction t : t \in \mathbb{N}\}, \quad \text{и}$$

- (2) *если множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbf{C}$ плотно в $\mathbf{C}$, то существует такое число $m \in \mathbb{N}$, что $a \restriction t \in D$;*

- (ii) *обратно, если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет (i)(2), то множество $G = G_a = \{a \upharpoonright t : t \in \mathbb{N}\}$ — $\mathbf{C}$ -генерическое над $\mathfrak{M}$ и $a = \mathbf{a}_G$.*

В обоих этих случаях, $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[\mathbf{a}_G]$ и все кардиналы исходной модели $\mathfrak{M}$ остаются кардиналами в $\mathfrak{M}[G]$.

Доказательство. Форсинг $\mathbf{C}$ принадлежит $\mathfrak{M}$. Если $G \subseteq \mathbf{C}$ и $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ удовлетворяют условиям (i)(1) и (i)(2), то $\mathbf{C}$ -генеричность G (в смысле определения 9.1.1) очевидна.

Обратно, допустим, что множество $G \subseteq \mathbf{C}$ является $\mathbf{C}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$. Каждое из множеств $D_m = \{s \in \mathbf{C} : \text{lh } s \geq m\}$, очевидно, плотно в $\mathbf{C}$ и принадлежит $\mathfrak{M}$, а потому вследствие генеричности найдется кортеж $s_m \in G \cap D_m$. При этом, если $n < m$, то опять из-за генеричности обрезанный кортеж $s_m \upharpoonright n$ также принадлежит G . Наконец, также благодаря генеричности, если кортежи $s, t \in \mathbf{C}$ имеют одинаковую длину $\text{lh } s = \text{lh } t = n \in \mathbb{N}$, то они оба не могут принадлежать G ибо не имеют общего продолжения. Отсюда и следует, что $a = \bigcup G$ — точка $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и она удовлетворяет условиям (i)(1) и (i)(2).

Сохранение кардиналов в $\mathfrak{M}[G]$ следует из теоремы 9.2.8, так как форсинг $\mathbf{C}$ не только удовлетворяет ССС, а прямо счетен. $\square$

Определение 9.4.3. Точки вида $a = \mathbf{a}_G$, где множество $G \subseteq \mathbf{C}$ является $\mathbf{C}$ -генерическим над некоторой моделью $\mathfrak{M}$, сами называются *генерическими по Коэну над $\mathfrak{M}$* . $\square$

Из теоремы 9.4.2 следует, что для генеричности над $\mathfrak{M}$ данной точки $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось требование (i)(2) теоремы. Однако точки, генерические по Коэну, допускают определение, прямо не связанное с форсингом, см. следующие главы.

Упражнение 9.4.4. Пусть множество $G \subseteq \mathbf{C}$ является $\mathbf{C}$ -генерическим над моделью $\mathfrak{M}$, а $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$. Докажите, что найдется такое n , что $\mathbf{a}_G(n) > x(n)$ строго — тем самым, $\mathbf{a}_G \notin \mathfrak{M}$, так что расширение $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[\mathbf{a}_G]$ — собственное расширение модели $\mathfrak{M}$. Для этого покажите, что множество D_x всех «условий» $s \in \mathbf{C}$, для которых $\exists n < \text{lh } s (s(n) > x(n))$, плотно в $\mathbf{C}$ и принадлежит $\mathfrak{M}$.

Докажите, что, с другой стороны, если $u \in \mathfrak{M}$, $u \subseteq \mathbb{N}$ — бесконечное множество, то $\mathbf{a}_G(n) = 0$ для бесконечно многих $n \in u$. $\square$

§9.5 Случайный форсинг

Форсинг Коэна $\mathbf{C}$ принадлежит к группе форсингов, которые в англоязычной литературе характеризуются как *forcings adding a real*. Слово *real* здесь означает не вещественное число в обычном смысле, т. е. точку вещественной прямой $\mathbb{R}$, а скорее элемент множества $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

— т. е. точку бэровского пространства. Речь идет о форсингах $\mathbb{P}$, присоединяющих к исходной модели точку $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — в том смысле, что $\mathbb{P}$ -генерическое множество $G \subseteq \mathbb{P}$ эквивалентно некоторой точке пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в смысле взаимного перехода в обе стороны.

Форсинг Коэна разъясняет, что именно имеется в виду. По теореме 9.4.2, каждое $\mathbf{C}$ -генерическое множество $G \subseteq \mathbf{C}$ порождает точку $\mathbf{a}_G = \bigcup G \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (которая и есть присоединяемое «число»), и обратно, восстанавливается из нее по формуле $G = G_a = \{a \restriction m : m \in \mathbb{N}\}$.

Сюда же относится и *случайный форсинг* $\mathbf{R}$, который состоит из всех таких деревьев $T \subseteq 2^{<\omega}$ без $\subseteq$ -максимальных элементов, что $\lambda([T]) > 0$, с порядком: $T \leq S$ («условие» T сильнее), если $T \subseteq S$. (Напомним, что $[T] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall m (x \restriction m \in T)\}$ — но здесь фактически $[T] \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, так как предполагается, что $T \subseteq 2^{<\omega}$.)

В то время как коэнов форсинг $\mathbf{C}$ — счетное множество, принадлежащее любой транзитивной модели $\mathfrak{M}$ аксиом **ZFC**, множество $(\mathbf{R})^{\mathfrak{M}}$ (т. е. форсинг $\mathbf{R}$, определенный в $\mathfrak{M}$) совпадает с $\mathbf{R} \cap \mathfrak{M}$ — для вывода абсолютности условия $\lambda([T]) > 0$ нужно сослаться на следствие 6.4.4. (Вообще, $\mathbf{R} \in \mathfrak{M}$ означает, что $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$.) Обычно принято говорить: $\mathbf{R}$ -генерическое над $\mathfrak{M}$ множество, или $\mathbf{R}$ -генерическое расширение $\mathfrak{M}$, имея в виду, конечно, $(\mathbf{R})^{\mathfrak{M}}$ -генерические множества и расширения — и мы будем следовать этой практике.

Лемма 9.5.1. *Форсинг $\mathbf{R}$ удовлетворяет ССС.*

Доказательство. Если $T, S \in \mathbf{R}$ несовместны в $\mathbf{R}$ то, очевидно, $\lambda([T] \cap [S]) = 0$ — но, конечно, $\lambda([T]) > 0$ и $\lambda([S]) > 0$. $\square$

Теорема 9.5.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель **ZFC**. Тогда*

- (i) *если множество $G \subseteq (\mathbf{R})^{\mathfrak{M}}$ является $\mathbf{R}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, то пересечение $T_G = \bigcap G$ всех деревьев $T \in G$ представляет собой ветвь в $2^{<\omega}$, т. е. существует единственная точка $\mathbf{a}_G \in \bigcap_{T \in G} [T] \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, и при этом*
 - (1) $G = \{\mathbf{a}_G \restriction m : m \in \mathbb{N}\}$, и
 - (2) *если множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq (\mathbf{R})^{\mathfrak{M}}$ плотно в $(\mathbf{R})^{\mathfrak{M}}$, то существует такое дерево $T \in D$, что $\mathbf{a}_G \in [T]$;*
- (ii) *обратно, если точка $a \in 2^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет (i)(2), то множество $G = G_a = \{T \in \mathfrak{M} : T \text{ — дерево } \wedge a \in [T]\}$ является $\mathbf{R}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$ и $a = \mathbf{a}_G$.*

В обоих этих случаях, $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[\mathbf{a}_G]$ и все кардиналы исходной модели $\mathfrak{M}$ остаются кардиналами в $\mathfrak{M}[G]$.

Доказательство. Следуйте доказательству теоремы 9.4.2. $\square$

Определение 9.5.3. Точки вида $a = \mathbf{a}_G$, где множество $G \subseteq (\mathbf{R})^{\mathfrak{M}}$ является $\mathbf{R}$ -генерическим над моделью $\mathfrak{M}$, сами называются *случайными по Соловею*, или просто *случайными над $\mathfrak{M}$* . $\square$

Таким образом, случайный форсинг $\mathbf{R}$ также присоединяет точку пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и даже на самом деле точку канторова дискон-
тинума $2^{\mathbb{N}}$. Ниже (теорема 10.4.2) будет показано, что случайные точки допускают другое определение.

Упражнение 9.5.4. Пусть множество $G \subseteq (\mathbf{R})^{\mathfrak{M}}$ является $\mathbf{R}$ -генерическим над моделью $\mathfrak{M}$, т. е. точка $a = \mathbf{a}_G$ случайна над $\mathfrak{M}$. Используя то, что $\lambda(2^{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = 0$, докажите, что $a \in 2^{\mathbb{N}}$, так что для случайных точек результат 9.4.4 не верен. $\square$

Но имеет место и более сильное утверждение.

Лемма 9.5.5. В условиях 9.5.4, если $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}[\mathbf{a}_G]$, то найдется такая точка $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$, что $x(n) \leq y(n)$ для всех n .

Доказательство. ⁴ Пусть $\mathbb{P} = (\mathbf{R})^{\mathfrak{M}}$. Через $\Vdash$ обозначим отношение $\Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}}$. Пусть, по теореме 9.2.6, $x = t[G]$, где t — некоторое имя из $\mathfrak{M}$, причем $t[G'] \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для любого $\mathbb{P}$ -генерического над моделью $\mathfrak{M}$ множества $G' \subseteq \mathbb{P}$, так что любое «условие» из $\mathbb{P}$ вынуждает, что $t[G] \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, по теореме 9.3.2. Достаточно доказать, что множество Δ_t всех «условий» $T \in \mathbb{P}$, для которых найдется функция $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$, удовлетворяющая $T \Vdash t[G](\check{n}) \leq \check{y}(\check{n})$ для всех n — плотно в $\mathbb{P}$. (Именно, если такое T принадлежит генерическому множеству G , что подтверждается функцией $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$, то по теореме 9.3.2 имеем $\mathbf{a}_G(n) \leq y(n)$ для всех n .)

Для вывода плотности, заметим, что коль скоро отношение $\Vdash$ определимо в $\mathfrak{M}$ по теореме 9.3.2, последовательность множеств

$$\tau_{nk} = \{T \in \mathbb{P} : T \Vdash t[G](\check{n}) = \check{k}\} \quad \text{и} \quad \tau_n = \bigcup_k \tau_{nk}$$

принадлежит $\mathfrak{M}$, и при этом каждое множество τ_n плотно в $\mathbb{P}$ по выбору t . Значит, мы можем выбрать, в $\mathfrak{M}$, последовательность максимальных антицепей $A_n \subseteq \tau_n$ — т. е., точнее говоря, каждая A_n выбирается как максимальная антицепь в τ_n , но, из-за плотности τ_n , A_n оказывается максимальной антицепью и в $\mathbb{P}$. При этом каждая антицепь A_n счетна в $\mathfrak{M}$ по лемме 9.5.1. Отсюда $\lambda(\bigcup_{T \in A_n} [T]) = 1$. (Иначе, рассуждая в $\mathfrak{M}$, мы выбрали бы дерево S , для которого $[S] \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{T \in A_n} [T]$ и $\lambda([S]) > 0$ — так что $S \in \mathbb{P} = (\mathbf{R})^{\mathfrak{M}}$ и S не совместимо в $\mathbb{P}$ ни с одним $T \in A_n$, противореча максимальной антицепи A_n .)

Доказывая плотность Δ_t , рассмотрим произвольное «условие» $T' \in \mathbb{P}$.

⁴ Некоторые моменты в доказательстве леммы требуют определенной, иногда значительной работы для понимания, почему это так, и даже о чем собственно идет речь. В общем, читателю следует самому разобраться здесь во всех деталях — это станет первым маленьким шагом для владения форсингом.

Рассуждаем в $\mathfrak{M}$. Раз антицепь A_0 счетна и $\lambda(\bigcup_{T \in A_0} [T]) = 1$, найдется *конечное* множество $A'_n \subseteq A_n$, для которого $\lambda(\bigcup_{T \in A'_n} [T]) > 1 - \frac{1}{4}$. Имеется такое число k_0 , что $A'_0 \subseteq \bigcup_{k \leq k_0} \tau_{nk}$; берем наименьшее из таких k_0 . Из-за конечности A'_0 , множество $\bigcup_{T \in A'_0} [T]$ замкнуто, а потому найдется такое дерево T_0 , что $[T_0] = \bigcup_{T \in A'_0} [T]$. Таким образом, $\lambda([T_0]) > \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $T_0 \in \mathbb{P}$, $T_0 \subseteq T'$. Наконец, $T_0 \Vdash t[G](0) \leq \check{k}_0$ по выбору k_0 .

Аналогично, найдется такое «условие» $T_1 \in \mathbb{P}$, что $\lambda([T_0]) > \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, $T_1 \subseteq T_0$, и $T_1 \Vdash t[G](1) \leq \check{k}_1$ для некоторого числа k_1 .

Продолжая по индукции, мы получаем, в $\mathfrak{M}$, последовательность «условий» $T_n \in \mathbb{P}$ и чисел k_n , для которых $\lambda([T_n]) > \frac{1}{2} + 2^{-n-2}$, $T_0 \supseteq T_1 \supseteq T_2 \supseteq T_3 \supseteq \dots$, и $T_n \Vdash t[G](n) \leq \check{k}_n$ для всех n . Взяв теперь дерево $T = \bigcap_n T_n$, мы получим $[T] = \bigcap_n [T_n]$, так что $\lambda([T]) \geq \frac{1}{2}$, откуда $T \in \mathbb{P}$. Наконец, функция $y(n) = k_n$, $\forall n$, гарантирует нам $T \in \Delta_t$. $\square$

§9.6 Еще три примера

Еще один форсинг той же категории *присоединяющих точку* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, **доминирующий форсинг $\mathbf{D}$** , состоит из всех пар $\langle s, f \rangle$, где $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, с порядком, определенным так: $\langle s, f \rangle \leq \langle t, g \rangle$ («условие» $\langle s, f \rangle$ сильнее), если $t \subseteq s$, $g(n) \leq f(n)$ для всех n , и $s(n) \leq g(n)$ для всех таких n , что $\text{lh } t \leq n < \text{lh } s$.

Лемма 9.6.1. *Форсинг $\mathbf{D}$ удовлетворяет ССС.*

Доказательство. Любые два «условия» $\langle s, f \rangle, \langle t, g \rangle$ совместимы в $\mathbf{D}$ при $s = t$, так что все «условия» $\langle s, f \rangle$ любой антицепи имеют различные компоненты s . Но множество $\mathbb{N}^{<\omega}$ счетно. $\square$

Если задана транзитивная модель $\mathfrak{M}$ аксиом **ZFC**, то множество $(\mathbf{D})^{\mathfrak{M}}$ (т. е. $\mathbf{D}$ определенное в $\mathfrak{M}$), очевидно, совпадает с $\mathbf{D} \cap \mathfrak{M}$. Мы будем говорить: **$\mathbf{D}$ -генерическое над $\mathfrak{M}$ множество**, или **$\mathbf{D}$ -генерическое расширение $\mathfrak{M}$** , имея в виду $(\mathbf{D})^{\mathfrak{M}}$ -генеричность.

Подобно коэновскому форсингу $\mathbf{C}$, доминирующий форсинг $\mathbf{D}$ также присоединяет точку бэровского пространства. Именно, если множество $G \subseteq (\mathbf{D})^{\mathfrak{M}}$ является **$\mathbf{D}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$** (т. е., строго говоря, **$(\mathbf{D})^{\mathfrak{M}}$ -генерическим**), то пусть $\mathbf{a}_G = \bigcup \{s : \exists f (\langle s, f \rangle \in G)\}$ — тогда $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[\mathbf{a}_G]$. Вторые компоненты f «условий» $\langle s, f \rangle$ играют роль ограничителей снизу для $\mathbf{a}_G$ в смысле отношения финального доминирования $x \leq^* y$, когда $x, y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $x(n) \leq y(n)$ для почти всех (кроме конечного числа) значений $n \in \mathbb{N}$ — которые рассматриваются ниже в §12.1.

Упражнение 9.6.2. Пусть множество $G \subseteq (\mathbf{D})^{\mathfrak{M}}$ является **$\mathbf{D}$ -генерическим над транзитивной моделью $\mathfrak{M}$** .

Докажите, что $\mathbf{a}_G(n) \geq f(n)$ всякий раз когда $\langle s, f \rangle \in G$ и $n \geq \text{lh } s$. Выведите отсюда, что $f \leq^* \mathbf{a}_G$ для любой функции $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ из исходной модели $\mathfrak{M}$ — для этого докажите, что множество D_f всех «условий» $\langle s, g \rangle \in (\mathbf{D})^{\mathfrak{M}}$, для которых $f \leq^* g$, плотно в $(\mathbf{D})^{\mathfrak{M}}$ и принадлежит $\mathfrak{M}$.

Докажите, что само генерическое множество G состоит из всех «условий» $\langle s, f \rangle \in (\mathbf{D})^{\mathfrak{M}}$, для которых $s \subset \mathbf{a}_G$ и $f \leq^* \mathbf{a}_G$, так что $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[\mathbf{a}_G]$. Докажите, что все кардиналы исходной модели $\mathfrak{M}$ остаются кардиналами в $\mathfrak{M}[G]$. $\square$

Если $0 < \varepsilon < 1$, то ε -случайный форсинг $\mathbf{R}_\varepsilon$ состоит из всех таких деревьев $T \in \mathbf{R}$, что $\lambda([T]) > \varepsilon$, с тем же порядком, что и $\mathbf{R}$. Мы имеем $(\mathbf{R}_\varepsilon)^{\mathfrak{M}} = \mathbf{R}_\varepsilon \cap \mathfrak{M}$ всякий раз, когда $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель, и $\varepsilon \in \mathfrak{M}$. Легко видеть, что $\mathbf{R}_\varepsilon$ -генерическое множество G порождает дерево $T_G = \bigcap G \subseteq 2^{<\omega}$, причем замкнутое множество $[T_G] \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет $\lambda([T_G]) = \varepsilon$, а каждая его точка случайна над исходной моделью, как будет показано в §14.5. Свести дерево T_G к определенной точке из $2^{\mathbb{N}}$ через фиксированный рекурсивный пересчет всех кортежей из $2^{<\omega}$ не составляет труда.

Лемма 9.6.3. Форсинг $\mathbf{R}_\varepsilon$ удовлетворяет ССС.

Доказательство. Это не столь просто, как для форсингов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{R}$. Пусть напротив, $A \subseteq \mathbf{R}_\varepsilon$ — несчетная антицепь. Для некоторого $\delta > 0$, множество $A' = \{T \in A : \lambda([T]) > \varepsilon + 3\delta\}$ также несчетно. Каждое $T \in A'$ накрывается множеством U_T , представляющим собой дополнение объединения *конечного* числа бэровских интервалов, с $\lambda(U_T) < \lambda(T) + \delta$. Тогда $\lambda(U_T \cap U_{T'}) \leq \lambda([T] \cap [T']) + 2\delta \leq \varepsilon + 2\delta$, так что $U_T \neq U_{T'}$, при $T \neq T' \in A'$, откуда следует, что множество $\{U_T : T \in A'\}$ несчетно вместе с A' — противоречие, так как имеется лишь счетно много конечных объединений интервалов. $\square$

Форсинг Сакса $\mathbf{S}$ состоит из всех совершенных деревьев $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, т. е. требуется, чтобы ко всякому $s \in T$ существовала такая вершина $t \in T$, что $s \subseteq t$ и t является точкой ветвления дерева T , т. е. существуют числа $i \neq j$, для которых оба кортежа $t^{\wedge i}$, $t^{\wedge j}$ принадлежат T . В этом случае множество $[T] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall m (x \restriction m \in T)\}$ — совершенное в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Как и выше, мы имеем $(\mathbf{S})^{\mathfrak{M}} = \mathbf{S} \cap \mathfrak{M}$.

Упражнение 9.6.4. Докажите, что форсинг Сакса $\mathbf{S}$, подобно случайному форсингу $\mathbf{R}$, присоединяет точку пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, но, в отличие от $\mathbf{R}$, не удовлетворяет ССС — имеется несчетное семейство попарно непесекающихся совершенных множеств в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. $\square$

В отличие от рассмотренных выше ССС форсингов, $\mathbf{S}$ не обязательно сохраняет кардиналы. Например, если $\aleph_1 < \kappa = 2^{\aleph_0}$ в модели $\mathfrak{M}$, то может оказаться так, что в саксовском (т. е. $(\mathbf{S})^{\mathfrak{M}}$ -генерическом) расширении

$\mathfrak{M}[G]$ модели $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ -кардинал κ может оказаться ординалом мощности $\aleph_1$. Но сам кардинал $\aleph_1$ сохраняется форсингом $\mathbf{S}$ в любом случае!

Лемма 9.6.5. *Если $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель **ZFC**, а множество $G \subseteq (\mathbf{S})^{\mathfrak{M}}$ является $\mathbf{S}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, то кардинал $\aleph_1^{\mathfrak{M}}$ модели $\mathfrak{M}$ остается кардиналом в $\mathfrak{M}[G]$.*

Доказательство (эскиз). Пусть напротив, $f : \omega \xrightarrow{\text{на}} \kappa = \aleph_1^{\mathfrak{M}}$, $f \in \mathfrak{M}[G]$. По теореме 9.2.6, $f = t[G]$ для некоторого имени $t \in \mathfrak{M}$. По теореме 9.3.2, найдется такое «условие» $T' \in G$, что

$$T' \Vdash (t[G] - \text{биекция из } \omega \text{ на } \kappa), \quad (*)$$

где $\Vdash$ есть отношение вынуждения $\Vdash_{(\mathbf{S})^{\mathfrak{M}}}$. Далее, рассуждая в $\mathfrak{M}$, строится индексированное семейство $\langle T_s \rangle_{s \in 2^{<\omega}}$ деревьев $T_s \in \mathbf{S} \cap \mathfrak{M}$ и ординалов $\gamma_s < \kappa$, удовлетворяющее таким требованиям:

- (1) $T_\Lambda \subseteq T'$, и $T_s \wedge_i \subseteq T_s$ для всех $i = 0, 1$ и $s \in 2^{<\omega}$;
- (2) $\llbracket T_s \wedge_0 \rrbracket \cap \llbracket T_s \wedge_1 \rrbracket = \emptyset$;
- (3) если $\text{lh } s = n$, то $x \upharpoonright n = y \upharpoonright n$ для всех $x, y \in \llbracket T_s \rrbracket$;
- (4) если $\text{lh } s = n$, то $T_s \Vdash t[G](\check{n}) = \check{\gamma}_s$.

Можно проверить, что $T = \bigcap_n \bigcup_{\text{lh } s = n} T_s$ является деревом в $\mathbf{S} \cap \mathfrak{M}$, причем $T \subseteq T'$, а множество $X = \{\gamma_s : s \in 2^{<\omega}\}$ счетно в $\mathfrak{M}$, так что $\kappa \setminus X \neq \emptyset$, и наконец $T \Vdash \text{ran}(t[G]) \subseteq \check{X}$ — противоречие с (*). $\square$

§9.7 Форсинг склейки кардиналов

Как мы видели, форсинг Коэна $\mathbf{C}$ сохраняет кардиналы исходной модели. Однако это отнюдь не общее правило. Имеются другие форсинги, которые не обладают таким свойством. Простейший пример дается следующим определением.

Определение 9.7.1. Пусть κ — бесконечный ординал (который в большинстве приложений, но не обязательно, является кардиналом). Положим $\text{Coll}(\omega, \kappa) = \kappa^{<\omega}$ — множество всех (конечных) кортежей ординалов $\xi < \kappa$, упорядоченное обратно продолжению, т. е. $s \leq t$ («условие» s сильнее), если $t \subseteq s$. Форсинг $\text{Coll}(\omega, \kappa)$ называется κ -склеивающим коэновским форсингом. $\square$

В частности, $\text{Coll}(\omega, \omega) = \mathbf{C}$ — форсинг Коэна. Поэтому следующая теорема обобщает теорему 9.4.2.

Теорема 9.7.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель **ZFC**, и $\kappa \in \mathfrak{M}$ — бесконечный ординал в $\mathfrak{M}$. Тогда $\text{Coll}(\omega, \kappa) \in \mathfrak{M}$, и*

- (i) *если множество $G \subseteq \text{Coll}(\omega, \kappa)$ — $\text{Coll}(\omega, \kappa)$ -генерическое над $\mathfrak{M}$, то функция $f = \mathbf{f}_G = \bigcup G$ принадлежит κ^ω , и мы имеем:*

- (1) $G = \{f \restriction m : m \in \mathbb{N}\}$, и
 (2) если множество $D \in \mathfrak{M}$ плотно в $\mathbf{Coll}(\omega, \kappa)$, то существует такое число $m \in \mathbb{N}$, что $f \restriction m \in D$;
 (ii) обратно, если $f \in \kappa^\omega$ удовлетворяет (i)(2), то множество $G = G_f = \{f \restriction m : m \in \mathbb{N}\}$ является $\mathbf{Coll}(\omega, \kappa)$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, и $f = f_G$.

В обоих этих случаях, $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[f]$, $f = f_G$ является биекцией из ω на κ — так что κ становится счетным ординалом в $\mathfrak{M}[G]$, а с другой стороны, все кардиналы $\lambda > \kappa$ исходной модели $\mathfrak{M}$ остаются кардиналами в $\mathfrak{M}[G]$.

Доказательство. Дополнительно к выкладкам из доказательства теоремы 9.4.2, которые проходят и для этой теоремы с очевидными поправками, — чтобы вывести, что f_G отображает натуральный ряд $\omega = \mathbb{N}$ на κ , заметьте, что если $\xi < \kappa$, то множество

$$D_\xi = \{s \in \mathbf{Coll}(\omega, \kappa) : \xi \in \text{ran } s\}$$

плотно в $\mathbf{Coll}(\omega, \kappa)$ и принадлежит модели $\mathfrak{M}$. □

Функции вида $f = f_G : \omega \xrightarrow{\text{на}} \kappa$, где множество $G \subseteq \mathbf{Coll}(\omega, \kappa)$ является $\mathbf{Coll}(\omega, \kappa)$ -генерическим над моделью $\mathfrak{M}$, называются *генерическими коэновскими склейками* ординала κ (генерическими над моделью $\mathfrak{M}$). Из теоремы 9.7.2 следует, что для того, чтобы данная функция $f : \omega \rightarrow \kappa$ была генерической коэновской склейкой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось требование (i)(2) теоремы.

Исторические и библиографические замечания

Метод вынуждения, или форсинг (от английского forcing), возник как метод доказательства непротиворечивости и совместимости различных теоретико-множественных гипотез, см., например, книги [49, гл. 4], [99], статью [14] или книгу [121] на английском языке. Однако теперь форсинг используется и в доказательствах обычных математических теорем, т. е. не теорем непротиворечивости — см., например, доказательства теоремы 16.1.3 и следствия 16.1.4 ниже в главе 16.

Метод вынуждения (форсинг) Коэна [73] является, пожалуй, наиболее важным методом в современной теории множеств. Мы рекомендуем [55], [99], [49, гл. 5], а также [64, 121, 100] на английском языке, в качестве базовых ссылок, касающихся форсинга и теорем 9.2.6 – 9.3.2. Подробнее о форсинге на русском языке см. ссылки в преамбуле к этой главе.

Форсинги **C**, **R**, **S** известны из работ еще 1960х годов. Форсинг **R_ε** (известный также как *атомеба forcing*) введен Мартином и Соловеем [142], а доминирующий форсинг **D** (или форсинг Хехлера) — Хехлером [92].

О булевозначных моделях см. книги [99], [24] или статьи [36], [17].

Глава 10

Резольвенты классических проблем о свойствах регулярности: часть 1

Наш общий план доказательства той части теоремы 7.2.1, которая связана с гипотезами из списка (*), состоит в следующем. Сначала мы свяжем эти гипотезы с особыми свойствами некоторых специальных точечных множеств, в смысле, близком тому что Лузин называл *поставить проблему в резольвенту*.

Если $P(\mathbf{K})$ — проблема существования в данном проективном классе $\mathbf{K}$ множества с определенным свойством (например, неизмеримого или не обладающего свойством Бэра), то обычно можно определить на языке аналитических формул такое проективное множество X , что проблема $P(\mathbf{K})$ имеет положительное решение, если и только если X — непустое множество. Такие множества X Лузин называл в свое время резольвентами (*résolvantes*) исходных проблем. В более широком смысле *резольвентой* проблемы $P(\mathbf{K})$ мы назовем определенное свойство p одного определенного множества X , равносильное положительному решению исходной проблемы для *всех* множеств из данного проективного класса.

§ 10.1 Множества, участвующие в резольвентах

Резольвенты, о которых идет речь в главных результатах (теорема 10.2.1 и следствие 10.2.2 ниже), формулируются в терминах свойств определенных теоретико-множественных объектов, точнее, трех их типов, которые следует рассмотреть перед формулировкой самих результатов. Все три типа связаны с классами вида $\mathbb{L}[a]$, $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Один из них — это ординалы вида $\omega_1^{\mathbb{L}[a]}$, фигурирующие в резольвентах для проблемы совершенного ядра, о них см. § 8.5. Что до проблем измеримости и свойства Бэра, то они связаны с объектами иной природы — коэновскими и случайными точками.

Определение 10.1.1. Пусть $\mathcal{M}$ — транзитивная модель **ZFC**, например, класс вида $\mathbb{L}[X]$. Назовем точку $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

- *коэновской над $\mathcal{M}$* , символически $x \in \mathbf{Coh} \mathcal{M}$, если $x \notin B_{\varkappa}$ всякий раз, когда $\varkappa \in \mathcal{M} \cap \mathbf{BC}$ и множество $B_{\varkappa}$ — тощее в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
- *μ -случайной над $\mathcal{M}$* , где μ — заданная борелевская мера на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, символически $x \in \mathbf{Rand}_{\mu} \mathcal{M}$, если $x \notin B_{\varkappa}$ всякий раз, когда $\varkappa \in \mathcal{M} \cap \mathbf{BC}$ и множество $B_{\varkappa}$ удовлетворяет $\mu(B_{\varkappa}) = 0$.
- (просто) *случайной над $\mathcal{M}$* , символически $x \in \mathbf{Rand} \mathcal{M}$, если точка x λ -случайна над $\mathcal{M}$, где λ — это та вероятностная мера на канторовом дисконтинууме $2^{\mathbb{N}}$, которая введена в примере 6.1.1 — или, точнее говоря, ее продолжение на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, определенное по тривиальности через $\lambda(\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus 2^{\mathbb{N}}) = 0$.¹

Таким образом, $\mathbf{Rand} \mathcal{M} = \mathbf{Rand}_{\lambda} \mathcal{M}$. □

Напомним, что если $\varkappa$ — борелевский код, то $B_{\varkappa}$ — это борелевское множество в пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Множество **BC** всех кодов и сама кодировка борелевских множеств были определены выше в § 5.7Б.

Ниже (теорема 10.5.3) будет показано, что ключевые свойства μ -случайных точек в широких пределах не зависят от выбора меры μ — так что можно ограничиться изучением именно множества $\mathbf{Rand} \mathcal{M}$, т. е. случая $\mu = \lambda$, что мы и будем делать. С другой стороны, коэновские и случайные точки по своим свойствам весьма различны. В частности, мы покажем, что просто $\mathbf{Rand} \mathcal{M} \cap \mathbf{Coh} \mathcal{M} = \emptyset$ (теорема 11.5.2), т. е. ни одна точка не может быть одновременно случайной и коэновской над одной и той же моделью.

По определению, $\mathbf{Coh} \mathcal{M} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbf{Rand} \mathcal{M} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Но для второго множества имеется более точная оценка.

¹ Теорема 10.4.2 ниже покажет, что точки из $\mathbf{Coh} \mathcal{M}$ и $\mathbf{Rand} \mathcal{M}$ — это в точности точки генерические по Коэну над $\mathcal{M}$ и, соответственно, точки случайные по Соловею над $\mathcal{M}$, в смысле определений 9.4.3 и 9.5.3.

Упражнение 10.1.2. Докажите, что $\mathbf{Rand} \mathfrak{M} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ и $\mathbf{Rand} \mathfrak{M}$ состоит из всех таких точек $x \in 2^{\mathbb{N}}$, что $x \notin B_{\varkappa}$ всякий раз, когда $\varkappa \in \mathfrak{M} \cap \mathbf{BC}$, $B_{\varkappa} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, и $\lambda(B_{\varkappa}) = 0$. Воспользуйтесь тем, что множество $D = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus 2^{\mathbb{N}}$ — борелевское в пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (точнее, открытое), $\lambda(D) = 0$, и D имеет некоторый вполне определенный борелевский код $\varkappa(D)$, даваемый операциями из примера 5.7.5 и принадлежащий любой транзитивной модели $\mathfrak{M}$ теории **ZFC**. $\square$

Итак, по определению, коэновские точки над данной моделью $\mathfrak{M}$ — это те, которые избегают любое тощее борелевское множество с кодом из $\mathfrak{M}$. Соответственно, случайные точки — это те, которые избегают множества нулевой λ -меры с кодом из $\mathfrak{M}$. Существуют ли в действительности такие точки, и вообще какова природа множеств $\mathbf{Coh} \mathfrak{M}$ и $\mathbf{Rand} \mathfrak{M}$ — зависит от выбора модели $\mathfrak{M}$, равно как и от общих предположений о структуре универсума множеств.

Упражнение 10.1.3. Докажите, что если $\mathfrak{M}$ — счетная модель теории **ZFC**, то $\mathbf{Coh} \mathfrak{M}$ — непустое $\mathbf{G}_{\delta}$ -множество, котошее в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а $\mathbf{Rand} \mathfrak{M}$ — непустое $\mathbf{F}_{\sigma}$ -множество, для которого $\lambda(\mathbf{Rand} \mathfrak{M}) = 1$.

С другой стороны, докажите, что если $\mathfrak{M} = \mathbb{V}$ (универсум всех множеств), то $\mathbf{Coh} \mathfrak{M} = \mathbf{Rand} \mathfrak{M} = \emptyset$. $\square$

Для нас особенно интересен случай, когда модель $\mathfrak{M}$ тождественна классу вида $\mathbb{L}[a]$, где $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Лемма 10.1.4. Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ то множества $\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]$ и $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ принадлежат классу $\Pi_2^1(a)$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. По определению, мы имеем $x \in \mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ если и только если

$$\forall \varkappa ((\varkappa \in \mathbb{L}[a] \wedge \varkappa \in \mathbf{BC} \wedge B_{\varkappa} \text{ — тощее множество}) \implies x \notin B_{\varkappa}). \quad (1)$$

Однако соотношение $\varkappa \in \mathbb{L}[a]$ выражается Σ_2^1 -формулой по теореме 8.6.2(iii), а соотношения $\varkappa \in \mathbf{BC}$, $x \notin B_{\varkappa}$, и « $B_{\varkappa}$ — тощее множество» — формулами первого проективного уровня по теореме 5.8.1 и предложению 6.4.2. Отсюда и следует общая оценка Π_2^1 (с переменными a и x) для выделенной формулы (1).

Результат для множеств $\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]$ получается аналогично. $\square$

§ 10.2 Резольвенты свойств регулярности

Главные результаты о связи свойств регулярности проективных множеств первого и второго уровня проективной иерархии и свойств только что определенных множеств сведены в следующую теорему и легко вытекающее из нее следствие 10.2.2.

Теорема 10.2.1. Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то справедливы следующие эквивалентности:

- (i) $\text{PK}(\Pi_1^1(a)) \iff \omega_1^{\mathbb{L}[a]} < \omega_1$;
- (ii) $\text{LM}(\Sigma_2^1(a)) \iff \lambda(\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]) = 1$;
- (iii) $\text{BP}(\Sigma_2^1(a)) \iff \mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] - \text{котощее множество}$;
- (iv) $\text{LM}(\Delta_2^1(a)) \iff \mathbf{Rand} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset$;
- (v) $\text{BP}(\Delta_2^1(a)) \iff \mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset$.

«Интегрируя» теорему 10.2.1, мы выводим такое следствие:

Следствие 10.2.2. Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то справедливы следующие эквивалентности:

- (I) $\text{PK}(\Pi_1^1) \iff \forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\omega_1^{\mathbb{L}[a]} < \omega_1)$;
- (II) $\text{LM}(\Sigma_2^1) \iff \forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\lambda(\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]) = 1)$;
- (III) $\text{BP}(\Sigma_2^1) \iff \forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] - \text{котощее множество})$;
- (IV) $\text{LM}(\Delta_2^1) \iff \forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset)$;
- (V) $\text{BP}(\Delta_2^1) \iff \forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset)$.

Доказательство (следствия из теоремы). Мы имеем равенство $\Pi_1^1 = \bigcup_{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \Pi_1^1(a)$, и то же для классов Σ_2^1 , Δ_2^1 . $\square$

Указанные в правых частях эквивалентностей из теоремы и следствия свойства множеств $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]$, $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ могут рассматриваться как **резольвенты** проблем в левых частях тех же эквивалентностей, в том смысле, как мы говорили выше — т. е. рассматриваемые утверждения о *всех* множествах некоторого проективного класса становятся эквивалентными тем или иным свойствам определенных, конкретных точечных множеств.

Теорема 10.2.1 и следствие 10.2.2 сами по себе не решают ни одну из этих проблем (т. е. проблем, связанных с левыми частями эквивалентностей). Например, они ничего не говорят о том, верна ли на самом деле гипотеза $\text{PK}(\Pi_1^1)$ о том, что каждое несчетное Π_1^1 -множество имеет совершенное подмножество. Однако эти проблемы приводятся к единообразной и интуитивно более ясной форме. Тем самым, соотношения между проблемами становятся в целом значительно более прозрачными. В частности, мы немедленно получаем импликации на диаграмме со стр. 135, исходящие из бокса $\text{PK}(\Pi_1^1)$:

Следствие 10.2.3 (Любецкий [31]). Предположим, что выполнено $\text{PK}(\Pi_1^1)$. Тогда также имеют место $\text{LM}(\Sigma_2^1)$ и $\text{BP}(\Sigma_2^1)$.

Доказательство. Согласно следствию 10.2.2, из $\text{PK}(\Pi_1^1)$ следует, что если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} < \omega_1$, а потому множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ счетно по лемме 8.5.1. Но тогда $\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]$ — дополнение счетного объединения множеств меры 0, поэтому $\lambda(\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]) = 1$, а $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ — котическое множество по аналогичным соображениям. $\square$

В этой главе доказываются импликации направления $\implies$ теоремы 10.2.1, а обратным импликациям посвящена глава 11. Начинаем со свойства совершенного ядра.

§ 10.3 Π_1^1 -множества без совершенного ядра

Здесь мы выведем импликацию $\implies$ в эквивалентности (i) теоремы 10.2.1. (Обратное утверждение см. ниже в § 11.1.) Эта импликация доказывается в более удобной «контрапозиционной» форме.

Лемма 10.3.1. *Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} = \omega_1$, то $\neg \text{PK}(\Pi_1^1(a))$.*

Собственно, результат уже получен, см. следствие 8.9.2 — однако доказательство следствия опирается на трудную теорему 8.9.1, а потому мы дадим более прозрачное прямое доказательство.

Доказательство. Вполне достаточно просто повторить построение контрпримера из доказательства теоремы 8.8.1, которое без дополнительных трудностей проходит и в более слабом предположении несчетности множества $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (которое в свою очередь следует из $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} = \omega_1$ по лемме 8.5.1). Действительно, в той части доказательства теоремы 8.8.1, которая относится к свойству совершенного ядра, ключевое утверждение о несчетности множества R следует из взаимной однозначности функции η и того, что $R = \mathbf{ran} \eta$, а $\mathbf{dom} \eta = \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Поэтому если мы сразу допустим, что $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ несчетно, то этого будет достаточно для несчетности R .

$\square$ (лемма 10.3.1 и импликация $\implies$ в (i) теоремы 10.2.1)

В заметке [12] дано еще одно доказательство существования Π_1^1 -множества без свойства совершенного ядра — в предположении несчетности множества $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для некоторого $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — более элементарное в том смысле, что оно не использует конституанты.

§ 10.4 Каких множеств достаточно избегать, чтобы быть случайной точкой?

Здесь начинается доказательство импликаций направления $\implies$ в частях (ii), (iii), (iv), (v) теоремы 10.2.1. Собственно доказательству

импликаций (которое следует в § 10.6) мы предпошлим изложение некоторых важных результатов о случайных и коэновских точках, которые играют в этом доказательстве ключевую роль.

Определения коэновских и случайных точек можно упростить, воспользовавшись тем, что достаточно потребовать избегания не всех, а только некоторых «малых» борелевских множеств с кодами из данной модели. В основе этого упрощения лежит такой результат.

Упражнение 10.4.1. Докажите следующее. Пусть $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Если X — тощее множество, то найдется такое тощее множество $Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ класса $\mathbf{F}_{\sigma}$, что $X \subseteq Y$.

Если μ — борелевская σ -конечная мера на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и $\mu(X) = 0$, то найдется такое $\mathbf{G}_{\delta}$ -множество $Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $X \subseteq Y$ и $\mu(Y) = 0$. $\square$

В следующей теореме используется кодировка простых борелевских множеств, введенная в § 5.7А.

Теорема 10.4.2. Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель теории $\mathbf{ZFC}$, и $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда следующие пять условий эквивалентны:

- (1) $x \in \mathbf{Coh} \mathfrak{M}$;
- (2) $x \notin \mathbb{F}[c]$ всякий раз, когда $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$ и $\mathbb{F}[c]$ — тощее;
- (3) $x \in \mathbb{G}[c]$ всякий раз, когда $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$ и $\mathbb{G}[c]$ — плотное открытое множество;
- (4) $x \notin X$ всякий раз, когда $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$ и $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — тощее множество класса $\Delta_1^1(a)$;
- (5) точка x является генерической по Коэну над $\mathfrak{M}$ в смысле определения 9.4.3.

И следующие пять условий также эквивалентны, при $x \in 2^{\mathbb{N}}$:

- (1') $x \in \mathbf{Rand} \mathfrak{M}$;
- (2') $x \notin \mathbb{G}_{\delta}[c]$ всякий раз, когда $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$ и $\lambda(\mathbb{G}_{\delta}[c]) = 0$;
- (3') $x \in \mathbb{F}_{\sigma}[c]$ всякий раз, когда $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$ и $\lambda(\mathbb{F}_{\sigma}[c]) = 1$;
- (4') $x \notin X$ всякий раз, когда $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$ и $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — множество класса $\Delta_1^1(a)$ и $\lambda(X) = 0$;
- (5') точка x является случайной по Соловею над $\mathfrak{M}$ в смысле определения 9.5.3.

Доказательство. Часть 1. Эквивалентность условий (1) и (4) сразу вытекает из следствия 5.9.5, эквивалентность (2) и (3) очевидно, и также очевидно, что (1) влечет (3).

Для вывода импликации (3) $\implies$ (1), пусть $x \notin \mathbf{Coh} \mathfrak{M}$. По определению, найдется тощее борелевское множество $B_x \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ с кодом $x \in \mathfrak{M} \cap \mathbf{BC}$, не содержащее x . Согласно следствию 6.4.4, свойство «быть кодом тощего множества» абсолютно для $\mathfrak{M}$, так что и в $\mathfrak{M}$ истинно, что « B_x — тощее множество». Отсюда, согласно результату 10.4.1, найдется такая точка $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$, что в $\mathfrak{M}$ истинно:

(*) $B_x \cap \mathbb{G}_\delta[c] = \emptyset$, и $\mathbb{G}_\delta[c] = \bigcap_n \mathbb{G}[(c)_n]$ — котощее множество.

Мы утверждаем, что предложение (*) абсолютно для $\mathfrak{M}$, а потому истинно и в $\mathfrak{M}$ в универсуме всех множеств.

В самом деле, подформула $B_x \cap \mathbb{G}_\delta[c] = \emptyset$ выражается Π_1^1 -формулой при помощи формул теоремы 5.8.1 и упражнения 5.7.3, и, следовательно, абсолютна для $\mathfrak{M}$ по теореме 5.9.1. Что касается подформулы « $\mathbb{G}_\delta[c]$ — котощее множество», то мы берем код $\varrho = \kappa_c(\mathbf{G}_\delta)$ из упражнения 5.7.6, для которого $\mathbb{G}_\delta[c] = B_\varrho$, находим, что операции, использованные для построения этого кода, абсолютны для $\mathfrak{M}$ (и любой модели) в силу своей простоты, и заключаем, что $\varrho \in \mathfrak{M}$ и равенство $\mathbb{G}_\delta[c] = B_\varrho$ также истинно и в $\mathfrak{M}$. Тем самым, предложение « $\mathbb{G}_\delta[c]$ — котощее множество» равносильно предложению « B_ϱ — котощее» — которое абсолютно для $\mathfrak{M}$ согласно следствию 6.4.4.

Итак, предложение (*) в самом деле истинно (в универсуме). Поэтому $x \notin \mathbb{G}_\delta[c]$, т. е. $x \notin \mathbb{G}[c']$, где $c' = (c)_n \in \mathfrak{M}$ для некоторого n . Однако $\mathbb{G}[c']$ — открытое плотное множество согласно (*). Таким образом, условие (3) теоремы не выполнено, что и требовалось.

Наконец, выведем эквивалентность (3) $\iff$ (5). Предположим, что $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$, $\mathbb{G}[c] \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — плотное открытое (в топологии $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) множество, но $x \notin \mathbb{G}[c]$, т. е. (3) не выполнено. Тогда множество

$$D = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \exists n (c(n) = 1 \wedge s_n \subseteq s)\} \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} = \mathbf{C}$$

плотно в $\mathbf{C}$ уже в смысле форсинга и принадлежит $\mathfrak{M}$ вместе с c , однако $x \notin \bigcup_{s \in D} [s]$, так что условие (i)(2) теоремы 9.4.2 не выполнено, а значит, точка x — не генерическая по Коэну над $\mathfrak{M}$.

Обратно, допустим, что (5) не выполнено, а значит, не выполнено и условие (i)(2) теоремы 9.4.2, т. е. существует плотное в $\mathbf{C}$ множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbf{C}$, для которого $\forall m (x \restriction m \notin D)$. Тогда множество $G = \bigcap_{s \in D} [S]$ открыто и плотно в топологии $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, причем $G = \mathbb{G}[c]$, где точка $c \in 2^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$ определена так, что $c(n) = 1$ при $s_n \in D$, а иначе $c(n) = 0$. Но по построению, $x \notin G$, так что (3) не выполнено.

Часть 2. Второе утверждение теоремы (т. е. для $\mathbf{Rand} \mathfrak{M}$) доказывается аналогично, лишь с некоторыми достаточно очевидными изменениями, отражающими определенные различия между мерой

и категорией (см., например, упражнение 10.4.1. Мы оставим эту часть как достаточно серьезное упражнение для читателя. $\square$

Ниже мы пополним каждую из двух эквивалентностей теоремы еще одним пунктом в § 11.3.

§ 10.5 Однородность и плотность

Следующая теорема доказывает, что множества $\mathbf{Coh} \mathfrak{M}$ и $\mathbf{Rand} \mathfrak{M}$ в определенном смысле однородны, т. е. инвариантны относительно определенных преобразований. Напомним, что если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то $s \wedge x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ получается присоединением всех членов кортежа s слева к бесконечной последовательности $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, так что $s \subset s \wedge x$.

Теорема 10.5.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель $\mathbf{ZFC}$, $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, и $x_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда $x_0 \in \mathbf{Coh} \mathfrak{M}$ если и только если $s \wedge x_0 \in \mathbf{Coh} \mathfrak{M}$. То же верно и для $\mathbf{Rand} \mathfrak{M}$, при условии что $s \in 2^{<\omega}$ и $x_0 \in 2^{\mathbb{N}}$.*

Доказательство. Пусть напротив, скажем, $x_0 \in \mathbf{Coh} \mathfrak{M}$ но $y_0 = s \wedge x_0 \notin \mathbf{Coh} \mathfrak{M}$. По определению найдется такой борелевский код $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathfrak{M} \cap \mathbf{BC}$, для которого множество $Y = B_{\varkappa}$ — тощее, и $y_0 \in Y$. Для вывода противоречия, заметим, что отображение $x \mapsto s \wedge x$ есть гомеоморфизм из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на бэровский интервал $[s] = \{z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \wedge z\}$, так что

$$X = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \wedge x \in Y\} = \{x : \pi(T, f, s \wedge x)\} = \{x : \pi'(T, f, s \wedge x)\}$$

(где π и π' — формулы теоремы 5.8.1) есть тощее борелевское множество в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, содержащее x_0 . А с другой стороны X — множество класса $\Delta_1^1(\varkappa)$, где $\varkappa \in \mathfrak{M}$. Значит, множество X имеет борелевский код в $\mathfrak{M}$ согласно следствию 5.9.5. Таким образом, генерическая точка x_0 принадлежит тощему борелевскому множеству $X = B_{\varepsilon}$ с кодом из $\mathfrak{M}$ — противоречие.

Доказательство для $\mathbf{Rand} \mathfrak{M}$ аналогично. $\square$

Следствие 10.5.2. *Если $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель теории $\mathbf{ZFC}$, то множества $\mathbf{Coh} \mathfrak{M}$ и $\mathbf{Rand} \mathfrak{M}$ E_0 -инвариантны в смысле определения в § 6.1, а потому для них выполнена теорема 6.1.3.* $\square$

Первые два утверждения следующей леммы показывают что, из-за однородности меры и категории, непустота множеств $\mathbf{Coh} \mathfrak{M}$ и $\mathbf{Rand} \mathfrak{M}$ влечет их *плотность* в достаточно сильном смысле. А согласно третьему утверждению, те свойства множества случайных точек, которые рассматриваются ниже в теореме 10.2.1 и следствии 10.2.2, не зависят от выбора меры в широких пределах.

Теорема 10.5.3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель аксиом $\mathbf{ZFC}$. Тогда выполнено следующее:*

- (i) *если $\mathbf{Coh} \mathfrak{M} \neq \emptyset$, то любое не тощее борелевское множество $B_{\varkappa} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ с кодом $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ непусто пересекает $\mathbf{Coh} \mathfrak{M}$;*

- (ii) если $\mathbf{Rand} \mathfrak{M} \neq \emptyset$, то любое борелевское множество $B_{\varkappa} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ ненулевой λ -меры $\lambda(B_{\varkappa}) > 0$ с кодом $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ непусто пересекает $\mathbf{Rand} \mathfrak{M}$;
- (iii) условия $\mathbf{Rand} \mathfrak{M} \neq \emptyset$ и $\lambda(\mathbf{Rand} \mathfrak{M}) = 1$ не зависят от выбора меры, в том смысле, что если μ – борелевская вероятностная мера на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и её код, т. е. множество $\mathbf{Cod}_{<}(\mu)$ (см. определение 6.2.2) принадлежит $\mathfrak{M}$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{Rand} \mathfrak{M} \neq \emptyset &\iff \mathbf{Rand}_{\mu} \mathfrak{M} \neq \emptyset, \quad \text{и} \\ \lambda(\mathbf{Rand} \mathfrak{M}) = 1 &\iff \mu(\mathbf{Rand}_{\mu} \mathfrak{M}) = 1. \end{aligned}$$

Доказательство. (i) Раз $X = B_{\varkappa} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ – не тощее множество, имеется такой кортеж $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ длины $m = \mathbf{lh} s$, что множество $X \cap [s]$ – котошее на бэровском интервале $[s] = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset a\}$. Если $t \in \mathbb{N}^m$ (другой кортеж той же длины m), то

$$Y_t = \{t \wedge a : a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \wedge s \wedge a \in X \cap [s]\}$$

– также, очевидно, множество котошее на $[t]$, а объединение $Y = \bigcup_{t \in \mathbb{N}^m} Y_t$ является котошим в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Далее, следствие 5.9.5 дает нам параметр $c \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которого $X \in \Delta_1^1(c)$. Отсюда и $Y \in \Delta_1^1(c)$. Поэтому, коль скоро множество Y котошее, мы имеем $\mathbf{Coh} \mathfrak{M} \subseteq Y$ согласно теореме 10.4.2(2'). Раз предполагается $\mathbf{Coh} \mathfrak{M} \neq \emptyset$, берем точку $y_0 \in \mathbf{Coh} \mathfrak{M}$. Тогда $y_0 \in Y$, а потому $y_0 \in Y_t$ для некоторого кортежа $t \in \mathbb{N}^m$. Тем самым, $y_0 = t \wedge a_0$, где $a_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Соответственно, точка $x_0 = s \wedge a_0$ по построению принадлежит множеству X . Для вывода (i) остается заметить, что $x_0 \in \mathbf{Coh} \mathfrak{M}$ по теореме 10.5.1.

(ii) Ход рассуждений здесь примерно тот же, но имеют место некоторые различия между мерой и категорией. Рассмотрим множество $X = B_{\varkappa}$ с кодом $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, и допустим, что $\lambda(X) > 0$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Из теории меры известно, что найдется бэровский интервал $[s] = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset a\}$, для которого $\frac{\lambda([s] \cap X)}{2^{-\mathbf{lh} s}} \geq 1 - 2^{-k}$ (где $2^{-\mathbf{lh} s} = \lambda([s])$). Через $s[k]$ обозначим тот из кортежей $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющих этому условию, который является первым 1) с точки зрения наименьшей возможной длины $m[k]$ такого кортежа, и 2) с точки зрения лексикографического порядка на множестве $\mathbb{N}^{m[k]}$ всех кортежей длины $m[k]$. Если $t \in \mathbb{N}^{m[k]}$ то множество

$$Y_{kt} = \{t \wedge x : x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \wedge s[k] \wedge x \in X\} \subseteq [t],$$

очевидно, удовлетворяет $\frac{\lambda(Y_{kt})}{2^{-m[k]}} \geq 1 - 2^{-k}$, так что мы имеем $\lambda(Y_k) \geq 1 - 2^{-k}$, где $Y_k = \bigcup_{t \in \mathbb{N}^{m[k]}} Y_{kt}$, и, наконец, множество $Y = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Y_k$ удовлетворяет $\lambda(Y) = 1$.

Но согласно предположению $\mathbf{Cod}_{<}(\mu) \in \mathfrak{M}$ и следствию 6.4.4(i), выбор $s[k]$ по k абсолютен для $\mathfrak{M}$, так что отображение $k \mapsto s[k]$ принадлежит

$\mathfrak{M}$. Отсюда, рассуждая как в доказательстве утверждения (i), можно вывести, что Y — множество из $\Delta_1^1(c')$ для подходящего параметра $c' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$. Отсюда, поскольку Y — борелевское множество полной меры, следует, что $\mathbf{Rand} \mathfrak{M} \subseteq Y$ по теореме 10.4.2, а потому любая точка $y_0 \in \mathbf{Rand} \mathfrak{M}$ принадлежит и множеству Y . Далее как в доказательстве утверждения (i) для множества $\mathbf{Coh} \mathfrak{M}$.

(iii) Здесь результат основывается на лемме 6.2.3 для мер λ и μ . Раз по условию код $\mathbf{Cod}_{<}(\mu)$ меры μ принадлежит $\mathfrak{M}$, найдем точку $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$, для которой $\mathbf{Cod}_{<}(\mu)$ есть $\Delta_1^1(c)$ -множество. А в отношении меры λ , ее код $\mathbf{Cod}_{<}(\lambda)$ есть даже $\Delta_1^1(c)$ -множество по очевидным соображениям. Значит, обе меры μ и λ являются мерами класса $\Delta_1^1(c)$. Согласно лемме 6.2.3, существуют $\mathbf{G}_\delta$ -множества $X, Y \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ и борелевский изоморфизм $h : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, для которых $\lambda(X) = \mu(Y) = 1$ и h переводит λ в μ , и множества X, Y , как и отображение h , принадлежат $\Delta_1^1(c)$.

Остается проверить, что h -образ множества $\mathbf{Rand} \mathfrak{M}$ тождествен множеству $\mathbf{Rand}_\mu \mathfrak{M}$. Для этого, по теореме 10.4.2, достаточно вывести, что h -образ $h[X'] = \{h(x) : x \in X'\}$ любого множества $X' \subseteq X$ класса $\Delta_1^1(c, c')$, где $c' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$ — также множество класса $\Delta_1^1(c, c')$, и обратно, h -прообраз множества $Y' \subseteq Y$ класса $\Delta_1^1(c, c')$, где $c' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$ — множество класса $\Delta_1^1(c, c')$. Но это следует из теоремы 5.6.3, коль скоро отображение h принадлежат $\Delta_1^1(c)$ и биективно. $\square$

§ 10.6 Нерегулярные множества второго уровня

В этом параграфе мы доказываем импликации направления $\implies$ в утверждениях (ii) – (v) теоремы 10.2.1. Как и для свойства совершенного ядра выше, они доказываются в более удобной «контрапозиционной» форме, т. е. в виде следующих утверждений:

(ii') $\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]$ — не множество полной λ -меры $\implies \neg \mathbf{LM}(\Sigma_2^1(a))$;

(iii') $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ — не котощее множество $\implies \neg \mathbf{BP}(\Sigma_2^1(a))$;

(iv') $\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a] = \emptyset \implies \neg \mathbf{LM}(\Delta_2^1(a))$;

(v') $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] = \emptyset \implies \neg \mathbf{BP}(\Delta_2^1(a))$.

Доказательство. Мы начнем с утверждения (iii'). Предположим, что $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ — не котощее множество. (Этим, однако, не предполагается, что $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ имеет свойство Бэра.)

Рассмотрим σ -идеал

$$\mathcal{I}_{\text{cat}} = \{X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : X \text{ — борелевское тощее множество}\}$$

в алгебре $\mathbf{Bor}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ всех борелевских множеств пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Соответствующее множество борелевских кодов тощих множеств

$$C = \mathbf{cod} \mathcal{I}_{\text{cat}} = \{\kappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC} : B_\kappa \in \mathcal{I}_{\text{cat}}\}$$

в пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \times (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$ принадлежит классу Π_1^1 согласно предложению 6.4.2. Однако, с целью дать такое изложение доказательства, которое будет ниже «работать» и в более общем случае, мы будем исходить в последующих выкладках только из того, что $C \in \Sigma_2^1$. Тогда, по теореме 5.6.1, найдется Π_1^1 -множество $P \subseteq \mathbf{BC} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ такое что $x \in C \iff \exists y P(x, y)$.

Напомним, что $\mathbf{f}_\xi[a]$ есть ξ -ый элемент множества $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в смысле полного упорядочения $\prec_a$ множества $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Далее, функции $b \mapsto \mathbf{T}_{\{b\}}$ и $b \mapsto \mathbf{f}_{\{b\}}$ ($b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, см. § 4.6) непрерывно отображают $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на пространства $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ и $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$ соответственно, а потому, определив $H(b) = \langle \mathbf{T}_{\{(b)_{\text{лев}}\}}, \mathbf{f}_{\{(b)_{\text{пра}}\}} \rangle$, мы получим непрерывное отображение $H : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} \mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega}) \times (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$. (Напомним, что $(b)_{\text{лев}}(n) = b(2n)$ и $(b)_{\text{пра}}(n) = b(2n+1)$ для всех n , см. § 4.2.)

Для $\xi < \omega_1$, если $\mathbf{f}_\xi[a] = z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ таково что $\langle H((z)_{\text{лев}}), (z)_{\text{пра}} \rangle \in P$ — тогда $H((z)_{\text{лев}}) \in C \subseteq \mathbf{BC}$, — то определим $A_\xi = \mathbf{B}_{H((z)_{\text{лев}})}$. Понятно, что в этом случае A_ξ — борелевское множество в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ с кодом $H((z)_{\text{лев}}) \in C$. А иначе (т. е. если $\langle H((z)_{\text{лев}}), (z)_{\text{пра}} \rangle \notin P$) полагаем $A_\xi = \emptyset$. В обоих случаях A_ξ — тощее множество по определению.

Пусть $W_\xi = A_\xi \setminus \bigcup_{\eta < \xi} A_\eta$. Мы утверждаем что множества

$$\begin{aligned} A &= \{ \langle T, x \rangle : T \in \mathbf{WFT} \wedge x \in A_{|T|} \}, \quad \text{и} \\ W &= \{ \langle T, x \rangle : T \in \mathbf{WFT} \wedge x \in W_{|T|} \} \end{aligned}$$

принадлежат классу $\Delta_2^1(a)$. Для множества A это утверждение следует из того что соотношение $\langle T, x \rangle \in A$ эквивалентно любой из следующих двух формул:

$$\begin{aligned} T \in \mathbf{WFT} \wedge \exists z (z = \mathbf{f}_{|T|}[a] \wedge \langle H((z)_{\text{лев}}), (z)_{\text{пра}} \rangle \in P \wedge x \in \mathbf{B}_{H((z)_{\text{лев}})}), \\ T \in \mathbf{WFT} \wedge \forall z \\ ((z = \mathbf{f}_{|T|}[a] \wedge \langle H((z)_{\text{лев}}), (z)_{\text{пра}} \rangle \in P) \implies x \in \mathbf{B}_{H((z)_{\text{лев}})}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{WFT} \in \Pi_1^1$ по теореме 5.4.1, равенство $z = \mathbf{f}_{|T|}[a]$ выражает Π_1^1 -отношение по теореме 8.6.2, P — множество класса Π_1^1 , а формула $x \in \mathbf{B}_{H((z)_{\text{лев}})}$ также определяет Π_1^1 -отношение согласно теореме 5.8.1. Что же касается множества W , то соотношение $x \in W_{|T|}$ по определению равносильно тому, что

$$x \in A_{|T|} \wedge \forall s (s \in T \wedge s \neq \Lambda \implies x \notin A_{|T|_s|}),$$

поскольку в наших условиях согласно лемме 5.2.3 выполнено равенство $|T| = \{|T|_s| : s \in T \setminus \{\Lambda\}\}$ — а потому результат следует из результата для множества A .

Мы заключаем теперь, что множество

$$\begin{aligned} Z &= \bigcup_{\eta \leq \xi < \omega_1} (W_\eta \times W_\xi) \\ &= \bigcup_{\eta \leq \xi < \omega_1} \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : x \in W_\eta \wedge y \in W_\xi \} \end{aligned}$$

также имеет класс $\Sigma_2^1(a)$, так как соотношение $\langle x, y \rangle \in Z$ эквивалентно формуле

$$\exists T, T' \in \mathbf{WFT} (|T| \leq |T'| \wedge \langle T, x \rangle \in W \wedge \langle T', y \rangle \in W),$$

где $\mathbf{WFT}$ и отношение $|T| \leq |T'|$ принадлежат Π_1^1 по теореме 5.4.1.

Утверждается, что множество Z не имеет свойства Бэра в пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. В самом деле, в противном случае Z — тощее по теореме Улама — Куратовского, поскольку каждое «горизонтальное» сечение $Z^y = \{x : \langle x, y \rangle \in Z\}$ есть объединение счетного числа множеств вида W_ξ , следовательно, является тощим множеством.

Лемма 10.6.1. *Проекция*

$$X = \text{dom } Z = \{x : \exists y (\langle x, y \rangle \in Z)\} = \bigcup_{\xi < \omega_1} W_\xi = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$$

множества Z совпадает с дополнением множества $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$.

Доказательство. По построению, каждое A_ξ — тощее борелевское множество с кодом $H((f_\xi[a])_{\text{лев}}) \in \mathbf{BC} \cap \mathbb{L}[a]$, откуда следует, что $A_\xi \cap \mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] = \emptyset$. Обратно, допустим, что $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathbb{L}[a]$ и множество $B_\varkappa$ тощее, т. е. $\varkappa \in C$. Требуется доказать, что $B_\varkappa = A_\xi$ для некоторого ординала $\xi < \omega_1$. По выбору множества P формула $\exists y (\langle \varkappa, y \rangle \in P)$ истинна в универсуме множеств, и является Σ_2^1 -формулой с параметром $\varkappa \in \mathbb{L}[a]$. Значит, по теореме абсолютности 5.9.1, она истинна и в $\mathbb{L}[a]$, т. е. другими словами найдется $y \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которого $\langle \varkappa, y \rangle \in P$. По выбору отображения H , существует другая точка $z \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которой $\langle H((z)_{\text{лев}}), (z)_{\text{пра}} \rangle = \langle \varkappa, y \rangle$. Наконец, найдется такой ординал $\xi < \omega_1$, что $z = f_\xi[a]$. Но тогда по определению имеем $B_\varkappa = A_\xi$, что и требовалось. $\square$ (лемма)

Из леммы следует, что X — не тощее множество. А каждое «вертикальное» сечение $Z_x = \{y : \langle x, y \rangle \in Z\}$, $x \in X$, отличается от X опять-таки на счетное объединение множеств вида W_ξ , т. е. тоже не является тощим множеством. Значит, по теореме Улама — Куратовского, само Z не может быть тощим множеством, что противоречит сказанному выше.

Мы заключаем, что $\Sigma_2^1(a)$ -множество $Z \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ никак не может иметь свойства Бэра. Используя любой рекурсивный гомеоморфизм $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2 \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, этот контрпример переводится в пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(v'). Здесь предполагается, что $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] = \emptyset$, так что дополнительное множество $X = \bigcup_{\xi < \omega_1} W_\xi = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$ тождественно $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а потому Z является дополнением множества $Z' = \bigcup_{\xi < \eta < \omega_1} (W_\eta \times W_\xi)$, которое принадлежит $\Sigma_2^1(a)$ по тем же соображениям что и Z . Поэтому наше множество Z без свойства Бэра имеет теперь класс $\Delta_2^1(a)$.

(ii') и (iv'). Здесь рассуждения аналогичны предыдущим, только нужно рассматривать идеал $\mathcal{I}_\lambda$ всех борелевских множеств $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, для которых $\lambda(X) = 0$, вместо идеала $\mathcal{I}_{\text{cat}}$, теорему Фубини вместо теоремы Улама – Куратовского, а для переноса контрпримера в $2^{\mathbb{N}}$ использовать лемму 6.2.3 для эффективного класса $\Sigma_2^1(a)$. Вообще, здесь следует рассматривать множества пространства $2^{\mathbb{N}}$ (поскольку мера λ определена на $2^{\mathbb{N}}$), например, определить $A_\xi = \mathbf{B}_{f_\xi[a]} \cap 2^{\mathbb{N}}$ при $f_\xi[a] \in \mathbf{BC}$, см. начало доказательства (v'). Это, однако, не вносит существенных изменений в выкладки.

□ (импликации $\Rightarrow$ в утверждениях (ii) – (v) теоремы 10.2.1)

§ 10.7 Обобщение на произвольный идеал

Очевидное сходство в теореме 10.2.2 между утверждениями (ii), (iv) с одной стороны, и (iii), (v) с другой, привело к следующему общему подходу к таким эквивалентностям. Пусть $\mathcal{I}$ – идеал в семействе всех борелевских подмножеств $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Назовем множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

$\mathcal{I}$ -нулевым, если оно покрывается множеством из $\mathcal{I}$ — для борелевских множеств X это равносильно тому, что $X \in \mathcal{I}$,

$\mathcal{I}$ -позитивным, если оно не покрывается множеством из $\mathcal{I}$ — для борелевских множеств X это равносильно тому, что $X \notin \mathcal{I}$,

$\mathcal{I}$ -полным, если $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus X$ есть $\mathcal{I}$ -нулевое множество.

$\mathcal{I}$ -измеримым, если найдется борелевское множество U такое, что симметрическая разность $X \triangle U$ есть $\mathcal{I}$ -нулевое множество, и

Определение 10.7.1. Назовем σ -ССС-идеалом любой идеал $\mathcal{I}$ борелевских множеств в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющий таким условиям:

1°. Идеал $\mathcal{I}$ замкнут относительно счетных объединений (свойство σ -аддитивности).

2°. Каждая $\mathcal{I}$ -антицепь, т. е. любое семейство A попарно $\mathcal{I}$ -дизъюнктивных (т. е. попарные пересечения не равных одно другому множеств из A должны принадлежать $\mathcal{I}$) борелевских $\mathcal{I}$ -позитивных множеств, не более чем счетно.² □

² σ -насыщенность, или условие счетности антицепей, кратко УСА, в англоязычной литературе обычно обозначаемое аббревиатурой СССР.

Имеет место следующее обобщение утверждения теоремы 6.3.1 об измеримости и свойстве Бэра для классов Σ_1^1 и Π_1^1 .

Теорема 10.7.2. *Если $\mathcal{I}$ — произвольный σ -ССС-идеал борелевских подмножеств пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то каждое множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ класса Σ_1^1 или Π_1^1 $\mathcal{I}$ -измеримо.*

Доказательство (указание). Типичное доказательство измеримости и свойстве Бэра для классов Σ_1^1 и Π_1^1 (см. например теорему 5.3.1 в книге [19]) проходит для любого σ -ССС-идеала борелевских подмножеств $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ без особых изменений. Мы оставляем это читателю в качестве **упражнения**. $\square$

Мы хотим добавить к свойствам 1^о, 2^о еще одно свойство, которое, собственно говоря, выражает их абсолютность относительно некоторой транзитивной модели $\mathfrak{M}$ аксиом **ZFC**. По понятным причинам, абсолютность легче выразить в терминах кодов борелевских множеств, а не самих множеств. Отсюда следующее определение.

Определение 10.7.3. Пусть $\mathcal{I}$ — какая-то совокупность борелевских множеств в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (например, σ -ССС-идеал), а $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель **ZFC**. Положим $\text{cod } \mathcal{I} = \{\kappa \in \text{BC} : B_\kappa \in \mathcal{I}\}$ и

$$(\mathcal{I})^{\mathfrak{M}} = \{(B_\kappa)^{\mathfrak{M}} : \kappa \in \mathfrak{M} \cap \text{cod } \mathcal{I}\}$$

— где, напомним, $(B_\kappa)^{\mathfrak{M}} = B_\kappa \cap \mathfrak{M}$ — т. е. множество B_κ , определенное в $\mathfrak{M}$, см. следствие 5.9.3. $\square$

Упражнение 10.7.4. Пусть, в условиях 10.7.3, $\kappa \in \mathfrak{M} \cap \text{BC}$. Докажите, что $(B_\kappa)^{\mathfrak{M}} \in (\mathcal{I})^{\mathfrak{M}}$, если и только если $B_\kappa \in \mathcal{I}$. $\square$

Теперь формулируем искомое требование абсолютности.

Определение 10.7.5. Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель **ZFC**. Назовем σ -ССС-идеал $\mathcal{I}$ **$\mathfrak{M}$ -абсолютным**, если множество $\mathfrak{M} \cap \text{cod } \mathcal{I}$ принадлежит $\mathfrak{M}$, и в $\mathfrak{M}$ истинно, что множество $(\mathcal{I})^{\mathfrak{M}}$ (которое тогда также принадлежит $\mathfrak{M}$) является σ -ССС-идеалом. $\square$

Таким образом, требуется, чтобы своего рода $\mathfrak{M}$ -копия $(\mathcal{I})^{\mathfrak{M}}$ данного идеала $\mathcal{I}$ была σ -ССС-идеалом внутри модели (множества или класса) $\mathfrak{M}$. Такая абсолютность чрезвычайно важна в ходе некоторых доказательств, где мы будем рассматривать как бы «один и тот же» с точки зрения его математического смысла идеал борелевских множеств в разных теоретико-множественных универсумах. Ставя слова «один и тот же» в кавычки, мы имеем в виду то, что фактически $\mathcal{I}$ и $(\mathcal{I})^{\mathfrak{M}}$ как множества совершенно не обязательно совпадают, во-первых потому что множество $\mathfrak{M} \cap \text{cod } \mathcal{I}$ может быть

собственным подмножеством всего множества кодов $\mathbf{cod} \mathcal{J}$, а во-вторых, даже если код $\varkappa \in \mathbf{BC}$ принадлежит $\mathfrak{M} \cap \mathbf{cod} \mathcal{J}$, то множество $(B_\varkappa)^\mathfrak{M}$, т. е. $B_\varkappa$, определенное внутри модели $\mathfrak{M}$, не обязательно совпадает с $B_\varkappa$ в смысле универсума всех множеств — фактически, выполняется равенство $(B_\varkappa)^\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap B_\varkappa$, см. следствие 5.9.3.

Следующая теорема сообщает несколько примеров, но нам здесь нужно ввести еще одно важное понятие: оно продолжает классификацию точечных множеств на совокупности борелевских множеств.

Определение 10.7.6. Пусть K — некоторый класс точечных множеств. Семейство борелевских множеств $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{Bor}(\mathbb{N}^\mathbb{N})$ является K -в-кодах, если множество кодов $\mathbf{cod} \mathcal{X}$ принадлежит K . $\square$

Лемма 10.7.7. Пусть $\mathfrak{M}$ — любая транзитивная модель **ZFC**. K $\mathfrak{M}$ -абсолютным σ -ССС-идеалам относятся:

- идеал $\mathcal{I}_{\text{cat}}$ всех тощих борелевских множеств $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$;
- идеал $\mathcal{I}_\mu$ всех борелевских множеств $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ μ -меры 0 — при условии, что μ — вероятностная мера на $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, код

$$\text{Cod}_<(\mu) = \{ \langle s, m, n \rangle \in \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \mu([s]) < \frac{m}{n} \}$$

которой (см. определение 6.2.2) принадлежит модели $\mathfrak{M}$;

- в частности, идеал $\mathcal{I}_\lambda$ всех борелевских множеств $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$, удовлетворяющих $\lambda(X) = 0$.

Идеалы $\mathcal{I}_{\text{cat}}$ и $\mathcal{I}_\lambda$ являются Π_1^1 -в-кодах, а идеал $\mathcal{I}_\mu$ — $\Pi_1^1(p)$ -в-кодах при условии, что $p \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и мера μ является $\Delta_1^1(p)$ -мерой в смысле определения 6.2.2.

Доказательство. Для идеала $\mathcal{I}_{\text{cat}}$, множество $C = \mathbf{cod} \mathcal{I}_{\text{cat}}$ принадлежит Π_1^1 согласно предложению 6.4.2, так что мы имеем свойство Π_1^1 -в-кодах для $\mathcal{I}_{\text{cat}}$. Поэтому, по теореме абсолютности 5.9.1, множество $C' = C \cap \mathfrak{M}$ принадлежит $\mathfrak{M}$ и в $\mathfrak{M}$ истинно

$$C' = \{ \varkappa \in \mathbf{BC} : B_\varkappa \text{ — тощее} \} \quad \text{и} \quad \mathcal{I}_{\text{cat}} = \{ B_\varkappa : \varkappa \in C' \}.$$

Отсюда следует $\mathfrak{M}$ -абсолютность идеала $\mathcal{I}_{\text{cat}}$ — в самом деле, раз свойства 1°, 2° для $\mathcal{I}_{\text{cat}}$ суть теоремы **ZFC**, они выполнены в $\mathfrak{M}'$.

Идеалы $\mathcal{I}_\lambda$, $\mathcal{I}_\mu$ рассматриваются аналогично, только со ссылкой на 6.4.1 вместо 6.4.2. $\square$

§ 10.8 Измеримость относительно идеала

Здесь мы рассмотрим следующую гипотезу $\mathcal{I}$ -измеримости для данного (например, проективного) класса $\mathbf{K}$ и данного σ -ССС-идеала $\mathcal{I}$, вполне аналогичная рассмотренным выше гипотезам для свойства Бэра и измеримости и служащая обобщением последних:

$\text{Mes}_{\mathcal{I}}(\mathbf{K})$: все множества $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ из $\mathbf{K}$ $\mathcal{I}$ -измеримы.

Например, мы имеем $\text{Mes}_{\mathcal{I}}(\Sigma_1^1)$ по теореме 10.7.2 для любого идеала рассматриваемого вида. Ниже будет доказана следующая теорема, в которой мы обозначаем $\Sigma_2^1[\mathbb{L}[a]] = \bigcup_{a' \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \Sigma_2^1(a')$ для сокращения, т. е. множество класса $\Sigma_2^1[\mathbb{L}[a]]$ — это такое, которое принадлежит классу $\Sigma_2^1(a')$ для некоторого параметра $a' \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. В аналогичном смысле понимается и класс $\Delta_2^1[\mathbb{L}[a]]$.

Определение 10.8.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель **ZFC**. Точка $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ называется $\mathcal{I}$ -случайной над $\mathfrak{M}$, символически $x \in \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathfrak{M}$, если $x \notin B_{\kappa}$ всякий раз, когда $\kappa \in \mathbf{BC} \cap \text{cod } \mathcal{I}$. $\square$

Понятно, что коэновские точки — это всё равно, что $\mathcal{I}_{\text{cat}}$ -случайные, а точки λ -случайные в смысле определения 10.1.1 — это то же самое, что $\mathcal{I}_{\lambda}$ -случайные.

Теорема 10.8.2. Допустим, что $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathcal{I}$ является $\mathbb{L}[a]$ -абсолютным σ -ССС-идеалом, причем $\Sigma_2^1[\mathbb{L}[a]]$ -в-кодах. Тогда выполнены такие эквивалентности:

- (а) $\text{Mes}_{\mathcal{I}}(\Sigma_2^1[\mathbb{L}[a]]) \iff \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a] = \mathcal{I}\text{-полное множество}$;
- (б) $\text{Mes}_{\mathcal{I}}(\Delta_2^1[\mathbb{L}[a]]) \iff \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a] \cap B_{\kappa} \neq \emptyset$, каково бы ни было борелевское $\mathcal{I}$ -позитивное множество B_{κ} с кодом $\kappa \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbf{BC}$.

Несколько слов о взаимоотношениях этой теоремы с теоремой 10.2.1 и следствием 10.2.2. Понятно, что правая часть эквивалентности (а) тождественна правым частям эквивалентностей (ii), (iii) теоремы 10.2.1 при, соответственно, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\lambda}$ и $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\text{cat}}$. (Оба идеала находятся в области действия теоремы 10.8.2 согласно лемме 10.7.7.) Правая часть (б) выглядит сильнее правых частей эквивалентностей (iv), (v) теоремы 10.2.1 (для идеалов $\mathcal{I}_{\lambda}$, $\mathcal{I}_{\text{cat}}$), но на самом деле равносильна последним согласно теореме 10.5.3(ii), (i). Левые же части (а) и (б) несомненно включают левые части, соответственно, утверждений (ii), (iii) и (iv), (v) теоремы 10.2.1.

Таким образом, поскольку импликации $\implies$ в эквивалентностях (ii) — (v) теоремы 10.2.1 уже доказаны в § 10.6, теорема 10.8.2 не дает

ничего нового в направлении $\Rightarrow$ для идеалов $\mathcal{I}_\lambda, \mathcal{I}_{\text{cat}}$. Её область действия, однако, много шире, поскольку σ -ССС-идеалы, обладающие свойствами, о которых идет речь в теореме, отнюдь не исчерпываются двумя указанными идеалами. Доказательство импликаций $\Rightarrow$ теоремы 10.8.2 дается ниже в этом параграфе.

По тем же причинам, импликации направления $\Leftarrow$ в эквивалентностях теоремы 10.8.2 достаточны для вывода импликаций $\Leftarrow$ в эквивалентностях (ii) – (v) теоремы 10.2.1. Импликации этого направления доказываются в главе 11 с помощью метода вынуждения.

Отметим наконец, что теорема 10.8.2 (для идеалов $\mathcal{I}_\lambda, \mathcal{I}_{\text{cat}}$) влечет следствие 10.2.2(II)–(V) по очевидным соображениям.

Доказательство (импликации $\Rightarrow$ в теореме 10.8.2). Предполагаем, что $\mathcal{I}$ является σ -ССС-идеалом, а множество $C = \text{cod } \mathcal{I}$ принадлежит классу $\Sigma_2^1[\mathbb{L}[a]]$. Искомый результат удобно представить в контрапозиционной форме:

(А) $\text{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a]$ не является $\mathcal{I}$ -полным $\Rightarrow \neg \text{Mes}_{\mathcal{I}}(\Sigma_2^1[\mathbb{L}[a]])$;

(Б) $\text{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a] \cap B_\varkappa = \emptyset$ для некоторого борелевского $\mathcal{I}$ -позитивного множества $B_\varkappa$ с кодом $\varkappa \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbf{BC}$ $\Rightarrow \neg \text{Mes}_{\mathcal{I}}(\Delta_2^1[\mathbb{L}[a]])$.

Перед началом доказательства заметим, что рассуждение в § 10.6 здесь не проходит в его последней части, где $\mathcal{I}$ -неизмеримое множество в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ извлекается из $\mathcal{I}^2$ -неизмеримого множества в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. (Под $\mathcal{I}^2$ имеется в виду произведение Фубини.) Для идеалов $\mathcal{I}_\lambda$ и $\mathcal{I}_{\text{cat}}$ возможность такого перехода от $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ к $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ вытекает из специальных свойств этих идеалов, т. е. теорем Фубини и Улама – Куратовского, но для произвольного σ -ССС-идеала $\mathcal{I}$ такой переход вряд ли возможен; во всяком случае, мы не знаем ни одной подходящей теоремы, которая бы обобщила нужным образом теоремы Фубини и Улама – Куратовского. К счастью, имеется другое рассуждение, производящее контрпримеры непосредственно в бэровском пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Результат, правда, получается не столь точным, как конструкция контрпримера в § 10.6. Именно, даже если $\text{cod } \mathcal{I}$ есть $\Sigma_2^1(a)$ -множество, то контрпримеры получаются всё равно в классе $\Sigma_2^1[\mathbb{L}[a]]$ а не в более узком классе $\Sigma_2^1(a)$.

Перейдем однако к деталям.

(А) Коль скоро множество кодов $C = \text{cod } \mathcal{I} \subseteq \mathbf{BC}$ принадлежит классу $\Sigma_2^1[\mathbb{L}[a]]$, найдется такое $\Pi_1^1[\mathbb{L}[a]]$ -множество $P \subseteq C \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что

$$\varkappa \in C \iff \exists y P(\varkappa, y).$$

Исходя из этого множества P , определим множества $A_\xi \in \mathcal{J}$, W_ξ , A , и W как в § 10.6 — однако теперь, конечно, A и W суть множества класса $\Delta_2^1[\mathbb{L}[a]]$, а не просто $\Delta_2^1(a)$, по выбору P .

Если множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ счетно, то $\mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathbb{L}[a]$ есть счетное пересечение $\mathcal{J}$ -полных множеств, т. е. само $\mathcal{J}$ -полное множество, что противоречит посылке доказываемой импликации (A). Таким образом, на самом деле множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ несчетно, другими словами, $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} = \omega_1$. Значит, для любого ординала $\xi < \omega_1 = \omega_1^{\mathbb{L}[a]}$, найдется дерево $U \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $U \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, такое, что все одночленные последовательности $\langle k \rangle$, $k \in \mathbb{N}$, принадлежат U и $\{|\langle k \rangle|_U : k \in \mathbb{N}\} = \xi \cup \{\xi\}$, причем если $\xi \geq \omega$ то $|\langle k \rangle|_U \neq |\langle k' \rangle|_U$ при $k \neq k'$. Такое дерево U , очевидно, удовлетворяет равенству $|U| = \xi + 1$ и кодирует пересчет всех ординалов $\leq \xi$, причем без повторений при $\xi \geq \omega$. Через U_ξ обозначим $\prec_a$ -наименьшее из таких деревьев U . Наконец, пусть

$$\Xi_{\eta k} = \{\xi < \omega_1 : |\langle k \rangle|_{U_\xi} = \eta\}, \quad Y_{\eta k} = \bigcup_{\xi \in \Xi_{\eta k}} W_\xi, \quad Y_\eta = \bigcup_k Y_{\eta k}.$$

для $\eta < \omega_1$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $Y_\eta = \bigcup_{\xi \geq \eta} W_\xi$, в частности, $Y_0 = \bigcup_{\xi < \omega_1} W_\xi$. А потому множество Y_0 равно дополнению $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathbb{L}[a]$ множества $\mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathbb{L}[a]$. (Это доказывается аналогично лемме 10.6.1.) Значит, в наших допущениях, Y_0 не есть $\mathcal{J}$ -нулевое множество.

Предположим (с целью вывести противоречие) что *все множества $Y_{\eta k}$ (тогда и все множества Y_η) $\mathcal{J}$ -измеримы*.

Однако ни одно из множеств Y_η не может быть $\mathcal{J}$ -нулевым множеством, поскольку $Y_0 \setminus Y_\eta = \bigcup_{\xi \leq \eta} W_\xi$ есть счетное объединение $\mathcal{J}$ -нулевых множеств. (Используется свойство σ -аддитивности идеала $\mathcal{J}$.) Поэтому (снова σ -аддитивность!) для каждого $\eta < \omega_1$ найдется число k_η такое что множество $Y_{\eta k_\eta}$ не является $\mathcal{J}$ -нулевым. Следовательно, найдется k такое что множество $E_k = \{\eta : k_\eta = k\}$ несчетно. Тогда $Y_{\eta k}$ — не $\mathcal{J}$ -нулевое множество для всех $\eta \in E_k$. Для получения противоречия со свойством 2° идеала $\mathcal{J}$ остается заметить, что $Y_{\eta k} \cap Y_{\eta' k} = \emptyset$ при $\eta' \neq \eta$. (В самом деле, если $x \in Y_{\eta k} \cap Y_{\eta' k}$ то найдутся ординалы $\xi \neq \xi'$ такие что $\eta = |\langle k \rangle|_{U_\xi}$, $\eta' = |\langle k \rangle|_{U_{\xi'}}$, $x \in W_\xi \cap W_{\xi'}$, что невозможно так как множества W_ξ попарно дизъюнкты по определению.)

Итак, не все множества $Y_{\eta k}$ могут быть $\mathcal{J}$ -измеримыми. Остается проверить, что каждое $Y_{\eta k}$ принадлежит классу $\Sigma_2^1[\mathbb{L}[a]]$.

Упражнение 10.8.3. Используя теорему 8.6.2, докажите, что множества $B = \{\langle T, U|_T \rangle : T \in \mathbf{WFT}\}$ и

$$\Omega = \{\langle S, T, k \rangle : S, T \in \mathbf{WFT} \wedge |S| \in \Xi_{|T| k}\}$$

имеют класс $\Sigma_2^1(a)$. □

Теперь возьмем произвольные $\eta < \omega_1$ и k и выберем дерево $T \in \mathbf{WFT}_\eta \cap \mathbb{L}[a]$. Тогда согласно результату 10.8.3 множество

$$\Sigma = \{S \in \mathbf{WFT} : \langle S, T, k \rangle \in \Omega\}$$

имеет класс $\Sigma_2^1(a, T)$. Поэтому множество

$$Y_{\eta k} = \{x : \exists S \in \Sigma (\langle S, x \rangle \in W)\}$$

принадлежит классу $\Sigma_2^1[\mathbb{L}[a]]$ вместе с W .

(Б) Пусть $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathbb{L}[a]$, $\mathbf{B}_\varkappa \notin \mathcal{I}$, и $\mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a] \cap \mathbf{B}_\varkappa = \emptyset$. Повторим конструкцию из доказательства (а), начав её, однако, с определения $A_\xi = \mathbf{B}_{H((z)_{\text{лев}})} \cap \mathbf{B}_\varkappa$ в случае когда $\langle H((z)_{\text{лев}}), (z)_{\text{пра}} \rangle \in P$, а иначе $A_\xi = \emptyset$. В результате получим: $Y_{\eta k} \subseteq \mathbf{B}_\varkappa$, и не все множества $Y_{\eta k}$ являются $\mathcal{I}$ -измеримыми. При этом каждое $Y_{\eta k}$ принадлежит классу $\Sigma_2^1[\mathbb{L}[a]]$. Остается показать что каждое $Y_{\eta k}$ является также множеством класса $\Pi_2^1[\mathbb{L}[a]]$. В рассматриваемом случае мы имеем $Y_0 = \mathbf{B}_\varkappa$, а потому каждое из множеств $Y_\eta = Y_0 \setminus \bigcup_{\xi < \eta} W_\xi$ есть борелевское множество. Кроме того, если $\eta \geq \omega$, то $Y_{\eta k} \cap Y_{\eta k'} = \emptyset$ при $k \neq k'$, поскольку, по построению, $|\langle k \rangle|_{U_\xi} \neq |\langle k' \rangle|_{U_\xi}$ при $k \neq k'$, а множества W_ξ попарно дизъюнкты. Значит, $Y_{\eta k} = Y_\eta \setminus \bigcup_{k' \neq k} Y_{\eta k'}$ есть Π_2^1 -множество. Более точный анализ, основанный на результатах для множеств Ω и W , позволяет найти, что $Y_{\eta k} \in \Pi_2^1[\mathbb{L}[a]]$, тем же способом как и в последней части доказательства (а). А значениями $\eta < \omega$ здесь можно пренебречь.

□ (импликации $\implies$ в теореме 10.8.2)

Исторические и библиографические замечания

Понятие коэновских и случайных точек, данное в определении 10.1.1, принадлежит Соловею [166]; впрочем, коэновские точки с другим, но эквивалентным определением введены Коэном [73]. Эквивалентность определения коэновских и случайных точек через вынуждение и через избегание «малых» борелевских множеств с кодами из исходной модели (как в теореме 10.4.2) была установлена Соловеем [169]. Еще о связи коэновских и случайных точек с форсингом см. ниже в § 11.2.

Доказательство теоремы 10.7.2 использует метод Селивановского [160]; более ранние отдельные доказательства измеримости по Лебегу и свойства Бэра для Σ_1^1 -множеств (например, в [135]) отличаются друг от друга и не обобщаются до результата 10.7.2.

О теореме 10.2.1 и следствии 10.2.2.

Эквивалентность (I) приведена в обзоре [143] со ссылкой на Мэнсфилда и Соловея; доказательства опубликованы позже в [140, 167]. Результат

был независимо получен Любецким [4, 31, 34]. Еще раньше Любецкий [30] доказал импликацию $\Rightarrow$.

Эквивалентностей (II), (III) в обзоре [143] нет. Насколько нам известно, эквивалентность (II) впервые была приведена Любецким в заметке [31]. (Полное доказательство (II) и (III) содержится в статье [33].) Обе эти эквивалентности нередко связываются с неопубликованными работами Соловея 60-х годов — иногда, как например в [64, р. 457], дается ссылка на статью [167] где, однако, этих результатов просто нет, а измеримость и свойство Бэра вообще не рассматриваются.

Эквивалентности (IV) и (V) следствия 10.2.2 доказаны Любецким в работах [33, 35] (и включены в обзор [6]). Эти работы, однако, никогда не переводились с русского, а потому результаты остались неизвестными для западных специалистов по теории множеств. Джюдах и Шелах передоказали их гораздо позже в [103].

Теперь о более ранних результатах в части существования контрпримеров. Гёдель объявил в [83] что из аксиомы конструктивности $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ (т. е. предположения о том что все множества принадлежат $\mathbb{L}$) вытекает существование неизмеримого Δ_2^1 -множества и несчетного Π_1^1 -множества без совершенного ядра. Доказательство этой теоремы (т. е. теоремы 8.8.1 для $\mathbb{L}$ вместо $\mathbb{L}[a]$) впервые появилось в статье П. С. Новикова [43].

Новиковский контрпример для совершенного ядра воспроизведен в доказательстве теоремы 8.8.1 и лемме 8.8.3 с несущественными изменениями. (Следуя [43], мы должны были бы определить, в § 10.3, Ξ как множество всех пар $\langle x, T \rangle$ таких что $T \in \mathbf{WFT}$ и $x \in \{f_\xi[a] : \xi < |T|\}$. Кроме того, Новиков рассматривает «абсолютную» конструктивность, т. е. $\mathbb{L}$ вместо $\mathbb{L}[a]$. Но это не меняет существа рассуждений.) Данный в работе [43] контрпример для гипотезы $\text{LM}(\Delta_2^1)$ (опять в предположении $\mathbb{V} = \mathbb{L}$) можно представить в следующем виде: если функция $\eta : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ индуцирует контрпример к $\text{RK}^-(\Pi_1^1)$, то множество $\{\langle x, y \rangle : y <_{\text{lex}} \eta(x)\}$, где $<_{\text{lex}}$ — лексикографический порядок на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, является неизмеримым Δ_2^1 -множеством (при условии что мера обладает тем свойством что любой бэровский интервал имеет ненулевую меру).

Конструкция контрпримеров для меры и категории в классах Δ_2^1 и Σ_2^1 , как в § 10.6, известна из многих источников (например, книга [64, р. 453] или статья [177]), и часто дается со ссылкой на неопубликованные работы Соловея 60-х годов — однако в статьях [167, 166] этой конструкции и этих результатов нет. Идея обобщенного подхода § 10.7, в частности, метод, использованный в § 10.8, взята из статьи Любецкого [35]. Этот подход интенсивно развивается в современных исследованиях — см., например, монографии Заплетала [184, 185].

Мы увидим ниже в § 18.3 что имеются другие идеалы, отличные от идеала тощих множеств и идеалов нулевой меры, а также их пересечений, к которым может быть применена теорема 10.8.2.

Глава 11

Резольвенты классических проблем о свойствах регулярности: часть 2

В главе 10 мы доказали импликации $\implies$ в теореме 10.2.1 и в более общей теореме 10.8.2, и в следствии 10.2.2. Эта глава излагает доказательство импликаций обратного направления $\impliedby$ в этих теоремах и в следствии — оно завершается в § 11.7.

Доказательство использует форсинг. Имеющийся опыт элиминации форсинга из доказательств утверждений вроде теоремы 10.2.1, т. е. математических теорем, не являющихся результатами о независимости, вряд ли позволяет ожидать здесь простых и свободных от форсинга доказательств. Однако, если говорить только об импликациях на диаграмме со стр. 135, исходящих из блока $\mathbf{RK}(\Pi_1^1)$, то роль форсинга может быть сведена к единственному утверждению: равенство $\omega_1^{\mathbb{L}[a,x]} = \omega_1^{\mathbb{L}[a]}$ выполнено *всякий раз*, когда $a, x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $x \in \mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]$ или $x \in \mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ (теорема 11.3.3). Впервые это было показано в [35]. Более того, представляется, что и это утверждение¹ может быть получено элементарными средствами, так что в резуль-

¹ Говоря неформально, случайное число можно понимать как «пустышку», «фантом», так как случайное число не несёт специфической информации, поэтому его добавление к универсуму множеств $\mathbb{L}$ не может породить биекцию $\omega_1^{\mathbb{L}}$ и $\omega_2^{\mathbb{L}}$, которая, конечно, уже предполагает специфическую информацию. Исследование случайных чисел с этой точки зрения ещё ждёт своего времени.

тате сами импликации будут будут доказаны такими средствами. Доказательство элементарными средствами классических гипотез дескриптивной теории (когда это возможно) является самостоятельной важной проблемой.

§ 11.1 Если конструктивных точек мало то Π_1^1 -множества имеют совершенные ядра

В современной дескриптивной теории множеств имеется определенный тип теорем, которые утверждают, что все точки «малого» в том или ином смысле множества X допускают построение или описание, эффективное относительно параметров определения самого множества X . К этому типу результатов принадлежит и следующая теорема: все точки «малого» $\Sigma_2^1(a)$ -множества конструктивны относительно данного параметра a .

Теорема 11.1.1. *Если $a \in \mathbb{R}$ и $\Sigma_2^1(a)$ -множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не содержит совершенных подмножеств, то $X \subseteq \mathbb{L}[a]$.*

Перед началом доказательства, отметим, что отсюда просто следует импликация справа налево в теореме 10.2.1. В самом деле, если каждое множество вида $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, счетно, то, по этой теореме, любое даже Σ_2^1 -множество без совершенного ядра также счетно.

Доказательство. По теореме униформизации 5.6.1, результат достаточно получить для множеств класса $\Pi_1^1(a)$ (см. об этом конец доказательства теоремы 8.8.1). Поэтому рассмотрим произвольное $\Pi_1^1(a)$ -множество $C \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Согласно теореме 5.1.1, имеем $C = C[\mathfrak{F}] = \bigcup_{\xi < \omega_1} C_\xi[\mathfrak{F}]$ для подходящей регулярной системы $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ (множеств $F_s \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) — класса $\Delta_1^0(a)$ в том смысле, что множество

$$P_{\mathfrak{F}} = \{ \langle s, x \rangle : s \in \mathbb{N}^{<\omega} \wedge x \in F_s \}$$

принадлежит $\Delta_1^0(a)$. Собственно, все рассуждения ниже проходят и для случая, когда $\mathfrak{F}$ — система даже класса $\Delta_1^1(a)$. Требуется проверить, что $C_\xi[\mathfrak{F}] \subseteq \mathbb{L}[a]$, каков бы ни был ординал ξ .

Нам будет важно, что конститuenta $C_\xi = C_\xi[\mathfrak{F}]$ не более чем счетна. В самом деле, она является борелевским множеством, следовательно, Σ_1^1 -множеством, и, по предположению, не имеет совершенного ядра, так что результат следует из теоремы 6.3.1.

Случай 1: $\xi < \omega_1^{[a]}$. Это означает, что ординал ξ не более чем счетен в $\mathbb{L}[a]$. Поэтому, применяя в $\mathbb{L}[a]$ лемму 5.2.6, мы находим дерево $T \in \mathbf{WFT}_\xi \cap \mathbb{L}[a]$. Утверждение «множество $C_\xi[\mathfrak{F}]$ не более чем счетно» может быть выражено следующей формулой:

$$\exists z \forall x \left(\underbrace{\sigma(T, x) \implies \exists n (x = (z)_n) \implies \pi(T, x)}_{\psi(T, z)} \right),$$

где $\sigma = \sigma_{\mathfrak{F}}$ и $\pi = \pi_{\mathfrak{F}}$ суть $\Sigma_1^1(a)$ -формула и $\Pi_1^1(a)$ -формула даваемые для системы $\mathfrak{F}$ теоремой 5.4.3, а Π_1^1 -формула $\psi(T, z)$ выражает тот факт, что $C_\xi[\mathfrak{F}] = \{(z)_n : n \in \mathbb{N}\}$. (Определение $(z)_n$ см. в 4.2.1(iv).)

Но выделенная формула является, очевидно, Σ_2^1 -формулой с параметрами $a, T \in \mathbb{L}[a]$, так что по теореме абсолютности 5.9.1 она верна и в $\mathbb{L}[a]$. Отсюда следует, что найдется такая точка $z \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $\psi(T, z)$ истинно в $\mathbb{L}[a]$. Снова по абсолютности, предложение $\psi(T, z)$ истинно и в универсуме всех множеств, а это и означает, что $C_\xi[\mathfrak{F}] = \{(z)_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{L}[a]$.

Случай 2: $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} \leq \xi < \omega_1$. Здесь мы собираемся доказать просто, что $C_\xi[\mathfrak{F}] = \emptyset$. Предположим противное: конstituанта $C_\xi[\mathfrak{F}]$ непуста. Как и выше (см. случай 1), если $T \in \mathbf{WFT}_\xi$, то множество $C_\xi[\mathfrak{F}]$ принадлежит $\mathbb{L}[a, T]$ и счетно в $\mathbb{L}[a, T]$, и фактически мы имеем $C_\xi[\mathfrak{F}] = \{(z)_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{L}[a]$ для некоторого $z \in \mathbb{L}[a, T] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Рассмотрим форсинг $\mathbb{C}(\xi) = \mathbf{Coll}(\mathbb{N}, \xi) = \xi^{<\omega}$ для «склейки» ординала ξ , см. § 9.7, состоящий из всех кортежей ординалов $< \xi$. Напомним, что в контексте форсинга, элементы множества $\mathbb{C}(\xi)$ называются «условиями». При этом определяется $p \leq q$ (т. е. «условие» p сильнее чем «условие» q) когда $q \subseteq p$, т. е. p продолжает q как кортеж. По теореме 9.7.2, всякое $\mathbb{C}(\xi)$ -генерическое множество $G \subseteq \mathbb{C}(\xi)$ производит функцию $\mathbf{f}_G = \bigcup G : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \xi$ — т. е. *генерическую коэновскую склейку* ординала ξ , и при этом $G = \{\mathbf{f}_G \upharpoonright n : n \in \mathbb{N}\}$.

Согласно предложению 9.1.6, можно рассмотреть $\mathbb{C}(\xi) \times \mathbb{C}(\xi)$ -генерическое расширение $\mathbf{V}[G, G']$ универсума $\mathbf{V}$, порожденное генерической над $\mathbf{V}$ (следовательно, и над классом $\mathbb{L}[a]$) парой множеств $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}(\xi)$, в котором, по предыдущему, существуют две склеивающие функции, $f_1 = \mathbf{f}_{G_1} = \bigcup G_1$ и $f_2 = \mathbf{f}_{G_2} = \bigcup G_2$, из $\mathbb{N}$ на ξ . Соответственно, по лемме 5.2.6, существуют и деревья

$$T_1 \in \mathbf{WFT}_\xi \cap \mathbb{L}[G_1] \quad \text{и} \quad T_2 \in \mathbf{WFT}_\xi \cap \mathbb{L}[G_2].$$

Согласно доказанному выше, выполнено соотношение

$$C_\xi[\mathfrak{F}] \subseteq \mathbb{L}[a, G_1] \cap \mathbb{L}[a, G_2].$$

Поскольку множества G_1, G_2 образуют генерическую над $\mathbb{L}[a]$ пару, мы имеем $C_\xi[\mathfrak{F}] \subseteq \mathbb{L}[a]$ по теореме 9.2.10(i). Следовательно, найдется точка $x \in C_\xi[\mathfrak{F}] \cap \mathbb{L}[a]$, поскольку предполагается, что конstituанта $C_\xi[\mathfrak{F}]$ непуста. Но в этом случае дерево

$$F^x = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : x \in F_s\}$$

принадлежит $\mathbf{WFT}_\xi$. А с другой стороны, по определению $F^x = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \langle s, x \rangle \in P_\mathfrak{F}\}$, где $P_\mathfrak{F}$ — множество класса $\Delta_1^0(a)$, так что и дерево F^x имеет класс $\Delta_1^0(a)$ — откуда $F^x \in \mathbb{L}[a]$ согласно следствию 5.9.3(i). Соединяя оба утверждения, мы имеем неравенство $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}[x]} \leq \omega_1^{\mathbb{L}[a]}$, что противоречит предположению $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} \leq \xi$.

□ (теоремы 11.1.1 и 10.2.1(i))

Замечание 11.1.2. Анализируя теорему 11.1.1, мы заключаем, что $\Sigma_2^1(a)$ -множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ с $X \not\subseteq \mathbb{L}[a]$ обязательно содержит совершенное подмножество $P \subseteq X$. Оказывается, последнее можно выбрать с кодом из $\mathbb{L}[a]$, даже в том смысле что найдется совершенное дерево $T \in \mathbb{L}[a]$, $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, для которого множество

$$[T] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall m (x \upharpoonright m \in T)\}$$

удовлетворяет соотношению $[T] \subseteq X$. Действительно, из соображений, связанных с теоремой униформизации 5.6.1, можно считать, что X есть $\Pi_1^1(a)$ -множество. В этом случае, формула

X содержит совершенное подмножество вида $[T]$

приводится к $\Sigma_2^1(a)$ -виду, т. е. она абсолютна по теореме 5.9.1. Следовательно, найдется такое совершенное дерево $T \in \mathbb{L}[a]$, $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, что $[T] \subseteq X$ истинно в $\mathbb{L}[a]$. Но формула $[T] \subseteq X$ также абсолютна, что и дает требуемый результат. $\square$

Теорема 11.1.1 ведет к еще одному результату, раскрывающий природу варианта $\text{РК}^-(\Pi_1^1(a))$ гипотезы совершенного ядра (§ 8.8).

Следствие 11.1.3. Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то справедлива эквивалентность: $\text{РК}^-(\Pi_1^1(a)) \iff (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \not\subseteq \mathbb{L}[a])$.

Доказательство. Импликация слева направо установлена в лемме 8.8.3. Для доказательства обратной импликации допустим, что $\text{РК}^-(\Pi_1^1(a))$ ложно, т. е. найдется функция $\eta : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, график P которой есть $\Pi_1^1(a)$ -множество без совершенного ядра. Тогда $P \subseteq \mathbb{L}[a]$ по теореме 11.1.1, откуда $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \text{dom } P \subseteq \mathbb{L}[a]$. $\square$

Еще об одной версии теоремы о совершенном ядре, связанной с инвариантными Π_1^1 -множествами, см. заметку [16].

Теорема 11.1.1 допускает другие интересные варианты и обобщения. В частности, случай 2 в доказательстве теоремы 11.1.1 можно оформить в виде отдельного результата.

Следствие 11.1.4. Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{F}$ — регулярная система класса $\Delta_1^1(a)$, $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} \leq \xi < \omega_1$, и конституанта $C_\xi[\mathfrak{F}]$ непуста, то она и несчетна. $\square$

Этот результат остается верным и для внутренних конституант (практически с тем же доказательством), равно как и для решет того же класса. Известны и другие похожие и более общие результаты о «дальних» конституантах. Например, в условиях следствия 11.1.4, $C_\xi[\mathfrak{F}]$ даже не может быть множеством класса $\mathbf{F}_\sigma$. Вообще, если $\omega_\alpha^{\mathbb{L}[a]} \leq \xi < \omega_1$ и $C_\xi[\mathfrak{F}] \neq \emptyset$ то $C_\xi[\mathfrak{F}]$ не может быть борелевским множеством уровня α борелевской иерархии, см. ниже главу 16.

§11.2 Форсинг в связи с идеалом множеств

С этого пункта начинается доказательство импликаций $\Leftarrow$ в теореме 10.8.2. Наш план требует сначала дать характеризацию случайных точек в терминах форсинга, подобную эквивалентностям $(1) \iff (5)$ и $(1') \iff (5')$ теоремы 10.4.2. Мы начнем с изучения тех форсингов, которые некоторым естественным образом возникают из σ -ССС-идеалов. Напомним, что это семейство идеалов в алгебре борелевских множеств, во многом похожих на идеал множеств меры 0 и идеал тощих множеств, было введено в §10.7.

Определение 11.2.1. Пусть $\mathcal{I}$ — произвольный σ -ССС-идеал в смысле §10.7. *Борелевский форсинг, порожденный идеалом $\mathcal{I}$, или форсинг по модулю $\mathcal{I}$* — это множество

$$\mathbb{P}_{\mathcal{I}} = \{p \in \mathbf{BC} : B_p \notin \mathcal{I}\}$$

всех борелевских кодов $\mathcal{I}$ -позитивных борелевских множеств, с порядком: $p \leq q$ когда $B_p \subseteq B_q$. Другими словами, $\mathbb{P}_{\mathcal{I}} = \mathbf{BC} \setminus \mathbf{cod} \mathcal{I}$, где, напомним, $\mathbf{cod} \mathcal{I} = \{p \in \mathbf{BC} : B_p \in \mathcal{I}\}$.² $\square$

Следующая лемма показывает особенности главных определений из §9.1 для форсингов вида $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$.

Лемма 11.2.2. Пусть $\mathcal{I}$ — произвольный σ -ССС-идеал.

«Условия» $p, q \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ совместимы в $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ — кратко: $\mathcal{I}$ -совместимы, — если и только если $p \wedge q \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$, или, эквивалентно, $p \wedge q \in \mathbf{cod} \mathcal{I}$, т. е. множество $B_p \cap B_q = B_{p \wedge q}$ не принадлежит $\mathcal{I}$.³

Кроме того, множество $D \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ является:

- предплотным в $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$, если для каждого $p \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ найдется «условие» $q \in D$, для которого $p \wedge q \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$;
- плотным в $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$, если для каждого $p \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ найдется «условие» $q \in D$, для которого $B_q \subseteq B_p$;
- антицепью в $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ (кратко: $\mathcal{I}$ -антицепью), если $B_p \cap B_q \in \mathcal{I}$ для любой пары «условий» $p \neq q$ в D .

² С данным определением, форсинг состоит из кодов борелевских множеств, а не самих этих множеств. Если взять сами борелевские множества в качестве «условий», как это часто делается, то форсинг будет обладать большей наглядностью. Однако при этом приходится иметь дело с тем обстоятельством, что борелевское множество $B_{\varkappa}$ зависит от того, в каком универсуме производится операция $B_{\varkappa}$. Например, если $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель аксиом **ZFC** и $\varkappa \in \mathfrak{M} \cap \mathbf{BC}$, то множество $B_{\varkappa}$, вообще говоря, отлично от $(B_{\varkappa})^{\mathfrak{M}}$ (т. е. от множества B_p , определенного в $\mathfrak{M}$); на самом деле, $(B_{\varkappa})^{\mathfrak{M}} = B_{\varkappa} \cap \mathfrak{M}$ согласно следствию 5.9.3(v). В общем, работать с кодами получается всё же проще.

³ Об операциях над кодами $p \wedge q$ и др. см. пример 5.7.5.

Доказательство. Код $\varkappa = p \wedge q \in \mathbf{BC}$ (см. пример 5.7.5(5)) удовлетворяет $B_p \cap B_q = B_\varkappa$. Теперь, в нетривиальном направлении, если $B_\varkappa \notin \mathcal{I}$, то по определению $\varkappa \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$, и, конечно, $\varkappa \leq p$ и $\varkappa \leq q$. Остальные утверждения леммы столь же элементарны. $\square$

Упражнение 11.2.3. Пусть $\mathcal{I}$ — произвольный σ -ССС-идеал, $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$, и «условие» $p \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ совместно с $\bigvee_n p_n$ в $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$. Докажите, что тогда p совместно в $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ хотя бы с одним p_n . $\square$

Докажем еще некоторые свойства форсингов этого типа.

Лемма 11.2.4. Пусть $\mathcal{I}$ — произвольный σ -ССС-идеал. Тогда форсинг $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ удовлетворяет ССС, т. е. любая $\mathcal{I}$ -антицепь $A \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ не более чем счетна. Кроме того, если множество $D \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ предплотно в $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$, то существует такое счетное множество $A \subseteq D$, что множество $U = \bigcup_{p \in A} B_p$ является $\mathcal{I}$ -полным — т. е. его дополнение $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus U$ принадлежит $\mathcal{I}$.

Доказательство. Свойство счетности антицепей ССС для $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ следует из свойства 2° из 10.7.1 идеала $\mathcal{I}$.

Для доказательства второго утверждения, заметим, что множество $D' = \{p' \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}} : \exists p \in D (p' \leq p)\}$ плотно (и даже открыто плотно) в $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$. Выберем максимальную антицепь $A' \subseteq D'$. По доказанному, A' счетна. Следовательно, найдется такое счетное же множество $A \subseteq D$, что ко всякому $p' \in A'$ существует «условие» $p \in A$, удовлетворяющее $B_{p'} \subseteq B_p$. Понятно, что $\bigcup_{p' \in A'} B_{p'} \subseteq \bigcup_{p \in A} B_p$, так что теперь достаточно доказать $\mathcal{I}$ -полноту множества $U = \bigcup_{p \in A'} B_{p'}$.

Пусть напротив, $V = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus U \notin \mathcal{I}$. Согласно счетности A' , множество $V = B_p$ — борелевское, с некоторым кодом $p \in \mathbf{BC}$, так что по определению $p \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$. Раз D' плотно, найдется «условие» $q \in D$, для которого $q \leq p$. Из-за максимальной A' , «условие» q , следовательно, и более слабое «условие» p , совместимо в $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ с некоторым $r \in A$. Мы получаем $B_p \cap B_r \notin \mathcal{I}$ и $\neq \emptyset$. Но $B_r \subseteq U$, противоречие. $\square$

Определение 11.2.5. Если $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель аксиом **ZFC**, а $\mathcal{I}$ — σ -ССС-идеал, то пусть $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}} = \mathbb{P}_{\mathcal{I}} \cap \mathfrak{M}$. $\square$

В роли модели $\mathfrak{M}$ может выступать, как обычно, класс вида $\mathbb{L}[X]$, или к примеру счетная транзитивная модель теории **ZFC**. Нет особых оснований ожидать, что форсинг $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ принадлежит $\mathfrak{M}$, но для релятивизованного форсинга $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$ это оказывается возможным.

Напомним, что $(\mathcal{I})^{\mathfrak{M}} = \{(B_\varkappa)^{\mathfrak{M}} : \varkappa \in \mathfrak{M} \cap \text{cod } \mathcal{I}\}$.

Лемма 11.2.6. Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель аксиом **ZFC**, а $\mathcal{I}$ — произвольный $\mathfrak{M}$ -абсолютный σ -ССС-идеал в смысле определения 10.7.5. Тогда само множество $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$ и порядок $\leq$ на нем, а также множество $\mathcal{I}' = (\mathcal{I})^{\mathfrak{M}}$, принадлежат $\mathfrak{M}$. Кроме того,

- (i) в $\mathfrak{M}$ истинно: « $\mathcal{I}'$ есть σ -ССС-идеал, и $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_{\mathcal{I}'}$ »;
- (ii) «условия» $p, q \in \mathbb{P}'$ совместимы в $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_{\mathcal{I}'}$, если и только если они $\mathcal{I}$ -совместимы, если и только если $p \wedge q \notin \mathbf{cod} \mathcal{I}$;
- (iii) форсинг $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_{\mathcal{I}'}$ удовлетворяет ССС в $\mathfrak{M}$: любая $\mathcal{I}$ -анти-цепь $A \in \mathfrak{M}$, $A \subseteq \mathbb{P}'$, не более чем счетна в $\mathfrak{M}$;
- (iv) если множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbb{P}'$, предплотно в $\mathbb{P}'$, то найдется счетное в $\mathfrak{M}$ множество $A \in \mathfrak{M}$, $A \subseteq D$, такое что множество $U = \bigcup_{p \in A} B_p$ является $\mathcal{I}$ -полным — следовательно, в этом случае, если $x \in \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathfrak{M}$, то $x \in \bigcup_{p \in D} B_p$.

Доказательство. По определению, имеем

$$\mathbb{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \cap \mathbb{P}_{\mathcal{I}} = \mathfrak{M} \cap (\mathbf{BC} \setminus \mathbf{cod} \mathcal{I}) = (\mathfrak{M} \cap \mathbf{BC}) \setminus (\mathfrak{M} \cap \mathbf{cod} \mathcal{I}),$$

где $\mathfrak{M} \cap \mathbf{BC} \in \mathfrak{M}$ согласно следствию 5.9.3(iii), а $\mathfrak{M} \cap \mathbf{cod} \mathcal{I} \in \mathfrak{M}$ согласно $\mathfrak{M}$ -абсолютности идеала $\mathcal{I}$. Поэтому $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$. По аналогичным причинам, $\mathcal{I}' = (\mathcal{I})^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$ и мы имеем (i).

Соотношение $B_p \subseteq B_q$ равносильно $(B_p)^{\mathfrak{M}} \subseteq (B_q)^{\mathfrak{M}}$ согласно следствию 5.9.3(vi), а потому выражаемое им отношение порядка $\leq$ на $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$ само принадлежит модели $\mathfrak{M}$.

(ii) В нетривиальном направлении, если «условия» $p, q \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$ $\mathcal{I}$ -совместимы, то $r = p \wedge q \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}$ и $r \leq p$, $r \leq q$ по лемме 11.2.2. С другой стороны, $r \in \mathfrak{M}$, поскольку конструкция борелевского кода $r = p \wedge q$, очевидно, абсолютна для $\mathfrak{M}$. Значит, $r \in \mathbb{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$, так что «условия» p, q совместимы и в $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$.

Утверждения (iii), (iv) достаточно легко следуют из леммы 11.2.4. Например, выведем несколько более сложное из двух утверждение (iv). Рассуждая в модели $\mathfrak{M}$ и используя (i), мы видим, что лемма 11.2.4 применима к форсингу $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_{\mathcal{I}'}$, а потому найдется такое счетное в $\mathfrak{M}$ множество $A \in \mathfrak{M}$, $A \subseteq D$, что в $\mathfrak{M}$ истинно, что «объединение $U' = \bigcup_{p \in A} B_p$ является $\mathcal{I}'$ -полным». Требуется доказать, что, в универсуме всех множеств, множество $U = \bigcup_{p \in A} B_p$ является $\mathcal{I}$ -полным. Для этого рассмотрим борелевские коды $\varkappa = \bigvee A = \bigvee_{p \in A} p$, и $\varrho = \neg \varkappa$. Понятно, что $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, причем $U' = B_{\varkappa}$ в $\mathfrak{M}$, так что в $\mathfrak{M}$ истинно, что «множество $B_{\varrho} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus U'$ принадлежит $\mathcal{I}'$ » по выбору A , и, следовательно, $\varrho \in \mathfrak{M} \cap \mathbf{cod} \mathcal{I}$. Но тогда, в универсуме, $B_{\varrho} \in \mathcal{I}$, так что множество $U = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus B_{\varrho}$ $\mathcal{I}$ -полно, что и требовалось. А для доказательства последнего утверждения в (iv) достаточно вернуться к определению $\mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathfrak{M}$ в 10.8.1. $\square$

§ 11.3 Случайные точки: общий подход

Форсинги вида $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}$ делают возможным иной подход к $\mathcal{J}$ -случайным точкам, основанный на следующей теореме, согласно которой все форсинги вида $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ «присоединяют число» в смысле § 9.5.

Теорема 11.3.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель аксиом **ZFC**, а $\mathcal{J}$ есть $\mathfrak{M}$ -абсолютный σ -ССС-идеал.

Если множество $G \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ является генерическим над $\mathfrak{M}$, то существует единственная точка $\mathbf{a}_G \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющая условию $\kappa \in G \iff \mathbf{a}_G \in B_{\kappa}$ для любого кода $\kappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$.

Следовательно, $\{\mathbf{a}_G\} = \bigcup_{\kappa \in G} B_{\kappa}$ и G — ультрафильтр в алгебре всех множеств вида B_{κ} , $\kappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, т. е. для любого кода $\kappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, ровно один из кодов κ , $\neg \kappa$ принадлежит G .

Доказательство. Положим $B_G = \{B_p : p \in G\}$; таким образом, B_G состоит из самих борелевских множеств, а не кодов. По определению генерического множества, любые $X, Y \in B_G$ совместны, т. е. найдется множество $Z \in B_G$, $Z \subseteq X \cap Y$. Мы утверждаем, что

$$D_n = \{p \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}} : \exists s \in \mathbb{N}^{<\omega} (\text{lh } s = n \wedge B_p \subseteq [s])\}$$

(где, напомним, $[s] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset x\}$) — плотное множество в $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ при любом n . В самом деле, пусть $S = \mathbb{N}^n$ — (счетное) множество всех кортежей из $\mathbb{N}^{<\omega}$ длины ровно n . Понятно, что $\bigcup_{s \in S} [s] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, так что если $p \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$, то из-за счетной аддитивности нашего идеала найдется такой кортеж $s \in S$, что $B_p \cap [s] \notin \mathcal{J}$. Но код $q = p \wedge \kappa[s]$ (мы используем обозначения примера 5.7.5, (1) и (5)), очевидно, принадлежит $\mathfrak{M}$, и $B_q = B_p \cap [s] \notin \mathcal{J}$. Значит, $q \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ и $q \leq p$.

Кроме того, последовательность множеств D_n принадлежит модели $\mathfrak{M}$, поскольку соотношение $B_p \subseteq [s]$ абсолютно для $\mathfrak{M}$ (аналогично следствию 5.9.3(vi)). Значит, по генеричности, для каждого n найдется (единственный благодаря совместности любых двух «условий» из G) кортеж $s_n \in \mathbb{N}^{<\omega}$, для которого $\text{lh } s = n$ и $\exists p \in G (B_p \subseteq [s_n])$. При этом очевидно $s_n \subset s_{n+1}$, $\forall n$, так что существует единственная точка $\mathbf{a}_G \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющая $\mathbf{a}_G \upharpoonright n = s_n$ для каждого n . Теперь мы утверждаем, что

$$\kappa \in G \iff \mathbf{a}_G \in B_{\kappa},$$

каков бы ни был борелевский код $\kappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$. Эта эквивалентность доказывается индукцией по рангу $|T| < \omega_1$ дерева T .

База индукции: $|T| = 0$, т. е. просто $T = \{\Lambda\}$. Тогда $B_{\kappa} = B_{\kappa}(f(s)) = [t]$, где $t = f(s) \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Пусть $n = \text{lh } t$. Вследствие попарной совместности «условий» из G , имеем

$$\kappa \in G \iff s_n = t = \mathbf{a}_G \upharpoonright n \iff \mathbf{a}_G \in B_\kappa.$$

Индуктивный шаг: допустим, что $0 < |T| < \omega_1$ и результат уже получен для всех таких кодов $\kappa' = \langle T', f' \rangle \in \mathbf{BC}$, что $|T'| < |T|$. Тогда (см. пример 5.7.5) $B_\kappa = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_n B_{\kappa_n}$, где все борелевские коды $\kappa_n = \langle T_n, f_n \rangle$ удовлетворяют $|T_n| < |T|$. Из самого равенства $B_\kappa = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_n B_{\kappa_n}$ и из аддитивности идеала следует, что множество

$$D_\kappa = \{p \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}} : B_p \subseteq B_\kappa \vee \exists n (B_p \subseteq B_{\kappa_n})\}$$

плотно в $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$. Значит, по генеричности, найдется «условие» $p \in G \cap D_\kappa$. Таким образом, выполнена эквивалентность

$$\kappa \in G \iff \forall n (\kappa_n \notin G), \quad \text{так что} \quad \kappa \in G \iff \forall n (\pi_G \notin B_{\kappa_n})$$

по индуктивному предположению. Но правая часть второй эквивалентности равносильна тому, что $\mathbf{a}_G \in B_\kappa$. $\square$

Определение 11.3.2. Точки $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ вида $\mathbf{a}_G$, полученные указанным способом из $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ -генерических множеств G , называются $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ -генерическими (над $\mathfrak{M}$). $\square$

Теорема 11.3.3. В условиях теоремы 11.3.1, точки $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ -генерические над $\mathfrak{M}$ — это в точности элементы множества $\mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathfrak{M}$. Следовательно, если $x \in \mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathfrak{M}$, то $\omega_1^{\mathfrak{M}[x]} = \omega_1^{\mathfrak{M}}$.

Доказательство. Рассмотрим генерическое над $\mathfrak{M}$ множество $G \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$. Если $\kappa \in \mathbf{BC}$ и $B_\kappa \in \mathcal{J}$ то $\kappa \notin G$, следовательно, $\mathbf{a}_G \notin B_\kappa$ по теореме 11.3.1. Поэтому $\mathbf{a}_G \in \mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathfrak{M}$. Обратно, если $x \in \mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathfrak{M}$, то множество $G_x = \{\kappa \in \mathbf{BC} \cap \mathbb{L}[a] : x \in B_\kappa\}$ является $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$ согласно лемме 11.2.6(iv). (При этом $G_x \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ следует прямо из выбора точки x .)

Последнее утверждение теоремы следует из леммы 11.2.6 (дающей свойство ССС для этого форсинга) и теоремы 9.2.8. $\square$

Определение 11.3.4. Через $\Vdash_{\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}}^{\mathfrak{M}}$ обозначается отношение вынуждения $\Vdash_{\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}}^{\mathfrak{M}}$ для форсинга $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ и исходной модели $\mathfrak{M}$. $\square$

§11.4 Дальнейшие результаты

Здесь приведены три леммы о $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ -генерических расширениях и о вынуждении $\Vdash_{\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}}^{\mathfrak{M}}$, которые можно пропустить при первом чтении.

По теореме 9.3.2(ii), форсинг связан с истинностью в генерических расширениях. В нашем случае, форсинг достаточно простых формул связан с истинностью также и в исходной модели; этот дополнительный аспект обеспечивается теоремой абсолютности.

Лемма 11.4.1. В условиях теоремы 11.3.1, предположим, что $\varphi(x)$ является Σ_1^1 - или Π_1^1 -формулой с параметрами из $\mathfrak{M} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а $\check{\varphi}$ получается из φ заменой каждого параметра $z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, входящего в φ , его каноническим $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ -именем $\check{z}$. Пусть также $p \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$.

Тогда соотношение $p \Vdash_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}} \check{\varphi}(\mathbf{a}_G)$ равносильно тому, что, в $\mathfrak{M}$ истинно, что множество $X = \{x \in B_p : \neg \varphi(x)\}$ ($\mathcal{J}$)- $\mathfrak{M}$ -нулевое.

Доказательство. Пусть $\mathcal{J}' = (\mathcal{J})^{\mathfrak{M}}$. Если в $\mathfrak{M}$ истинно, что X является $\mathcal{J}'$ -нулевым, то возьмем код $\kappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, для которого $X \subseteq (B_{\kappa})^{\mathfrak{M}} \in \mathcal{J}'$ — откуда $B_{\kappa} \in \mathcal{J}$ согласно результату 10.7.4. По выбору φ (также используется теорема 5.8.1), соотношение $X \subseteq B_{\kappa}$ выражается формулой типа не выше Π_2^1 , поэтому по теореме абсолютности 5.9.1, в любом генерическом расширении модели $\mathfrak{M}$ (вообще, в любом расширении, не добавляющем новых ординалов), выполнено: $\forall x \in B_p (x \notin B_{\kappa} \implies \varphi(x))$. Но генерическая точка $\mathbf{a}_G$ по определению принадлежит B_p , каково бы ни было генерическое множество $G \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$, содержащее p .

Обратно, пусть множество X не является $\mathcal{J}'$ -нулевым в $\mathfrak{M}$. По теореме 10.7.2, найдется код $q \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, для которого $B_q \notin \mathcal{J}$ и $B_q \subseteq X$ в $\mathfrak{M}$. Имеем $q \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ и $q \leq p$, и кроме того предложение

$$\forall x (x \in B_q \implies \neg \varphi(x)) \quad (*)$$

истинно в $\mathfrak{M}$. Мы утверждаем, что q вынуждает $\neg \check{\varphi}(\mathbf{a}_G)$. Для доказательства, предположим противное. Тогда найдется множество $G \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$, генерическое над $\mathfrak{M}$ и такое, что формула $\check{\varphi}(\mathbf{a}_G)[G]$ — т. е. фактически формула $\varphi(\mathbf{a}_G)$ — истинна в $\mathfrak{M}[G]$. Однако $\mathbf{a}_G \in B_q$ по теореме 11.3.1, так что предложение (*) ложно в $\mathfrak{M}[G]$, что, однако, противоречит теореме абсолютности 5.9.1. Итак, в самом деле q вынуждает $\neg \check{\varphi}(\mathbf{a}_G)$. Но тогда более слабое «условие» p не может вынуждать $\check{\varphi}(\mathbf{a}_G)$, что и требовалось. $\square$

Лемма 11.4.2. В условиях теоремы 11.3.1, пусть Φ — замкнутая формула с $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ -именами в роли параметров. Тогда найдется код $\kappa = \kappa(\Phi) \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, максимальный для Φ в том смысле, что либо $\kappa = 0$ и $1 \Vdash_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}} \neg \Phi$, либо $\kappa = 1 \Vdash_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}} \Phi$, либо наконец коды κ и $(\neg \kappa)$ оба принадлежат $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$, $\kappa \Vdash_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}} \Phi$, и $(\neg \kappa) \Vdash_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}} \neg \Phi$.

В этой лемме фигурируют операции над борелевскими кодами из 5.7.5, а также коды $0 = \kappa[\Lambda]$ (код пустого множества, см. 5.7.5(1)) и $1 = \neg 0$ (код дополнительного множества, т. е. всего пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$). Вообще, по определению, код $\neg \kappa$ удовлетворяет равенству $B_{\neg \kappa} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus B_{\kappa}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть нетривиальный случай, когда множества $F = \{r \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}} : r \Vdash_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}} \Phi\}$ и $F' = \{r \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}} : r \Vdash_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}} \neg \Phi\}$ оба непусты. По теореме 9.3.2, $F \in \mathfrak{M}$, а потому существует максимальная антицепь $A \in \mathfrak{M}$, $A \subseteq F$ — т. е. если $p \neq q$ принадлежат A , то $B_p \cap B_q \in \mathcal{J}$ (свойство антицепи), и каждое условие $r \in F$ $\mathcal{J}$ -совместимо хотя бы с одним $p \in A$ (т. е. $p \wedge r \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$). Антицепь A не более чем счетна в $\mathfrak{M}$; пусть $A = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ — произвольное перечисление в $\mathfrak{M}$. Тогда код $\kappa = \bigvee_n p_n$ (пример 5.7.5) принадлежит $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$. Докажем, что κ — искомый код.

В наших обозначениях, требуется проверить, что $\varkappa \in F$ и $(\neg \varkappa) \in F'$.

Если $\varkappa \notin F$, то по теореме 9.3.2 найдется условие $q \in F'$, $q \leq \varkappa$. Однако p совместимо хотя бы с одним p_n (результат 11.2.3); т. е. $r = p_n \wedge q \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$. Тогда $r \leq p_n$ и $r \leq q$, т. е. $r \in F \cap F'$, что невозможно.

Обратно, если $(\neg \varkappa) \notin F'$, то найдется условие $q \in F$, $q \leq (\neg \varkappa)$. Оно совместимо с каким-то p_n по выбору A , т. е. $r = q \wedge p_n \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$, $r \in F \cap F'$, с аналогичным противоречием. $\square$ (лемма)

Утверждение следующей леммы иногда называется «свойством борелевского чтения имен» для форсингов рассматриваемого вида.

Лемма 11.4.3. *В условиях теоремы 11.3.1, если множество $G \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ является $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, и $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}[G]$, то*

- (i) *найдутся параметр $z \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\Delta_1^1(z)$ -функция $H_z : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которых $x = H_z(\mathbf{a}_G)$;*
- (ii) *найдется такой борелевский код $\varkappa \in \mathfrak{M} \cap \mathbf{FC}$, что $x = B_{\varkappa}^2(\mathbf{a}_G)$.*

Таким образом, в рассматриваемом случае каждая точка $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ из расширения $\mathfrak{M}[G]$ получается действием 1) подходящей Δ_1^1 -функции с параметром из исходной модели, и (что эквивалентно!) 2) подходящей борелевской функции $B_{\varkappa}^2$ с кодом из исходной модели, на генерическую точку $\mathbf{a}_G$. Определения **FC** (коды борелевских функций) и $B_{\varkappa}^2$ см. § 5.7Г.

Доказательство. Доказываем (i). Согласно теореме 9.2.6, существует такое $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ -имя $t \in \mathfrak{M}$, что $x = t[G]$ и любое «условие» $p \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ вынуждает, что $t[G] \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Заметим, что понятие «быть максимальным кодом для формулы» (в смысле леммы 11.4.2) выразимо в $\mathfrak{M}$, так как в $\mathfrak{M}$ выразимо отношение $\Vdash_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ по теореме 9.3.2. Поэтому, по лемме 11.4.2, существует такая последовательность $w = \langle \varkappa_{kn} \rangle_{k,n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}$ кодов $\varkappa_{kn} \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, что каждый код $\varkappa_{kn}$ максимален в смысле 11.4.2 для формулы $t[G](k) = n$. При этом, по выбору t , если $k \in \mathbb{N}$ и $n \neq n'$, то коды $\varkappa_{kn}$ и $\varkappa_{kn'}$ $\mathcal{J}$ -несовместимы, т. е. $\varkappa_{kn} \wedge \varkappa_{kn'} \in \mathbf{cod} \mathcal{J}$, и код $\nu_k = \neg(\bigvee_n \varkappa_{kn})$ также принадлежит $\mathbf{cod} \mathcal{J}$. Следовательно, система $w' = \langle \varrho_{kn} \rangle_{k,n \in \mathbb{N}}$ кодов $\varrho_{kn} = \varkappa_{kn} \setminus (\bigvee_{m < n} \varkappa_{km})$ при $n \geq 1$, и $\varrho_{k0} = \varkappa_{k0} \vee \nu_k$, принадлежит $\mathfrak{M}$, каждый код ϱ_{kn} всё еще максимален в смысле 11.4.2 для формулы $t[G](k) = n$ — поскольку изъятие или добавление кодов из $\mathbf{cod} \mathcal{J}$ в конечном (или даже счетном) числе не влияет на это свойство, и кроме того

$$(*) \quad B_{\varrho_{kn}} \cap B_{\varrho_{kn'}} = \emptyset \text{ при } n \neq n', \text{ и } \bigcup_n B_{\varrho_{kn}} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ для всех } k.$$

Далее, коль скоро система кодов $w' = \langle \varrho_{kn} \rangle_{k,n \in \mathbb{N}}$ принадлежит $\mathfrak{M}$, существует такая точка $z \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что, для всех k, n , выполнено $\varrho_{kn} = \langle T_{\{((z)_k)_n\}}, f_{\{((z)_k)_n\}} \rangle$. (Использованы обозначения определений 4.6.1 и 4.2.1(iv).) Это позволяет определить, для $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, точку $H_z(a) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ соотношениями: $H_z(a)(k) = n$, когда $a \in B_{\varrho_{kn}}$.

Воспользовавшись теперь формулами теоремы 5.8.1, не составляет труда получить такие Σ_1^1 -формулу $\varphi(z, a, k, n)$ и Π_1^1 -формулу $\psi(z, a, k, n)$, обе с единственным параметром z , что

$$\varphi(z, a, k, n) \iff \psi(z, a, k, n) \iff a \in B_{\varrho_{kn}}$$

для всех $k, n \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Поэтому H_z является $\Delta_1^1(z)$ -функцией. Остается проверить, что $x = H_z(\mathbf{a}_G)$, т. е. (1) $x(k) = n \iff \mathbf{a}_G \in B_{\varrho_{kn}}$.

Фиксируем k . Мы утверждаем, что (2) найдется такое число n , что $\varrho_{kn} \in G$ — и тогда $\mathbf{a}_G \in B_{\varrho_{kn}}$ по теореме 11.3.1, и $x(k) = n$ по выбору t и ϱ_{kn} . Согласно результату 9.1.2, достаточно проверить, что множество $\{\varrho_{kn} : n \in \mathbb{N}\}$ предплотно в $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ — а это опять-таки следует из (*). Утверждение (2) доказано. Эквивалентность (1) следует из доказанного (2).

Для вывода (ii) из (i) можно воспользоваться следствием 5.9.5.⁴ $\square$

§ 11.5 Два примера

Взяв в качестве $\mathcal{J}$ идеал $\mathcal{J}_{\text{cat}}$ тощих борелевских множеств, или идеал $\mathcal{J}_{\lambda}$ борелевских множеств λ -меры 0 мы получаем два специальных форсинга, связанных со свойством Бэра и измеримостью:

форсинг Коэна: $\mathbb{P}_{\text{coh}} = \mathbb{P}_{\mathcal{J}_{\text{cat}}} = \{p \in \mathbf{BC} : B_p \text{ — не тощее}\},$

случайный форсинг: $\mathbb{P}_{\lambda} = \mathbb{P}_{\mathcal{J}_{\lambda}} = \{p \in \mathbf{BC} : \lambda(B_p) > 0\}.$

Соответственно, если $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель, то пусть

$$\mathbb{P}_{\text{coh}}^{\mathfrak{M}} = \mathbb{P}_{\text{coh}} \cap \mathfrak{M} = \mathbb{P}_{\mathcal{J}_{\text{cat}}}^{\mathfrak{M}} \quad \text{и} \quad \mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}} = \mathbb{P}_{\lambda} \cap \mathfrak{M} = \mathbb{P}_{\mathcal{J}_{\lambda}}^{\mathfrak{M}}.$$

Напомним, что λ — мера, введенная примером 6.1.1.

Следствие 11.5.1 (из теоремы 11.3.3). *Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель теории ZFC. Тогда выполнены равенства:*

$$\begin{aligned} \mathbf{Coh} \mathfrak{M} &= \{\text{все } \mathbb{P}_{\text{coh}}^{\mathfrak{M}}\text{-генерические над } \mathfrak{M} \text{ точки}\}; \\ \mathbf{Rand} \mathfrak{M} &= \{\text{все } \mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}\text{-генерические над } \mathfrak{M} \text{ точки}\}. \end{aligned}$$

Следовательно, мы можем присоединить еще два пункта к эквивалентностям теоремы 10.4.2, а именно,

(6) *точка x является $\mathbb{P}_{\text{coh}}^{\mathfrak{M}}$ -генерической над $\mathfrak{M}$ в смысле определения 11.3.2;*

(6') *точка x — $\mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}$ -генерическая над $\mathfrak{M}$ в том же смысле.* $\square$

⁴ Более прямое доказательство утверждения (ii) можно получить непосредственной конструкцией кода x из кодов ϱ_n , удовлетворяющих условию (*). По построению функция H_z как множество пар тождественно пересечению $\bigcap_{k,n} Y_{kn}$ множеств $Y_{kn} = \{\langle a, b \rangle : a \in B_{\varrho_{kn}} \implies b(k) = n\}$. По каждому коду ϱ_{kn} строим код $\varrho'_{kn} \in \mathbf{BC}$, для которого $B_{\varrho'_{kn}}^2 = Y_{kn}$, а затем применяем к этим кодам операцию $\wedge$ примера 5.7.5, предварительно приведя пару индексов к одному индексу. Этот вариант оставляется как **упражнение** для читателя.

Таким образом, точки $\mathbb{P}_{\text{coh}}^{\mathfrak{M}}$ -генерические над моделью $\mathfrak{M}$ — это то же самое, что точки генерические по Коэну над $\mathfrak{M}$, а точки $\mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}$ -генерические над моделью $\mathfrak{M}$ — это то же самое, что точки случайные по Соловею над $\mathfrak{M}$. Это означает, в частности, что оба варианта форсинга Коэна, т. е. $\mathbf{C}$ и $\mathbb{P}_{\text{coh}}^{\mathfrak{M}}$, эквивалентны в том смысле, что они порождают одни и те же генерические точки над данной моделью $\mathfrak{M}$ и одни и те же расширения этой модели. Оба варианта случайного форсинга, т. е. $(\mathbf{R})^{\mathfrak{M}}$ и $\mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}$, эквивалентны в том же смысле по теореме 9.2.9(i): форсинг $(\mathbf{R})^{\mathfrak{M}}$ фактически образует плотное подмножество в $\mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}$ — ибо каждое борелевское множество положительной λ -меры содержит замкнутое подмножество положительной λ -меры.⁵

Согласно следующей теореме, коэновские и случайные точки в самом деле образуют два различных типа, и более того, в коэновских расширениях нет случайных точек, и наоборот.

Теорема 11.5.2. Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель аксиом **ZFC**.

- (i) Если множество $G \subseteq \mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}$ является $\mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, то в $\mathfrak{M}[G]$ истинно, что $\mathbf{Coh} \mathfrak{M} = \emptyset$.
- (ii) Обратно, если множество $G \subseteq \mathbb{P}_{\text{coh}}^{\mathfrak{M}}$ является $\mathbb{P}_{\text{coh}}^{\mathfrak{M}}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, то в $\mathfrak{M}[G]$ истинно, что $\mathbf{Rand} \mathfrak{M} = \emptyset$.

Доказательство. (i) Пусть напротив, $x \in \mathfrak{M}[G] \cap \mathbf{Coh} \mathfrak{M}$. Согласно лемме 11.4.3(ii), найдется такой код $\varkappa \in \mathbf{FC} \cap \mathfrak{M}$, что $x = B_{\varkappa}^2(a_G)$. Множество $R = \{\varrho \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M} : B_{\varrho} \text{ — тощее}\}$ принадлежит $\mathfrak{M}$ по теореме абсолютности 5.9.1, поскольку отношение «быть кодом тощего множества» выражается Π_1^1 -формулой согласно предложению 6.4.2. Кроме того, мы имеем $x \notin \bigcup_{\varrho \in X} B_{\varrho}$ по выбору x . Значит, по теореме 9.3.2(ii),(xi), существует «условие» $p \in G$, вынуждающее, в смысле отношения $\Vdash_{\mathbb{P}_{\text{coh}}^{\mathfrak{M}}}$, предложение « $B_{\varkappa}^2(a_G) \notin B_{\varrho}$ » для каждого кода $\varrho \in X$.

Теперь, рассуждая в $\mathfrak{M}$, рассмотрим множество $X = B_p$ и функцию $f = B_{\varkappa}^2 : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Имеем $\lambda(X) > 0$, так как $p \in G \subseteq \mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}$. По лемме 6.1.4, найдется такое борелевское множество $Y = B_q \subseteq X$, где $q \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, что всё ещё $\lambda(Y) > 0$ — так что $q \in \mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}$ и $q \leq p$ в $\mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}$, но образ $Z = \{f(y) : y \in Y\}$ является тощим множеством. Фиксируем такой код $\varrho \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, что $Z \subseteq B_{\varrho}$ и B_{ϱ} — тощее множество.

Тогда $\varrho \in R$, а значит, q вынуждает « $B_{\varkappa}^2(a_G) \notin B_{\varrho}$ ». Но отношение «...» выражается формулой $\forall y (\langle a_G, y \rangle \in B_{\varkappa}^2 \implies y \notin B_{\varrho})$, которая приводится к Π_1^1 -виду при помощи формул теоремы 5.8.1. Мы заключаем, по лемме 11.4.1, что, в $\mathfrak{M}$, множество $Y' = \{y \in Y : B_{\varkappa}^2(y) \in B_{\varrho}\}$ удовлетворяет неравенству $\lambda(Y') = 0$ — в частности, $Y \setminus Y' \neq \emptyset$. Если теперь $y \in Y \setminus Y'$, то с одной стороны $f(y) = B_{\varkappa}^2(y) \in Z \subseteq B_{\varrho}$ по выбору Y , а

⁵ Отметим, что форсинги $\mathbf{D}$ и $\mathbf{R}_{\varepsilon}$ из §9.6 также связаны с определенными σ -ссс-идеалами $\mathcal{I}$. Для $\mathbf{D}$ подходит идеал тощих множеств в смысле определенной не польской топологии — об этом см. ниже §18.3. Относительно $\mathbf{R}_{\varepsilon}$ (это довольно сложный результат!) см. книгу [64, 3.4.B].

с другой стороны $f(y) \notin B_e$, так как $y \notin Y'$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Утверждение (ii) доказывается аналогично, но со ссылкой на соответственно вторую часть леммы 6.1.4. $\square$

§ 11.6 Взаимно генерические точки

В этом параграфе приведены дополнительные результаты о парах взаимно коэновских и взаимно случайных точках. Они не используются в доказательстве главных результатов о свойствах регулярности (теоремы 10.8.2 и 10.2.1 и следствие 10.2.2), но будут частично использованы в главе 14, и кроме того интересны сами по себе, и важны, поскольку вводят некоторые технические методы, типичные для этой области теории множеств.

Пример 11.6.1 (пара взаимно коэновских точек). Предположим, что множество $G \subseteq \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ является $(\mathbf{C} \times \mathbf{C})$ -генерическим над транзитивной моделью $\mathfrak{M}$. По теореме 9.2.10, мы имеем $G = G_0 \times G_1$, где каждое множество $G_i \subseteq \mathbf{C}$ является $\mathbf{C}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$, и даже над более широкой моделью $\mathfrak{M}[G_{1-i}]$. Тогда каждая из ассоциированных точек $a_i = \mathbf{a}_{G_i}$ (см. § 9.4) является генерической по Коэну над $\mathfrak{M}[a_{1-i}]$ по теореме 9.4.2. Мы имеем, таким образом, пару точек взаимно генерических по Коэну. $\square$

Как получить такую же пару взаимно случайных точек? Прямое повторение конструкции примера 11.6.1 со случайным форсингом $(\mathbf{R})^{\mathfrak{M}} = \mathbf{R} \cap \mathfrak{M}$ вместо $\mathbf{C}$ не даст требуемого результата, поскольку каждое из множеств G_i ($i = 0, 1$) окажется только $(\mathbf{R})^{\mathfrak{M}}$ -генерическим, а не $(\mathbf{R})^{\mathfrak{M}[G_{1-i}]}$ -генерическим над $\mathfrak{M}[G_{1-i}]$, т. е. мы получим пару точек случайных по Соловею над $\mathfrak{M}$, но не относительно друг друга.

Отличие меры от категории здесь проявляется в том, что вместо декартова произведения форсингов берется более сложная конструкция.

Пример 11.6.2 (пара взаимно случайных точек). Мы будем ориентироваться на случайный форсинг в варианте $\mathbb{P}_\lambda$ из § 11.5. Напомним, что отображение $H(x) = \langle (x)_{\text{лев}}, (x)_{\text{пра}} \rangle$ (см. § 5.7Г) является гомеоморфизмом $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$. Кодировка всех борелевских множеств в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ дается (опять см. § 5.7Г) определением $B_\ast^2 = \{H(x) : x \in B_\ast\}$.

Далее, на пространстве $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ вводится борелевская вероятностная мера λ^2 , являющаяся произведением двух экземпляров меры λ примера 6.1.1 — и та же самая мера λ^2 , очевидно, получится, если мы перенесем в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ меру λ при помощи гомеоморфизма H . Понятно, что мера λ^2 сконцентрирована на $(2^{\mathbb{N}})^2$, т. е. $\lambda^2((\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2 \setminus (2^{\mathbb{N}})^2) = 0$. Идеал $\mathcal{I}_{\lambda^2}$ всех таких борелевских $X \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$, что $\lambda^2(X) = 0$, есть $\mathbb{L}$ -абсолютный σ -ССС-идеал в борелевской алгебре пространства $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ по лемме 10.7.7.

Определение 11.6.3. Зададимся транзитивной моделью $\mathfrak{M}$ аксиом $\mathbf{ZFC}$ и $\mathbb{P}_\lambda^{\mathfrak{M}}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$ множеством $G \subseteq \mathbb{P}_\lambda^{\mathfrak{M}}$, где, напомним, $\mathbb{P}_\lambda^{\mathfrak{M}} = \mathbb{P}_\lambda \cap \mathfrak{M}$ и $\mathbb{P}_\lambda = \{p \in \mathbf{BC} : \lambda(B_p) > 0\} = \mathbf{BC} \setminus \mathcal{I}_\lambda$. Для уменьшения громоздкости, отношение вынуждения $\Vdash_{\mathbb{P}_\lambda^{\mathfrak{M}}}$ обозначим через $\Vdash_\lambda^{\mathfrak{M}}$. $\square$

Согласно теореме 11.3.1, точка $\langle (\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}, (\mathbf{a}_G)_{\text{пра}} \rangle \in (2^{\mathbb{N}})^2$ удовлетворяет условию $\varkappa \in G \iff \langle (\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}, (\mathbf{a}_G)_{\text{пра}} \rangle \in B_{\varkappa}^2$ для любого кода $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$. И аналогично следствию 11.5.1, эта точка λ^2 -случайна над $\mathfrak{M}$ в том смысле, что $\langle (\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}, (\mathbf{a}_G)_{\text{пра}} \rangle \notin B_{\varkappa}^2$ всякий раз, когда $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ и $\lambda^2(B_{\varkappa}^2) = 0$ (или, что равносильно, $\lambda(B_{\varkappa}) = 0$).

Лемма 11.6.4. *В условиях определения 11.6.3, каждая из двух точек $(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}, (\mathbf{a}_G)_{\text{пра}}$ λ -случайна над $\mathfrak{M}$, причем ассоциированные $\mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}$ -генерические над $\mathfrak{M}$ (согласно следствию 11.5.1) множества*

$$G_{(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}} = \{q \in \mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}} : (\mathbf{a}_G)_{\text{лев}} \in B_q\}, \quad G_{(\mathbf{a}_G)_{\text{пра}}} = \{q \in \mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}} : (\mathbf{a}_G)_{\text{пра}} \in B_q\}$$

тождественны множествам

$$\begin{aligned} (G)_{\text{лев}} &= \{q \in \mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}} : \exists p \in G (B_p^2 \subseteq B_q \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}})\}, \\ (G)_{\text{пра}} &= \{q \in \mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}} : \exists p \in G (B_p^2 \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times B_q)\}. \end{aligned}$$

соответственно, так что последние являются $\mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Для доказательства случайности $(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}$, пусть $\varrho \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ и $\lambda(B_{\varrho}) = 0$. Множество $B_{\varrho} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — борелевское, точнее, класса $\Delta_1^1(q)$, так что следствие 5.9.5 приносит нам код $\varkappa \in \mathbf{BC}$, для которого $B_{\varkappa}^2 = B_{\varrho} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Однако $\lambda^2(B_{\varkappa}^2) = 0$ по выбору кода ϱ . Поэтому, коль скоро точка $\langle (\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}, (\mathbf{a}_G)_{\text{пра}} \rangle$ λ^2 -случайна над $\mathfrak{M}$, она не принадлежит $B_{\varkappa}^2$, и поэтому $(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}} \notin B_{\varrho}$, что и требовалось.

Доказываем равенство $G_{(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}} = (G)_{\text{лев}}$. Если $q \in (G)_{\text{лев}}$, то найдется $p \in G$, для которого $B_p^2 \subseteq B_q \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Но $\langle (\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}, (\mathbf{a}_G)_{\text{пра}} \rangle \in B_p^2$, откуда $(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}} \in B_q$ и $q \in G_{(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}}$. Обратно, допустим, что $q \in G_{(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}}$, т. е. $q \in \mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}$ и $(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}} \in B_q$. Как и выше, имеется такой код $p \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, что $B_p^2 = B_q \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда точка $\langle (\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}, (\mathbf{a}_G)_{\text{пра}} \rangle$ принадлежит B_p^2 , откуда $p \in G$, и по определению $q \in (G)_{\text{лев}}$. $\square$ (лемма)

Нам, однако, нужен следующий более сильный результат:

Лемма 11.6.5. *В условиях 11.6.3, точка $(\mathbf{a}_G)_{\text{пра}}$ λ -случайна над моделью $\mathfrak{M}[(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}]$, а точка $(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}$ λ -случайна над $\mathfrak{M}[(\mathbf{a}_G)_{\text{пра}}]$.*

Доказательство. Учитывая полную симметрию, доказываем только первое утверждение. Предположим противное. По определению, найдется такой код $\tilde{\varkappa} = \langle \tilde{T}, \tilde{f} \rangle \in \mathfrak{M}[(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}] \cap \mathbf{BC}$, что $(\mathbf{a}_G)_{\text{пра}} \in B_{\tilde{\varkappa}}$ и $\lambda(B_{\tilde{\varkappa}}) = 0$. Здесь дерево $\tilde{T} \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ и функция $\tilde{f} : \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$ принадлежат $\mathfrak{M}[(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}]$ вместе с $\tilde{\varkappa}$, а потому найдутся такие точки $b, c \in \mathfrak{M}[(\mathbf{a}_G)_{\text{лев}}] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что, в обозначениях определения 4.6.1 выполнено $\tilde{T} = T_{\{b\}}$ и $\tilde{f} = f_{\{c\}}$.

Согласно лемме 11.4.3, найдутся параметр $z \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и пара $\Delta_1^1(z)$ -функций, скажем, $B_z, C_z : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которых $b = B_z((\mathbf{a}_G)_{\text{лев}})$ и $c = C_z((\mathbf{a}_G)_{\text{лев}})$. Следовательно, по теореме 9.3.2(ii), существует «условие» $p \in G$, вынуждающее, в смысле отношения $\Vdash_{\mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}}$, предложение: «пара $\varkappa = \langle T_{\{B_z((\mathbf{a}_G)_{\text{лев}})\}}, f_{\{C_z((\mathbf{a}_G)_{\text{лев}})\}} \rangle$ принадлежит $\mathbf{BC}$, $\lambda(B_{\varkappa}) = 0$,

и $(\mathbf{a}_{\underline{G}})_{\text{пра}} \in B_{\varkappa}$ ». Но это предложение можно формально переписать как $\Phi(\check{z}, (\mathbf{a}_{\underline{G}})_{\text{лев}}, (\mathbf{a}_{\underline{G}})_{\text{пра}})$, где $\Phi(z, a, a')$ есть следующая формула:

$$\left. \begin{aligned} \forall \varkappa \left(\varkappa = \langle \mathbf{T}_{\{B_z(a)\}}, \mathbf{f}_{\{C_z(a)\}} \rangle \implies \right. \\ \left. \implies \varkappa \in \mathbf{BC} \wedge \lambda(B_{\varkappa}) = 0 \wedge a' \in B_{\varkappa} \right) \end{aligned} \right\} \Phi(z, a, a').$$

Формула слева от импликации в скобках — арифметическая, а все три конъюнктивных члена справа от импликации выражаются Π_1^1 -формулами теоремы 5.8.1 и следствия 6.4.1. Следовательно, Φ является Π_1^1 -формулой. Поэтому, согласно лемме 11.4.1 и по выбору p , в $\mathfrak{M}$ истинно, что

$$\text{«множество } P = \{\langle a, a' \rangle \in B_p^2 : \Phi(z, a, a')\} \text{ удовлетворяет равенству } \lambda^2(B_p^2 \setminus P) = 0, \text{ откуда следует } \lambda^2(P) = \lambda^2(B_p^2) > 0\text{»}.$$

Теперь, рассуждая в $\mathfrak{M}$, рассмотрим указанное множество P . Оно имеет класс Π_1^1 , т. е., точнее говоря, $\Pi_1^1(z)$ по вышесказанному. По определению, если $\langle a, a' \rangle \in P$, то $\varkappa(a) = \langle \mathbf{T}_{\{B_z(a)\}}, \mathbf{f}_{\{C_z(a)\}} \rangle$ — код из $\mathbf{BC}$, $\lambda(B_{\varkappa(a)}) = 0$, и $a' \in B_{\varkappa(a)}$. Поэтому сечение $(P)_a = \{b : \langle a, b \rangle \in P\}$ тождественно множеству $B_{\varkappa(a)}$ — в частности, $\lambda((P)_a) = 0$. По теореме Фубини, тогда $\lambda^2(P) = 0$, что противоречит неравенству $\lambda^2(P) > 0$. $\square$ (лемма)

Итак, мы имеем пару взаимно случайных точек. $\square$ (пример 11.6.2)

Лемма 11.6.6 (обращение леммы 11.6.5). *Если $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель аксиом $\mathbf{ZFC}$, точка $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ λ -случайна над $\mathfrak{M}$, а точка $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ λ -случайна над $\mathfrak{M}[a]$, то точка $\langle a, b \rangle$ λ^2 -случайна над $\mathfrak{M}$ (в смысле определения перед леммой 11.6.4).*

Доказательство (эскиз). По теореме 10.4.2(2'), берем точку $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathfrak{M}$, для которой множество $U = \mathbb{G}_{\delta}[c]$ удовлетворяет $\lambda(U) = 0$, и доказываем, что $\langle a, b \rangle \notin P = H[U] = \{H(x) = \langle (x)_{\text{лев}}, (x)_{\text{пра}} \rangle : x \in U\}$.

Коль скоро $\lambda^2(P) = \lambda(U) = 0$, по теореме Фубини множество X всех точек $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которых сечение $(P)_x = \{y : \langle x, y \rangle \in P\}$ имеет меру $\lambda((P)_x) > 0$, удовлетворяет $\lambda(X) = 0$. С другой стороны, коль скоро P есть $\mathbf{G}_{\delta}$ с кодом c , можно проверить (придется повозиться!), что X — множество класса $\Delta_1^1(c)$. Поэтому $X = B_{\varkappa}$ для подходящего кода $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ по следствию 5.9.5. Следовательно, $a \notin X$ по случайности.

Но тогда b принадлежит множеству $(P)_a$ λ -меры 0 и, очевидно, класса $\Delta_1^1(c, a)$ — т. е. борелевскому множеству с кодом из $\mathfrak{M}[a]$ опять по следствию 5.9.5. Имеем противоречие со случайностью b над $\mathfrak{M}[a]$. $\square$

Проблема 11.6.7. Построить пару взаимно саксовских точек $a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ над данной моделью, т. е. b должно быть саксовским над $\mathfrak{M}[a]$, и наоборот. (См. определение в конце § 9.6.) Эта кажущаяся простой задача открыта с 1960х годов.

§ 11.7 Если неслучайных точек мало, то множества второго уровня измеримы

Здесь мы доказываем импликацию $\Leftarrow$ в теореме 10.8.2, тем самым, и в эквивалентностях (ii)–(v) теоремы 10.2.1 и (II)–(V) след-

ствия 10.2.2 (см. замечание после теоремы 10.8.2) Указанные результаты основаны на следующем утверждении:

Лемма 11.7.1. *Предположим, что $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathcal{J}$ является $\mathbb{L}[a]$ -абсолютным σ -ССС-идеалом. Ко всякому $\Sigma_2^1(\mathbb{L}[a])$ -множеству $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ найдется борелевское множество $K \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ с кодом из $\mathbb{L}[a]$ такое, что $X \cap \mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathbb{L}[a] = K \cap \mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathbb{L}[a]$, а множество $K \setminus X$ является $\mathcal{J}$ -нулевым.*

Таким образом, ко всякому множеству X из $\Sigma_2^1(\mathbb{L}[a])$ существует борелевское множество K с кодом из $\mathbf{BC} \cap \mathbb{L}[a]$, содержащее в точности те же точки из $\mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathbb{L}[a]$, что и X , и включенное в X с точностью до $\mathcal{J}$ -нулевого множества.

Напомним, что через $\Sigma_2^1(\mathbb{L}[a])$ обозначено объединение всех классов $\Sigma_2^1(p)$, $p \in \mathbb{L}[a]$, т. е. речь идет о всех множествах, определяемых Σ_2^1 -формулами с параметрами из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}[a]$. Так же понимается и обозначение $\Pi_2^1(\mathbb{L}[a])$, и, как обычно, $\Delta_2^1(\mathbb{L}[a]) = \Sigma_2^1(\mathbb{L}[a]) \cap \Pi_2^1(\mathbb{L}[a])$.

Доказательство. Пусть $X = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \Gamma(x, z)\}$, где $z \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, Γ есть Σ_2^1 -формула $\exists y \vartheta(x, z, y)$, а ϑ — формула типа Π_1^1 . Согласно теоремам 5.9.1 и 8.6.2(ii), мы имеем

$$x \in X \iff \text{в } \mathbb{L}[x, a] \text{ истинно } \Gamma(x, z) \iff \exists \xi < \omega_1^{\mathbb{L}[a, x]} (x \in X_{\xi}), \quad (1)$$

где $X_{\xi} = \{x : \vartheta(x, z, f_{\xi}[x \tilde{a}])\}$, а $x \tilde{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ обозначает «сшивку» точек x и a , т. е. $(x \tilde{a})(2k) = x(k)$ и $(x \tilde{a})(2k+1) = a(k)$ для всех k . Равенство $\omega_1^{\mathbb{L}[a, x]} = \omega_1^{\mathbb{L}[a]}$ теоремы 11.3.3 позволяет существенно улучшить этот результат для большого множества точек x :

$$\text{для всех } x \in \mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathbb{L}[a] : \quad x \in X \iff \exists \xi < \omega_1^{\mathbb{L}[a]} (x \in X_{\xi}). \quad (2)$$

Теперь обозначим через $\gamma(T, x, a, z)$ формулу

$$\forall y (\varphi(T, x \tilde{a}, y) \implies \vartheta(x, z, y)),$$

где φ есть Σ_1^1 -формула даваемая теоремой 8.6.2(ii); таким образом, мы имеем $X_{\xi} = \{x : \gamma(T, x, a, z)\}$ всякий раз когда $T \in \mathbf{WFT}_{\xi}$.

Положим $X'_{\xi} = X_{\xi} \cap \mathbb{L}[a]$.

Рассуждаем внутри класса $\mathbb{L}[a]$.

Определим $C' = \mathbb{L}[a] \cap \mathbf{cod} \mathcal{J}$ и $\mathcal{J}' = (\mathcal{J})^{\mathbb{L}[a]}$. По теореме абсолютности 5.9.1, имеем $X'_{\xi} = \{x : \gamma(T, x, a, z)\}$ (в $\mathbb{L}[a]$) всякий раз, когда $\xi < \omega_1$ и $T \in \mathbf{WFT}_{\xi} \cap \mathbb{L}[a]$. Следовательно, все X'_{ξ} — множества класса Π_1^1 . Значит, по теореме 10.7.2, каждое множество X'_{ξ} является $\mathcal{J}'$ -измеримым, т. е. отличается от некоторого борелевского множества на множество из $\mathcal{J}'$. Это значит, что существуют коды

$\kappa_\xi \in \mathbf{BC}$ и $d_\xi \in C'$, для которых $X'_\xi \triangle B_{\kappa_\xi} \subseteq B_{d_\xi}$, другими словами, выполнено двойное соотношение $B_{\kappa_\xi} \setminus B_{d_\xi} \subseteq X'_\xi \subseteq B_{\kappa_\xi} \cup B_{d_\xi}$.

Однако идеал $\mathcal{I}'$ удовлетворяет условию 2° в $\mathbb{L}[a]$ (согласно свойству абсолютности идеала $\mathcal{I}$). Отсюда следует, что найдется такой ординал $\vartheta < \omega_1^{\mathbb{L}[a]}$, что $B_{\kappa_\xi} \setminus (\bigcup_{\eta < \vartheta} B_{\kappa_\eta}) \in \mathcal{I}'$ для всех $\xi \geq \vartheta$.

Рассуждаем в универсуме всех множеств.

Положим $K_\xi = B_{\kappa_\xi}$ и $D_\xi = B_{d_\xi}$. Тогда $D_\xi \in \mathcal{I}$. Кроме того, применяя теорему абсолютности 5.9.1 к соответствующим формулам, имеем $X_\xi \triangle K_\xi \subseteq D_\xi$ для всех $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}[a]}$, а также $K_\xi \setminus K \in \mathcal{I}$ для всех $\xi \geq \vartheta$, где $K = \bigcup_{\eta < \vartheta} K_\eta$ — борелевское множество с кодом из $\mathbb{L}[a]$. По определению $\mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a]$, получим

$$\mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a] \cap X_\xi = \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a] \cap K_\xi$$

для всех $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}[a]}$, и $\mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a] \cap K_\xi \subseteq K$ при $\vartheta \leq \xi < \omega_1^{\mathbb{L}[a]}$. Теперь равенство $(X \triangle K) \cap \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a] = \emptyset$ следует из (2), а

$$K \setminus X \subseteq \bigcup_{\eta < \vartheta} (K_\eta \setminus X_\eta) \subseteq \bigcup_{\eta < \vartheta} D_\eta,$$

так что K — искомое множество. □

Теперь мы имеем всё необходимое для доказательства импликаций $\Leftarrow$ теоремы 10.8.2. Для удобства последующих ссылок, этот результат формулируется в виде отдельного следствия:

Следствие 11.7.2. *В условиях леммы 11.7.1:*

- (а) если множество $\mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a]$ $\mathcal{I}$ -полно, то все множества $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ класса $\Sigma_2^1(\mathbb{L}[a])$ $\mathcal{I}$ -измеримы;
- (б) если $\mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a] \cap B_c \neq \emptyset$ для каждого борелевского $B_c \notin \mathcal{I}$ с кодом из $\mathbb{L}[a]$, то все множества $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ класса $\Delta_2^1(\mathbb{L}[a])$ $\mathcal{I}$ -измеримы.

Доказательство. (а) Согласно лемме 11.7.1, найдется борелевское множество K такое что $X \cap \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a] = K \cap \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a]$. Если $\mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a]$ является $\mathcal{I}$ -полным то множество X $\mathcal{I}$ -измеримо ибо таковым является борелевское K .

(б) Рассмотрим пару взаимно дополнительных $\Sigma_2^1(a)$ -множеств $X, Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Согласно лемме 11.7.1, существует пара борелевских множеств $U, V \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, с кодами из $\mathbb{L}[a]$, таких что

$$X \cap \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a] = U \cap \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a], \quad \text{и}$$

$$Y \cap \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a] = V \cap \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a],$$

а множества $U \setminus X$ и $V \setminus Y$ являются $\mathcal{J}$ -нулевыми. Остается показать что дополнение $W = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus (U \cup V)$ множества $U \cup V$ есть $\mathcal{J}$ -нулевое множество. Пусть напротив, $W \notin \mathcal{J}$. Понятно, что W — также борелевское множество с кодом из $\mathbb{L}[a]$. Следовательно, в наших предположениях, найдется точка $x \in \mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathbb{L}[a] \cap W$. Коль скоро множества X, Y взаимно дополнительные, точка x обязательно принадлежит одному из них, скажем, множеству X . Тогда $x \in U$ по выбору U , противоречие. $\square$ (следствие)

$\square$ (Теоремы 10.8.2 и 10.2.1, следствие 10.2.2)

Лемма 11.7.1, если оставить в стороне заключенное в ней требование, чтобы $K \setminus X$ было $\mathcal{J}$ -нулевым множеством, допускает следующее далеко идущее обобщение.

Теорема 11.7.3. *В условиях леммы 11.7.1, ко всякой $\in$ -формуле $\varphi(x)$ с параметрами из $\mathbb{L}[a]$ найдется такой борелевский код $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathbb{L}[a]$, что эквивалентность*

$$\varphi(x) \text{ истинно в } \mathbb{L}[a, x] \iff x \in B_{\varkappa}$$

выполняется для всех точек $x \in \mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathbb{L}[a]$. Поэтому, в тех же условиях, если множество $\mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathbb{L}[a]$ $\mathcal{J}$ -полно, то множество

$$X = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \varphi(x) \text{ истинно в } \mathbb{L}[a, x]\}$$

$\mathcal{J}$ -измеримо.

Другими словами, во-первых, любое множество вида

$$X = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \varphi(x) \text{ истинно в } \mathbb{L}[a, x]\}$$

(где формула φ имеет параметры только из $\mathbb{L}[a]$) совпадает, с точностью до точек не принадлежащих $\mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathbb{L}[a]$, с каким-то борелевским множеством с кодом из $\mathbb{L}[a]$, и во-вторых, если при этом множество $\mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathbb{L}[a]$ $\mathcal{J}$ -полно, то X $\mathcal{J}$ -измеримо. Это применимо, например, для множеств X класса $\Sigma_2^1(a)$ или $\Pi_2^1(a)$, так как тогда (по теореме абсолютности 5.9.1) соответствующие формулы абсолютны для $\mathbb{L}[a]$. О других приложениях этой теоремы будет сказано ниже.

Доказательство. Считаем что φ есть $\varphi(z, x)$, с единственным параметром $z \in \mathbb{L}[a]$. (Сюда легко сводится случай многих параметров.) Отношение $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathbb{L}[a]}$ -вынуждения над $\mathbb{L}[a]$ обозначим через $\Vdash$. По теореме 9.3.2(iv), множество

$$D = \{p \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathbb{L}[a]} : p \Vdash \varphi(\check{z}, \mathbf{a}_{\underline{G}}) \text{ или } p \Vdash \neg \varphi(\check{z}, \mathbf{a}_{\underline{G}})\}$$

плотно в $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathbb{L}[a]}$ и принадлежит $\mathbb{L}[a]$. Согласно лемме 11.2.6(iv), найдется такое счетное множество $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{L}[a]$ условий $p_n \in D$, что объединение $\bigcup_n B_{p_n}$ есть $\mathcal{J}$ -полное множество. Положим

$$u = \{n : p_n \Vdash \varphi(\check{z}, \mathbf{a}_{\underline{G}})\} \quad \text{и} \quad v = \mathbb{N} \setminus u = \{n : p_n \Vdash \neg \varphi(\check{z}, \mathbf{a}_{\underline{G}})\}.$$

Тогда (см. пример 5.7.5) существуют борелевские коды $\varkappa = \bigvee_{n \in u} p_n$ и $\varkappa' = \bigvee_{n \in v} p_n$ в $\mathbf{BC} \cap \mathbb{L}[a]$, для которых

$$B_{\varkappa} = \bigcup_{n \in u} B_{p_n} \quad \text{и} \quad B_{\varkappa'} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus B_{\varkappa} = \bigcup_{n \in v} B_{p_n}.$$

Покажем, что $\varkappa$ — искомый код.

Пусть $x \in \mathbf{Rand}_{\mathcal{J}} \mathbb{L}[a]$. Тогда $x \in B_{\varkappa} \cup B_{\varkappa'}$. Если $x \in B_{\varkappa}$ то мы имеем $x \in B_{p_n}$ для некоторого $n \in u$. С другой стороны, согласно теореме 11.3.3, имеем $x = \mathbf{a}_G$ для некоторого генерического над $\mathbb{L}[a]$ множества $G \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathbb{L}[a]}$ — тогда $G = G_x = \{p \in \mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathbb{L}[a]} : x \in B_p\}$. Значит $p_n \in G = G_x$, откуда по определению форсинга следует, что формула $\varphi(\check{z}[G], \mathbf{a}_G)$, т. е. фактически формула $\varphi(z, x)$, истинна в модели $\mathbb{L}[a, G] = \mathbb{L}[a, x]$. Если $x \notin B_{\varkappa}$ то точно так же $x \in B_{\varkappa'}$ и формула $\varphi(z, x)$ ложна в $\mathbb{L}[a, x]$. $\square$

Исторические и библиографические замечания

Теорема 11.1.1 принадлежит Любецкому [32] и Соловею [167], а замечание 11.1.2 — Мэнсфилду [140].

Ссылки по теоремам 10.2.1 и 10.8.2 (и следствию 10.2.2), доказательство которых начато в главе 10 и закончено в § 11.1, § 11.7, приведены в исторических и библиографических замечаниях к главе 10.

Для случаев, когда $\mathcal{J}$ — идеал всех множеств меры 0 либо идеал всех тощих множеств, соответствующие форсинги $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}$ были введены Соловеем [166], вместе с концепцией случайных и коэновских точек и основными конструкциями из § 11.2–11.7, такими, как, например, теорема 11.7.3. О равносильности двух определений форсинга Коэна (§ 11.5) см., например, в [166], однако там использованы несколько иные рассуждения.

Глава 12

Комбинаторика финального доминирования

Главной задачей этой главы является доказательство теоремы 12.4.1 о том, что гипотеза $LM(\Sigma_2^1)$ влечет $BP(\Sigma_2^1)$, так что если все Σ_2^1 -множества измеримы, то все они имеют и свойство Бэра. Этот результат отмечен одной из импликаций на диаграмме со стр. 135.

Суть и техническая «подкладка» этого неожиданного результата совсем не в том, что измеримость вообще влечет свойство Бэра в сколько-нибудь широких предположениях — это как раз не так — а в том, что эти два свойства, именно для множеств класса Σ_2^1 , связаны со свойствами некоторых отношений частичного предпорядка из группы финальных¹ отношений. Сюда относятся отношения между бесконечными последовательностями того или иного вида, характеризующиеся тем, что некоторое свойство выполняется для почти всех² членов заданных последовательностей.

Доказательство теоремы 12.4.1 также опирается и на идеи, связанные с теоремой 10.2.1.

Отметим, что результаты и методы, которые излагаются в этой главе, находят применение к исследованию свойств регулярности в некоторых сложных генерических моделях, о чем см. в главе 14.

¹ Или эвентуальных, от *eventual*.

² Ниже «почти все» означает: все кроме конечного числа.

§12.1 Финальные отношения

Пусть f, g — функции с областью определения $\text{dom } f = \text{dom } g = \mathbb{N}$, т. е. бесконечные последовательности. Ниже рассматриваются следующие финальные отношения.

$f \leq^* g$ означает, что $f(n) \leq g(n)$ для почти всех $n \in \mathbb{N}$; ³

$f <^* g$ означает, что $f(n) < g(n)$ для почти всех $n \in \mathbb{N}$;

$f \subseteq^* g$ означает, что $f(n) \subseteq g(n)$ для почти всех $n \in \mathbb{N}$;

$f \in^* g$ означает, что $f(n) \in g(n)$ для почти всех $n \in \mathbb{N}$.

Из них, особый интерес представляет *отношение финального доминирования* ⁴ $\leq^*$ на множествах вроде $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Для него, вводится следующее ключевое определение ограниченности.

Определение 12.1.1. Пусть $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Множество X называется *финально ограниченным* в Y , если найдется $y \in Y$ такое, что $x \leq^* y$ для всех $x \in X$. $\square$

Лемма 12.1.2. Любое счетное множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ финально ограничено в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Доказательство. Пусть $X = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Положим $f(k) = \sup_{n \leq k} f_n(k)$. Понятно, что $f_n \leq^* f$ для всех n . $\square$

Для обычного доминирования, т. е. отношения $f \leq g$ когда $f(n) \leq g(n)$ для всех n , такая лемма, конечно, не имеет места.

Мы покажем ниже, как гипотеза $\text{BP}(\Sigma_2^1)$ (которая, напомним, говорит, что все Σ_2^1 -множества имеют свойство Бэра) связана с финальной ограниченностью множеств вида $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а гипотеза $\text{LM}(\Sigma_2^1)$ (все Σ_2^1 -множества измеримы) связана со свойствами финальной ограниченности на следующих двух множествах:

- множество $\ell_1 = \{x \in \mathbb{Q}_+^{\mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} x(n) < \infty\}$, где, как обычно, $\mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}$ — положительные рациональные числа;
- совокупность $\mathcal{S}$ всех функций φ , определенных на $\mathbb{N}$, принимающих конечные множества (любого вида) в качестве своих значений, и удовлетворяющих неравенству $\sum_n \frac{\#\varphi(n)}{(n+1)^2} < \infty$. ⁵

Функции из $\mathcal{S}$ можно называть *медленными* (т. е. растущими достаточно медленно чтобы не нарушить сходимость ряда $\sum_n \frac{1}{(n+1)^2}$).

³ Здесь предполагается, что функции f, g принимают значения в каком-то фиксированном упорядоченном множестве, например, $\mathbb{N}$ или $\mathbb{R}$.

⁴ В англоязычных работах, «eventual domination».

⁵ Как обычно, $\#u$ обозначает число элементов конечного множества u .

Лемма 12.1.3. Если $\varphi \in \mathcal{S}$, то $\sum_n \frac{1}{\#\varphi(n)} = +\infty$, т. е. функция $g(n) = \frac{1}{\#\varphi(n)}$ не принадлежит ℓ_1 .

Доказательство. Положим $U = \{n : \#\varphi(n) \geq n+1\}$. Тогда

$$\sum_{n \in U} \frac{1}{n+1} \leq \sum_{n \in U} \frac{\#\varphi(n)}{(n+1)^2} < \infty,$$

следовательно, $\sum_{n \notin U} \frac{1}{n+1} = \infty$. Отсюда и $\sum_{n \notin U} \frac{1}{\#\varphi(n)} = \infty$. $\square$

Ниже в этой главе мы будем использовать следующую хорошо известную из анализа и теории меры лемму Бореля – Кантелли, за доказательством которой мы отсылаем к соответствующим вводным курсам по этим дисциплинам.

Напомним, что $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} A_m$ — верхний предел последовательности множеств A_n , который состоит из всех точек, принадлежащих бесконечноному числу множеств A_n .

Лемма 12.1.4 (лемма Бореля – Кантелли). Пусть μ — вероятностная мера на польском пространстве $\mathbb{X}$, и $A = \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, где все множества $A_n \subseteq \mathbb{X}$ μ -измеримы. Тогда

- (i) если $\sum_n \mu(A_n) < +\infty$ то $\mu(A) = 0$;
- (ii) если все множества A_n совместно независимы в смысле меры μ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ расходится, то $\mu(A) = 1$. $\square$

Совместная независимость означает здесь, что для любого конечного набора попарно различных индексов $n_i \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\mu(A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_j}) = \prod_{i=1}^j \mu(A_{n_i})$.

Упражнение 12.1.5. Докажите следующий аналог 12.1.2: любое счетное множество $X \subseteq \ell_1$ финально ограничено в ℓ_1 . $\square$

§ 12.2 Финальное доминирование и мера

Следующая теорема Бартошинского [63] связывает проблему измеримости Σ_1^1 -множеств с гипотезами финальной ограниченности множеств вида $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{L}[a] \cap \ell_1$, где $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, при помощи последовательностей из $\mathcal{S}$ и, соответственно, из ℓ_1 .

Теорема 12.2.1. Гипотеза $\text{LM}(\Sigma_1^1)$ об измеримости всех Σ_1^1 -множеств равносильна любому из следующих двух утверждений:

- (i) $\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \exists \varphi \in \mathcal{S} (x \in^* \varphi \text{ для всех } x \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$;
- (ii) $\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\text{множество } \mathbb{L}[a] \cap \ell_1 \text{ финально ограничено в } \ell_1)$.

Доказательство. Мы доказываем теорему по схеме

$$\text{LM}(\Sigma_2^1) \implies (i) \implies (ii) \implies \text{LM}(\Sigma_2^1).$$

Часть 1: импликация $\text{LM}(\Sigma_2^1) \implies (i)$. Напомним, что отображение $\langle i, j \rangle \mapsto \llbracket i, j \rrbracket$ (см. определение 4.2.1) является рекурсивной биекцией из $\mathbb{N}^2$ на $\mathbb{N}$. Фиксируем точку $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Наша задача на этом этапе доказательства состоит в том, чтобы найти такую функцию $\varphi \in \mathcal{S}$, что $x \in^* \varphi$ для всех $x \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Рассмотрим вероятностную меру μ на $2^{\mathbb{N}}$, заданную тем, что каждое множество $A_{ij} = \{b \in 2^{\mathbb{N}} : b(\llbracket i, j \rrbracket) = 1\}$ удовлетворяет равенству $\mu(A_{ij}) = (i+1)^{-2}$, и эти множества совместно независимы в смысле меры μ . Если $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то пусть $G_x = \limsup_{i \rightarrow \infty} A_{i, x(i)} = \bigcap_i \bigcup_{j \geq i} A_{i, x(i)}$. Тогда мы имеем $\mu(G_x) = 0$ по лемме Бореля – Кантелли 12.1.4(i), так как $\sum_i \mu(A_{i, x(i)}) = \sum_i (i+1)^{-2} < \infty$.

Из предположения $\text{LM}(\Sigma_2^1)$ следует, по теореме 10.2.1, что множество $\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]$ всех точек, случайных над $\mathbb{L}[a]$, удовлетворяет неравенству $\lambda(\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]) = 1$. Отсюда, уже для меры μ , получаем равенство $\mu(\mathbf{Rand}_\mu \mathbb{L}[a]) = 1$, согласно теореме 10.5.3(iii). Значит, найдется замкнутое множество $B \subseteq \mathbf{Rand}_\mu \mathbb{L}[a]$ положительной μ -меры. Заметим, что если $x \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то G_x — борелевское (даже $\mathbf{G}_\delta$) множество с кодом из $\mathbb{L}[a]$, причем $\mu(G_x) = 0$, см. выше. Поэтому $\mathbf{Rand}_\mu \mathbb{L}[a] \cap G_x = \emptyset$, а значит и $B \cap G_x = \emptyset$, для всех $x \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Понятно, что $T = \{b \upharpoonright m : b \in B \wedge m \in \mathbb{N}\} \subseteq 2^{<\omega}$ — совершенное дерево, причем $B = \llbracket T \rrbracket = \{b \in 2^{\mathbb{N}} : \forall m (b \upharpoonright m \in T)\}$, и можно не ограничивая общности предполагать что неравенство $\mu([s] \cap B) > 0$ выполнено для всех кортежей $s \in T$, где, напомним, если $s \in 2^{<\omega}$ то $[s] = \{b \in 2^{\mathbb{N}} : s \subset b\}$ — «канторов интервал» в $2^{\mathbb{N}}$.

Утверждается что множество $\varphi_s(i) = \{j : B \cap [s] \cap A_{ij} = \emptyset\}$ конечно при $s \in T$ и $i \in \mathbb{N}$. В самом деле, если $j \in f_s(i)$ то $B \cap [s] \subseteq 2^{\mathbb{N}} \setminus A_{ij}$, поэтому, коль скоро множества A_{ij} , $i \in \varphi_s(i)$, независимы в смысле меры и имеют каждое одну и ту же меру $\frac{1}{(i+1)^2}$, мы имели бы $\mu(B \cap [s]) = 0$ в предположении, что множество $\varphi_s(i)$ бесконечно.

Теперь мы утверждаем, что каждая функция φ_s является медленным отображением, т. е. $\sum_i \frac{\#\varphi_s(i)}{(i+1)^2} < \infty$. В самом деле,

$$\sum_i \frac{\#\varphi_s(i)}{(i+1)^2} = \sum_{i \in \mathbb{N}, j \in \varphi_s(i)} \frac{1}{(i+1)^2} = \sum_{i \in \mathbb{N}, j \in \varphi_s(i)} \mu(A_{ij}).$$

Поэтому если $\sum_i \frac{\#\varphi_s(i)}{(i+1)^2} = \infty$ то согласно лемме Бореля – Кантелли 12.1.4(ii) мы получаем $\mu(\limsup_{i \in \mathbb{N}, j \in \varphi_s(i)} A_{ij}) = 1$, но с другой стороны множество $B \cap [s]$ положительной меры не пересекается с A_{ij} при $j \in \varphi_s(i)$, и получается противоречие. Итак, $\varphi_s \in \mathcal{S}$ для всех s .

Далее, утверждается, что существует *одна* такая функция $\varphi \in \mathcal{S}$, что $\varphi_s \subseteq^* \varphi$, каков бы ни был кортеж $s \in T$. Прежде всего, при любом k , функция $\varphi_k(i) = \bigcup_{s \in T, 1 \leq s \leq k} \varphi_s(i)$ — медленная, как конечная сумма медленных функций φ_s . Поэтому существует возрастающая последовательность чисел $m_0 < m_1 < m_2 < \dots$ такая что выполнено неравенство $\sum_{i > m_k} \frac{\#\varphi_k(i)}{(i+1)^2} \leq \frac{1}{(k+1)^2}$. Остается определить $\varphi(i) = \varphi_k(i)$ при $m_k \leq i < m_{k+1}$.

Покажем что φ — искомая функция. Возьмем произвольную точку $x \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда $B \cap G_x = \emptyset$ (см. выше).

Лемма 12.2.2. *Найдутся кортеж $s \in T$ и число j , для которых $B \cap [s] \cap (\bigcup_{i \geq j} A_{i,x(i)}) = \emptyset$.*

Доказательство (лемма). Предположим противное, т. е. пусть $B \cap [s] \cap (\bigcup_{i \geq j} A_{i,x(i)}) \neq \emptyset$ для всех $s \in T$ и $j \in \mathbb{N}$. Мы построим последовательность кортежей $s_0 \subset s_1 \subset s_2 \subset \dots$ из T и натуральных чисел $i_0 < i_1 < i_2 < \dots$, для которых

$$(*) \quad [s_n] \subseteq A_{i_n, x(i_n)} \text{ и } B \cap [s_n] \cap A_{i_n, x(i_n)} \neq \emptyset \text{ для всех } n.$$

Если это выполнено, то точка $b = \bigcup_n s_n \in 2^{\mathbb{N}}$ принадлежит множеству $B \cap \bigcap_n A_{i_n, x(i_n)} \subseteq B \cap G_x$, что противоречит равенству $B \cap G_x = \emptyset$. Итак, остается выполнить указанное построение.

Для начала построения, заметим, что по предположению противного, при $s = \Lambda$, найдется индекс i_0 , для которого $B \cap A_{i_0, x(i_0)} \neq \emptyset$. Однако по определению множество $A_{i_{n+1}, x(i_{n+1})}$ открыто-замкнуто. Следовательно, найдется кортеж $s_0 \in 2^{<\omega}$ такой, что $[s_0] \subseteq A_{i_0, x(i_0)}$, и всё ещё $B \cap [s_0] \cap A_{i_0, x(i_0)} \neq \emptyset$.

Теперь допустим, что кортеж $s_n \in T$ и индекс i_n уже построены, так что условие $(*)$ выполнено. По предположению противного, найдется такой индекс $i_{n+1} > i_n$, что $B \cap [s_n] \cap A_{i_{n+1}, x(i_{n+1})} \neq \emptyset$. Но множество $A_{i_{n+1}, x(i_{n+1})}$ само открыто-замкнуто. Следовательно, найдется кортеж $s_{n+1} \in 2^{<\omega}$ такой, что $s_n \subset s_{n+1}$, $[s_{n+1}] \subseteq A_{i_{n+1}, x(i_{n+1})}$, и $B \cap [s_{n+1}] \cap A_{i_{n+1}, x(i_{n+1})} \neq \emptyset$, что и требовалось. $\square$ (лемма)

Но если s и j таковы, как в лемме, то по определению $x(i) \in \varphi_s(i)$ для всех $i \geq j$, так что $x \in^* \varphi_s \subseteq^* \varphi$, что и требовалось.

Часть 2: импликация (i) $\implies$ (ii). Опять фиксируем точку $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Требуется найти функцию $h \in \ell_1$, удовлетворяющую неравенству $x \leq^* h$ для всех точек $x \in \mathbb{L}[a] \cap \ell_1$.

Для начала, выберем функцию $\varphi \in \mathcal{S}$, принимающую значения среди конечных множеств $u \subseteq \mathbb{N}$, в согласии с предположением (i), так что $x \in^* \varphi$ для всех $x \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Положим $y(n) = \sup \varphi(n)$, $\forall n$ — тогда $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $x \leq^* y$ для любой точки $x \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Этим,

однако, задача не решена: в самом деле, построением никак не гарантировано, что $y \in \ell_1$.

Пусть теперь $f \in \mathbb{L}[a] \cap \ell_1$. Существует такая точка $y_f \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $\sum_{i \geq y_f(n)} f(i) \leq 2^{-n}$ для всех n . При этом $y_f \leq^* y$ по выбору y .

Далее, если $f \in \mathbb{L}[a] \cap \ell_1$ и $n \in \mathbb{N}$ то определим кортеж

$$f'(n) = f \upharpoonright [y(n), y(n+1)) = \langle f(y(n)), f(y(n) + 1), \dots, f(y(n+1) - 1) \rangle$$

рациональных чисел, т. е. получается функция $f' \in \mathbb{L}[a, y]$, $f' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_+^{\leq \omega}$. Применяя предположение (i) над моделью $\mathbb{L}[a, y]$, мы находим такую функцию $\psi \in \mathcal{S}$, что $f' \in^* \psi$ для любой $f \in \mathbb{L}[a] \cap \ell_1$. Тогда $\sum_n \frac{\#\psi(n)}{(n+1)^2} < \infty$, так что можно считать, что $\#\psi(n) \leq n^2$ для всех n . Удалим из каждого значения $\psi(n)$ — а это конечное множество — все те его элементы, которые **не** являются кортежами вида $s : [y(n), y(n+1)) \rightarrow \mathbb{Q}_+$, удовлетворяющими неравенству $\sum_{y(n) \leq i < y(n+1)} s(i) \leq 2^{-n}$, и пусть $\chi(n) \subseteq \psi(n)$ — полученное меньшее множество; всё еще $\#\chi(n) \leq n^2$ для всех n .

Лемма 12.2.3. *Если $f \in \mathbb{L}[a] \cap \ell_1$, то $f' \in^* \chi$.*

Доказательство (лемма). Мы имеем $y_f \leq^* y$, так что $y_f(n) \leq y(n)$ для почти всех n , и потому $\sum_{i \geq y(n)} f(i) \leq 2^{-n}$ для почти всех n , и тем более $\sum_{y(n) \leq i < y(n+1)} f(i) \leq 2^{-n}$ для почти всех n . А с другой стороны, $f' \in^* \psi$, т. е. $f'(n) = f \upharpoonright [y(n), y(n+1)) \in \psi(n)$ для почти всех n . Отсюда и следует искомый результат. $\square$ (лемма)

Продолжая доказательство теоремы (часть 2), положим $h(i) = \sup_{s \in \chi(n)} s(i)$ при $y(n) \leq i < y(n+1)$. В наших предположениях,

$$\sum_i h(i) \leq \sum_n \sum_{s \in \chi(n)} \sum_{y(n) \leq i < y(n+1)} s(i) \leq \sum_n n^2 2^{-n} < \infty,$$

так что $h \in \ell_1$. Мы утверждаем теперь, что $f \leq^* h$ для любой функции $f \in \mathbb{L}[a] \cap \ell_1$. В самом деле, прежде всего, $f' \in^* \chi$ по лемме, так что $f \upharpoonright [y(n), y(n+1)) \in \chi(n)$ для почти всех n — а тогда, очевидно, $f(i) \leq h(i)$ для почти всех n и всех i из интервала $y(n) \leq i < y(n+1)$, откуда $f \leq^* h$.

Часть 3: импликация (ii) $\implies \text{LM}(\Sigma_2^1)$. Здесь сначала доказывалась следующая лемма, имеющая дело с той вероятностной мерой λ на $2^{\mathbb{N}}$, которая определена в примере 6.1.1.

Лемма 12.2.4. *Если $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, $\lambda(X) = 0$, и $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то найдется последовательность открыто-замкнутых множеств $C_n \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ такая что $\lambda(C_n) < \varepsilon_n$ и $X \subseteq \limsup_n C_n$.*

Доказательство. Прежде всего, найдется система канторовых интервалов $I_{kl} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, для которой $X \subseteq \bigcap_k \bigcup_l I_{kl}$ и $\sum_l \lambda(I_{kl}) < \varepsilon_0 2^{-k-1}$ для всех k . Перенумеруем интервалы: пусть $\{J_n : n \in \mathbb{N}\} = \{I_{kl} : k, l \in \mathbb{N}\}$. Тогда $\sum_n \lambda(J_n) < \varepsilon_0$ и $X \subseteq \limsup_n J_n$.

Теперь положим, для любого n , $k_n = \min\{k : \sum_{m \geq k} \lambda(J_m) \leq \varepsilon_n\}$ и $C_n = \bigcap_{k_n \leq k < k_{n+1}} J_k$ — это доказывает лемму. $\square$ (лемма)

Приступая к доказательству импликации (ii) $\implies \text{LM}(\Sigma_2^1)$ в теореме, мы возьмем произвольное $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и докажем что выполнено равенство $\lambda(\text{Rand } \mathbb{L}[a]) = 1$ — этого достаточно по теореме 10.2.1. В каждом классе вида $\mathbb{L}[a]$, $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, верна континуум-гипотеза (см. § 8.4), а потому имеется перечисление в виде $\{X_\xi : \xi < \omega_1\}$ всех борелевских множеств $X \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ λ -меры 0, имеющих коды в $\mathbb{L}[a]$. Нам же требуется доказать, что $\lambda(\bigcup_\xi X_\xi) = 0$.

Напомним, что, вследствие компактности, каждое открыто-замкнутое множество $C \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ является конечным объединением канторовых интервалов $[s] = \{a \in 2^{\mathbb{N}} : s \subset a\}$, $s \in 2^{<\omega}$. Поэтому число всех открыто-замкнутых множеств $C \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ счетно. Фиксируем перечисление $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ всех открыто-замкнутых подмножеств $2^{\mathbb{N}}$, которое очевидным образом возникает из некоторого рекурсивного перечисления кортежей из $2^{<\omega}$. Используя лемму 12.2.4 в $\mathbb{L}[a]$, мы находим, ко всякому $\xi < \omega_1$, такую точку $x_\xi \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $X_\xi \subseteq \limsup_n C_{x_\xi(n)}$ и $\lambda(C_{x_\xi(n)}) < 2^{-n}$ для всех n . Положим $f_\xi(k) = \lambda(C_k)$ в случае когда $k \in \text{ran } x_\xi = \{x_\xi(n) : n \in \mathbb{N}\}$, а иначе $f_\xi(k) = 0$. Тогда все f_ξ принадлежат $\ell_1 \cap \mathbb{L}[a]$, так что, по предположению (ii), найдется такая функция $f \in \ell_1$, что $f_\xi \leq^* f$ для любого индекса ξ .

Положим $K = \{k : f(k) \geq \lambda(C_k)\}$, и пусть $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ осуществляет перечисление всех элементов множества K в порядке возрастания. Заметим, что $\sum_n \lambda(C_{x(n)}) = \sum_{k \in K} \lambda(C_k) \leq \sum_k f(k) < \infty$ (поскольку $f \in \ell_1$), откуда, по лемме Бореля – Кантелли 12.1.4, следует, что множество $X = \limsup_n C_{x(n)}$ удовлетворяет $\lambda(X) = 0$.

Остается проверить, что $X_\xi \subseteq X$ при любом $\xi < \omega_1$. Пусть $z \in X_\xi$. Тогда множество $K_\xi = \{k \in \text{ran } x_\xi : z \in C_k\}$ бесконечно, причем $\lambda(C_k) = f_\xi(k) \leq f(k)$ для почти всех $k \in K_\xi$, так что, по определению K , множество $\{k \in K : z \in C_k\}$ бесконечно. Отсюда следует $z \in X$, что и требовалось.

$\square$ (теорема 12.2.1)

§ 12.3 Финальное доминирование и категория

Из нескольких известных результатов для свойства $\text{BP}(\Sigma_2^1)$, аналогичных теореме 12.2.1 (см. обзор в [64, 2.2 и 2.4]), для нас наиболее

полезна следующая теорема [64, 9.3.3], соединяющая в себе несколько отдельных более ранних результатов.

Теорема 12.3.1. *Предположим $\text{BP}(\Delta_2^1)$. Тогда более сильная гипотеза $\text{BP}(\Sigma_2^1)$ равносильна тому, что каждое множество вида $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, финально ограничено в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Доказательство. Часть 1. Допустим что выполнена гипотеза $\text{BP}(\Sigma_2^1)$, и рассмотрим произвольную точку $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Согласно теореме 10.2.1, множество $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ всех точек, коэновских над $\mathbb{L}[a]$, является котошим в пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Если $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то положим

$$f'(k) = 1 + \max_{i \leq k} f(i) \text{ для всех } k, \quad \text{и} \quad \Phi(f) = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : x \leq^* f'\}.$$

Упражнение 12.3.2. Докажите, что если $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ то множество $\{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : x \leq^* y\}$ — борелевское, даже класса $\Delta_1^1(y)$, и тощее. $\square$

Таким образом, множество $\Phi(f)$ — тощее при любом f . Более того, если $f \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то $\Phi(f)$ — борелевское множество с кодом из $\mathbb{L}[a]$ согласно следствию 5.9.5, так что в этом случае по определению $\Phi(f) \cap \mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] = \emptyset$. Однако по предположению множество $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ является котошим. Значит, найдется $\mathbf{F}_\sigma$ -множество $Z = \bigcup_n Z_n \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ такое что каждое Z_n — замкнутое и нигде не плотное множество, и $\Phi(f) \subseteq Z$ для всех $f \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Используя это множество Z , мы определим, индукцией по n , число $k_n \in \mathbb{N}$ и кортеж $s_n \in \mathbb{N}^{<\omega}$ следующим образом.

Положим $k_0 = 0$.

Допустим, что значение k_n уже определено. Коль скоро множества Z_j нигде не плотны, найдется такой кортеж $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, что мы имеем $[t^\wedge s] \cap Z_j = \emptyset$ всякий раз когда $j \leq n$, а кортеж $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ удовлетворяет $\text{lh } t = k_n$ и $\text{ran } t \subseteq [0, k_n)$. (Здесь $[t^\wedge s] = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : t^\wedge s \subset x\}$ — уже, естественно, бэровский интервал в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.) Возьмем в качестве s_n один из таких кортежей $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, и определим

$$k_{n+1} = k_n + 1 + \text{lh } s_n + \max s_n, \quad \text{где} \quad \max s_n = \max_{i < \text{lh } s_n} s_n(i),$$

чем и заканчивается индуктивный шаг определения s_n и k_n .

Теперь, если $n \in \mathbb{N}$, то положим $h(n) = \max s_n$, и докажем, что неравенство $f \leq^* h$ выполнено для любой точки $f \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Пусть напротив, $f \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, но $N = \{n : f(n) > h(n)\}$ — бесконечное множество. Пусть $N = \{n_j : j \in \mathbb{N}\}$ — перечисление множества N в порядке возрастания. Определим точку $z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ равенством

$$z = u_0 \wedge s_{n_0} \wedge u_1 \wedge s_{n_1} \wedge \dots \wedge u_j \wedge s_{n_j} \dots,$$

где u_j — кортеж из $k_{n_j} - k_{n_{j-1}} - 1$ нулей (или просто из k_{n_0} нулей при $j = 0$), так что перед каждым блоком s_{n_j} всегда стоит кортеж в точности из k_{n_j} натуральных чисел. Отсюда следует, по определению s_n , что при любом j кортеж $\sigma_j = u_0 \wedge s_{n_0} \wedge \dots \wedge u_j \wedge s_{n_j}$ удовлетворяет $[\sigma_n] \cap Z_n = \emptyset$, и поэтому точка z не принадлежит множеству $Z = \bigcup_n Z_n$.

По выбору Z , для получения противоречия остается доказать, что $z \in \Phi(f)$, другими словами, $z \leq^* f'$. По построению, каждое значение $z(m)$ есть либо 0 либо число вида $s_{n_i}(\ell)$, где $\ell < 1 \# s_{n_i}$ и $m = k_{n_i} + \ell$, так что $k_{n_i} \leq m < k_{n_i} + 1 \# s_{n_i}$. Во втором случае, мы имеем

$$z(m) \leq \max s_{n_i} = \underbrace{h(n_i)}_{\text{так как } n_i \in N} < f(n_i) \leq f'(m),$$

что и требовалось.

Часть 2. Обратно, допустим что выполнена гипотеза $\text{BP}(\Delta_2^1)$, и каждое множество вида $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, финально ограничено в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Фиксируем $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и докажем, что множество $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ — коточее; этого достаточно для $\text{LM}(\Sigma_2^1)$ согласно следствию 10.2.2.

Для начала заметим, что, опять согласно 10.2.2, $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset$; фиксируем произвольную точку $b \in \mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$. Пусть C — множество всех таких точек $c \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что соответствующее замкнутое множество $\mathbb{F}[c] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{c(n)=1} [c]$ (см. § 5.7A) нигде не плотно в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда $b \notin \bigcup_{c \in C} \mathbb{F}[c]$ по теореме 10.4.2.

Далее, множество X всех таких точек $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $x(n) = b(n)$ для почти всех n , счетно; пусть $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ — перечисление его элементов в $\mathbb{L}[a, b]$. Из сказанного выше следует, что $X \cap \mathbb{F}[c] = \emptyset$ для любого $c \in C$. Через $h_c(n)$ обозначим наименьшее такое число k , что бэровский интервал $[x_n \upharpoonright k]$ не пересекает замкнутое множество $\mathbb{F}[c]$. Таким образом, $h_c \in \mathbb{L}[a, b] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Однако в наших предположениях множество $\mathbb{L}[a, b] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ финально ограничено, т. е. найдется такая точка $z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $h_c \leq^* z$ для каждой точки $c \in C$. Отсюда следует, что плотное $\mathbf{G}_\delta$ -множество $G = \bigcap_m \bigcup_{n \geq m} [x_n \upharpoonright z(n)]$ не пересекает $\mathbb{F}[c]$ при $c \in C$, следовательно, включено в $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ по теореме 10.4.2. $\square$

§ 12.4 Измеримость влечет свойство Бэра для Σ_2^1 -множеств

Здесь доказывается следующая теорема — главный результат этой главы, отмеченный одной из стрелок-импликаций на диаграмме со

стр. 135. В основе доказательства этого результата лежат предшествующие теоремы 12.2.1 и 12.3.1.

Теорема 12.4.1 (Райзонье и Стерн [155]). *Гипотеза $\text{LM}(\Sigma_2^1)$ влечет $\text{BP}(\Sigma_2^1)$, т. е. если все Σ_2^1 -множества измеримы то все они имеют и свойство Бэра.*

Как будет показано ниже в главе 14, обратная импликация не имеет места, т. е. гипотеза $\text{BP}(\Sigma_2^1)$ **не** влечет $\text{LM}(\Sigma_2^1)$. Это является наглядным нарушением той дуальности свойств меры и категории, которая прослеживается во многих других случаях. В то же время теорему вряд ли можно рассматривать как связь между мерой вообще и категорией вообще — в самом деле, она не верна, например, для классов Δ_2^1 и Δ_3^1 (см. ниже), так что на самом деле речь идет о свойстве, весьма специфическом именно для класса Σ_2^1 , технической основой которого является связь со свойствами финального доминирования.

Доказательство. Предполагая $\text{LM}(\Sigma_2^1)$, фиксируем произвольную точку $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда, по теореме 10.2.1, мы имеем $\lambda(\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]) = 1$, а требуется доказать, что $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ является котошим множеством — другими словами, что объединение всех нигде не плотных замкнутых подмножеств $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ с кодом из $\mathbb{L}[a]$ — тощее множество. В силу того, что пространство $2^{\mathbb{N}}$ содержит плотное $\mathbf{G}_\delta$ -множество

$$U = \{x \in 2^{\mathbb{N}} : \text{множество } \{n : x(n) \neq 0\} \text{ бесконечно}\},$$

гомеоморфное пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, это утверждение достаточно доказать для пространства $2^{\mathbb{N}}$ вместо $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Положим

$$C = \{c \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \mathbb{F}[c] \subseteq 2^{\mathbb{N}} \wedge \mathbb{F}[c] \text{ нигде не плотно}\}.$$

Лемма 12.4.2. *Множество C принадлежит классу $\mathbb{L}[a]$.*

Доказательство (набросок). Докажите, что соотношение, определяющее C , выражается подходящей арифметической формулой — которая, очевидно, абсолютна для $\mathbb{L}[a]$. $\square$ (лемма)

Согласно теореме 10.4.2, для вывода теоремы 12.4.1 достаточно доказать, что объединение $\bigcup_{c \in C} \mathbb{F}[c]$ есть тощее множество в $2^{\mathbb{N}}$. На самом деле мы построим такое плотное $\mathbf{G}_\delta$ -множество в пространстве $2^{\mathbb{N}}$, которое дизъюнктно с каждым множеством вида $\mathbb{F}[c]$, где $c \in C$ — чего достаточно для доказательства теоремы. Но для этого ещё придется поработать.

Прежде всего, если $n \in \mathbb{N}$, то в этом параграфе 2^n будет обозначать множество всех диадических (т. е. с членами 0 и 1) кортежей

длины ровно n . (Путаницы с арифметической степенью не будет.) Если $m, n \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in 2^m$, то положим

$$X_\sigma(n) = \bigcup_{s \in 2^n} [s^\wedge \sigma] = \{z \in 2^\mathbb{N} : \forall i < m (z(n+i) = \sigma(i))\}.$$

Понятно, что если $c \in C$ и $n \in \mathbb{N}$, то вследствие замкнутости множества $\mathbb{F}[c]$ и конечности 2^n найдется такой кортеж $\sigma \in 2^{<\omega}$, что, каков бы ни был кортеж $s \in 2^n$, множество $[s^\wedge \sigma] = \{a \in 2^\mathbb{N} : s^\wedge \sigma \subset a\}$ не имеет общих точек с $\mathbb{F}[c]$ — другими словами, $X_\sigma(n) \cap \mathbb{F}[c] = \emptyset$. (Для кортежей из $\mathbb{N}^{<\omega}$ такое построение не прошло бы!) Обозначим через σ_c^n такой кортеж σ наименьшей возможной длины, а среди кортежей именно этой длины — лексикографически самый «левый», а через $k_c(n)$ — его длину $\text{lh } \sigma_c^n$, так что $k_c \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Таким образом, по построению, множество $X_{\sigma_c^n}(n)$ всё еще не пересекает $\mathbb{F}[c]$.

Согласно теореме 12.2.1, найдется функция $\varphi \in \mathcal{S}$ такая, что $x \in^* \varphi$ (т. е. $x(n) \in \varphi(n)$ для почти всех n), какова бы ни была точка $x \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Если $c \in C$, то по определению $c \in \mathbb{L}[a]$, а тогда и $k_c \in \mathbb{L}[a]$, так что $k_c \in^* \varphi$. Можно считать, что все значения $\varphi(i)$ функции φ — это конечные множества $u \subseteq \mathbb{N}$. Но в этом случае, функция $g \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, определенная равенством $g(i) = 1 + \max_{i' \leq i} \max \varphi(i')$, для всех i , также удовлетворяет $k_c \leq^* g$ для всех $c \in C$.

Заметим, что $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — возрастающая функция. Положим $e_0 = 0$, и далее, индукцией по ℓ , $e_{\ell+1} = g(e_\ell)$. Определим $d(\ell) = e_{\ell+1} - e_\ell$. Пусть теперь $c \in C$. Для всякого значения ℓ , если $e_{\ell+1} \geq k_c(e_\ell)$ (а это будет для почти всех ℓ , поскольку функция g эвентуально доминирует функцию k_c) то по определению k_c найдется такой кортеж $\tau \in 2^{d(\ell)}$ (т. е. длины $\text{lh } \tau = d(\ell)$), что множество $X_\tau(e_\ell)$ не имеет общих точек с $\mathbb{F}[c]$. Обозначим через $\tau_c(\ell)$ лексикографически самый «левый» в $2^{d(\ell)}$ кортеж τ с таким свойством. Если же $e_{\ell+1} < k_c(e_\ell)$ (а это выполнено для конечно многих ℓ), то пусть, для определенности, $\tau_c(\ell) \in 2^{d(\ell)}$ состоит из одних нулей. Таким образом, мы имеем функцию $\tau_c : \mathbb{N} \rightarrow 2^{<\omega}$, и $\tau_c(\ell) \in 2^{d(\ell)}$ для всех ℓ .

Лемма 12.4.3. Пусть $c \in C$. Тогда для почти всех $\ell \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $X_{\tau_c(\ell)}(e_\ell) \cap \mathbb{F}[c] = \emptyset$.

Доказательство (лемма). Указанное утверждение по определению выполнено для всех таких ℓ , что $e_{\ell+1} \geq k_c(e_\ell)$. $\square$ (лемма)

Лемма 12.4.4. Найдется такая функция $h : \omega \rightarrow 2^{<\omega}$, что, для любого $c \in C$, множество $\{\ell : \tau_c(\ell) = h(\ell)\}$ бесконечно.

Приняв эту лемму (а ее доказательство вынесено в отдельный параграф), мы закончим доказательство теоремы 12.4.1. Рассмотрим

функцию h , даваемую леммой. Учитывая определение функций τ_c , можно считать, что $h(\ell) \in 2^{d(\ell)}$ при любом ℓ . Рассмотрим точку

$$z = h(0) \wedge h(1) \wedge h(2) \wedge \dots \in 2^{\mathbb{N}}.$$

Обозначим через $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ множество всех таких точек $z' \in 2^{\mathbb{N}}$, что $z'(k) = z(k)$ для почти всех k . Если теперь $c \in C$, то по выбору h для бесконечно многих ℓ истинно $z \in X_{\tau_c(\ell)}(d(\ell))$, и тем самым, каково бы ни было n , для бесконечно многих ℓ истинно $z_n \in X_{\tau_c(\ell)}(d(\ell))$. Отсюда $z_n \notin \mathbb{F}[c]$ по лемме 12.4.3, и потому найдется число j такое что $[z_n \upharpoonright j] \cap \mathbb{F}[c] = \emptyset$. Пусть, для $c \in C$ и $n \in \mathbb{N}$, $j_c(n)$ обозначает наименьшее из таких чисел j .

Если $c \in C$, то $j_c \in \mathbb{L}[a, z]$. Поэтому, как и выше, найдется возрастающая функция $r \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, доминирующая каждую j_c , $c \in C$, т. е. $j_c \leq^* r$. Положим $U_n = [z_n \upharpoonright r(n)]$.

Из плотности самого множества Z следует, что $\mathbf{G}_\delta$ -множество $U = \limsup_n Z_n$ также плотно в $2^{\mathbb{N}}$, и, следовательно, является тощим. Мы утверждаем, что $U \cap \mathbb{F}[c] = \emptyset$ для любого $c \in C$. В самом деле, пусть $y \in U$. Множество $N = \{n : y \upharpoonright r(n) = z_n \upharpoonright r(n)\}$ бесконечно по определению. Следовательно, по выбору r , бесконечно и множество $N_c = \{n : y \upharpoonright j_c(n) = z_n \upharpoonright j_c(n)\}$. В частности, $N_c \neq \emptyset$. Берем любое $n \in N_c$ — тогда сразу $y \upharpoonright j_c(n) = z_n \upharpoonright j_c(n)$, откуда по определению $j_c(n)$ следует $y \notin \mathbb{F}[c]$, что и требовалось.

□ (теорема 12.4.1)

§12.5 Доказательство ключевой леммы

Этот параграф содержит доказательство леммы 12.4.4. Все обозначения §12.4 сохраняются.

По теореме 12.2.1, найдется функция $\eta \in \mathcal{S}$, для которой $\tau_c \in^* \eta$ всякий раз когда $c \in C$. Можно считать что $\eta(\ell) \subseteq 2^{d(\ell)}$, т. е. $\eta(\ell)$ состоит из диадических кортежей длины ровно $d(\ell)$, где, напомним, $d(\ell) = e_{\ell+1} - e_\ell$ при любом ℓ .

Снабдим пространство $\Omega = \prod_{\ell \in \omega} \eta(\ell)$ мерой μ , которая является произведением однородных вероятностных мер на (конечных) множествах $\eta(\ell)$. Положим $A_\ell^\sigma = \{w \in \Omega : w(\ell) = \sigma\}$ для $\ell \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in \eta(\ell)$. Эти множества, очевидно, независимы в смысле меры μ . Кроме того, если $v \in \Omega$, то $\sum_\ell \mu(A_\ell^{v(\ell)}) = \sum_\ell \frac{1}{\#\eta(\ell)} = \infty$ (по лемме 12.1.3), откуда лемма Бореля — Кантелли 12.1.4 позволяет заключить, что множество $Y_v = \limsup_{\ell \in \mathbb{N}} A_\ell^{v(\ell)}$ имеет μ -меру 1.

Теперь возьмем такую точку $a_1 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ что как a (см. начало доказательства теоремы) так и η принадлежат классу $\mathbb{L}[a_1]$. Тогда $\tau_c \in \mathbb{L}[a_1]$ для любого $c \in C$.

Сублемма 1. Пересечение $\bigcap_{v \in \Omega \cap \mathbb{L}[a_1]} Y_v$ непусто.

Доказательство (сублемма). Идея состоит в том, что

- (1) $\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a_1] \neq \emptyset$, тем самым, и $\mathbf{Rand}_\mu \mathbb{L}[a_1] \neq \emptyset$ (см. теорему 10.5.3(iii)), так что найдется точка $h \in \Omega$ из $\mathbf{Rand}_\mu \mathbb{L}[a_1]$, и
- (2) если $v \in \Omega \cap \mathbb{L}[a_1]$, то множество Y_v , имеет полную меру и класс $\Delta_1^1(a_1, v)$ — откуда следует, что $h \in Y_v$ по теореме 10.4.2(4').

Цело, однако, в том, что теорема 10.5.3 и даже само определение 10.1.1 формально неприменимы в данном контексте, так как рассматриваемые множества **не** расположены в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и мера μ **не** является мерой на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Точнее говоря, наша основная область, т. е. множество

$$\Omega = \{x \in (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}} : x(\ell) \in \eta(\ell) \text{ для всех } \ell \in \mathbb{N}\}$$

расположено в пространстве $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$.

В то же время, отображение $n \mapsto \mathbf{s}_n$ (т. е. биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^{<\omega}$, см. определение 4.2.1) индуцирует биекцию (и гомеоморфизм) $H(a) = \gamma_{\{a\}}$ из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$ (см. определение 4.6.1), так что если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то $v = H(a) \in (\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет $v(k) = \mathbf{s}_{a(k)}$ для всех k .

Теперь положим $\eta'(\ell) = \{k : \mathbf{s}_k \in \eta(\ell)\}$ для каждого ℓ , так что $\eta'(\ell) \subseteq \mathbb{N}$ конечно, и отображение $\eta' : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ принадлежит $\mathcal{S}$ вместе с η . На соответствующем множестве

$$\Omega' = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : H(a) \in \Omega\} = \prod_{\ell \in \mathbb{N}} \eta'(\ell) = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall \ell (a(\ell) \in \eta'(\ell))\}$$

мы рассматриваем вероятностную меру μ' , равную произведению однородных вероятностных мер на множествах $\eta'(\ell)$, так что $\mu'(X) = \mu(H[X])$ для любого борелевского $X \subseteq \Omega'$.

Дополним меру μ' до вероятностной меры на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ через $\mu'(\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \Omega') = 0$. По определению код $\text{Cod}_{<}(\mu')$ этой меры принадлежит классу $\mathbb{L}[\eta] \subseteq \mathbb{L}[a_1]$, так что теорема 10.5.3(iii) уже применима как в (1), принося нам точку $h' \in \Omega'$ из $\mathbf{Rand}_{\mu'} \mathbb{L}[a_1]$ и, соответственно, $h = H(h') \in \Omega$. Однако если $v \in \Omega \cap \mathbb{L}[a_1]$, то множество $Y'_v = H^{-1}[Y_v] \subseteq \Omega'$ имеет μ' -меру 1. Кроме того, можно проверить, что $Y'_v \in \Delta_1^1(\eta, v)$, т. е. $Y'_v \in \Delta_1^1(p)$ для подходящего параметра $p \in \mathbb{L}[a_1] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Отсюда следует $h' \in Y'_v$ по теореме 10.4.2(4'), и тогда $h \in Y_v$. $\square$ (сублемма)

Теперь любая функция $h \in \bigcap_{v \in \Omega \cap \mathbb{L}[a_1]} Y_v$ доказывает лемму. В самом деле, пусть $c \in C$. Определим $v \in \Omega$ так, что $v(\ell) = \tau_c(\ell)$ при $\tau_c(\ell) \in \eta(\ell)$ — а это будет для почти всех ℓ по выбору η , и $v(\ell) \in \eta(\ell)$ произвольно для оставшегося конечного числа значений ℓ . Тогда $v \in \Omega \cap \mathbb{L}[a_1]$ (поскольку $c \in C \in \mathbb{L}[a_1]$, так что и $\tau_c \in \mathbb{L}[a_1]$,

а v отличается от τ_c лишь конечным числом значений), и потому $h \in Y_v$. Значит, множество $\{\ell: h(\ell) = v(\ell)\}$ бесконечно — так что и множество $\{\ell: h(\ell) = \tau_c(\ell)\}$ бесконечно.

□ (лемма 12.4.4)

Исторические и библиографические замечания

Отношение финального доминирования $\leq^*$ восходит к старым работам Дюбуа-Раймона 70х годов XIX в., где подобные ему отношения использовались как инструмент изучения сравнительной скорости возрастания функций вещественного аргумента. См. об этом в обзоре [13]. В частности, Дюбуа-Раймон впервые дал доказательство утверждения о мажорировании счетных последовательностей, подобного лемме 12.1.2, хотя и для несколько иного частичного порядка.

Хаусдорф предпринял систематическое изучение отношений, подобных $\leq^*$ (он их называл *финальными*) в серии статей, опубликованных в 1900х годах, в частности, в [87],⁶ где впервые появилась его знаменитая теорема о (ω_1, ω_1) -щели, первоначально для другого, но близкого к $\leq^*$ частичного порядка этого типа. Теорема была передеказана Хаусдорфом уже именно для $\leq^*$ в работе [89], откуда она, собственно, и стала широко известной математической общественности, поскольку статья [87] с очевидностью опередила своё время, и, кроме того, появилась в достаточно провинциальном журнале. Там же в [87] впервые рассмотрены вопросы мажорирования множеств в областях отдельно *сходящихся* и *расходящихся* последовательностей — как, например, в доказательстве теоремы 12.2.1.

О теореме 12.2.1 см. также книгу [64, раздел 2.3].

Начиная с 60х годов, отношение $\leq^*$ (и близкие отношения вроде почти дизъюнктности множеств натуральных чисел) стали предметом многочисленных исследований, см., например, обзоры [13, 41, 76, 159]. Один из последних заслуживающих внимания результатов опубликован в заметке [109]. Оказывается, что в теории **ZF**, даже со (счетной) аксиомой выбора **DC** (см. § 2.2), невозможно доказать, что какой-либо из частичных предпорядков из достаточно широкого класса, включающего и $\leq^*$, имеет максимальную цепь!

⁶ Английские переводы этих замечательных ранних работ Хаусдорфа с обстоятельными комментариями см. в книге [90].

Глава 13

Абсолютно неразрешимые классические проблемы

В этой главе мы возвращаемся к вопросу о статусе, по отношению к аксиомам теории **ZFC**, тех главных проблем о свойствах регулярности проективных множеств, которые были введены в главе 7. Мы уже доказали утверждение (i) главной теоремы 7.2.1 о статусе этих проблем: это — теорема 8.8.1. Здесь мы докажем утверждение (ii) теоремы 7.2.1, а также и более сильное её утверждение (iii), согласно которому гипотеза о том, что каждое проективное множество имеет все три рассматриваемых свойства регулярности, не противоречит аксиомам **ZFC**.

Второй главный результат этой главы состоит в том, что даже предположив существование контрпримеров, мы не сможем вывести их «эффективное» существование, даже при том, очевидно, наиболее слабом понимании эффективности, которое означает $\in$ -определимость с ординалами в качестве параметров. Например, из существования неизмеримого Σ_2^1 -множества не следует существование неизмеримого множества в соответствующем эффективном классе Σ_2^1 , в любом классе Σ_n^1 , и даже в классе OD всех ординально определимых множеств, т. е. в наиболее широком из всех классов эффективно определимых объектов.

§ 13.1 Основные результаты и комментарии

Главным результатом этой главы будет следующая теорема, в которой **ZFCI** обозначает теорию **ZFC** + «существует строго недостижимый кардинал». О недостижимых кардиналах см. выше в § 2.7.

Теорема 13.1.1. *Если теория **ZFCI** непротиворечива то теории **ZFC** не противоречит гипотеза*

$$\text{PK}(\mathbf{ROD}) \wedge \text{BP}(\mathbf{ROD}) \wedge \text{LM}(\mathbf{ROD})$$

*о том, что все множества из **ROD** (в польских пространствах) имеют каждое из трех рассматриваемых свойств регулярности.*

Напомним, что класс **ROD** всех вещественно-ординально определенных множеств (см. § 3.5) включает все проективные множества.

Следствие 13.1.2 (= части (ii) и (iii) теоремы 7.2.1). *Допустим, что теория **ZFCI** непротиворечива. Тогда*

- (i) *предложение о том, что все проективные множества имеют свойство совершенного ядра, свойство Бэра, и измеримы в смысле любой борелевской σ -конечной меры, не противоречит **ZFC**, а потому, вследствие теоремы 8.8.1, это предложение неразрешимо в **ZFC**.*
- (ii) *следовательно, в силу теоремы 8.8.1, предложения*

$$\text{PK}(\Pi_1^1), \text{LM}(\Delta_2^1), \text{BP}(\Delta_2^1), \text{LM}(\Sigma_2^1), \text{BP}(\Sigma_2^1)$$

*(см. диаграмму со стр. 135) также непротиворечивы и неразрешимы в **ZFC**.* □

Мы упоминали после формулировки теоремы 7.2.1, что для доказательства её утверждений (ii) и (iii) придется допустить непротиворечивость более сильной теории **ZFCI** с недостижимым кардиналом. Остановимся на этом более подробно.

Из леммы 8.5.2 следует, что если гипотеза $\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\omega_1^{\mathbb{L}[a]} < \omega_1)$ не противоречит аксиомам **ZFC**, то существование строго недостижимого кардинала также непротиворечиво. Таким образом, согласно следствию 10.2.2(I), без использование недостижимых кардиналов совершенно невозможно обойтись в доказательстве непротиворечивости свойства совершенного ядра даже для Π_1^1 -множеств.

Вопрос о роли недостижимого кардинала для проблем меры и категории оказался значительно более сложным. Ответ различается для меры и категории, и дается следующей теоремой Шелаха [161] и Райзонье [154], доказательство которой слишком сложно чтобы его можно было здесь привести.

Теорема 13.1.3. *Из непротиворечивости теории **ZFC** следует непротиворечивость теорий $\mathbf{ZFC} + \mathbf{BP}(\Sigma_\infty^1)$ (свойство Бэра для всех проективных множеств) и даже $\mathbf{ZFC} + \mathbf{BP}(\mathbf{ROD})$ (свойство Бэра для всех **ROD** множеств).*

Однако любое из двух предположений $\mathbf{LM}(\Sigma_3^1)$, $\mathbf{LM}(\Sigma_2^1) \wedge \mathbf{BP}(\Sigma_3^1)$ влечет что $\aleph_1$ – недостижимый кардинал в $\mathbb{L}$, и в $\mathbb{L}[a]$ для каждого $a \in \mathbb{N}^{\aleph_1}$, и тем самым влечет $\mathbf{PK}(\Pi_1^1)$ по теореме 10.2.1(i). $\square$

Тем самым, аксиома недостижимого кардинала необходима для положительного решения проблемы измеримости для проективных (даже Σ_3^1) множеств, но без нее можно обойтись для положительного решения проблемы свойства Бэра. Впрочем, как показал Стерн [178], непротиворечивость гипотезы $\mathbf{LM}(\mathbf{OD})$ измеримости всех ординально определимых точечных множеств (без точек $a \in \mathbb{N}^{\aleph_1}$ в роли параметров определений!) уже не требует недостижимого кардинала.

Замечание 13.1.4. Недостижимый кардинал также не требуется для вывода непротиворечивости гипотез $\mathbf{LM}(\Sigma_2^1)$ и $\mathbf{BP}(\Sigma_2^1)$ в следствии 13.1.2(ii) (в отличие от $\mathbf{PK}(\Pi_1^1)$). Об этом см. отдельное доказательство в главе 14, не через теорему 13.1.1. $\square$

Вообще, недостижимые кардиналы относятся к типу *больших кардиналов*, изучение которых составляет важный раздел современной теории множеств. Мы на этом не можем останавливаться, но сошлемся на книги [49] и [100], где дается достаточная информация о разных типах больших кардиналов.

Следующая теорема — второй существенный результат в этой главе. Она относится к такой форме проблемы о свойствах регулярности точечных множеств:

можно ли **назвать** контрпримеры¹ к свойствами регулярности, при условии что такие контрпримеры существуют.

Теорема 13.1.5 дает отрицательный ответ на поставленный вопрос. Она утверждает, что из существования контрпримеров для свойств регулярности (причем контрпримеров, заданных в максимально сильной форме, так как гипотеза $\mathbf{PK}$ выполнена для Σ_1^1 , а гипотезы $\mathbf{LM}$ и $\mathbf{BP}$ выполнены для классов Σ_1^1 и Π_1^1) не следует существование *эффективных* контрпримеров, даже при том, очевидно, наиболее слабом понимании эффективности, которое связано со свойством ординальной определимости.

¹ О дискуссиях в ранней теории множеств в связи с «называемыми» примерами, в противовес «чистым» доказательствам существования, см. литературу, упомянутую в библиографических замечаниях в конце главы 2.

Теорема 13.1.5. *Ни одна из следующих импликаций*

- (I) $\neg \text{PK}(\Pi_1^1) \implies \neg \text{PK}(\text{OD})$;
- (II) $\neg \text{BP}(\Delta_2^1) \implies \neg \text{BP}(\text{OD})$;
- (III) $\neg \text{LM}(\Delta_2^1) \implies \neg \text{LM}(\text{OD})$;

*не выводима из аксиом **ZFC**.*

Доказательства теорем 13.1.5 и 13.1.1, следующие ниже в этой главе, используют форсинг и включают анализ трех различных моделей **ZFC**, которые получаются расширением класса $\mathbb{L}$ посредством:

- 1) одной генерической склеивающей функции $\omega \xrightarrow{\text{на}} \omega_1^{\mathbb{L}}$ – этим будет доказана теорема 13.1.5 в частях (II) и (III);
- 2) совокупности из генерических склеивающих функций $\omega \xrightarrow{\text{на}} \omega_1^{\mathbb{L}}$ в числе $\aleph_2^{\mathbb{L}}$ – этим будет доказана теорема 13.1.5 в части (I);
- 3) склейки до строго недостижимого кардинала – так доказывается теорема 13.1.1.

Выкладки будут, впрочем, иметь много общих моментов. Здесь читателю следует освежить в памяти материал § 9.7.

§ 13.2 Одна склеивающая функция

Для доказательства теоремы 13.1.5 в частях (II) и (III), возьмем класс $\mathbb{L}$ всех конструктивных множеств в качестве исходной модели и форсинг $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}}) = \text{Coll}(\aleph, \omega_1^{\mathbb{L}})$, предназначенный для «склейки» ординала ($\mathbb{L}$ -кардинала) $\omega_1^{\mathbb{L}}$. Множество $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ состоит из всех кортежей (произвольной конечной длины) из ординалов $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$, и упорядочивается обратно продолжению, см. определение 9.7.1.

Любое $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическое множество $G \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ производит генерическую склейку ординала $\omega_1^{\mathbb{L}}$ со счетным ординалом ω . Точнее говоря, $\mathbf{f}_G = \bigcup G$ является биекцией из натурального ряда $\mathbb{N}$ на $\omega_1^{\mathbb{L}}$, так что этот кардинал в классе $\mathbb{L}$ становится счетным ординалом (не кардиналом) в классе $\mathbb{L}[G]$.

В то же время $G = \{\mathbf{f}_G \upharpoonright n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{L}[\mathbf{f}_G]$.

Теперь доказывается следующая теорема, которая влечет утверждения (II) и (III) теоремы 13.1.5, поскольку, согласно предложению 9.1.6, мы можем непротиворечиво предполагать существование $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерических расширений конструктивного универсума $\mathbb{L}$.

Теорема 13.2.1. *Пусть $G \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ есть $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическое над $\mathbb{L}$ множество. Тогда в $\mathbb{L}[G]$ выполнены гипотезы $\text{BP}(\text{OD})$ и $\text{LM}(\text{OD})$, но не имеет места ни $\text{LM}(\Delta_2^1)$ ни $\text{BP}(\Delta_2^1)$.*

Доказательство. «Отрицательная» часть теоремы не представляет затруднений. В силу того что функция $\mathbf{f}_G \in \mathbb{L}[G]$ отображает ω на $\omega_1^{\mathbb{L}}$, мы имеем $\omega_1^{\mathbb{L}} < \omega_1^{\mathbb{L}[G]}$. Это позволяет получить точку $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ такую что $\mathbb{L}[a] = \mathbb{L}[\mathbf{f}_G] = \mathbb{L}[G]$: в самом деле, достаточно взять такую точку $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, которая эффективно кодирует множество $\{\langle n, k \rangle : f(n) < f(k)\}$, где $f = \mathbf{f}_G$. Нарушение гипотез $\text{BP}(\Delta_2^1)$ и $\text{LM}(\Delta_2^1)$ в $\mathbb{L}[G]$ следует теперь из теоремы 8.8.1.

Доказательство «положительной» части теоремы 13.2.1 базируется на следующих двух леммах. Во второй из них Λ (пустой кортеж) — самый слабый элемент форсинга $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, а через $\check{z}_i$ обозначены канонические $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -имена множеств z_i в $\mathbb{L}[x]$, так что $\check{z}_i[G] = z_i$.

Определение 13.2.2. Назовем «слабым» любое множество Y , для которого $\omega_1^{\mathbb{L}[Y]} = \omega_1^{\mathbb{L}}$. $\square$

Например, любое множество $Y \in \mathbb{L}$ — «слабое», но само множество G — не «слабое», так как $\omega_1^{\mathbb{L}} < \omega_1^{\mathbb{L}[G]}$.

Лемма 13.2.3. Пусть $G \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ есть $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическое над $\mathbb{L}$ множество, а точка $x \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является «слабой». Тогда класс $\mathbb{L}[G]$ является $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическим расширением класса $\mathbb{L}[x]$.

Лемма 13.2.4. Пусть w — произвольное множество, а множество $G \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ является $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическим над $\mathbb{L}[w]$. Тогда

(А) если $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ есть $\in$ -формула, а $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{L}[w]$ — произвольные множества, то справедлива эквивалентность:

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) \text{ истинно в } \mathbb{L}[w, G] \iff \Lambda \Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})}^{\mathbb{L}[w]} \varphi(\check{z}_1, \dots, \check{z}_n).$$

(В) если $X \in \mathbb{L}[w, G]$, $X \subseteq \mathbb{L}[w]$, и $X \in \text{OD}(\mathbb{L}[w])$ в $\mathbb{L}[w, G]$, то $X \in \mathbb{L}[w]$.²

Смысл первого утверждения леммы 13.2.4 состоит в том, что истинность в $\mathbb{L}[w, G]$ любой формулы φ с параметрами из $\mathbb{L}[w]$ определяется 1) через отношение $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -форсинга с $\mathbb{L}[w]$ как исходной моделью, т. е. внутри $\mathbb{L}[w]$, причем 2) с фиксированным «условием» Λ , т. е. фактически независимо от выбора генерического множества. Этим истинность внутри $\mathbb{L}[w, G]$ приводится к истинности внутри $\mathbb{L}[w]$, что и является ключевым моментом.

Приняв эти леммы (а они будет доказана ниже в отдельном параграфе), мы обратимся к «положительной» части теоремы 13.2.1.

² Напомним, что через $\text{OD}(P)$ обозначается класс всех множеств, определенных формулами, в которых, кроме ординалов, элементы множества или класса P также можно использовать в роли параметров определимости, см. § 3.5.

Согласно лемме 10.7.7, достаточно доказать, что, в $\mathbb{L}[G]$, любое OD-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $\mathcal{I}$ -измеримо, каков бы ни был $\mathbb{L}$ -абсолютный σ -ССС-идеал $\mathcal{I}$. Заметим, что множество $\mathbb{L} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ счётно в $\mathbb{L}[G]$ (поскольку $\omega_1^{\mathbb{L}} < \omega_1^{\mathbb{L}[G]}$), поэтому множество $\mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}$ является $\mathcal{I}$ -полным. Теперь рассмотрим любое OD-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Таким образом, $X = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \varphi(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)\}$ в $\mathbb{L}[G]$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — ординалы. Обозначим формулу $\Lambda \Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})}^{\mathbb{L}[x]} \varphi(\check{x}, \check{\alpha}_1, \dots, \check{\alpha}_n)$ через $\psi(x)$. Однако любая точка $x \in \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}} \mathbb{L}$ является «слабой» согласно теореме 11.3.3, а потому для нее в $\mathbb{L}[G]$ выполнена эквивалентность:

$$x \in X \iff \psi(x) \iff \text{в } \mathbb{L}[x] \text{ истинно } \psi(x),$$

по леммам 13.2.3 и 13.2.4(A). (Формула вынуждения над $\mathbb{L}[x]$ выражается в $\mathbb{L}[x]$ согласно теореме 9.3.2 — откуда следует вторая эквивалентность в выделенной формуле.) Теперь $\mathcal{I}$ -измеримость множества X следует из теоремы 11.7.3.

□ (теоремы 13.2.1, 13.1.5(II),(III) — по модулю лемм 13.2.3, 13.2.4)

Замечание 13.2.5. Данное доказательство BP(OD) и LM(OD) в $\mathbb{L}[G]$ легко превращается в доказательство гипотез BP(OD($\mathbb{L}[a]$)) и LM(OD($\mathbb{L}[a]$)) для любой «слабой» точки $a \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. □

§ 13.3 Доказательство ключевых лемм

По аналогии с § 5.2, непустое множество $T \subseteq (\text{Ord})^{<\omega}$ (т. е. состоящее из кортежей ординалов) называется *деревом*, если $t \in T$ выполнено всякий раз когда $s \in T$, $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $t \subset s$. В этом случае,

- (1) множество $D \subseteq T$ *плотно в T* , если для любого кортежа $t \in T$ существует кортеж $s \in D$, удовлетворяющий $t \subseteq s$.

Ниже нам понадобится следующий факт.

Лемма 13.3.1. Если $\kappa > \omega$ — регулярный кардинал, и $T \subseteq (\text{Ord})^{<\omega}$ — дерево, и множество $T_s = \{t \in T : s \subset t\}$ имеет мощность ровно κ при любом $s \in T$, то T содержит плотное подмножество $D \subseteq T$, порядково изоморфно дереву $\kappa^{<\omega}$.

Доказательство. Строим изоморфизм $h : \kappa^{<\omega} \rightarrow T$ на некоторое плотное $D \subseteq T$, определяя значения $h(s) \in T$ для $s \in \kappa^{<\omega}$ индукцией по длине $\text{lh } s$ кортежа s . Для начала, пусть $h(\Lambda) = \Lambda$. Допустим, что значение $t = h(s) \in T$ уже определено. По условию, найдется такое число $n > \text{lh } t$, что $T_s(n) = \{u \in T_s : \text{lh } u = n\}$ — множество мощности κ . Пусть $T_s(n) = \{u_\xi : \xi < \kappa\}$ — перечисление без повторений. Положим $h(s^\wedge \xi) = u_\xi$ для всех $\xi < \kappa$. □ (лемма 13.3.1)

Доказательство (лемма 13.2.3). Напомним, что рассматривается форсинг $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}}) = \mathbf{Coll}(\mathbb{N}, \omega_1^{\mathbb{L}}) = (\omega_1^{\mathbb{L}})^{<\omega}$ с порядком, обратным продолжению кортежей, т. е. $p \leq q$, когда $q \subseteq p$ (кортеж q продолжается кортежем p). Тем самым, плотность множеств $D \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ понимается в смысле (1) выше, а «условия» $p, q \in \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ несовместны в $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, если и только если нет такого $r \in \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, что $p \subseteq r$ и $q \subseteq r$ — и это в данном случае равносильно тому, что ни одно из соотношений $p \subseteq q$, $q \subseteq p$ не имеет места.

Фиксируем множество $G \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическое над $\mathbb{L}$, и точку $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}[G]$ — «слабую» в том смысле, что $\omega_1^{\mathbb{L}[x]} = \omega_1^{\mathbb{L}}$.

Зафиксируем такое $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -имя $t \in \mathbb{L}$, что $x = t[G]$. Идея состоит, неформально, в построении множества $\Sigma \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ всех таких «условий», которые не вынуждают о t ничего, противоречащего фактическим свойствам данной точки x . Для этого, индукцией по $\xi < \mathfrak{Ord}$ определяем последовательность множеств $A_\xi \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ так:

$$A_0 = \{p \in \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}}) : \forall k \forall \gamma < \omega_1^{\mathbb{L}} \text{ (если } p \Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})}^{\mathbb{L}} t(\check{k}) = \check{\gamma}, \text{ то } x(k) = \gamma)\},$$

$$A_{\xi+1} = \{p \in A_\xi : \text{каково бы ни было плотное в } \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}}) \text{ множество } D \in \mathbb{L}, D \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}}), \text{ существует такое «условие» } q \in A_\xi \cap D, \text{ что } p \subseteq q\},$$

$$A_\vartheta = \bigcap_{\xi < \vartheta} A_\xi \quad \text{— для предельных ординалов } \vartheta.$$

Из построения очевидно, что последовательность множеств A_ξ убывает с ростом ординала ξ . Поэтому найдется ординал ζ такой что $A_\zeta = A_{\zeta+1} = A_\eta$ для всех $\eta > \zeta$. Это предельное множество $\Sigma = A_\zeta$ и является тем, что нам нужно. Его наиболее важные свойства суммированы в следующем предложении.

Предложение 13.3.2. $\Sigma \in \mathbb{L}[x]$, и кроме того:

- (i) если множество $D \in \mathbb{L}$, $D \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ плотно в $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, то пересечение $D \cap \Sigma$ плотно в Σ ;
- (ii) Σ — дерево в $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ без концевых вершин;
- (iii) $G \subseteq \Sigma$;
- (iv) если множество $G' \subseteq \Sigma$ является $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическим над $\mathbb{L}$, то $t[G'] = t[G] = x$;
- (v) если множество $G' \subseteq \Sigma$ является Σ -генерическим над $\mathbb{L}[x]$, то оно является $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическим и над $\mathbb{L}$, и $x \in \mathbb{L}[G']$;
- (vi) обратно, G является Σ -генерическим над $\mathbb{L}[x]$ множеством;

(vii) если $p \in \Sigma$, то множество $\{q \in \Sigma : p \subseteq q\}$ несчетно в $\mathbb{L}[x]$.

Доказательство. Множество $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ принадлежит $\mathbb{L}$, а отношение форсинга $\Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})}^{\mathbb{L}}$ определимо в $\mathbb{L}$ согласно теореме 9.3.2. Поэтому $A_0 \in \mathbb{L}[x]$, и построение последовательности множеств A_ξ абсолютно для $\mathbb{L}[x]$. Теперь доказываем дополнительные утверждения.

(i) Это вытекает из того что $\Sigma = A_\zeta = A_{\zeta+1}$.

(ii) Быть деревом означает просто, что если $p \in \Sigma$, $q \in \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, и $q \subset p$ (т. е. $p < q$ по определению порядка в $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$), то $q \in \Sigma$. Вывод этого свойства для каждого A_ξ индукцией по ξ не представляет затруднений. Для доказательства отсутствия конечных элементов, пусть $p \in \Sigma$ и $n = \text{lh } p$ (длина кортежа $p \in \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}}) = (\omega_1^{\mathbb{L}})^{<\omega}$). Множество $D = \{q \in \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}}) : \text{lh } q > n\}$, очевидно, плотно в $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, так что $D \cap \Sigma$ плотно в Σ по доказанному (i). Значит, найдется $q \in D \cap \Sigma$, для которого $p \subseteq q$. Но $\text{lh } q > n = \text{lh } p$, и поэтому на самом деле $p \subset q$ строго, т. е. p — не конечной элемент дерева Σ .

(iii) Соотношение $G \subseteq A_\xi$ выводится индукцией по ξ из генеричности G . Именно, для вывода $G \subseteq A_0$, пусть напротив, $p \in G \setminus A_0$. По определению, найдутся число k и ординал $\gamma < \omega_1^{\mathbb{L}}$, для которых $p \Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})}^{\mathbb{L}} t(\check{k}) = \check{\gamma}$, но $x(k) \neq \gamma$. Но из первого, по определению вынуждения, следует $t[G](\check{k}[G] = \check{\gamma}[G])$, т. е. $x(k) = \gamma$ по выбору имен $t, \check{k}, \check{\gamma}$, что противоречит второму. Итак, $G \subseteq A_0$.

Предельный индуктивный шаг элементарен.

Чтобы провести непрелый индуктивный шаг $\xi \rightarrow \xi + 1$, снова предположим противное: $G \subseteq A_\xi$, но $G \not\subseteq A_{\xi+1}$, т. е., скажем, $p \in G \setminus A_{\xi+1}$. По определению, найдется такое плотное в $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ множество $D \in \mathbb{L}$, $D \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, для которого нет «условий» $q \in A_\xi \cap D$, удовлетворяющих $p \subseteq q$. Но из плотности D следует, что множество

$$D' = \{q \in D : p \subseteq q \vee q, p \text{ несовместны в } \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})\}$$

также плотно в $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ и принадлежит $\mathbb{L}$, так что, по генеричности, найдется «условие» $q \in D' \cap G$. Однако p, q не могут быть несовместными, так как принадлежат генерическому множеству G . Значит, $q \in D$ и $p \subseteq q$, а также $q \in G \subseteq A_\xi$, и получается противоречие.

(iv) Вообще, легко видеть что это верно даже при $G' \subseteq A_0$.

(v) Генеричность G' следует из (i), а $x \in \mathbb{L}[G']$ из (iv).

(vi) Для доказательства этого наиболее важного утверждения, предположим противное. Согласно теореме 9.3.2, существует такое «условие» $p \in G$, что любое $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическое над $\mathbb{L}$ множество $G' \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, содержащее p , не будет Σ -генерическим над $\mathbb{L}[x]$. (За-

мечание: из (iv) следует, что $t[G'] = x$, а потому множество Σ , построенное в $\mathbb{L}[G']$, совпадает с множеством Σ , построенным в $\mathbb{L}[G]$.) Теперь рассмотрим произвольное Σ -генерическое над $\mathbb{L}[x]$ множество $G' \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^\perp)$ содержащее p (предложение 9.1.6). Из доказанного (v) следует, что множество G' также является $\mathbb{C}(\omega_1^\perp)$ -генерическим над $\mathbb{L}$, что ведет к противоречию.

(vii) Предположим противное: множество $\Sigma_p = \{q \in \Sigma : p \subseteq q\}$ счетно в $\mathbb{L}[x]$. Значит, Σ_p , как форсинг, сохраняет кардиналы по теореме 9.2.8, а потому, взяв любое Σ -генерическое над $\mathbb{L}[x]$ множество $G' \subseteq \Sigma$, содержащее p , мы получим $\omega_1^{\mathbb{L}[x, G']} = \omega_1^{\mathbb{L}[x]} = \omega_1^\perp$ по теореме 9.2.9(iii), (iv). Однако, согласно уже доказанному (v), в этом случае множество G' будет также и $\mathbb{C}(\omega_1^\perp)$ -генерическим над $\mathbb{L}$, что влечет счетность ординала $\omega_1^\perp$ в $\mathbb{L}[G']$, давая противоречие.

□ (предложение)

Итак, $\mathbb{L}[G] = \mathbb{L}[x][G]$ является Σ -генерическим расширением класса $\mathbb{L}[x]$. Однако из (vii) предложения 13.3.2 по лемме 13.3.1 (применяемой в $\mathbb{L}[x]$ при $\kappa = \omega_1$) следует, что множество Σ содержит плотное подмножество $\Sigma' \in \mathbb{L}[x]$, порядково изоморфное множеству $\mathbb{C}(\omega_1^\perp)$ в $\mathbb{L}[x]$. Это означает, по теореме 9.2.9(i), (v), что Σ -генерические и $\mathbb{C}(\omega_1^\perp)$ -генерические расширения класса $\mathbb{L}[x]$ суть одно и то же.

□ (лемма 13.2.3)

Доказательство (лемма 13.2.4). (А) Предположим противное. Тогда, согласно теореме 9.3.2(vi) и уже доказанной лемме 13.2.3, имеются такие «условия» $p, p' \in \mathbb{C}(\omega_1^\perp)$, что

$$p \Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^\perp)}^{\mathbb{L}[w]} \varphi(\check{z}_1, \dots, \check{z}_n), \quad \text{но} \quad p' \nVdash_{\mathbb{C}(\omega_1^\perp)}^{\mathbb{L}[w]} \varphi(\check{z}_1, \dots, \check{z}_n).$$

Можно считать что кортежи p, p' имеют равную длину $\text{lh } p = \text{lh } p' = m \in \mathbb{N}$ — иначе дополняем более короткий нулями до нужной длины. Через $\mathbb{C}(\omega_1^\perp)_p$ обозначим множество всех таких «условий» $q \in \mathbb{C}(\omega_1^\perp)$, что $p \subseteq q$. Аналогично определим $\mathbb{C}(\omega_1^\perp)_{p'}$. Теперь, если $q \in \mathbb{C}(\omega_1^\perp)_p$ то определим «условие» $q' = h(q) \in \mathbb{C}(\omega_1^\perp)_q$ так что $\text{lh } q' = \text{lh } q$, $q'(k) = p'(k)$ при $k < m$ и $q'(k) = q(k)$ при $m \leq k < \text{lh } q$. Понятно что это отображение h принадлежит $\mathbb{L}$ и является порядковым изоморфизмом из $\mathbb{C}(\omega_1^\perp)_p$ на $\mathbb{C}(\omega_1^\perp)_{p'}$.

Теперь рассмотрим произвольное $\mathbb{C}(\omega_1^\perp)$ -генерическое над $\mathbb{L}[w]$ множество G , содержащее p . Тогда

- 1) множество $G_p = G \cap \mathbb{C}(\omega_1^\perp)_p$ является $\mathbb{C}(\omega_1^\perp)_p$ -генерическим над $\mathbb{L}[w]$ по теореме 9.2.9(iii),
- 2) множество $G'_{p'} = \{h(q) : q \in G_p\} \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^\perp)_{p'}$ является $\mathbb{C}(\omega_1^\perp)_{p'}$ -генерическим над $\mathbb{L}[w]$ по теореме 9.2.9(v),

3) и, наконец, множество

$$G' = \{r \in \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}}) : \exists q' \in G'_{p'} (r \subseteq q')\} = G'_{p'} \cup \{r \in \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}}) : r \subseteq p'\}$$

является $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическим над $\mathbb{L}[w]$ по теореме 9.2.9(iv), причем по построению $p' \in G'$.

Отсюда по выбору «условий» p, p' следует, что формула $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ истинна в модели $\mathbb{L}[w, G]$, но ложна в модели $\mathbb{L}[w, G']$. Но $\mathbb{L}[w, G] = \mathbb{L}[w, G_p] = \mathbb{L}[w, G'_{p'}] = \mathbb{L}[w, G']$ (опять по теореме 9.2.9), противоречие.

(В) Для доказательства этого утверждения леммы 13.2.4, предположим что $X = \{x \in \mathbb{L} : \varphi(x, z_1, \dots, z_n)\}$ в $\mathbb{L}[w, G]$, где $z_1, \dots, z_n$ — произвольные множества из $\mathbb{L}[w]$. Тогда, по уже доказанному,

$$x \in X \iff \Lambda \Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})}^{\mathbb{L}[w]} \varphi(\check{x}, \check{z}_1, \dots, \check{z}_n).$$

Однако отношение $\Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})}^{\mathbb{L}[w]}$ выразимо в $\mathbb{L}[w]$ по теореме 9.3.2.

□ (лемма 13.2.4)

§13.4 Склеивающие функции в числе $\aleph_2$

Для доказательства теоремы 13.1.5 в её части (I), снова возьмем класс $\mathbb{L}$ в качестве исходной модели, и произведение $\aleph_2$ экземпляров форсинга $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}}) = \mathbf{Coll}(\aleph, \omega_1^{\mathbb{L}})$, с конечной базой.

Определение 13.4.1. Множество $\mathbf{P}$ состоит из всех таких функций p , что область определения $\text{dom } p \subseteq \omega_2^{\mathbb{L}}$ конечна, и $p(\xi) \in \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ для всех $\xi \in \text{dom } p$. Порядок на $\mathbf{P}$ определяется естественным образом: $p \leq q$ (т. е. p сильнее чем q) когда $\text{dom } q \subseteq \text{dom } p$ и $q(\xi) \subseteq p(\xi)$ в $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ для всех $\xi \in \text{dom } q$. Таким образом, пустая функция Λ — это наибольший (и самый слабый) элемент $\mathbf{P}$. Положим

$$\mathbf{P}_{<\vartheta} = \{p \in \mathbf{P} : \text{dom } p \subseteq \vartheta\}, \quad \mathbf{P}_{\geq\vartheta} = \{p \in \mathbf{P} : \text{dom } p \subseteq \omega_2^{\mathbb{L}} \setminus \vartheta\},$$

а также $\mathbf{P}_{\leq\vartheta} = \mathbf{P}_{<\vartheta+1}$ и $\mathbf{P}_{>\vartheta} = \mathbf{P}_{\geq\vartheta+1}$, для каждого $\vartheta < \omega_2^{\mathbb{L}}$, и вообще $\mathbf{P}_u = \{p \in \mathbf{P} : \text{dom } p \subseteq u\}$ для любого множества $u \subseteq \omega_2^{\mathbb{L}}$. □

Упражнение 13.4.2. Докажите, что $\mathbf{P} \in \mathbb{L}$. □

Лемма 13.4.3. Любая антицепь $A \subseteq \mathbf{P}$, $A \in \mathbb{L}$ имеет мощность не более чем $\omega_1^{\mathbb{L}}$ в $\mathbb{L}$.

Доказательство. Рассуждаем в $\mathbb{L}$. Можно считать, что A — максимальная антицепь. Положим $\xi_0 = 0$. Если $\xi_n < \omega_2^{\mathbb{L}}$ определено, то множество $\mathbf{P}_{<\xi_n}$ имеет, очевидно, мощность $\leq \omega_1^{\mathbb{L}}$, а потому, вследствие максимальной A , найдется ординал ξ , $\xi_n < \xi < \omega_2^{\mathbb{L}}$, такой что ко всякому $p \in \mathbf{P}_{<\xi_n}$ существует «условие» $q \in A \cap \mathbf{P}_{<\xi}$, совместимое с p в $\mathbf{P}$. Наименьший из таких ординалов ξ обозначим через ξ_{n+1} . Тогда $\vartheta = \sup_n \xi_n < \omega_2^{\mathbb{L}}$. Остается показать что $A \subseteq \mathbf{P}_{<\vartheta}$. Пусть напротив, $r \in A \setminus \mathbf{P}_{<\vartheta}$. Тогда $p = r \restriction (\vartheta \cap \text{dom } p)$ принадлежит $\mathbf{P}_{<\vartheta}$, так что $p \in \mathbf{P}_{<\xi_n}$ для некоторого n , и тогда по построению найдется «условие» $q \in A \cap \mathbf{P}_{<\vartheta}$ совместимое с p . В этой ситуации «условие» q совместимо и с r поскольку по построению мы имеем $\text{dom } q \cap \text{dom } r = \text{dom } p \cap \text{dom } r$. Однако «условия» q, r принадлежат A и заведомо $q \neq r$ так как $r \notin \mathbf{P}_{<\vartheta}$ — противоречие. $\square$

Следующая теорема влечет теорему 13.1.5(I).

Теорема 13.4.4 (ср. с теоремой 13.2.1). Пусть множество $G \subseteq \mathbf{P}$ является $\mathbf{P}$ -генерическим над $\mathbb{L}$. Тогда в $\mathbb{L}[G]$ имеет место гипотеза $\text{PK}(\text{OD})$, но не выполняется $\text{PK}(\Pi_1^1)$.

Доказательство (конец доказательства теоремы см. в § 13.5). Сначала несколько слов о структуре генерического расширения $\mathbb{L}[G]$.

Если $\vartheta < \omega_2^{\mathbb{L}}$, то положим $G_{<\vartheta} = G \cap \mathbf{P}_{<\vartheta}$, и аналогично определим $G_{\leq \vartheta}$, $G_{>\vartheta}$, $G_{\geq \vartheta}$. Понятно, что форсинг $\mathbf{P}$ можно отождествить с произведением $\mathbf{P}_{\leq \vartheta} \times \mathbf{P}_{>\vartheta}$, откуда следует, по теореме 9.2.10, что множества $G_{\leq \vartheta}$, $G_{>\vartheta}$ являются, соответственно, $\mathbf{P}_{\leq \vartheta}$ - и $\mathbf{P}_{>\vartheta}$ -генерическим над $\mathbb{L}$, и то же для $G_{\geq \vartheta}$, $G_{<\vartheta}$.

По аналогичным соображениям (отождествление $\mathbf{P}$ с произведением $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}}) \times \mathbf{P}_{\neq \xi}$, где $\mathbf{P}_{\neq \xi} = \{p \in \mathbf{P} : \xi \notin \text{dom } p\}$), мы заключаем, что если $\xi < \omega_2^{\mathbb{L}}$, то множество $G_{\xi} = \{p(\xi) : p \in G \wedge \xi \in \text{dom } p\}$ является $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическим над $\mathbb{L}$, и, следовательно, $\mathbf{f}_{G_{\xi}} = \bigcup G_{\xi}$ является генерической склеивающей функцией $\mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \omega_1^{\mathbb{L}}$, см. § 9.7.

«Отрицательная» часть теоремы несложна. Из леммы 13.4.3 следует $\omega_1^{\mathbb{L}[G]} \leq \omega_2^{\mathbb{L}}$ по теореме 9.2.8. С другой стороны, любая из функций $\mathbf{f}_{G_{\xi}}$ отображает ω на $\omega_1^{\mathbb{L}}$, так что $\omega_1^{\mathbb{L}} < \omega_1^{\mathbb{L}[G]}$. Отсюда следует $\omega_1^{\mathbb{L}[G]} = \omega_2^{\mathbb{L}}$. Более того, найдется точка $a \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которой $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} = \omega_1^{\mathbb{L}[G]} = \omega_2^{\mathbb{L}}$ (см. рассуждение в самом начале доказательства теоремы 13.2.1), так что множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ несчетно в $\mathbb{L}[G]$, и для вывода $\neg \text{PK}(\Pi_1^1)$ в $\mathbb{L}[G]$ остается применить следствие 10.2.2(I).

«Положительная» же часть теоремы 13.4.4, т. е. проверка гипотезы $\text{PK}(\text{OD})$ в $\mathbb{L}[G]$, более громоздка, и опирается на ряд лемм, которые мы докажем перед доказательством самой гипотезы $\text{PK}(\text{OD})$ в § 13.5.

Лемма 13.4.5. *Если $x \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то существует такой ординал $\vartheta < \omega_2^{\mathbb{L}}$, что $x \in \mathbb{L}[G_{<\vartheta}]$.*

Доказательство. По теореме 9.2.6 найдется $\mathbf{P}$ -имя $t \in \mathbb{L}$ такое что $x = t[G]$, и $t[G'] \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для любого $\mathbf{P}$ -генерического множества G' — так что каждое «условие» $p \in \mathbf{P}$ вынуждает $t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Положим

$$F_{nk} = \{p \in \mathbf{P} : p \Vdash_{\mathbf{P}}^{\mathbb{L}} (t(\check{n}) = \check{k})\}$$

для всех n, k , и выберем, максимальную антицепь $A_{nk} \subseteq F_{nk}$ в каждом F_{nk} . Этот выбор можно осуществить в $\mathbb{L}$, так как $\mathbf{P} \in \mathbb{L}$, а отношение $\Vdash_{\mathbf{P}}^{\mathbb{L}}$ выразимо в $\mathbb{L}$ по теореме 9.3.2. Тогда индексированное множество $\langle A_{nk} \rangle_{n,k \in \mathbb{N}}$ выбранных антицепей принадлежит $\mathbb{L}$. Отсюда, по лемме 13.4.3, мы выводим существование такого ординала $\vartheta < \omega_2^{\mathbb{L}}$, что $A_{nk} \subseteq \mathbf{P}_{<\vartheta}$ для всех n, k . Утверждается, что

$$x(n) = k \iff G \cap A_{nk} \neq \emptyset \iff G_{<\vartheta} \cap A_{nk} \neq \emptyset, \quad (*)$$

— откуда и следует $x \in \mathbb{L}[G_{<\vartheta}]$.

Импликация $\Leftarrow$ справедлива по определению вынуждения.

Для доказательства обратной импликации, пусть $x(n) = k$. Заметим, что множество $D_n = \bigcup_m A_{nm}$ принадлежит $\mathbb{L}$ и предплотно в $\mathbf{P}$. (Для доказательства предплотности, пусть $p \in \mathbf{P}$. Тогда $p \Vdash_{\mathbf{P}}^{\mathbb{L}}$ « $t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ » по выбору t , в частности, $p \Vdash_{\mathbf{P}}^{\mathbb{L}}$ « $\exists m (t(\check{n}) = m)$ ». По теореме 9.3.2(vii) найдутся более сильное «условие» $r \leq p$ и число m , для которых $r \Vdash_{\mathbf{P}}^{\mathbb{L}}$ « $t(\check{n}) = \check{m}$ ». Это означает, что $r \in F_{nm}$. Но тогда r совместимо с каким-то $q \in A_{nm}$ — откуда $q \in D_n$, т. е. найдется «условие» r' , удовлетворяющее $r' \leq r$ и $r' \leq q$.)

Из предплотности следует $G \cap D_n \neq \emptyset$ (см. результат 9.1.2). Пусть $q \in G \cap D_n$, т. е. $q \in A_{nm}$ для некоторого m . Тогда $q \in F_{nm}$, так что $q \Vdash_{\mathbf{P}}^{\mathbb{L}}$ « $t(\check{n}) = \check{m}$ », и $x(n) = m$ по теореме 9.3.2(ii). Однако на самом деле $x(n) = k$, откуда $m = k$ и $q \in G \cap A_{nk}$, что и требовалось. $\square$

Лемма 13.4.6 (ср. с леммой 13.2.3). *Пусть $G \subseteq \mathbf{P}$ есть $\mathbf{P}$ -генерическое над $\mathbb{L}$ множество, и $x \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда класс $\mathbb{L}[G]$ есть $\mathbf{P}$ -генерическое расширение класса $\mathbb{L}[x]$.*

Доказательство. Используя лемму 13.4.5, мы находим ординал $\vartheta < \omega_2^{\mathbb{L}}$ такой что $x \in \mathbb{L}[G_{<\vartheta}]$. Можно предполагать что $\vartheta \geq \omega_1^{\mathbb{L}}$. Мы разобьем расширение $\mathbb{L}[x]$ до $\mathbb{L}[G]$ на несколько шагов.

1°. Существует $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическое над $\mathbb{L}$ множество $F \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, для которого $\mathbb{L}[G_{<\vartheta}] = \mathbb{L}[F]$.

Считая, для простоты, что $\vartheta = \omega_1^{\mathbb{L}}$ (общий случай в 1° сводится к этому при помощи любой биекции $b: \omega_1^{\mathbb{L}} \xrightarrow{\text{на}} \vartheta$ в $\mathbb{L}$ и теоремы 9.2.9(v)), рассмотрим множество $\mathbf{P}'$ всех «условий» $p \in \mathbf{P}_{<\omega_1^{\mathbb{L}}}$ таких что либо $p = \Lambda$ либо $\text{dom } p = \{0\} \cup \{p(0)(k) : k < \text{lh } p(0)\}$ и $\text{lh } p(\xi) = \text{lh } p(0)$ для каждого $\xi \in \text{dom } p$. Нетрудно проверить что $\mathbf{P}' \in \mathbb{L}$, $\mathbf{P}'$ плотно в $\mathbf{P}_{<\omega_1^{\mathbb{L}}}$, и $\mathbf{P}'$ порядково изоморфно множеству $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}}) = \mathbf{Coll}(\mathbb{N}, \omega_1^{\mathbb{L}})$ в $\mathbb{L}$. (Действительно, каждое из этих двух ЧУ множеств есть дерево высоты ω с $\omega_1^{\mathbb{L}}$ -ветвлениями в смысле порядка совпадающего с $\subseteq$, т. е. обратного порядку $\leq$. Но любые два таких дерева порядково изоморфны в силу очевидной конструкции изоморфизма.) Остается сослаться на теорему 9.2.9(i),(v).

2°. Найдется дерево $\Sigma \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, $\Sigma \in \mathbb{L}[x]$ без концевых вершин, такое, что $F \subseteq \Sigma$ и F является Σ -генерическим над $\mathbb{L}[x]$.

Это совершенно аналогично доказательству леммы 13.2.3 в § 13.3.

3°. Класс $\mathbb{L}[G_{\leq \vartheta}]$ является $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическим расширением класса $\mathbb{L}[G_{< \vartheta}] = \mathbb{L}[F]$, а тогда, по теореме 9.2.10(ii), и $\Sigma \times \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическим расширением класса $\mathbb{L}[x]$.

В самом деле, ЧУ множество $\mathbf{P}_{\leq \vartheta}$ порядково изоморфно произведению $\mathbf{P}_{< \vartheta} \times \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, так что результат дается теоремой 9.2.9(v).

4°. Класс $\mathbb{L}[G_{\leq \vartheta}]$ является $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическим расширением $\mathbb{L}[x]$.

В самом деле, по тем же соображениям, что и выше (теорема 9.2.9(i), (v)), достаточно доказать, что, в $\mathbb{L}[x]$, множество $\Sigma \times \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ имеет плотное подмножество D , порядково изоморфное $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$. Однако

$$D = \{\langle p, q \rangle \in \Sigma \times \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}}) : \text{lh } p = \text{lh } q\}$$

— именно такое подмножество. Его плотность в $\Sigma \times \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ очевидна: поскольку деревья Σ и само $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ не имеют концевых вершин, для любой пары $\langle p, q \rangle \in \Sigma \times \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ найдется такая пара $\langle p', q' \rangle \in D$, что $p \subseteq p'$ и $q \subseteq q'$. Далее, как $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ так и D представляют собой, в $\mathbb{L}[x]$, деревья высоты ω с $\omega_1^{\mathbb{L}}$ -ветвлениями — которые все, очевидно, порядково изоморфны одно другому.

5°. Класс $\mathbb{L}[G_{\leq \vartheta}]$ является $\mathbf{P}_{\leq \vartheta}$ -генерическим расширением $\mathbb{L}[x]$.

Это следует из 4° при помощи того же рассуждения, которое использовано в выводе 1° .

Теперь, по теореме 9.2.10, коль скоро ЧУ множество $\mathbf{P}$ изоморфно произведению $\mathbf{P}_{\leq \vartheta} \times \mathbf{P}_{> \vartheta}$, класс $\mathbb{L}[G]$ является $\mathbf{P}_{> \vartheta}$ -генерическим

расширением класса $\mathbb{L}[G_{\leq \vartheta}]$, а потому и $\mathbf{P}_{\leq \vartheta} \times \mathbf{P}_{> \vartheta}$ -генерическим расширением класса $\mathbb{L}[x]$ по 5° . Остается заменить здесь множество $\mathbf{P}_{\leq \omega_1^1} \times \mathbf{P}_{> \omega_1^1}$ обратно на $\mathbf{P}$. $\square$

Лемма 13.4.7 (ср. с леммой 13.2.4). *Пусть w — произвольное множество, а множество $G \subseteq \mathbf{P}$ является $\mathbf{P}$ -генерическим над $\mathbb{L}[w]$. Тогда, если $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ есть $\in$ -формула, а $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{L}[w]$, то справедлива эквивалентность:*

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) \text{ истинно в } \mathbb{L}[w, G] \iff \Lambda \Vdash_{\mathbf{P}}^{\mathbb{L}[w]} \varphi(\check{z}_1, \dots, \check{z}_n).$$

Доказательство. Рассуждая как в доказательстве леммы 13.2.4, со ссылкой на уже доказанную лемму 13.4.6, вполне достаточно убедиться, для любых «условий» $p, q \in \mathbf{P}$, что, в упрощающем предположении $\text{dom } p = \text{dom } q = u \subseteq \omega_2^{\mathbb{L}}$ и $\text{lh } p(\xi) = \text{lh } q(\xi)$ для всех $\xi \in u$, множества $\mathbf{P}_{\leq p} = \{p' \in \mathbf{P} : p' \leq p\}$ и $\mathbf{P}_{\leq q}$ порядково изоморфны в $\mathbb{L}$. Построение искомого изоморфизма не составляет труда. $\square$

§13.5 Свойство совершенного ядра

Продолжая доказательство теоремы 13.4.4, мы докажем, при помощи результатов предыдущего параграфа, что в $\mathbf{P}$ -генерической модели $\mathbb{L}[G]$ выполнено $\text{RK}(\text{OD})$, т. е. каждое несчетное OD множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет совершенное подмножество.

Рассмотрим произвольное множество $X \in \mathbb{L}[G]$, $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, являющееся OD множеством в $\mathbb{L}[G]$. Предполагаем, что $X = \{x : \varphi(x)\}$ в $\mathbb{L}[G]$, где, для простоты, φ — вообще беспараметрическая формула. Обозначим через $\psi(x)$ формулу « $\Lambda \Vdash_{\mathbf{P}}^{\mathbb{L}[x]} \varphi(\check{x})$ »; тогда, по лемме 13.4.7, мы имеем $\forall x (\varphi(x) \iff \psi(x))$ в $\mathbb{L}[G]$, так что $X = \{x : \psi(x)\}$.

Если $X \subseteq \mathbb{L}$ то множество X не более чем счётно в $\mathbb{L}[G]$, поскольку ординал $\omega_1^{\mathbb{L}}$ счётен в $\mathbb{L}[G]$. Остается доказать, предполагая $X \not\subseteq \mathbb{L}$, что X имеет совершенное подмножество в $\mathbb{L}[G]$.

Раз $X \not\subseteq \mathbb{L}$, найдется точка $x \in X \setminus \mathbb{L}$. Тогда $x \in \mathbb{L}[G_{< \vartheta}]$ для некоторого $\vartheta < \omega_2^{\mathbb{L}}$, по лемме 13.4.5. Как мы видели в доказательстве леммы 13.4.6 выше, $\mathbf{P}_{< \vartheta}$ -генерические и $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерические расширения класса $\mathbb{L}$ — это одно и то же. Отсюда следует, что найдется такое $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическое над $\mathbb{L}$ множество $F_0 \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, $F_0 \in \mathbb{L}[G]$, что $x \in \mathbb{L}[F_0]$. Фиксируем имя $t \in \mathbb{L}$, для которого $x = t[F_0]$.

По теореме 9.3.2(ii), найдется «условие» $p_0 \in F_0$, вынуждающее $\psi(t) \wedge t \notin \mathbb{L}$. Будем, для краткости, считать, что $p_0 = \Lambda$, т. е.

$$\Lambda \Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})}^{\mathbb{L}} \psi(t) \wedge t \notin \mathbb{L}; \quad (\dagger)$$

общий случай требует лишь простых и очевидных поправок. В этом предположении, справедлива:

Лемма 13.5.1. *Если множество $F \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, $F \in \mathbb{L}[G]$ является $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическим над $\mathbb{L}$ то $t[F] \in X$. $\square$*

Идея нижеследующего построения состоит в том, чтобы определить, в $\mathbb{L}[G]$, нечто типа «совершенного множества» генерических подмножеств $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, на котором отображение $F \mapsto t[F]$, сопоставляющее каждому генерическому множеству F соответствующую интерпретацию $t[F]$ для t , будет непрерывным и взаимно однозначным.

Для $p, q \in \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ определим $p \perp q$ когда найдутся числа n и $k \neq \ell$ такие что $p \Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})} t(\check{n}) = \check{k}$ и $q \Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})} t(\check{n}) = \check{\ell}$. Таким образом, смысл $p \perp q$ состоит в том, что «условия» p, q не только противоречивы, но это противоречие детектируется на вынуждении формул вида $t(\check{n}) = \check{k}$ для данного t . Доказывается следующая:

Лемма 13.5.2. *Если $p, q \in \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ то найдутся «условия» $p' \leq p$ и $q' \leq q$ (т. е. более сильные) такие что $p' \perp q'$.*

Доказательство. В самом деле, иначе никакие два «условия» $p', p'' \leq p$ не могут вынуждать элементарно несовместимых свойств t , т. е., например, $p' \Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})} t(\check{n}) = \check{k}$ и $p'' \Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})} t(\check{n}) = \check{\ell}$ для каких-либо n и $k \neq \ell$. Отсюда следует что p «решает» все значения t — другими словами, для любого n найдется число k_n такое что $p \Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})} t(\check{n}) = \check{k}_n$. Но тогда «условие» p вынуждает $t = \check{a}$, где $a(n) = k_n, \forall n$, так что $a \in \mathbb{L}$ поскольку отношение форсинга $\Vdash_{\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})}$ выразимо в исходной модели $\mathbb{L}$. Мы пришли к противоречию с предположением что $\Lambda \Vdash t \notin \mathbb{L}$, доказывающему лемму. $\square$ (лемма)

Рассмотрим вспомогательный форсинг Π , состоящий из функций π таких, что $\text{dom } \pi$ — множество вида $2^{<m} = \{s \in 2^{<\omega} : \text{lh } s < m\}$ (множество всех диадических кортежей длины $< m$), где $m \in \mathbb{N}$ будет обозначаться через $m = \text{выс } \pi$ (высота π), а $\text{ran } \pi \subseteq \omega_1^{\mathbb{L}}$. Упорядочим Π обратно включению: $\pi \leq \rho$ (π сильнее чем ρ) когда $\text{dom } \rho \subseteq \text{dom } \pi$ (тогда очевидно $\text{выс } \rho \leq \text{выс } \pi$) и $\rho = \pi \upharpoonright \text{dom } \rho$. Другими словами, требуется, чтобы функция π продолжала функцию ρ . Ясно, что $\emptyset$ (т. е. пустая функция, то же что и Λ) является максимальным элементом Π в этом смысле.

Форсинг Π можно назвать разветвленной степенью склеивающего коэновского форсинга $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$. В самом деле, если $\pi \in \Pi$, $m = \text{выс } \pi$, $s \in 2^{<m}$, то можно определить $\pi/s \in \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, так что мы получим $\text{dom } (\pi/s) = 1 + \text{lh } s$ и $(\pi/s)(k) = \pi(s \upharpoonright k)$, $\forall k \leq \text{lh } s$. Например, если $s = \langle i, j \rangle$ то $\text{dom } (\pi/s) = 3$, $(\pi/s)(0) = \pi(\Lambda)$, $(\pi/s)(1) = \pi(\langle i \rangle)$, $(\pi/s)(2) = \pi(s)$.

В то же время, $\Pi \in \mathbb{L}$ и, подобно некоторым форсингам выше, Π — дерево высоты ω с $\omega_1^{\mathbb{L}}$ -ветвлениями (в смысле порядка, совпадаю-

щего $s \subseteq$, т. е. обратного $\leq$), так что множества Π и $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ порядково изоморфны в $\mathbb{L}$. Отсюда, по теореме 9.2.9(v), получаем

Следствие 13.5.3. *Π -генерические и $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерические расширения — это одно и то же.* $\square$

Мы утверждаем что если $D \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ — плотное подмножество, и $k \in \mathbb{N}$, то следующие множества плотны уже в Π :

$$\begin{aligned}\Delta_D &= \{\pi \in \Pi : \forall s \in {}^n 2 \ (\pi/s \in D), \text{ где } n = \text{выс } \pi - 1\}; \\ \Delta_k &= \{\pi \in \Pi : k \leq n = \text{выс } \pi - 1 \wedge \\ &\quad \wedge \forall s, s' \in {}^n 2 \ (s \upharpoonright k \neq s' \upharpoonright k \implies \pi/s \perp \pi/s')\}.\end{aligned}$$

(Здесь ${}^n 2 = \{s \in 2^{<\omega} : n = \text{lh } s\}$, диадические кортежи длины n .)

Для доказательства плотности Δ_D , пусть $\rho \in \Pi$ и $\text{выс } \rho = m+1 \geq 1$. В силу плотности D ко всякому $\sigma \in {}^m 2$ найдется «условие» $p_\sigma \in D$ такое что $p_\sigma \leq \rho/\sigma$ в $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$, т. е. $\rho/\sigma \subseteq p_\sigma$. Коль скоро множество ${}^m 2$ конечно, можно не ограничивая общности считать, что все p_σ имеют одну и ту же область определения $\text{dom } p_\sigma = n+1 > m$. Теперь не составляет труда определить «условие» $\pi \in \Pi$ так чтобы $\text{выс } \pi = n+1$ и $\pi/s = p_{s \upharpoonright m} \in D$ для любого $s \in {}^n 2$, так что $\pi \in \Delta_D$.

Для проверки плотности Δ_k , пусть $\rho \in \Pi$ и $\text{выс } \rho = m+1 \geq 1$. Можно считать что $m \geq k$. Используя лемму 13.5.2, подбираем $p_\sigma \in \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ ко всякому $\sigma \in {}^m 2$ так что будет $p_\sigma \perp p_{\sigma'}$ при $\sigma \neq \sigma'$. Опять можно считать что $\text{dom } p_\sigma = n+1$, где $n > m$, для всех $\sigma \in {}^m 2$. Найдется «условие» $\pi \in \Pi$ такое что $\text{выс } \pi = n+1$ и $\pi/s = p_{s \upharpoonright m}$ для всех $s \in {}^n 2$. Если $s, s' \in {}^n 2$ и $s \upharpoonright k \neq s' \upharpoonright k$ то тем более $s \upharpoonright m \neq s' \upharpoonright m$, так что $\pi/s = p_{s \upharpoonright m} \perp p_{s' \upharpoonright m} = \pi/s'$. Итак, $\pi \in \Delta_k$.

В обоих рассуждениях $\rho \subseteq \pi$, что и доказывает плотность.

Далее, класс $\mathbb{L}[G]$ содержит $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерические над $\mathbb{L}$ множества, например, любое из множеств $G_\xi = \{p(\xi) : p \in G \wedge \xi \in \text{dom } p\}$, где $\xi < \omega_2^{\mathbb{L}}$. Значит, согласно следствию 13.5.3, в $\mathbb{L}[G]$ существует и Π -генерическое над $\mathbb{L}$ множество $\Gamma \subseteq \Pi$; тогда $\gamma = \bigcup \Gamma$ — отображение $2^{<\omega} \rightarrow \omega_1^{\mathbb{L}}$. Положим $\Gamma/a = \{\pi/(a \upharpoonright n) : \pi \in \Gamma \wedge n < \text{выс } \pi\}$ для каждого $a \in 2^{\mathbb{N}}$; тогда $\Gamma/a \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$. Утверждается что следующие предложения истинны в $\mathbb{L}[G]$:

- (а) если $a \in 2^{\mathbb{N}}$ то множество Γ/a $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерическое над $\mathbb{L}$;
- (б) если $a \neq b \in 2^{\mathbb{N}}$ то $t[\Gamma/a] \neq t[\Gamma/b]$;
- (в) отображение $a \mapsto t[\Gamma/a]$ — непрерывная функция $2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;
- (г) $t[\Gamma/a] \in X$ при любом $a \in 2^{\mathbb{N}}$.

Для доказательства утверждения (а), предположим что множество $D \in \mathbb{L}$, $D \subseteq \mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ плотно в $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$. Тогда Δ_D плотно в Π , следовательно, найдется $n \in \mathbb{N}$ такое что $\pi = \gamma \upharpoonright 2^{<n+1} \in \Delta_D$. Положим $s = a \upharpoonright n$. Тогда $\pi/s \in D$ по определению Δ_D . С другой стороны, легко видеть что $\pi/s \in \Gamma/a$.

(б) доказывается аналогично, но с использованием множеств Δ_k .

(в) Предположим что $a \in 2^{\mathbb{N}}$ и $t[\Gamma/a](m) = k$. Согласно (а) найдется «условие» $p \in \Gamma/a$ вынуждающее $t(\check{m}) = \check{k}$. По построению t имеет вид $\pi/(a \upharpoonright n)$, где $\pi \in \Gamma$ и $n < \text{выс } \pi$. Тем самым, $p \in \Gamma/b$ и, следовательно, $t[\Gamma/b](m) = k$, всякий раз когда $b \in 2^{\mathbb{N}}$ и $b \upharpoonright n = a \upharpoonright n$.

(г) следует из (а) и леммы 13.5.1.

Соединяя вместе (б), (в), (г), мы получаем, в $\mathbb{L}[G]$, совершенное подмножество $\{t[\Gamma/a] : a \in 2^{\mathbb{N}}\}$ множества X , что и требовалось.

□ (теорема 13.4.4)

□ (теорема 13.1.5 – часть (I) и теорема в целом)

Замечание 13.5.4. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 13.2.1, можно доказать, что в **P**-генерической модели $\mathbb{L}[G]$ выполнены утверждения $\text{LM}(\text{OD})$ и $\text{BP}(\text{OD})$.

С другой стороны, методы, о которых пойдет речь в главе 14, дают $\neg \text{LM}(\Delta_2^1)$ и $\neg \text{BP}(\Sigma_2^1)$, но $\text{BP}(\Delta_2^1)$, по той причине что, для любого $a \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ с $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} = \omega_2^{\mathbb{L}}$, в $\mathbb{L}[G]$ истинно, что множество $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$ непусто но не является котощим, и в то же время $\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a] = \emptyset$. Отсюда следует, что даже конъюнкция трех гипотез $\text{PK}(\text{OD})$, $\text{LM}(\text{OD})$, $\text{BP}(\text{OD})$ совместима с конъюнкцией отрицаний $\neg \text{PK}(\Pi_1^1) \wedge \neg \text{LM}(\Delta_2^1) \wedge \neg \text{BP}(\Sigma_2^1)$. □

Мы предполагаем, что здесь отрицательная гипотеза $\neg \text{BP}(\Sigma_2^1)$ может быть усилена до $\neg \text{BP}(\Delta_2^1)$ (= существует Δ_2^1 -множество, не имеющее свойства Бэра).

Однако наиболее интересный вопрос состоит в следующем: выполняется ли гипотеза $\text{PK}(\text{OD})$ в простой $\mathbb{C}(\omega_1^{\mathbb{L}})$ -генерической модели, рассмотренной выше в § 13.2? Вообще, совместимо ли $\text{PK}(\text{OD})$ с предположением, что $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}[a]$ для некоторого $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$?

§ 13.6 Модель Соловея

Здесь мы доказываем теорему 13.1.1. Форсинг, который будет использован в доказательстве, является произведением «склеивающих» форсингов вида $\mathbf{Coll}(\mathbb{N}, \xi)$, однако, в отличие от форсинга **P** из § 13.4, где все сомножители имели одно и то же значение $\xi = \omega_2^{\mathbb{L}}$, в этом новом варианте ξ будет меняться от 0 до некоторого строго недостижимого кардинала.

Определение 13.6.1. Фиксируем кардинал Ω , строго недостижимый в классе $\mathbb{L}$ конструктивных множеств.

Множество $\mathcal{P}$ состоит из всех таких функций p , что область определения $\text{dom } p \subseteq \Omega$ конечна, и, для каждого $\xi \in \text{dom } p$, $p(\xi) \in \mathbf{Coll}(\mathbb{N}, \xi)$, т. е. $p(\xi)$ — кортеж из ординалов $\eta < \xi$. Упорядочим $\mathcal{P}$ аналогично $\mathbf{P}$ выше, а именно, $p \leq q$ (p — более сильное «условие») когда $\text{dom } q \subseteq \text{dom } p$ и $p(\xi) \leq q(\xi)$ в $\mathbf{Coll}(\mathbb{N}, \xi)$ (это означает, что $q(\xi) = p(\xi) \upharpoonright \text{lh } q(\xi)$) для всех $\xi \in \text{dom } p$. Как и выше, пустая функция Λ — это наибольшее (и самое слабое) «условие» в $\mathcal{P}$.

Как само $\mathcal{P}$ так и этот порядок принадлежат $\mathbb{L}$. Положим

$$\mathcal{P}_{<\vartheta} = \{p \in \mathcal{P} : \text{dom } p \subseteq \vartheta\}, \quad \mathcal{P}_{\geq\vartheta} = \{p \in \mathcal{P} : \text{dom } p \subseteq \Omega \setminus \vartheta\},$$

а также $\mathcal{P}_{\leq\vartheta} = \mathcal{P}_{<\vartheta+1}$ и $\mathcal{P}_{>\vartheta} = \mathcal{P}_{\geq\vartheta+1}$, для каждого $\vartheta < \Omega$, и вообще $\mathcal{P}_u = \{p \in \mathcal{P} : \text{dom } p \subseteq u\}$ для любого множества $u \subseteq \Omega$. $\square$

Лемма 13.6.2. Любая антицепь $A \subseteq \mathcal{P}$, $A \in \mathbb{L}$ имеет мощность $< \Omega$ в $\mathbb{L}$.

Доказательство. Рассуждаем в $\mathbb{L}$. Можно считать, что A — максимальная антицепь. Положим $\xi_0 = \omega$. Если $\xi_n < \Omega$ определено то множество $\mathcal{P}_{<\xi_n}$ имеет, очевидно, мощность $< \Omega$, а потому, вследствие недостижимости Ω и максимальнойности A , найдется ординал ξ , $\xi_n < \xi < \Omega$, такой что ко всякому $p \in \mathcal{P}_{<\xi_n}$ существует «условие» $q \in A \cap \mathcal{P}_{<\xi}$ совместимое с p в $\mathcal{P}$. Наименьший из таких ординалов ξ обозначим через ξ_{n+1} . Положим $\vartheta = \sup_n \xi_n$; снова $\vartheta < \Omega$ из-за недостижимости Ω . Мы имеем $A \subseteq \mathcal{P}_{<\vartheta}$ (см. доказательство леммы 13.4.3), откуда и вытекает искомым результат, поскольку множество $\mathcal{P}_{<\vartheta}$ имеет мощность $\text{card } \vartheta < \Omega$. $\square$

Теорема 13.1.1 вытекает из следующего результата:

Теорема 13.6.3. Если множество $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}$ является $\mathcal{P}$ -генерическим над $\mathbb{L}$, то в генерическом расширении $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$ выполнены все три гипотезы регулярности: PK(ROD), LM(ROD), BP(ROD).

Замечание 13.6.4. Генерическое расширение вида $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$ как в теореме 13.6.3 называется *моделью Соловея* (над исходной моделью — классом конструктивных множеств $\mathbb{L}$). Вообще, если задана какая-то транзитивная модель $\mathfrak{M}$ теории **ZFC** со строго недостижимым кардиналом $\Omega \in \mathfrak{M}$ (т. е. в $\mathfrak{M}$ истинно, что Ω — строго недостижимый кардинал), то в $\mathfrak{M}$ можно определить множество $\mathcal{P}$, следуя определению 13.6.1, и тогда любое $\mathcal{P}$ -генерическое расширение модели $\mathfrak{M}$ называется *моделью Соловея* (над исходной моделью $\mathfrak{M}$).

Подчеркнем, что в любом случае для построения модели Соловея требуется (строго) недостижимый кардинал. $\square$

Доказательство (теорема). Положим $\mathcal{G}_{<\vartheta} = \mathcal{G} \cap \mathcal{P}_{<\vartheta}$, и аналогично $\mathcal{G}_{\geq\vartheta}$, $\mathcal{G}_{>\vartheta}$. Начнем с нескольких вспомогательных результатов, собранных в следующей лемме. Согласно первому из них, кардинал Ω , бывший строго недостижимым в $\mathbb{L}$, становится первым несчетным кардиналом в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$ благодаря генерической склейке!

Лемма 13.6.5. (i) *Выполняется $\omega_1^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]} = \Omega$;*

(ii) *если $x \in \mathbb{L}[\mathcal{G}] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ то найдется ординал $\vartheta < \Omega$ такой что $x \in \mathbb{L}[\mathcal{G}_{<\vartheta}]$ — и тогда мы имеем $\omega_1^{\mathbb{L}[x]} < \Omega = \omega_1^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$, так что множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ счетно в $\mathbb{L}[G]$;*

(iii) *если $x \in \mathbb{L}[\mathcal{G}] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ то Ω остается недостижимым кардиналом в $\mathbb{L}[x]$, и мы имеем $\omega_\rho^{\mathbb{L}[x]} < \Omega$ для всех $\rho < \Omega$.*

Доказательство. (i) Неравенство $\omega_1^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]} \leq \Omega$ вытекает из леммы 13.6.2 и теоремы 9.2.8. Обратно, если $\xi < \Omega$, то множество $\mathcal{G}_\xi = \{p(\xi) : p \in \mathcal{G}\}$ является $\mathbf{Coll}(\mathbb{N}, \xi)$ -генерическим над $\mathbb{L}$ (по теореме 9.2.10(i)), так что $f_\xi[\mathcal{G}] = \bigcup \mathcal{G}_\xi$ — функция из $\mathbb{N}$ на ξ , откуда следует, что $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$. Раз $\xi < \Omega$ произвольно, мы имеем $\Omega \leq \omega_1^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$.

(ii) Существование ϑ доказывается как и в лемме 13.4.5. Далее, отображение $\langle p, q \rangle \mapsto p \cup q$ — это порядковый изоморфизм между ЧУ множествами $\mathcal{P}_{<\vartheta} \times \mathcal{P}_{\geq\vartheta}$ и $\mathcal{P}$, откуда, по теореме 9.2.10(i), следует, что множество $\mathcal{G}_{<\vartheta}$ является $\mathcal{P}_{<\vartheta}$ -генерическим над $\mathbb{L}$. Поскольку $\text{card } \mathcal{P}_{<\vartheta} < \Omega$ в $\mathbb{L}$, найдется $\kappa < \Omega$ такое что в $\mathbb{L}$ истинно: κ — регулярный кардинал и $\text{card } \mathcal{P}_{<\vartheta} < \kappa$. Тогда $\omega_1^{\mathbb{L}[x]} \leq \omega_1^{\mathbb{L}[\mathcal{G}_{<\vartheta}]} \leq \kappa < \Omega$ по теореме 9.2.8, так что $\omega_1^{\mathbb{L}[x]} < \Omega = \omega_1^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$.

(iii) следует из (ii) по лемме 8.5.2. □

Следующая лемма содержит ключевой технический факт.

Лемма 13.6.6 (ср. с 13.4.6, 13.2.3). *Пусть $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}$ есть $\mathcal{P}$ -генерическое над $\mathbb{L}$ множество, и $a \in \mathbb{L}[\mathcal{G}] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда класс $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$ есть $\mathcal{P}$ -генерическое расширение класса $\mathbb{L}[a]$.*

Доказательство. Выкладки аналогичны доказательству леммы 13.4.6, поэтому мы лишь наметим общую схему и укажем имеющиеся различия. Лемма 13.6.5(ii) приносит такой ординал $\vartheta < \Omega$, что $a \in \mathbb{L}[\mathcal{G}_{<\vartheta}]$. Можно считать что $\vartheta = \kappa + 1$, где $\kappa < \Omega$ — кардинал в $\mathbb{L}$, так что $a \in \mathbb{L}[\mathcal{G}_{\leq\kappa}]$. Множество $\mathcal{P}'$ всех таких «условий» $p \in \mathcal{P}_{\leq\kappa}$, что $\kappa \in \text{dom } p$, $\text{dom } p \setminus \{\kappa\} = \text{ran } p(\kappa)$, и $\text{lh } p(\eta) = \text{lh } p(\kappa)$ для всех $\eta \in \text{dom } p$, — плотно в $\mathcal{P}_{\leq\kappa}$ и представляет собой дерево с κ -ветвлениями (так как κ — кардинал). Поэтому $\mathcal{P}'$ порядково изоморфно множеству $\mathbb{C}(\kappa) = \mathbf{Coll}(\mathbb{N}, \kappa) = \kappa^{<\omega}$ в $\mathbb{L}$. Отсюда следует, по теореме 9.2.9(v), что $\mathbb{L}[\mathcal{G}_{\leq\kappa}] = \mathbb{L}[F]$, где множество $F \subseteq \mathbb{C}(\kappa)$ является $\mathbb{C}(\kappa)$ -

генерическим над $\mathbb{L}$. Аналогично доказательству леммы 13.2.3, найдется дерево $\Sigma \subseteq \mathbb{C}(\kappa)$, $\Sigma \in \mathbb{L}[x]$, удовлетворяющее таким условиям:

- 1) если $p \in \Sigma$, то множество $\Sigma_p = \{q \in \Sigma : q \leq p\}$ имеет мощность ровно κ в $\mathbb{L}[a]$ — ср. с условием (vii) предложения 13.3.2;
- 2) $F \subseteq \Sigma$ и F является Σ -генерическим множеством над $\mathbb{L}[a]$.

Далее нужно следовать доказательству леммы 13.4.6, используя тот достаточно очевидный факт, что множество $\mathbb{C}(\kappa)$ порядково изоморфно произведению $\Sigma \times \mathbb{C}(\kappa)$, вследствие чего класс $\mathbb{L}[\mathcal{G}_{\leq \kappa}]$ является $\mathbb{C}(\kappa)$ -генерическим расширением класса $\mathbb{L}[a]$. $\square$

Лемма 13.6.7 (ср. с 13.2.4, 13.4.7). *Пусть w — произвольное множество, а $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}$ является $\mathcal{P}$ -генерическим над $\mathbb{L}[w]$. Тогда*

- (A) *если $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ есть $\in$ -формула, и $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{L}[w]$, то выполнена эквивалентность:*

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) \text{ истинно в } \mathbb{L}[w, \mathcal{G}] \iff \Lambda \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[w]} \varphi(\check{z}_1, \dots, \check{z}_n);$$
- (B) *если множество $X \in \mathbb{L}[w, \mathcal{G}]$, $X \subseteq \mathbb{L}[w]$ принадлежит классу $\text{OD}(\mathbb{L}[w])$ в $\mathbb{L}[w, \mathcal{G}]$, то $X \in \mathbb{L}[w]$;*
- (C) *в частности, если точка $x \in \mathbb{L}[w, \mathcal{G}] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит классу $\text{OD}(\mathbb{L}[w])$ в $\mathbb{L}[w, \mathcal{G}]$, то $x \in \mathbb{L}[w]$.*

Пусть, дополнительно к предыдущему, $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{P}$ есть еще одно множество, $\mathcal{P}$ -генерическое над $\mathbb{L}[w]$. Тогда

- (D) *если φ есть замкнутая $\in$ -формула с параметрами из $\mathbb{L}[a]$, то выполнена эквивалентность:*

$$\varphi \text{ истинна в } \mathbb{L}[w, \mathcal{G}] \iff \varphi \text{ истинна в } \mathbb{L}[w, \mathcal{G}'].$$

Доказательство. Относительно утверждения (A) леммы см. доказательство леммы 13.4.7. Вспомогательное утверждение об однородности форсинга $\mathcal{P}$ состоит в том, что для любых «условий» $p, q \in \mathcal{P}$, если $\text{dom } p = \text{dom } q = u \subseteq \Omega$ и $\text{lh } p(\xi) = \text{lh } q(\xi)$ для всех $\xi \in u$, множества $\mathcal{P}_{\leq p} = \{p' \in \mathcal{P} : p' \leq p\}$ и $\mathcal{P}_{\leq q}$ порядково изоморфны в $\mathbb{L}$. Построение искомого изоморфизма достаточно элементарно.

Для доказательства (B), пусть, к примеру, $X = \{x : \varphi(w, x)\}$ в $\mathbb{L}[w, \mathcal{G}]$. Тогда из (A) следует, что $X = \{x \in \mathbb{L}[w] : \Lambda \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[w]} \varphi(\check{w}, \check{x})\}$. Но вынуждение над $\mathbb{L}[w]$ выразимо в $\mathbb{L}[w]$ согласно теореме 9.3.2.

Вывод (D) также основан на (A). Именно, пусть φ есть формула $\varphi(z_1, \dots, z_n)$, где $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{L}[w]$. Тогда оба утверждения об истинности в (D) равносильны тому, что $\Lambda \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a]} \varphi(\check{z}_1, \dots, \check{z}_n)$, а это утверждение зависит только от $\mathbb{L}[w]$. $\square$

Собственно **доказательство теоремы 13.6.3** начнем с проверки измеримости и свойства Бэра в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$. Рассмотрим, рассуждая в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$, произвольный $\mathbb{L}$ -абсолютный σ -ССС-идеал $\mathcal{I}$ борелевских подмножеств $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и **ROD**-множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Множество X принадлежит $\text{OD}(a)$ (т. е. определимо формулой, в которой в роли параметров фигурируют ординалы и сама точка a) в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$, для некоторого $a \in \mathbb{L}[\mathcal{G}] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$ является $\mathcal{P}$ -генерическим расширением класса $\mathbb{L}[a]$ по лемме 13.6.6, т. е. найдется такое $\mathcal{P}$ -генерическое над $\mathbb{L}[a]$ множество $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{P}$, что $\mathbb{L}[\mathcal{G}] = \mathbb{L}[w, \mathcal{G}']$.

Требуется доказать, что множество X $\mathcal{I}$ -измеримо.

Итак, пусть $X = \{x: \varphi(a, x)\}$ в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$, где φ содержит лишь a и ординалы в качестве параметров. Считая, для простоты, что на самом деле a – единственный параметр формулы φ (общий случай вполне аналогичен), мы имеем $X = \{x: \psi(a, x)\}$ по лемме 13.6.7(A), где $\psi(a, x)$ есть формула « $\Lambda \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \varphi(\check{a}, \check{x})$ ». Из леммы 13.6.5(ii) (счетность $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) следует что множество **Rand** $_{\mathcal{I}} \mathbb{L}[a]$ $\mathcal{I}$ -полно. В этой ситуации $\mathcal{I}$ -измеримость X в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$ дается теоремой 11.7.3.

Теперь о свойстве совершенного ядра. Рассмотрим, в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$, **ROD**-множество $X = \{x: \varphi(a, x)\} = \{x: \psi(a, x)\} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, где точка a и формулы φ, ψ таковы, как указано выше. Предполагаем, что X несчетно в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$. Тогда $X \not\subseteq \mathbb{L}[a]$. Фиксируем точку $x \in X \setminus \mathbb{L}[a]$. Согласно лемме 13.6.5(ii), $a, x \in \mathbb{L}[\mathcal{G}_{<\vartheta}]$ для какого-то ординала $\vartheta < \Omega$. При этом $\mathbb{L}[\mathcal{G}_{\leq \vartheta}]$ есть $\mathbb{C}(\vartheta)$ -генерическое расширение класса $\mathbb{L}[a]$, см. доказательство леммы 13.6.6, т. е. найдется такое $\mathbb{C}(\vartheta)$ -генерическое над $\mathbb{L}[a]$ множество $F_0 \subseteq \mathbb{C}(\vartheta)$, что $\mathbb{L}[\mathcal{G}_{\leq \vartheta}] = \mathbb{L}[a][F_0]$. При этом $x \in \mathbb{L}[a, F_0] \setminus \mathbb{L}[a]$. Дальнейший ход рассуждений повторяет выкладки § 13.5, с той разницей, что класс $\mathbb{L}[a]$ всюду заменяет $\mathbb{L}$.

□ (теоремы 13.6.3 и 13.1.1)

На самом деле, в отношении свойства совершенного ядра в модели Соловея, аргумент в конце доказательства теоремы приносит более точный результат.

Предложение 13.6.8. *В условиях теоремы 13.6.3, пусть $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}[\mathcal{G}]$, и множество $X \in \mathbb{L}[\mathcal{G}]$, $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит $\text{OD}(\mathbb{L}[a])$ в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$. Если $X \not\subseteq \mathbb{L}[a]$, то X содержит совершенное подмножество. Обратно, если X не более чем счетно, то $X \subseteq \mathbb{L}[a]$. □*

Упражнение 13.6.9. В условиях теоремы 13.6.3, докажите, что в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$ нет **ROD** Ω -последовательностей попарно различных точек $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. **Указание.** Пусть $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}[\mathcal{G}]$, а $s = \langle x_\alpha \rangle_{\alpha < \Omega} \in \mathbb{L}[\mathcal{G}]$ есть последовательность точек $x_\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и $s \in \text{OD}(\{a\})$ в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$. Тогда $x_\alpha \in \mathbb{L}[a]$, $\forall \alpha$, по лемме 13.6.7(C). Воспользуйтесь леммой 13.6.5. □

§13.7 Вторая модель Соловея

Вместе с моделью Соловея $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$ теоремы 13.6.3 часто рассматривается и *вторая модель Соловея* $(\mathbf{HROD})^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$, т. е. множество всех наследственно вещественно-ординально определимых множеств в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$. Эта модель содержит те же точки $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что и сама $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$, и удовлетворяет аксиомам $\mathbf{ZF} + \mathbf{DC}$ по теореме 3.5.2. При этом каждое множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ из $(\mathbf{HROD})^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$ принадлежит $\mathbf{ROD}$ в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$, а потому имеет все три свойства регулярности.

Следствие 13.7.1. *В условиях теоремы 13.6.3, во второй модели Соловея $(\mathbf{HROD})^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$ истинно, что все вообще множества $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ измеримы по Лебегу, имеют свойство Бэра, и свойство совершенного ядра.* $\square$

Результаты 13.6.8 и 13.6.9 также имеют соответствующие аналоги во второй модели Соловея. Например, в $(\mathbf{HROD})^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$ истинно, что нет ни одной ω_1 -последовательности попарно различных точек $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а значит, мощностное неравенство $\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$ в модели $(\mathbf{HROD})^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$ не имеет места. Эти мы еще раз убеждаемся, что полная аксиома выбора $\mathbf{AC}$ (которая влечет $\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$) не верна в $(\mathbf{HROD})^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$.

Мы вернемся к моделям Соловея в главах 17 и 18.

Исторические и библиографические замечания

Теорема 13.1.1 и следствие 13.1.2 из нее принадлежат Соловею [166] (несколько отличающиеся в деталях доказательства на русском языке можно найти в книге [99] и статье [6]). Модель $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$, являющаяся предметом теоремы 13.6.3, хотя и называется обычно *моделью Соловея* (благодаря наиболее важному ее применению в работе [166]), но первая публикация о ней принадлежит Леви [126]. Форсинг $\mathcal{P}$ определения 13.6.1 принято называть *форсингом Леви – Соловея*, или *форсингом Соловея* — не путать со «случайным» форсингом по Соловею из §9.5.

Часть (ii) следствия 13.1.2 — о неразрешимости классических проблем из диаграммы на стр. 135 независимо получена Любецким [4, 33]. Теорема 13.1.5 в части (II) приведена в [31, 33, 35]. Теорема 13.1.5 в части (III) вполне аналогична. Доказательство в части (I) дано нами в [14], а более слабый результат, о том, что в $\mathbf{ZFC}$ из $\neg \mathbf{PK}(\Pi_1^1)$ не следует существование $\mathbf{OD}$ решета, определяющего несчетное Π_1^1 -множество без совершенных подмножеств, приведен Любецким в статьях [4, 34] (доказательство дано в работе [33]).

Ключевые леммы 13.6.6, 13.6.7 доказаны Соловеем в статье [166]; леммы 13.2.3 (с предложением 13.3.2), 13.2.4, 13.4.6, 13.4.7 представляют собой вариации на те же темы с аналогичными доказательствами.

Глава 14

Необратимость импликаций

Снова вернемся к нашей диаграмме на стр. 135.

Является ли полной картина представленных на ней связей между пятью рассмотренными там предложениями? Это — сложный вопрос, но, по крайней мере, его можно уточнить, в первом приближении, следующим образом: для каждой из пяти гипотез с диаграммы, выяснить, следует ли она из конъюнкции тех гипотез с диаграммы, которые ее не мажорируют, а также — для единственной пары несравнимых гипотез $LM(\Delta_2^1)$, $BP(\Sigma_2^1)$ — следует ли их дизъюнкция из нижележащей гипотезы $BP(\Delta_2^1)$. Это приводит нас к шести импликациям нижеследующей теоремы 14.1.1, и главным содержанием этой главы будет доказательство того, что ни одна из этих шести импликаций не может быть доказана. Это говорит о полноте нашей диаграммы: к ней, по крайней мере, нельзя добавить никаких новых стрелок, изображающих доказуемые связи.

§ 14.1 Главная теорема

Следующая теорема является главным результатом этой главы.

Теорема 14.1.1. *В теории ZFC не выводится ни одна из следующих импликаций:*¹

- (I) $\text{BP}(\Delta_2^1) \implies \text{LM}(\Delta_2^1) \vee \text{BP}(\Sigma_2^1)$;
- (II) $\text{LM}(\Delta_2^1) \implies \text{BP}(\Delta_2^1)$.
- (III) $\text{BP}(\Sigma_2^1) \implies \text{LM}(\Delta_2^1)$;
- (IV) $\text{BP}(\Delta_2^1) \wedge \text{LM}(\Delta_2^1) \implies \text{BP}(\Sigma_2^1)$;
- (V) $\text{BP}(\Sigma_2^1) \wedge \text{LM}(\Delta_2^1) \implies \text{LM}(\Sigma_2^1)$;
- (VI) $\text{LM}(\Sigma_2^1) \implies \text{PK}(\Pi_1^1)$;

Доказательства всех шести частей этой теоремы проводятся по общей схеме: именно, мы доказываем, что в определенном генерическом расширении конструктивного универсума $\mathbb{L}$ та или иная импликация из шести указанных ложна — т. е. ее посылка выполнена, а заключение — нет. В этом исследовании моделей, во всех шести пунктах, для приведения гипотез измеримости, свойства Бэра, и свойства совершенного ядра к более удобному виду, мы будем использовать результаты следствия 10.2.2, а в более сложных случаях импликаций (III), (IV), (V) (где используется итерированный форсинг) — также и теоремами 12.2.1 и 12.3.1 о финальном доминировании.

Форсинги, участвующие в построении этих расширений, будут произведениями и итерациями четырех элементарных форсингов, рассмотренных в гл. 9, а именно, форсинга Коэна $\mathbf{C} = \mathbb{N}^{<\omega}$, доминирующего форсинга $\mathbf{D}$, случайного форсинга $\mathbf{R}$, и ε -случайного форсинга $\mathbf{R}_\varepsilon$, в определенных сочетаниях.

§ 14.2 $\text{BP}(\Delta_2^1) \not\implies \text{LM}(\Delta_2^1) \vee \text{BP}(\Sigma_2^1)$

Согласно следствию 10.2.2 и теорема 12.3.1, для доказательства невыводимости импликации (I) теоремы 14.1.1 достаточно построить модель, в которой верно следующее предложение:

$$\left. \begin{array}{l} \forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset) \quad \wedge \quad \mathbf{Rand} \mathbb{L} = \emptyset \quad \wedge \\ \wedge \quad \text{множество } \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ финально ограничено в } \mathbb{N}^{\mathbb{N}}. \end{array} \right\} \quad (\star 1)$$

¹ Импликации приведены в порядке следования от более слабого к более сильному концу диаграммы на стр. 135. Доказательства следуют в том же порядке, только пункт (VI) следует после (II) по некоторым причинам.

Отчасти следуя конструкции из § 13.4, мы возьмем гёделев класс $\mathbb{L}$ в роли исходной модели, и произведение $\aleph_1$ экземпляров коэновского форсинга $\mathbf{C}$, с конечной базой, в роли форсинга.

Определение 14.2.1. Множество $\mathbb{P}$ состоит из всех таких функций p , что область определения $\text{dom } p \subseteq \omega_1^\mathbb{L}$ конечна, и $p(\xi) \in \mathbf{C}$ для всех $\xi \in \text{dom } p$. Порядок на $\mathbb{P}$ определяется так, что $p \leq q$ (p сильнее чем q), когда $\text{dom } q \subseteq \text{dom } p$ и $q(\xi) \subseteq p(\xi)$ в $\mathbf{C}$ для всех $\xi \in \text{dom } q$. Пустая функция Λ — это самый слабый элемент форсинга $\mathbb{P}$. Положим

$$\mathbb{P}_{<\vartheta} = \{p \in \mathbb{P} : \text{dom } p \subseteq \vartheta\}, \quad \mathbb{P}_{\geq\vartheta} = \{p \in \mathbb{P} : \text{dom } p \subseteq \omega_2^\mathbb{L} \setminus \vartheta\},$$

а также $\mathbb{P}_{\leq\vartheta} = \mathbb{P}_{<\vartheta+1}$ и $\mathbb{P}_{>\vartheta} = \mathbb{P}_{\geq\vartheta+1}$, для каждого $\vartheta < \omega_1^\mathbb{L}$, далее, $\mathbb{P}_{\neq\xi} = \{p \in \mathbb{P} : \xi \notin \text{dom } p\}$ для всех $\xi < \omega_1^\mathbb{L}$, и вообще $\mathbb{P}_u = \{p \in \mathbb{P} : \text{dom } p \subseteq u\}$ для любого множества $u \subseteq \omega_1^\mathbb{L}$. $\square$

Упражнение 14.2.2. Докажите, что $\mathbb{P} \in \mathbb{L}$, и если $\vartheta < \omega_1^\mathbb{L}$, то множество $\mathbb{P}_{<\vartheta}$ также принадлежит $\mathbb{L}$ и счетно в $\mathbb{L}$. $\square$

Лемма 14.2.3. Форсинг $\mathbb{P}$ удовлетворяет ССС в $\mathbb{L}$: любая антицепь $A \subseteq \mathbb{P}$, $A \in \mathbb{L}$, не более чем счетна в $\mathbb{L}$.

Доказательство. См. доказательство леммы 13.4.3. $\square$

Следующая теорема влечет нужный результат.

Теорема 14.2.4. Пусть множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathbb{L}$. Тогда в $\mathbb{L}[G]$ имеет место $(\star 1)$, т. е. $\mathbf{Rand} \mathbb{L} = \emptyset$, $\mathbf{Coh} \mathbb{L}$ — не пустое множество, и $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset$ для всех $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$.

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 13.4.4, вводим следующие элементы генерического расширения $\mathbb{L}[G]$ класса $\mathbb{L}$:

- (1) $G_{<\vartheta} = G \cap \mathbb{P}_{<\vartheta}$ для каждого $\vartheta < \omega_1^\mathbb{L}$ — это $\mathbb{P}_{<\vartheta}$ -генерическое над $\mathbb{L}$ множество по теореме о произведении форсингов;
- (2) $G_{\leq\vartheta}$, $G_{>\vartheta}$, $G_{\geq\vartheta}$, $G_{\neq\xi}$ — аналогично;
- (3) $G_\xi = \{p(\xi) : p \in G \wedge \xi \in \text{dom } p\}$ для каждого ординала $\xi < \omega_1^\mathbb{L}$ — это множество является $\mathbf{C}$ -генерическим над $\mathbb{L}$ и даже над $\mathbb{L}[G_{\neq\xi}]$, и, следовательно $a_\xi = \mathbf{a}_{G_\xi} = \bigcup G_\xi \in \mathbb{L}[G_\xi]$ является точкой $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ по теореме 9.4.2, и сверх того $a_\xi \in \mathbf{Coh} \mathbb{L}$, и даже $a_\xi \in \mathbf{Coh} \mathbb{L}[G_{\neq\xi}]$ согласно теореме 10.4.2.²

² Нетрудно вывести, что такое расширение $\mathbb{L}[G]$ тождественно $\mathbb{L}[\langle a_\xi \rangle_{\xi < \omega_1^\mathbb{L}}]$, и поэтому $\mathbb{L}[G]$ принято характеризовать как расширение исходной модели $\mathbb{L}$ посредством присоединения $\aleph_1$ взаимно генерических по Коэну чисел.

Часть 1: доказываем, что, в $\mathbb{L}[G]$, если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset$. Аналогично лемме 13.4.5, найдется такой ординал $\vartheta < \omega_1^{\mathbb{L}}$, что $a \in \mathbb{L}[G_{<\vartheta}]$. Тогда $a_\xi \in \mathbf{Coh} \mathbb{L}[G_{\neq \xi}]$ согласно (3), а потому $a_\xi \in \mathbf{Coh} \mathbb{L}[G_{<\xi}]$ и $a_\xi \in \mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$, так как $\mathbb{L}[a] \subseteq \mathbb{L}[G_{<\xi}] \subseteq \mathbb{L}[G_{\neq \xi}]$.

Часть 2: доказываем, что $\mathbf{Rand} \mathbb{L} = \emptyset$ в $\mathbb{L}[G]$. Это будет несколько сложнее. Рассмотрим произвольную точку $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}[G]$; требуется доказать, что $x \notin \mathbf{Rand} \mathbb{L}$. Как и выше, найдется такой ординал $\vartheta < \omega_1^{\mathbb{L}}$, что $x \in \mathbb{L}[G_{<\vartheta}]$. По теореме 9.2.6 найдется такое $\mathbb{P}_{<\vartheta}$ -имя $t \in \mathbb{L}$, что $x = t[G]$. А коль скоро $x = t[G] \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, по теореме 9.3.2(ii) найдется такое «условие» $p_0 \in G_{<\vartheta}$, что $p_0 \Vdash_{\mathbb{L}}^{\mathbb{P}_{<\vartheta}} (t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$.

Рассуждая в $\mathbb{L}$, заметим, что множество $P = \{p \in \mathbb{P}_{<\vartheta} : p \leq p_0\}$ счетно согласно 14.2.2; пусть $P = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Через $\mathcal{T}_n$ обозначим множество всех таких деревьев $T \subseteq 2^{<\omega}$, без $\subseteq$ -максимальных элементов, что «условие» $q_n \mathbb{P}_{<\vartheta}$ -вынуждает $t \in [T]$. Если $n \in \mathbb{N}$, то множества $[T]$, $T \in \mathcal{T}_n$ образуют центрированную систему замкнутых подмножеств пространства $2^{\mathbb{N}}$ — т. е. любое их конечное семейство имеет непустое пересечение. Благодаря компактности, найдется точка $x_n \in \bigcap_{T \in \mathcal{T}_n} [T]$. Можно подобрать последовательность деревьев $T_k \subseteq 2^{<\omega}$ так что множества $[T_k]$ попарно дизъюнкты, не пересекают $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, и $\sum_k \lambda([T_k]) = 1$.

Теперь, уже *рассуждая в $\mathbb{L}[G]$* , мы заключаем, что x не принадлежит $\mathbf{F}_\sigma$ -множеству $\bigcup_k [T_k]$ полной λ -меры — следовательно, x не принадлежит $\mathbf{Rand} \mathbb{L}$ по теореме 10.4.2. В самом деле, пусть напротив, x принадлежит некоторому $[T_k]$. Это вынуждается каким-нибудь «условием» $p \in G_{<\vartheta}$, причем, раз и p_0 принадлежит $G_{<\vartheta}$, можно считать, что $p \leq p_0$, т. е. $p = q_n \in P$ для некоторого n , и, соответственно, $T_k \in \mathcal{T}_n$. Отсюда по построению вытекает $x_n \in [T_k]$ — а это противоречит выбору деревьев T_k .

Часть 3: доказываем, что множество $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}$ финально неограничено в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в модели $\mathbb{L}[G]$. Здесь также придется немного повозиться. Пусть $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}[G]$; требуется найти точку $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}$, для которой $a \not\leq^* x$. Как и выше, найдутся такие ординал $\vartheta < \omega_1^{\mathbb{L}}$, $\mathbb{P}_{<\vartheta}$ -имя $t \in \mathbb{L}$, и «условие» $p_0 \in G_{<\vartheta}$, что $x \in \mathbb{L}[G_{<\vartheta}]$, $x = t[G]$, и $p_0 \Vdash_{\mathbb{L}}^{\mathbb{P}_{<\vartheta}} (t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$.

Если $p \in G_{<\vartheta}$, $p \leq p_0$, то определим $f_p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ так:

$$f_p(n) = \min_{q \in G_{<\vartheta}, q \leq p} \{m \in \mathbb{N} : q \Vdash_{\mathbb{L}}^{\mathbb{P}_{<\vartheta}} (t(\check{n}) = \check{m})\}, \quad \text{так}$$

По выбору p_0 , значение $f_p(n)$ определено для всех n , откуда в самом деле $f_p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Кроме того, раз вынуждение выразимо в исходной модели $\mathbb{L}$, отображение $p \mapsto f_p$ принадлежит $\mathbb{L}$. А поскольку множество $\mathbb{P}_{<\vartheta}$ счетно в $\mathbb{L}$ по выбору ϑ , найдется такая точка $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}$, что $f_p <^* a$ для всех $p \in \mathbb{P}_{<\vartheta}$. Мы утверждаем, что $a \not\leq^* x$.

В самом деле, в противном случае, найдется такое число n_0 и такое «условие» $p \in G_{<\vartheta}$, что $p \leq p_0$ и $p \Vdash_{\mathbb{L}}^{P_{<\vartheta}} (\check{a}(\check{n}) \leq t(\check{n}))$ для всех $n \geq n_0$. Однако $f_p <^* a$ по выбору a . Поэтому найдется число $n \geq n_0$, для которого $m = f_p(n) < a(n)$. По определению f_p , существует такое «условие» $q \in P_{<\vartheta}$, что $q \leq p$ и $q \Vdash_{\mathbb{L}}^{P_{<\vartheta}} (t(\check{n}) = \check{m})$. Но это противоречит выбору p и неравенству $m = f_p(n) < a(n)$.

□ (теоремы 14.2.4 и 14.1.1(I))

Имеется альтернативное рассуждение для части 3 доказательства: именно, прямое доказательство того, что Σ_2^1 -множество $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}$ не имеет свойства Бэра в модели $\mathbb{L}[G]$ теоремы 14.2.4. Во-первых, свойство Бэра — если оно есть — определяется наличием определенной точки $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}[G]$, кодирующей некоторое открытое множество и некоторое тоще $\mathbf{F}_\sigma$ -множество. Однако каждая точка $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}[G]$ принадлежит классу $\mathbb{L}[G_{<\vartheta}]$ для подходящего ординала $\vartheta < \omega_1^{\mathbb{L}}$. Далее, доказывается, что при $\vartheta < \omega_1$ форсинг $P_{<\vartheta}$ имеет плотное подмножество, изоморфное форсингу Коэна $\mathbf{C} = \mathbb{N}^{<\omega}$. Поэтому, по теореме 9.2.9, $P_{<\vartheta}$ -генерические расширения класса $\mathbb{L}$ тождественны простым $\mathbf{C}$ -генерическим, т. е. коэновским расширениям. Остается проверить, что множество $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}$ не имеет свойства Бэра в $\mathbf{C}$ -генерических расширениях модели $\mathbb{L}$. Это довольно сложная задача, решение которой изложено на русском языке в нашей работе [15].

§ 14.3 $\text{LM}(\Delta_2^1) \not\Rightarrow \text{BP}(\Delta_2^1)$

В этом параграфе устанавливается невыводимость импликации (II) теоремы 14.1.1. Согласно следствию 10.2.2, достаточно построить модель, в которой выполнено предложение

$$\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset) \wedge \mathbf{Coh} \mathbb{L} = \emptyset. \quad (\star 2)$$

Задача эта выглядит как двойственная к той, которая была решена в § 14.2 — если отвлечься от требования ложности гипотезы $\text{BP}(\Sigma_2^1)$ в модели из § 14.2. Поэтому напрашивается идея использовать генерическое расширение, двойственное по отношению к рассмотренному в § 14.2 — в том смысле, что в роли базового форсинга взять не коэновский форсинг а случайный форсинг, в варианте P_λ , и, соответственно, присоединить к исходной модели $\mathbb{L}$ совокупность из $\aleph_1^{\mathbb{L}}$ взаимно случайных точек (см. сноску на стр. 263). Собственно говоря, это мы и сделаем. Однако, из-за особенностей случайного форсинга, простое произведение с конечной поддержкой, как в определении 14.2.1, придется заменить более сложной конструкцией, основанной на той же идее, что и форсинг примера 11.6.2.

14.3А Форсинг

Нам придется обобщить некоторые ключевые понятия в связи со случайным форсингом на бесконечные произведения бэровского пространства. Рассматриваются пространства вида $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$, где u — непустое (возможно, даже несчетное) множество. На каждом $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$ определяется мера λ^u , равная произведению u экземпляров меры λ примера 6.1.1. Понятно, что мера λ^u сконцентрирована на подпространстве $(2^{\mathbb{N}})^u \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$.

Если множество u не более чем счетно, то существуют биекции $b: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N} \times u$, и каждая такая биекция индуцирует гомеоморфизм $H^b: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$, определенный так, что если $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $y = H^b(x)$, то $y(\xi)(n) = x(b^{-1}(n, \xi))$ для всех $\xi \in u$ и n . Этот гомеоморфизм, очевидно, переводит меру λ в λ^u .

Для нас в особенности будет важно пространство $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\omega_1}$, (где $\omega_1 = \{\xi \in \text{Ord} : \xi < \omega_1\}$ — наименьший несчетный ординал) с мерой λ^{ω_1} , равной произведению ω_1 экземпляров меры λ , и сконцентрированной на подпространстве $(2^{\mathbb{N}})^{\omega_1} \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\omega_1}$.

Определение 14.3.1. Пусть $u \subseteq v \subseteq \omega_1$ и $X \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^v$. Положим

$$X \upharpoonright u = \{x \upharpoonright u : x \in X\} \quad \text{и} \quad X \upharpoonright^{\lambda} u = \{y \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u : \lambda^{v \setminus u}((X)_y) > 0\}$$

(проекция и λ -проекция), где $(X)_y = \{z \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{v \setminus u} : y \cup z \in X\}$ (сечение)³ для $y \in X \upharpoonright u$. Если $Y \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$, то определяется обратная проекция $Y \upharpoonright^{\lambda} v = \{x \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^v : x \upharpoonright u \in Y\}$. $\square$

Лемма 14.3.2. (i) Пусть $u \subseteq v \subseteq \omega_1$ — пара не более чем счетных множеств, а $X \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^v$ и $Y \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$ — борелевские множества. Тогда множества $Y \upharpoonright^{\lambda} v$ и $X \upharpoonright^{\lambda} u$ (но не обязательно множество $X \upharpoonright u$!) — борелевские, и $\lambda^v(Y \upharpoonright^{\lambda} v) = \lambda^u(Y)$.

(ii) Допустим, что $\lambda^v(X) > 0$. Тогда $\lambda^u(X \upharpoonright^{\lambda} u) > 0$, и если дополнительно $\lambda^u(Y) > 0$, то при $Y \subseteq (X \upharpoonright^{\lambda} u)$ будет $\lambda^v(X \cap (Y \upharpoonright^{\lambda} v)) > 0$, а при $Y \cap (X \upharpoonright^{\lambda} u) = \emptyset$ будет $\lambda^v(X \cap (Y \upharpoonright^{\lambda} v)) = 0$.

Доказательство. Мера λ^v на $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^v$ тождественна произведению мер λ^u и $\lambda^{v \setminus u}$. После этого замечания, борелевость множества $X \upharpoonright^{\lambda} u$ дается результатом 6.4.3, а остальные утверждения легко следуют по теореме Фубини. $\square$

Особую категорию множеств в пространстве $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\omega_1}$ составляют множества счетной базы.

³ Если $y \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$ и $z \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{v \setminus u}$ то $y \cup z \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^v$.

Определение 14.3.3. $\mathbf{СЧТ} = \mathcal{P}_{\text{ctbl}}(\omega_1)$ есть множество всех не более чем счетных множеств в ω_1 .

Пусть $u \in \mathbf{СЧТ}$ и $X \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$ — борелевское (открытое, замкнутое) множество в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$. Тогда множество $X \uparrow \omega_1 \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\omega_1}$ называется *борелевским (открытым, замкнутым соответственно) множеством счетной базы*, или, кратко, *СБ множеством*, в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\omega_1}$. $\square$

Не все даже открытые множества в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\omega_1}$ имеют счетную базу, однако все борелевские СБ множества любой данной базы $\xi < \omega_1$ образуют σ -алгебру, фактически тождественную (по модулю операции $\uparrow$) алгебре всех борелевских множеств в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\xi}$.

Борелевские множества пространств $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\xi}$, $\xi < \omega_1$ и борелевские СБ множества пространства $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\omega_1}$ допускают кодировку, следующую определению из § 5.7Г.

Определение 14.3.4. Пусть $\emptyset \neq u \in \mathbf{СЧТ}$. Множество $\mathbb{N} \times u$ счетно в $\mathbb{L}$, а потому найдется биекция $b \in \mathbb{L}$, $b : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N} \times u$. Через b_u обозначим одну из таких b .⁴ Биекция b_u индуцирует гомеоморфизм $H_u = H^{b_u} : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$, см. выше. Если $\varkappa \in \mathbf{ВС}$ (борелевский код), то пусть $B_{\varkappa}^u = H_u[B_{\varkappa}]$ ($= \{H_u(x) : x \in B_{\varkappa}\}$). $\square$

Понятно, что множества вида $B_{\varkappa}^u$, $\varkappa \in \mathbf{ВС}$, — это в точности все борелевские множества в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$, а множества вида $B_{\varkappa}^u \uparrow \omega_1$, $u \in \mathbf{СЧТ}$ и $\varkappa \in \mathbf{ВС}$, — это все борелевские СБ множества в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\omega_1}$.

А теперь следует ключевое определение.

Напомним, что $\mathbb{P}_{\lambda} = \{p \in \mathbf{ВС} : \lambda(B_p) > 0\}$.

Определение 14.3.5. Положим $\mathbf{\Pi} = \mathbf{СЧТ} \times \mathbb{P}_{\lambda}$.

Каждое «условие» $\langle u, p \rangle \in \mathbf{\Pi}$ (где $u \in \mathbf{СЧТ}$ и $p \in \mathbb{P}_{\lambda}$) следует «визуализировать» как СБ множество $B_p^u \uparrow \omega_1$.

Порядок на $\mathbf{\Pi}$ вводится так: $\langle u, p \rangle \leq \langle v, q \rangle$ (т. е. «условие» $\langle u, p \rangle$ сильнее), если $B_p^u \uparrow (u \cup v) \subseteq B_q^v \uparrow (u \cup v)$. Это, разумеется, эквивалентно тому, что $B_p^u \uparrow \omega_1 \subseteq B_q^v \uparrow \omega_1$. $\square$

Лемма 14.3.6. *Множество $\mathbf{\Pi}$ с указанным порядком удовлетворяет условию счетности антицепей ССС.*

Доказательство. Утверждается, что если «условия» $\langle u, p \rangle, \langle v, q \rangle$ в $\mathbf{\Pi}$ несовместны, то $\lambda^{\omega_1}((B_p^u \uparrow \omega_1) \cap (B_q^v \uparrow \omega_1)) = 0$ — отсюда сразу следует ССС. Для этого положим $w = u \cup v$. По лемме 14.3.2(i), множества $B_p^u \uparrow w$ и $B_q^v \uparrow w$ — борелевские и положительной λ^w -меры, так что найдутся коды $p', q' \in \mathbb{P}_{\lambda}$, для которых $B_{p'}^w = B_p^u \uparrow w$ и $B_{q'}^w = B_q^v \uparrow w$. Рассмотрим код $r = p' \wedge q'$ (пример 5.7.5) — для

⁴ Выбор b_u будет уточнен ниже, см. определение 14.3.8.

него $B_r = B_{p'} \cap B_{q'}$ и, соответственно, $B_r^w = B_{p'}^w \cap B_{q'}^w$. Следовательно, если $r \in \mathbb{P}_\lambda$, то $\langle w, r \rangle \in \Pi$ и $\langle w, r \rangle \leq \langle w, p' \rangle \leq \langle u, p \rangle$, $\langle w, r \rangle \leq \langle w, q' \rangle \leq \langle v, q \rangle$ — т. е. «условия» $\langle u, p \rangle, \langle v, q \rangle$ совместны в Π , противоречие. Значит, на самом деле, $r \notin \mathbb{P}_\lambda$, т. е. $\lambda(B_r) = 0$, откуда с очевидностью $\lambda^{\omega_1}((B_p^u \uparrow \omega_1) \cap (B_q^v \uparrow \omega_1)) = \lambda^w((B_{p'}^w) \cap (B_{q'}^w)) = \lambda^w(B_r^w) = \lambda(B_r) = 0$. $\square$

Лемма 14.3.7. *Если $u \in \mathbf{СЧТ}$ и множество $D \subseteq \mathbb{P}_\lambda$ предплотно в $\mathbb{P}_\lambda$, то следующее множество плотно в Π :*

$$D' = \{\langle v, p \rangle \in \Pi : u \subseteq v \wedge \exists q \in D (B_p^v \upharpoonright u \subseteq B_q^u)\}.$$

Доказательство. Пусть $\langle u_0, p_0 \rangle \in \Pi$. Положим $v = u_0 \cup u$ и рассмотрим такие коды $p_1, q \in \mathbb{P}_\lambda$, что $B_{p_1}^v = B_{p_0}^{u_0} \upharpoonright v$ и $B_q^u = B_{p_1}^v \upharpoonright^{\lambda} u$ (лемма 14.3.2). Вследствие предплотности D имеются коды $r \in D$ и $\varrho \in \mathbb{P}_\lambda$, для которых $B_\varrho \subseteq B_r \cap B_q$ и, следовательно, $B_\varrho^u \subseteq B_r^u \cap B_q^u$. Борелевское множество $Q = B_p^v \cap (B_\varrho^u \upharpoonright v)$ имеет положительную λ^v -меру по лемме 14.3.2(ii). Поэтому, взяв любой код $p \in \mathbf{ВС}$, для которого $B_p^v = Q$, мы получим $\lambda(B_p) > 0$, так что $p \in \mathbb{P}_\lambda$ и $\langle v, p \rangle \in \Pi$. Однако по построению $\langle v, p \rangle \leq \langle u, r \rangle$ и $\langle v, p \rangle \leq \langle u_0, p_0 \rangle$. $\square$

14.3Б Релятивизация к $\mathbb{L}$

Мы собираемся использовать Π -генерические расширения конструктивного универсума $\mathbb{L}$ для доказательства невыводимости импликации (II) теоремы 14.1.1. Прежде всего, нужно отнести определение Π к $\mathbb{L}$. На это направлено следующее определение. Напомним, что $\omega_1^{\mathbb{L}}$ — первый несчетный кардинал в классе $\mathbb{L}$, и $\mathbb{P}_\lambda^{\mathbb{L}} = \mathbb{P}_\lambda \cap \mathbb{L}$.

Определение 14.3.8. $\mathbf{СЧТ}^{\mathbb{L}}$ есть совокупность всех таких множеств $u \in \mathbb{L}$, что $u \subseteq \omega_1^{\mathbb{L}}$ и u не более чем счетно в $\mathbb{L}$.

Если $u \in \mathbf{СЧТ}^{\mathbb{L}}$ и $\varkappa \in \mathbf{ВС}$, то для определения множества $B_\varkappa^u \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$ (определение 14.3.4) мы берем в роли b_u ту биекцию $b : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N} \times u$, $b \in \mathbb{L}$, которая является наименьшей из их всех в смысле гёделева полного упорядочения $<^{\text{гёд}}$ класса $\mathbb{L}$. Биекция b_u индуцирует гомеоморфизм $H_u = H^{b_u} : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$, см. начало §14.3.

$\Pi^{\mathbb{L}}$ есть множество Π , определенное в $\mathbb{L}$, т. е. $\Pi^{\mathbb{L}} = \mathbf{СЧТ}^{\mathbb{L}} \times \mathbb{P}_\lambda^{\mathbb{L}}$ состоит из всех таких пар $\langle u, p \rangle$, что $u \in \mathbf{СЧТ}^{\mathbb{L}}$ и $p \in \mathbb{P}_\lambda^{\mathbb{L}}$.

Если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то точно так же определяется множество $\mathbf{СЧТ}^{\mathbb{L}[a]}$, биекция $b_u : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N} \times u$, $b_u \in \mathbb{L}[a]$ (при помощи порядка $<_a^{\text{гёд}}$) для каждого $u \in \mathbf{СЧТ}^{\mathbb{L}[a]}$, множества вида $B_\varkappa^u \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$, $u \in \mathbf{СЧТ}^{\mathbb{L}[a]}$ и $\varkappa \in \mathbf{ВС}$, и множество $\Pi^{\mathbb{L}[a]} = \mathbf{СЧТ}^{\mathbb{L}[a]} \times \mathbb{P}_\lambda^{\mathbb{L}[a]}$, где $\mathbb{P}_\lambda^{\mathbb{L}[a]} = \mathbb{P}_\lambda \cap \mathbb{L}[a]$. $\square$

Следующая лемма об абсолютности в связи с кодировкой 14.3.4 родственна следствию 5.9.3(v),(vi) и некоторым другим подобным утверждениям об абсолютности выше.

Лемма 14.3.9. Пусть $u, v \in \text{СЧТ}^\mathbb{L}$ и $\varkappa, \varrho \in \text{BC} \cap \mathbb{L}$. Тогда множество $(B_\varkappa^u)^\mathbb{L}$ (т. е. $B_\varkappa^u$, определенное в $\mathbb{L}$ согласно 14.3.8) равно $B_\varkappa^u \cap \mathbb{L}$. Кроме того, следующие соотношения абсолютны для $\mathbb{L}$:

- (i) $B_\varkappa^u \uparrow (u \cup v) \subseteq B_\varrho^v \uparrow (u \cup v)$ (т. е. порядок определения 14.3.4);
- (ii) $B_\varkappa^u \cap B_\varrho^v = \emptyset$;
- (iii) $B_\varkappa^u \uparrow v = B_\varrho^v$ — при условии, что $u \subseteq v$;
- (iv) $B_\varkappa^u = B_\varrho^v \upharpoonright^\lambda u$ — при условии, что $u \subseteq v$.

Доказательство. Для вывода равенства $(B_\varkappa^u)^\mathbb{L} = B_\varkappa^u \cap \mathbb{L}$ вспомним, что 1) $(B_\varkappa)^\mathbb{L} = B_\varkappa \cap \mathbb{L}$ согласно 5.9.3(v) и 2) $B_\varkappa^u$ есть биективный H_u -образ множества $B_\varkappa$, а функция H_u по определению сохраняет в обе стороны принадлежность к $\mathbb{L}$ при условии, что биекция b_u принадлежит $\mathbb{L}$ — что имеет место по определению 14.3.8.

(i) Пусть $w = u \cup v$. Биекции b_u, b_v, b_w по определению принадлежат $\mathbb{L}$. Следовательно, и функции $f_u(n) = b_w^{-1}(b_u(n))$, $f_v(n) = b_w^{-1}(b_v(n))$ (т. е. f_u, f_v — точки $\mathbb{N}^\mathbb{N}$) принадлежат $\mathbb{L}$. Имеется и точка $g \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \cap \mathbb{L}$, для которой $f_u = (f)_0$ и $f_v = (f)_1$, т. е. f_u, f_v рекурсивны относительно f . Но тогда (непрерывные) отображения $F_u(x) = H_u^{-1}(H_w(x) \upharpoonright u)$ и $F_v(x) = H_v^{-1}(H_w(x) \upharpoonright v)$ (из $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$) принадлежат $\Delta_1^1(f)$. Это позволяет нам выразить соотношение $B_\varkappa^u \uparrow w \subseteq B_\varrho^v \uparrow w$ Π_1^1 -формулой $\forall x (F_u(x) \in B_\varkappa \implies F_v(x) \in B_\varrho)$, и сослаться на теорему абсолютности 5.9.1.

Далее, равенство $B_\varkappa \cap B_\varrho = \emptyset$ абсолютно для $\mathbb{L}$ согласно следствию 5.9.3(vi). Отсюда следует и абсолютность (ii).

Утверждение (iii) есть простое следствие (i). Несколько более сложное доказательство (iv) мы оставляем как **упражнение**; используйте соединяющие функции F_u и F_v и результаты из § 6.4. $\square$

14.3В Генерическое расширение

Возвращаясь к множеству $\Pi^\mathbb{L}$, мы рассмотрим его как форсинг в $\mathbb{L}$. Можно рассматривать генерические множества $G \subseteq \Pi^\mathbb{L}$ и соответствующие генерические расширения универсума $\mathbb{L}$. Мы используем такое расширение для завершения доказательства невыводимости импликации (II) теоремы 14.1.1.

Теорема 14.3.10. Пусть множество $G \subseteq \Pi^\mathbb{L}$ является $\Pi^\mathbb{L}$ -генерическим над $\mathbb{L}$. Тогда в $\mathbb{L}[G]$ имеет место соотношение $(\star 2)$, т. е. $\text{Coh } \mathbb{L} = \emptyset$, а $\text{Rand } \mathbb{L}[a] \neq \emptyset$ для всех $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Сверх того,

- (i) кардиналы $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}[G]$ совпадают;
- (ii) пересечение $\bigcap_{\langle u, p \rangle \in G} (B_p^u \uparrow \omega_1^{\mathbb{L}})$ содержит единственную точку $\mathbf{a} = \mathbf{a}_G \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\omega_1^{\mathbb{L}}}$, причем выполнено $\mathbb{L}[G] = \mathbb{L}[\mathbf{a}_G]$;
- (iii) если $u \in \mathbf{C\check{T}T}^{\mathbb{L}}$, то точка $\mathbf{a}_G \upharpoonright u \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^u$ λ^u -случайна над $\mathbb{L}$ в том смысле, что если $\varkappa \in \mathbf{B\check{C}} \cap \mathbb{L}$ и $\lambda(\mathbf{B}_{\varkappa}) = 0$ (или, что эквивалентно, $\lambda^u(\mathbf{B}_{\varkappa}^u) = 0$), то $\mathbf{a}_G \upharpoonright u \notin \mathbf{B}_{\varkappa}^u$;
- (iv) если $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}[G]$, то найдется множество $u \in \mathbf{C\check{T}T}^{\mathbb{L}}$, для которого $x \in \mathbb{L}[\mathbf{a}_G \upharpoonright u]$;
- (v) если $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$, то точка $\mathbf{a}_G(\xi) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ λ -случайна над $\mathbb{L}[\mathbf{a}_G \upharpoonright \xi]$ в обычном смысле, т. е. принадлежит $\mathbf{Rand}(\mathbf{a}_G \upharpoonright \xi)$.

Доказательство. Форсинг $\mathbf{\Pi}^{\mathbb{L}}$ удовлетворяет ССС в $\mathbb{L}$ согласно лемме 14.3.6, откуда по теореме 9.2.8 следует (i). Утверждение (ii) аналогично одному из утверждений теоремы 11.3.1, и доказывается примерно тем же способом — мы оставляем его как **упражнение**.

(iii) Пусть $\varkappa \in \mathbf{B\check{C}} \cap \mathbb{L}$ и $\lambda(\mathbf{B}_{\varkappa}) = 0$. Рассуждаем в $\mathbb{L}$. По выбору $\varkappa$, множество D всех «условий» $q \in \mathbb{P}_{\lambda}$, для которых $\mathbf{B}_q \cap \mathbf{B}_{\varkappa} = \emptyset$, очевидно, плотно в $\mathbb{P}_{\lambda}$. Следовательно, по лемме 14.3.7, множество

$$D' = \{\langle v, p \rangle \in \mathbf{\Pi} : u \subseteq v \wedge \exists q \in D (\mathbf{B}_p^v \upharpoonright u \subseteq \mathbf{B}_q^u)\}$$

плотно в $\mathbf{\Pi}$. *Конец рассуждения в $\mathbb{L}$.*

По генеричности, найдется «условие» $\langle v, p \rangle \in D' \cap G$. Тогда $u \subseteq v$ и мы имеем $\mathbf{B}_p^v \upharpoonright u \subseteq \mathbf{B}_q^u$ для подходящего «условия» $\langle u, q \rangle \in D$. Тогда $\mathbf{a}_G \upharpoonright u \in \mathbf{B}_q^u$ (коль скоро по определению $\mathbf{a}_G \upharpoonright u \in \mathbf{B}_q^u$). Наконец, вспомним, что $\mathbf{B}_q \cap \mathbf{B}_{\varkappa} = \emptyset$ в $\mathbb{L}$ по определению. Отсюда $\mathbf{B}_q \cap \mathbf{B}_{\varkappa} = \emptyset$ и в универсуме согласно следствию 5.9.3(vi), а значит, и $\mathbf{B}_q^u \cap \mathbf{B}_{\varkappa}^u = \emptyset$. Отсюда немедленно следует $\mathbf{a}_G \upharpoonright u \notin \mathbf{B}_{\varkappa}^u$.

(iv) Через $\Vdash$ обозначим отношение $\mathbf{\Pi}^{\mathbb{L}}$ -вынуждения $\Vdash_{\mathbf{\Pi}^{\mathbb{L}}}$ над $\mathbb{L}$. По теореме 9.2.6 найдется такое $\mathbf{\Pi}^{\mathbb{L}}$ -имя $t \in \mathbb{L}$, что $x = t[G]$, и при этом $t[G'] \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для любого вообще $\mathbf{\Pi}^{\mathbb{L}}$ -генерического над $\mathbb{L}$ множество $G \subseteq \mathbf{\Pi}^{\mathbb{L}}$ — так что $\mathbf{\Pi}^{\mathbb{L}} \Vdash t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Последовательность множеств $D_{kn} = \{\langle u, p \rangle \in \mathbf{\Pi}^{\mathbb{L}} : \langle u, p \rangle \Vdash \check{x}(\check{k}) = \check{n}\}$ принадлежит $\mathbb{L}$, вместе с множествами $D_k = \bigcup_n D_{kn}$, причем каждое из последних плотно в $\mathbf{\Pi}^{\mathbb{L}}$ по выбору t . Выберем, *рассуждая в $\mathbb{L}$* , максимальную антицепь $A_k \subseteq D_k$ в каждом D_k . Из плотности D_k следует, что каждая A_k есть максимальная антицепь и в самом $\mathbf{\Pi}^{\mathbb{L}}$. А по лемме 14.3.6 каждая A_k счетна в $\mathbb{L}$, откуда следует, что множество $u_0 = \bigcup_k \{u : \exists p (\langle u, p \rangle \in A_k)\}$ счетно в $\mathbb{L}$ и принадлежит $\mathbf{C\check{T}T}^{\mathbb{L}}$.

Мы утверждаем, что $x \in \mathbb{L}[\mathbf{a}_G \upharpoonright u_0]$. Достаточно доказать, что

$$x(k) = n \iff \exists \langle u, p \rangle \in A_k \cap D_{kn} (\mathbf{a}_G \upharpoonright u \in \mathbf{B}_p^u). \quad (*)$$

Справа налево. Пусть $\langle u, p \rangle \in A_k \cap D_{kn}$ и $\mathbf{a}_G \upharpoonright u \in \mathbf{B}_p^u$; тогда $u \subseteq u_0$. Достаточно доказать, что «условие» $\langle u, p \rangle$ принадлежит G .

Множество $D = \{r \in \mathbb{P}_\lambda^\mathbb{L} : \mathbf{B}_r \subseteq \mathbf{B}_p \vee \mathbf{B}_r \cap \mathbf{B}_p = \emptyset\}$, очевидно, предплотно в $\mathbb{P}_\lambda^\mathbb{L}$ и принадлежит $\mathbb{L}$ согласно абсолютности соотношений $\mathbf{B}_r \subseteq \mathbf{B}_p$, $\mathbf{B}_r \cap \mathbf{B}_p = \emptyset$ (следствие 5.9.3(vi)). Согласно лемме 14.3.7, найдется «условие» $\langle u, r \rangle \in G$, для которого $r \in D$. Тогда $\mathbf{a}_G \upharpoonright u \in \mathbf{B}_r^u$. Но также $\mathbf{a}_G \upharpoonright u \in \mathbf{B}_p^u$. Поэтому $\mathbf{B}_r^u \cap \mathbf{B}_p^u \neq \emptyset$, откуда $\mathbf{B}_r \cap \mathbf{B}_p \neq \emptyset$, а значит, $\mathbf{B}_r \subseteq \mathbf{B}_p$ и $\mathbf{B}_r^u \subseteq \mathbf{B}_p^u$. Но $\langle u, r \rangle \in G$ — следовательно, и $\langle u, p \rangle \in G$, что и требовалось.

Слева направо. Пусть $x(k) = n$. Но A_k — максимальная антицепь и, следовательно, предплотное множество, а потому найдется «условие» $\langle u, p \rangle \in G \cap A_k$. Тогда $\langle u, p \rangle \in D_{kn'}$ для некоторого n' , откуда $x(k) = n'$. Значит, $n' = n$. При этом $\mathbf{a}_G \upharpoonright u \in \mathbf{B}_p^u$, так как $\langle u, p \rangle \in G$.

(v) Пусть $u = \xi \cup \{\xi\}$. По предыдущему, точка $\mathbf{x} = \mathbf{a}_G \upharpoonright u \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^u$ является λ^u -случайной над $\mathbb{L}$ в смысле (iii). Представим $\mathbf{x}$ как пару $\mathbf{x} = \langle \mathbf{x} \upharpoonright \xi, \mathbf{x}(\xi) \rangle \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\xi \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Повторив в этой ситуации доказательство леммы 11.6.5 с достаточно простыми и очевидными изменениями (**упражнение** для читателя), мы получим искомым результат.

Доказав вспомогательные утверждения теоремы, перейдем к ее **главной части**. Для доказательства, что $\mathbf{Coh} \mathbb{L} = \emptyset$ в $\mathbb{L}[G]$, рассмотрим произвольную точку $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \cap \mathbb{L}[G]$. Согласно (iv), имеется такое множество $u \in \mathbf{CCT}^\mathbb{L}$, что $x \in \mathbb{L}[\mathbf{a}_G \upharpoonright u]$. При этом точка $\mathbf{a}_G \upharpoonright u \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^u$ λ^u -случайна над $\mathbb{L}$ в смысле (iii), т. е. $\mathbf{a}_G \upharpoonright u \notin \mathbf{B}_\varkappa^u$ всякий раз, когда $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathbb{L}$ и $\lambda(\mathbf{B}_\varkappa) = 0$. Отсюда следует, что точка $a = H_u^{-1}(\mathbf{a}_G \upharpoonright u) \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ λ -случайна над $\mathbb{L}$ в обычном смысле, т. е. $a \notin \mathbf{B}_\varkappa$ всякий раз, когда $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathbb{L}$ и $\lambda(\mathbf{B}_\varkappa) = 0$. Кроме того, $\mathbb{L}[a] = \mathbb{L}[\mathbf{a}_G \upharpoonright u]$ — из достаточной эффективности определения H_u . Значит, $x \in \mathbb{L}[a]$. Отсюда $x \notin \mathbf{Coh} \mathbb{L}$ по теореме 11.5.2(i).

Для доказательства $\mathbf{Rand} a \neq \emptyset$ в $\mathbb{L}[G]$ для всех точек a , пусть $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \cap \mathbb{L}[G]$. Снова согласно (iv), имеется такое множество $u \in \mathbf{CCT}^\mathbb{L}$, что $a \in \mathbb{L}[\mathbf{a}_G \upharpoonright u]$. Пусть $\xi = \sup u$; тогда $u \subseteq \xi < \omega_1^\mathbb{L}$ и $a \in \mathbb{L}[\mathbf{a}_G \upharpoonright \xi]$. Сверх того, точка $y = \mathbf{a}_G(\xi)$ λ -случайна над $\mathbb{L}[\mathbf{a}_G \upharpoonright \xi]$ согласно (v). Следовательно, она случайна и над $\mathbb{L}[a]$.

□ (теоремы 14.3.10 и 14.1.1(II))

§ 14.4 О суммах нигде не плотных множеств

Здесь обсуждаются приложения моделей типа модели из § 14.3B, и некоторых других, к вопросу о представлении пространства $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ в виде объединения нигде не плотных множеств в числе менее, чем континуум.

По определению, если, к примеру, $\mathbf{Coh} \mathbb{L} = \emptyset$, то, по теореме 10.4.2(2) каждая точка $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ принадлежит какому-то замкнутому нигде не плот-

ному множеству с кодом из $\mathbb{L}$. Число таких множеств, очевидно, равно $\aleph_1^{\mathbb{L}}$. Поэтому получается, что в предположении, что $\mathbf{Coh} \mathbb{L} = \emptyset \wedge \aleph_1^{\mathbb{L}} = \aleph_1 < \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ (мощность континуума), пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ представляет собой объединение $\aleph_1 < \mathfrak{c}$ замкнутых нигде не плотных множеств.

Для построения такой модели, нужно несколько изменить модель $\mathbb{L}[G]$ теоремы 14.3.10, а именно, в построении форсинга $\mathbf{P}^{\mathbb{L}}$ заменить $\omega_1^{\mathbb{L}}$ на $\omega_2^{\mathbb{L}}$. Точнее говоря, производятся следующие изменения:

- 1) ω_1 меняется на ω_2 во всех определениях из §14.3А, в частности, в определении множества $\mathbf{CCT}$, которое теперь состоит из всех не более чем счетных множеств в ω_2 ;
- 2) $\omega_1^{\mathbb{L}}$ меняется на $\omega_2^{\mathbb{L}}$ в определении 14.3.8, в частности, в определении множества $\mathbf{CCT}^{\mathbb{L}}$, которое теперь состоит из всех таких множеств $u \in \mathbb{L}$, что $u \subseteq \omega_2^{\mathbb{L}}$ и u не более чем счетно в $\mathbb{L}$;
- 3) это приводит к измененным форсингам $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^{\mathbb{L}}$, $\mathbf{P}^{\mathbb{L}[a]}$;
- 4) теорема 14.3.10 остается в силе — с тем же изменением $\omega_1^{\mathbb{L}}$ на $\omega_2^{\mathbb{L}}$.

В этой ситуации, для $\omega_2^{\mathbb{L}}$ -варианта форсинга $\mathbf{P}^{\mathbb{L}}$ имеет место:

Теорема 14.4.1. Пусть множество $G \subseteq \mathbf{P}^{\mathbb{L}}$ является $\mathbf{P}^{\mathbb{L}}$ -генерическим над $\mathbb{L}$. Тогда в $\mathbb{L}[G]$ истинно: $\mathbf{Coh} \mathbb{L} = \emptyset$ и $\aleph_1^{\mathbb{L}} = \aleph_1 < \mathfrak{c} = \aleph_2 = \aleph_2^{\mathbb{L}}$, так что пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ представляет собой объединение замкнутых нигде не плотных множеств в числе $\aleph_1 < \mathfrak{c}$.⁵

Доказательство (эскиз). Согласно теореме 14.3.10(i) в $\omega_2^{\mathbb{L}}$ -варианте, кардиналы моделей $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}[G]$ — одни и те же, другими словами, в $\mathbb{L}[G]$ истинно $\aleph_{\xi} = \aleph_{\xi}^{\mathbb{L}}$ для всех ξ , а соотношение $\mathbf{Coh} \mathbb{L} = \emptyset$ в $\mathbb{L}[G]$ доказывается тем же рассуждением. Остается доказать, что $\mathfrak{c} = \aleph_2^{\mathbb{L}}$ в $\mathbb{L}[G]$.

Во-первых, доказываем, что $\mathfrak{c} \geq \aleph_2^{\mathbb{L}}$ в $\mathbb{L}[G]$. Достаточно доказать, что $a_G(\xi) \neq a_G(\eta)$ для любой пары ординалов $\xi < \eta < \omega_2^{\mathbb{L}}$. Но это следует из того, что множество D всех таких «условий» $\langle u, p \rangle \in \mathbf{P}^{\mathbb{L}}$, что $\xi, \eta \in u$ и, для некоторой тройки чисел n и $i \neq j$ имеет место соотношение

$$\forall x \in B_p^u (x(\xi)(n) = i \wedge x(\eta)(n) = j)$$

— принадлежит $\mathbb{L}$ и плотно в $\mathbf{P}^{\mathbb{L}}$. А это утверждение легко проверяется.

С другой стороны, множество $\mathbf{CCT}^{\mathbb{L}}$ имеет, очевидно, мощность $\aleph_2^{\mathbb{L}}$ в $\mathbb{L}$ и, следовательно, мощность $\aleph_2$ в $\mathbb{L}[G]$, а каждое множество вида $\mathbb{L}[u] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $u \in \mathbf{CCT}^{\mathbb{L}}$, имеет мощность $\aleph_1 = \aleph_1^{\mathbb{L}}$ в $\mathbb{L}[G]$. В то же время, если $x \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то $x \in \mathbb{L}[u] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для какого-то u по теореме 14.3.10(iv). Отсюда и следует, что $\mathfrak{c} \leq \aleph_2^{\mathbb{L}}$ в $\mathbb{L}[G]$. $\square$

Существуют ли модели теории множеств, в которых $\mathfrak{c} > \aleph_1$ строго, но наоборот, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не является объединением нигде не плотных множеств в числе строго меньше, чем мощность континуума $\mathfrak{c}$? Здесь положительный

⁵ Более аккуратный анализ Стерна [172] показал, что, более того, пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ допускает разбиение на $\aleph_1$ непустых попарно дизъюнктивных замкнутых нигде не плотных множеств в этой модели $\mathbb{L}[G]$.

ответ можно получить при помощи моделей, где верна аксиома Мартина **МА**. Именно, а) существует модель теории множеств **ZFC+МА**, в которой верно, что $\mathfrak{c} = \aleph_2 > \aleph_1$ — см. [49, теорема 6.6 гл. 4], и б) из **МА** следует, что $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не является объединением нигде не плотных множеств в числе $< \mathfrak{c}$, см. [49, теорема 2 гл. 6], и более того любое объединение нигде не плотных множеств в числе $< \mathfrak{c}$ — тощее множество (т. е. является объединением счетного числа нигде не плотных множеств), см. там же теорема 14.

Однако более поучительна другая модель — именно, вариант модели § 14.2, полученный присоединением к $\mathbb{L}$ не $\aleph_1$ а $\aleph_2$ генерических по Коэну точек. Точнее говоря, определим форсинг $\mathbb{P}$, следуя определению 14.2.1, но с $\omega_2^{\mathbb{L}}$ вместо $\omega_1^{\mathbb{L}}$ — т. е. теперь $\mathbb{P}$ состоит из таких функций p , что $\text{dom } p \subseteq \omega_2^{\mathbb{L}}$ конечно, и $p(\xi) \in \mathbf{C}$ для всех $\xi \in \text{dom } p$.

Теорема 14.4.2. *Пусть множество $G \subseteq \mathbf{P}^{\mathbb{L}}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathbb{L}$. Тогда в $\mathbb{L}[G]$ истинно: $\aleph_1^{\mathbb{L}} = \aleph_1 < \mathfrak{c} = \aleph_2 = \aleph_2^{\mathbb{L}}$, и $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не есть объединение замкнутых нигде не плотных множеств в числе $\aleph_1$.*

Доказательство (эскиз). Опуская те моменты, которые аналогичны частям доказательств теорем 14.2.4 и 14.4.1 (в отношении кардинальный равенств и неравенств), сосредоточимся на последнем утверждении. Допустим, что, в $\mathbb{L}[G]$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}} X_\xi$, где каждое X_ξ нигде не плотно. Множества X_ξ можно считать замкнутыми, а тогда $X_\xi = \mathbb{F}[c_\xi]$ в обозначениях определения 5.7.1, где $c_\xi \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда $c_\xi \in \mathbb{L}[G_{<\kappa(\xi)}] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, где $\kappa(\xi) < \omega_2^{\mathbb{L}}$. Понятно, что $\kappa = \sup_{\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}} \kappa(\xi) < \omega_2^{\mathbb{L}}$, и при этом каждый код c_ξ принадлежит $\mathbb{L}[G_{<\kappa}] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Однако точка $\mathbf{a}_G(\kappa) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является генерической по Коэну над $\mathbb{L}[G_{<\kappa}]$ — см. (3) в доказательстве теоремы 14.2.4. Отсюда следует, что $\mathbf{a}_G(\kappa) \notin X_\xi$ для всех $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$, противоречие. $\square$

Следствие 14.4.3. *Предложение о том, что пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является объединением замкнутых нигде не плотных множеств в числе $\aleph_1$, неразрешимо в теории **ZFC** + $\mathfrak{c} > \aleph_1$.*

То же самое справедливо с предложением о разбиении $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $\aleph_1$ множеств λ -меры 0 — но в обратном смысле, т. е. в модели теоремы 14.4.1 оно ложно, а в модели теоремы 14.4.2 истинно. Еще о разбиениях континуума на несчетное число непустых множеств и похожих вопросах см. в § 17.1.

§ 14.5 $\text{LM}(\Sigma_2^1) \not\Rightarrow \text{PK}(\Pi_1^1)$

Здесь мы доказываем теорему 14.1.1 в отношении невыводимости импликации (VI). Согласно следствию 10.2.2, достаточно построить модель, в которой выполнено предложение

$$\omega_1 = \omega_1^{\mathbb{L}} \wedge \forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\lambda(\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]) = 1). \quad (\star 6)$$

В принципе, это — самая простая часть теоремы. Можно воспользоваться достаточно стандартной моделью — обозначим её через

$\mathbb{L}[X]$ — где выполнена аксиома Мартина $\mathbf{MA}_{\aleph_1}$ для семейств мощностей $\aleph_1$, и дополнительно $\omega_1^{\mathbb{L}[X]} = \omega_1^{\mathbb{L}}$. (См. [49, гл. 5, § 6], [142], или [99, разд. 22] о построении такой модели.) Из равенства $\omega_1^{\mathbb{L}[X]} = \omega_1^{\mathbb{L}}$ следует $\neg \text{PK}(\Pi_1^1)$ в $\mathbb{L}[X]$ согласно следствию 10.2.2. С другой стороны, известно, что $\mathbf{MA}_{\aleph_1}$ влечет аддитивность идеала множеств меры 0 относительно объединений в числе $\aleph_1$ (см. [142] или [99, теорема 50]), откуда следует $\text{LM}(\Sigma_2^1)$ согласно следствию 5.3.6.

Теперь приведем более прямое (хотя и более длинное) рассуждение, которое, в отличие от построения на основе $\mathbf{MA}_{\aleph_1}$, дает модель, в которой верна континуум-гипотеза $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Сначала мы рассмотрим несколько более элементарную задачу: если $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель **ZFC** — например, класс вида $\mathbb{L}[a]$, $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — то как построить её генерическое расширение $\mathfrak{M}[G]$, в котором имеет место соотношения $\lambda(\text{Rand } \mathfrak{M}) = 1$ и $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1^{\mathfrak{M}[G]}$? Эта задача решается при помощи ε -случайного форсинга $\mathbf{R}_\varepsilon$ из § 9.6, где, для определенности, мы полагаем $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Лемма 14.5.1. *Пусть множество G является $(\mathbf{R}_\varepsilon)^{\mathfrak{M}}$ -генерическим над $\mathfrak{M}$. Тогда $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1^{\mathfrak{M}[G]}$ и $\lambda(\text{Rand } \mathfrak{M}) = 1$ в $\mathfrak{M}[G]$.*

Доказательство. Понятно, что $[G] = \{[T] : T \in G\}$ — центрированная система замкнутых подмножеств пространства $2^{\mathbb{N}}$ меры $> \varepsilon$, так что $X = \bigcap [G]$ — также замкнутое подмножество в $2^{\mathbb{N}}$, причем $\lambda(X) \geq \varepsilon$. На самом деле, даже $\lambda(X) = \varepsilon$.

Мы утверждаем, что $\bigcap [G] \subseteq \text{Rand } \mathfrak{M}$. Действительно, пусть $\varkappa \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ и $\lambda(B_\varkappa) = 0$. Тогда множество $D_\varkappa = \{T \in (\mathbf{R}_\varepsilon)^{\mathfrak{M}} : [T] \cap B_\varkappa = \emptyset\}$ плотно в $(\mathbf{R}_\varepsilon)^{\mathfrak{M}}$ и принадлежит $\mathfrak{M}$.⁶ Отсюда следует, что $D_\varkappa \cap G \neq \emptyset$, и далее $B_\varkappa \cap X = \emptyset$, что и требовалось.

Итак, в $\mathfrak{M}[G]$ истинно, что существует замкнутое множество $X = \bigcap [G] \subseteq \text{Rand } \mathfrak{M}$ λ -меры $\varepsilon > 0$. Отсюда нетрудно вывести, используя результат 10.5.2 (и теорему 6.1.3), что на самом деле вообще $\lambda(\text{Rand } \mathfrak{M}) = 1$ в $\mathfrak{M}[G]$, что и требовалось. $\square$ (лемма)

Доказательство самой теоремы 14.1.1(VI) состоит в итерировании форсинга $\mathbf{R}_\varepsilon$. Не входя пока в детали этого метода, отметим, что для случая, когда длина итерации равна ω_1 а каждый итеранд тождествен $\mathbf{R}_\varepsilon$, конструкция итерированного форсинга с конечной базой (finite support iteration) приносит форсинг $\mathbb{P} \in \mathbb{L}$, удовлетворяющий таким условиям:

⁶ Для вывода $D_\varkappa \in \mathfrak{M}$ следует доказать, что соотношение $[T] \cap B_\varkappa = \emptyset$ абсолютно для $\mathfrak{M}$. Мы оставляем это как **упражнение** на использование методов из доказательства следствия 5.9.3.

- (А) форсинг $\mathbb{P}$ производит генерические объекты следующего вида: $G = \langle G_\xi \rangle_{\xi < \omega_1^\perp}$, где каждое из множеств G_ξ является $(\mathbf{R}_\varepsilon)^{\mathbb{L}[G_{<\xi}]}$ -генерическим над моделью $\mathbb{L}[G_{<\xi}]$, а $G_{<\xi} = \langle G_\eta \rangle_{\eta < \xi}$;
- (В) форсинг $\mathbb{P}$ удовлетворяет ССС в $\mathbb{L}$ — это следует из общей теоремы о том, что итерированный форсинг с конечной базой сохраняет свойство ССС итерандов (например, теорема 1.5.12 в [64] или, не в столь прямой форме, 6.2 и 6.5 в [49, гл. 4]), а то, что $\mathbf{R}_\varepsilon$ удовлетворяет ССС, следует из леммы 9.6.3.

Теперь рассмотрим произвольное $\mathbb{P}$ -генерическое над $\mathbb{L}$ множество $G = \langle G_\xi \rangle_{\xi < \omega_1^\perp}$, как в (А). Из (В) следует, что $\omega_1^{\mathbb{L}[G]} = \omega_1^\perp$, и кроме того, для каждой точки $a \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^\mathbb{N}$ найдется ординал $\xi < \omega_1^\perp$ такой что $a \in \mathbb{L}[G_{<\xi}] \cap \mathbb{N}^\mathbb{N}$. В этом случае, согласно лемме 14.5.1, $\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a]$ — множество полной λ -меры в $\mathbb{L}[G_{<\xi}]$, и, следовательно, в $\mathbb{L}[G]$. Таким образом, $(\star 6)$ выполнено в $\mathbb{L}[G]$, что и требовалось.

□ (теорема 14.1.1(VI))

§ 14.6 $\text{BP}(\Sigma_2^1) \not\Rightarrow \text{LM}(\Delta_2^1)$

Здесь мы доказываем теорему 14.1.1 в отношении невыводимости импликации (III). Согласно следствию 10.2.2 и теореме 12.3.1, достаточно построить модель, в которой выполнено предложение

$$\left. \begin{aligned} \forall a \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \text{ (множество } \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^\mathbb{N} \text{ финально ограничено в } \mathbb{N}^\mathbb{N}) \\ \wedge \mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset \quad \wedge \quad \mathbf{Rand} \mathbb{L} = \emptyset. \end{aligned} \right\} (\star 3)$$

Для построения такой модели используется итерация доминирующего форсинга $\mathbf{D}$ из § 9.6. При этом важную роль в проверке соотношений $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset$ будет играть следующая лемма.

Лемма 14.6.1. *Если $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, и множество $G \subseteq (\mathbf{D})^{\mathbb{L}[a]}$ является $(\mathbf{D})^{\mathbb{L}[a]}$ -генерическим над $\mathbb{L}[a]$, то $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset$ в $\mathbb{L}[a, G]$.*

Доказательство. Положим $y = \bigcup \{s : \exists f (\langle s, f \rangle \in G)\}$. Напомним что $(m)_1 = i$ при $m = 2^i(2j+1) - 1$ для некоторого j . Положим $\bar{y}(n) = (y(n))_1$, $\forall n$, так что $\bar{y} \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Мы утверждаем что $\bar{y} \in \mathbf{Coh} \mathbb{L}[a]$. Достаточно доказать что $\bar{y} \notin \llbracket T \rrbracket$, каково бы ни было дерево $T \in \mathbb{L}[a]$, $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ такое что $\llbracket T \rrbracket$ — нигде не плотное подмножество $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. (См. доказательство теоремы 12.3.1.) Если T таково как указано, то множество D_T всех «условий» $\langle s, f \rangle \in (\mathbf{D})^{\mathbb{L}[a]}$, удовлетворяющих $\bar{s} \cap \llbracket T \rrbracket = \emptyset$ (где $\bar{s} \in \mathbb{N}^{<\omega}$ получается из s так же как $\bar{y}$ из y ; $\text{lh } \bar{s} = \text{lh } s$) плотно в $(\mathbf{D})^{\mathbb{L}[a]}$ и принадлежит $\mathbb{L}[a]$ вместе с T . Поэтому $D_T \cap G \neq \emptyset$, откуда и следует искомое. □

Доказательство теоремы 14.1.1(III) состоит в использовании итерации форсинга $\mathbf{D}$ длины $\omega_1^{\mathbb{L}}$. Здесь нам придется войти в технические детали итерированного форсинга с конечной базой.

14.6А Итерированный доминирующий форсинг

Рассуждая в $\mathbb{L}$, мы определяем, трансфинитной индукцией по ξ , $0 < \xi \leq \omega_1^{\mathbb{L}}$, форсинг $\mathbb{P}_\xi$, состоящий из функций p , определенных на ξ , а также объекты D^ξ , Q^ξ , и $1_\xi \in \mathbb{P}_\xi$, следующим образом.

- 1°. $\mathbb{P}_0 = \{\Lambda\}$ и $1_0 = \Lambda$ (пустая функция).
- 2°. Если форсинг $\mathbb{P}_\xi$ определен, а 1_ξ — самое слабое «условие» из $\mathbb{P}_\xi$, то по теореме 9.2.6 найдутся такие $\mathbb{P}_\xi$ -имена D^ξ и 1^ξ , что

$$\begin{aligned} 1_\xi & \Vdash_{\mathbb{P}_\xi}^{\mathbb{L}} \langle D^\xi \text{ есть доминирующий форсинг } \mathbf{D} \rangle, \text{ и} \\ 1_\xi & \Vdash_{\mathbb{P}_\xi}^{\mathbb{L}} \langle 1^\xi \text{ есть пара } \langle \check{\Lambda}, \check{\mathbf{0}} \rangle \rangle, \end{aligned}$$

где $\mathbf{0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbf{0}(k) = 0$, $\forall k$. (Заметим что пара $\langle \Lambda, \mathbf{0} \rangle$ — самое слабое «условие» в форсинге $\mathbf{D}$, а 1 в том или ином виде — традиционное обозначение слабейшего «условия».)

- 3°. Положим $Q^\xi = \mathbf{PE}(D^\xi)$ — тогда $D^\xi[G] \subseteq \{t[G] : t \in Q^\xi\}$ для любого множества $G \subseteq \mathbb{P}_\xi$ согласно результату 9.2.2.
- 4°. Форсинг $\mathbb{P}_{\xi+1}$ состоит из всех функций p , определенных на множестве $\xi + 1 = \text{dom } p$ и таких, что $p \restriction \xi \in \mathbb{P}_\xi$, $p(\xi) \in Q^\xi$, и $p \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi}^{\mathbb{L}} \langle p(\xi) \in D^\xi \rangle$. Элемент $1_{\xi+1} \in \mathbb{P}_{\xi+1}$ определяется следующим образом: $1_{\xi+1} \restriction \xi = 1_\xi$ и $1_{\xi+1}(\xi) = 1^\xi$.
- 5°. Порядок на $\mathbb{P}_{\xi+1}$ определяется так: $p \leq q$, когда $p \restriction \xi \leq q \restriction \xi$ в $\mathbb{P}_\xi$ и $p \restriction \xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi}^{\mathbb{L}} \langle p(\xi) \leq q(\xi) \text{ в } D^\xi \rangle$.
- 6°. Если $\vartheta \leq \omega_1^{\mathbb{L}}$ — предельный ординал, то $\mathbb{P}_\vartheta$ состоит из всех таких функций p , что $\vartheta = \text{dom } p$, $p \restriction \xi \in \mathbb{P}_\xi$ для всех $\xi < \vartheta$, и база (support) $\text{supp } p = \{\xi < \vartheta : p(\xi) \neq 1^\xi\}$ «условия» p конечна, с порядком: $p \leq q$, когда $p \restriction \xi \leq q \restriction \xi$ для всех $\xi < \vartheta$. Элемент $1_\vartheta \in \mathbb{P}_\vartheta$ определяется так, что $1_\vartheta(\xi) = 1^\xi$ для всех $\xi < \vartheta$.

Форсинг $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\omega_1^{\mathbb{L}}} \in \mathbb{L}$ и является, собственно говоря, итерацией доминирующего форсинга $\mathbf{D}$ длины ω_1 и с конечной базой в $\mathbb{L}$.

Упражнение 14.6.2. Если $\xi < \eta \leq \omega_1^{\mathbb{L}}$ и $p \in \mathbb{P}_\xi$, то через $p \upharpoonright \eta$ обозначим то «условие» $q \in \mathbb{P}_\eta$, для которого $q \restriction \xi = p$ и $q(\gamma) = 1^\gamma$ для всех γ из интервала $\xi \leq \gamma < \eta$. Докажите, трансфинитной индукцией по η , что в самом деле $p \upharpoonright \eta \in \mathbb{P}_\eta$. $\square$

Лемма 14.6.3. (i) $\mathbb{P}$ удовлетворяет ССС в $\mathbb{L}$.

(ii) Если $\xi \leq \eta \leq \omega_1^{\mathbb{L}}$, и множество $Q \in \mathbb{L}$, $Q \subseteq \mathbb{P}_\xi$, предплотно в $\mathbb{P}_\xi$, то множество $Q \upharpoonright \eta = \{p \upharpoonright \eta : p \in Q\}$ предплотно в $\mathbb{P}_\eta$.

Доказательство. (i) Итерации ССС форсингов с конечной базой удовлетворяют ССС — см. утверждение (В) в конце § 14.5, а то, что **D** удовлетворяет ССС, следует из леммы 9.6.1.

(ii) Используем индукцию по η . Для $\eta = \xi$ результат очевиден.

Шаг $\eta \rightarrow \eta + 1$. Пусть $p \in \mathbb{P}_{\eta+1}$. По определению, $p \restriction \eta \in \mathbb{P}_\eta$. По индуктивному предположению, множество $Q \upharpoonright \eta$ предплотно в $\mathbb{P}_\eta$ — следовательно, найдутся «условия» $r \in \mathbb{P}_\eta$ и $q \in Q \upharpoonright \eta$, для которых $r \leq q$ и $r \leq p \restriction \eta$. Рассмотрим «условие» $p' \in \mathbb{P}_{\eta+1}$, определенное так, что $p' \restriction \eta = r$ и $p'(\eta) = p(\eta)$. (Заметим, что если $p \restriction \eta$ вынуждает $p(\xi) \in D^\xi$, то то же делает и более сильное условие $r = p' \restriction \eta$, так что в самом деле $p' \in \mathbb{P}_{\eta+1}$.) Далее, по построению, $p' \leq p$ и, наконец, $p' \leq q \upharpoonright (\eta + 1) \in Q \upharpoonright (\eta + 1)$.

Предельный шаг $\vartheta \leq \omega_1^{\mathbb{L}}$. Пусть $p \in \mathbb{P}_\vartheta$. По определению, база $\text{supp } p = \{\xi < \vartheta : p(\xi) \neq 1^\xi\}$ конечна; пусть ξ — наибольший ординал из $\text{supp } p$ и $\eta = \xi + 1$. Тогда $p \restriction \eta \in \mathbb{P}_\eta$. По индуктивному предположению, $Q \upharpoonright \eta$ предплотно в $\mathbb{P}_\eta$. Поэтому найдутся «условия» $r \in \mathbb{P}_\eta$ и $q \in Q \upharpoonright \eta$, для которых $r \leq q$ и $r \leq p \restriction \eta$. Но тогда $q \upharpoonright \vartheta \in Q \upharpoonright \vartheta$, $r \upharpoonright \vartheta \in \mathbb{P}_\vartheta$, $r \upharpoonright \vartheta \leq \upharpoonright \vartheta$, и, по выбору η , $r \upharpoonright \vartheta \leq p$. $\square$

14.6Б Генерическое расширение

Зафиксируем, чтобы не повторяться, некоторое $\mathbb{P}$ -генерическое над $\mathbb{L}$ множество $G \subseteq \mathbb{P}$. Если $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$, то пусть $G_\xi = \{p \restriction \xi : p \in G\}$.

Упражнение 14.6.4. Докажите, что $\omega_1^{\mathbb{L}[G]} = \omega_1^{\mathbb{L}}$, а каждое из множеств G_ξ является $\mathbb{P}_\xi$ -генерическим над $\mathbb{L}$. Используйте лемму 14.6.3, а также теорему 9.2.8. $\square$

По определению, если $p \in \mathbb{P}_{\xi+1}$, то «условие» $p \restriction \xi$ принадлежит $\mathbb{P}_\xi$ и вынуждает, что « $p(\xi) \in D^\xi$ ». Следовательно, если $p \restriction \xi \in G_\xi$, то G_ξ -интерпретация $p(\xi)[G_\xi]$ принадлежит доминирующему форсингу $(\mathbf{D})^{\mathbb{L}[G_\xi]}$ модели $\mathbb{L}[G_\xi]$. Это позволяет нам определить

$$G^\xi = \{p(\xi)[G_\xi] : p \in G_{\xi+1}\}; \quad G^\xi \subseteq (\mathbf{D})^{\mathbb{L}[G_\xi]}.$$

Лемма 14.6.5. В этих обозначениях, если $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$, то множество G^ξ является $(\mathbf{D})^{\mathbb{L}[G_\xi]}$ -генерическим над $\mathbb{L}[G_\xi]$.

Кроме того, если $x \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то существует такой ординал $\vartheta < \omega_1^{\mathbb{L}}$, что $x \in \mathbb{L}[G_{<\vartheta}]$.

Доказательство. Первое утверждение (ср. с утверждением (A) из § 14.5) выражает суть итерированного форсинга в случае, когда каждый итеранд есть доминирующий форсинг **D**. Мы приводим его без доказательства, ссылаясь на лемму 88 в [99] или теорему 5.4 в [49, гл. 4], а в более современном изложении (на английском языке) — на теорему 16.2 в [100]. Докажем второе утверждение, следуя доказательству леммы 13.4.5. По теореме 9.2.6 найдется такое $\mathbb{P}$ -имя $t \in \mathbb{L}$, что $x = t[G]$ и каждое «условие» $p \in \mathbb{P}$ вынуждает $t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Положим

$$F_{nk} = \{p \in \mathbf{P} : p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathbb{L}} \langle t(\check{n}) = \check{k} \rangle\}$$

для всех n, k , и выберем, рассуждая в $\mathbb{L}$, максимальную антицепь $A_{nk} \subseteq F_{nk}$ в каждом F_{nk} . По лемме 14.6.3, существует такой ординал $\vartheta < \omega_1^{\mathbb{L}}$, что $A_{nk} \subseteq \mathbf{P}_{<\vartheta}$ для всех n, k . Утверждается, что

$$x(n) = k \iff G \cap A_{nk} \neq \emptyset \iff G_{<\vartheta} \cap A_{nk} \neq \emptyset, \quad (*)$$

— откуда и следует $x \in \mathbb{L}[G_{<\vartheta}]$.

Импликация $\Leftarrow$ справедлива по определению вынуждения.

Для доказательства обратной импликации, пусть $x(n) = k$. Множество $D_n = \bigcup_m A_{nm} \in \mathbb{L}$ предплотно в $\mathbb{P}$ (см. доказательство леммы 13.4.5). Поэтому $G \cap D_n \neq \emptyset$. Пусть $q \in G \cap D_n$, т. е. $q \in A_{nm}$ для некоторого m . Тогда $q \in F_{nm}$, так что $q \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathbb{L}} \langle t(\check{n}) = \check{m} \rangle$, и $x(n) = m$ по теореме 9.3.2(ii). Значит, $m = k$ и $q \in G \cap A_{nk}$. $\square$

А теперь доказывается главная теорема этого параграфа.

Теорема 14.6.6. Пусть множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathbb{L}$. Тогда в $\mathbb{L}[G]$ имеет место соотношение $(\star 3)$, т. е. $\mathbf{Rand} \mathbb{L} = \emptyset$, а с другой стороны, $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset$ и множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ финально ограничено в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, каково бы ни было $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Доказательство. *Часть 1.* Пусть $a \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Мы утверждаем, что в $\mathbb{L}[G]$ истинно: 1) $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{L}[G] \neq \emptyset$, и 2) множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ финально ограничено в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. По лемме 14.6.5, имеем $a \in \mathbb{L}[G_{\xi}] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для некоторого $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$, а множество $G^{\xi} \in \mathbb{L}[G]$ является $(\mathbf{D})^{\mathbb{L}[G_{\xi}]}$ -генерическим над $\mathbb{L}[G_{\xi}]$. Поэтому утверждение 1 следует из леммы 14.6.1, а утверждение 2 — это простое свойство **D**-генерических расширений (см. упражнение 9.6.2).

Часть 2. Докажем, что $\mathbf{Rand} \mathbb{L} = \emptyset$ в $\mathbb{L}[G]$. Рассмотрим произвольное $x \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Нужно доказать, что $x \notin \mathbf{Rand} \mathbb{L}$. Как и выше, найдется такой ординал $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$, что $x \in \mathbb{L}[G_{\xi}]$. По теореме 9.2.6, имеем $x = \mathbf{x}[G]$ для некоторого $\mathbb{P}_{\xi}$ -имени $\mathbf{x} \in \mathbb{L}$.

Рассуждаем в $\mathbb{L}$. Множество $P \subseteq \mathbb{P}_{\xi}$ назовем *центрированным*, если для любого конечного $P' \subseteq P$ найдется «условие» $r \in \mathbb{P}_{\xi}$, удовлетворяющее $r \leq p$ для каждого $p \in P$. Докажем, что форсинг $\mathbb{P}_{\xi}$

является σ -центрированным, т. е. допускает представление в виде $\mathbb{P}_\xi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$, где все множества P_n центрированы.

Рассуждаем индукцией по ξ . Для $\xi = 0$ нечего доказывать. Пусть ординал $\vartheta < \omega_2$ предельный и для каждого $\xi < \vartheta$ мы имеем $\mathbb{P}_\xi = \bigcup_n P_n^\xi$, где все P_n^ξ центрированы. Тогда $\mathbb{P}_\vartheta = \bigcup_{\xi < \vartheta} \bigcup_n P_{\xi n}$, где $P_{\xi n} = \{p \in \mathbb{P}_\vartheta : \forall p \subseteq \xi \wedge p \restriction \xi \in P_n^\xi\}$. Остается рассмотреть шаг $\xi \rightarrow \xi + 1$. Предположим что $\mathbb{P}_\xi = \bigcup_n P_n$, где все P_n центрированы. Для $n \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ определим

$$P_{ns} = \{p \in \mathbb{P}_{\xi+1} : \exists q \in P_n (q \leq p \restriction \xi \wedge q \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \langle s_{p(\xi)} = \check{s} \rangle)\},$$

где для каждого «условия» $p = \langle s, f \rangle \in \mathbf{D}$ через s_p обозначается s . Легко видеть что каждое множество P_{ns} центрировано и $\mathbb{P}_{\xi+1} = \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}} \bigcup_n P_{sn}$. Это завершает доказательство σ -центрированности.

Итак, мы имеем (в $\mathbb{L}$) равенство $\mathbb{P}_\xi = \bigcup_n P_n$, где все множества P_n центрированы. Через $\mathcal{T}_n$ обозначим множество всех деревьев $T \subseteq 2^{<\omega}$, без $\subseteq$ -максимальных элементов, таких что найдется «условие» $p \in P_n$, $\mathbb{P}_\xi$ -вынуждающее $\mathbf{x} \in [T]$. Из центрированности P_n следует, что множества $[T]$, $T \in \mathcal{T}_n$, образуют центрированную систему (замкнутых множеств в $2^{\mathbb{N}}$), так что найдется точка $x_n \in \bigcap_{T \in \mathcal{T}_n} [T]$. Можно подобрать деревья $T_k \subseteq 2^{<\omega}$ так что множества $[T_k]$ попарно дизъюнкты, не пересекают $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, и $\sum_k \lambda([T_k]) = 1$. *Конец рассуждения в $\mathbb{L}$.*

Теперь, уже в $\mathbb{L}[G]$, мы утверждаем, что x **не** принадлежит $\mathbf{F}_\sigma$ -множеству $\bigcup_k [T_k]$, следовательно, **не** принадлежит $\mathbf{Rand} \mathbb{L}$, так как дополнение множества $\bigcup_k [T_k]$, очевидно, имеет λ -меру 0. Пусть напротив, $x \in [T_k]$. Это предположение вынуждается каким-нибудь «условием» $p \in G$. Тогда, для некоторого n , мы имеем $p \in P_n$, и, соответственно, $T_k \in \mathcal{T}_n$, откуда по построению вытекает $x_n \in [T_k]$ — а это противоречит выбору деревьев T_k .

□ (теоремы 14.6.6 и 14.1.1(III))

§ 14.7 $\text{BP}(\Delta_2^1) \wedge \text{LM}(\Delta_2^1) \not\Rightarrow \text{BP}(\Sigma_2^1)$

Здесь мы доказываем теорему 14.1.1 в отношении невыводимости импликации (IV). Согласно следствию 10.2.2 и теореме 12.3.1, достаточно построить модель, в которой выполнено предложение

$$\left. \begin{aligned} &\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset \wedge \mathbf{Rand} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset) \wedge \\ &\wedge \text{ множество } \mathbb{L} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ финально неограничено в } \mathbb{N}^{\mathbb{N}}. \end{aligned} \right\} \quad (\star 4)$$

Для построения такой модели используется одновременная итерация форсинга Коэна $\mathbf{C}$ и случайного форсинга $\mathbf{R}$, длины $\omega_1^{\mathbb{L}}$.

14.7А Итерация коэновского и случайного форсингов

Определим итерированный форсинг $\mathbb{P}$ по схеме $1^\circ - 6^\circ$ из § 14.6А, со следующей поправкой, реализующей ту идею, что на чётных шагах⁷ действует форсинг $\mathbf{C}$, а на нечетных — форсинг $\mathbf{R}$:

2°. Если форсинг $\mathbb{P}_\xi$ определен, а 1_ξ — самое слабое «условие» из $\mathbb{P}_\xi$, то по теореме 9.2.6 найдутся такие $\mathbb{P}_\xi$ -имена D^ξ и 1^ξ , что

$1_\xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi}^{\mathbb{L}} \langle D^\xi \text{ есть форсинг } \mathbf{C} \wedge 1^\xi = \check{\Lambda} \rangle$ — при ξ четном, и

$1_\xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi}^{\mathbb{L}} \langle D^\xi \text{ есть форсинг } \mathbf{R} \wedge 1^\xi = \check{\gamma}(2^{<\omega}) \rangle$ — при ξ нечетном.

Заметим что пустой кортеж Λ — самое слабое «условие» форсинга $\mathbf{C}$, а дерево $2^{<\omega}$ — самое слабое «условие» форсинга $\mathbf{R}$.

Следующая лемма собирает те результаты, которые, для данной итерации, аналогичны результатам 14.6.3, 14.6.4, 14.6.5.

Лемма 14.7.1. *Форсинг $\mathbb{P}$ удовлетворяет ССС в $\mathbb{L}$.*

Пусть множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathbb{L}$.

Тогда $\omega_1^{\mathbb{L}[G]} = \omega_1^{\mathbb{L}}$, каждое из множеств $G_\xi = \{p \restriction \xi : p \in G\}$ является $\mathbb{P}_\xi$ -генерическим над $\mathbb{L}$, и если $x \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то существует такой ординал $\vartheta < \omega_1^{\mathbb{L}}$, что $x \in \mathbb{L}[G_{<\vartheta}]$.

Наконец, если $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$, то множество $G^\xi = \{p(\xi)[G_\xi] : p \in G_{\xi+1}\}$ является $\mathbf{C}$ -генерическим над $\mathbb{L}[G_\xi]$ — при четном ξ , и $(\mathbf{R})^{\mathbb{L}[G_\xi]}$ -генерическим над $\mathbb{L}[G_\xi]$ — при нечетном ξ . $\square$

Использование форсинга $\mathbb{P}$ в ключевом пункте будет основано на одном специальном свойстве этого форсинга.

Определение 14.7.2. Форсинг $\mathcal{P}$ называется $\leq^*$ -хорошим если для всякого множества $G \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ -генерического над данным универсумом множеств $\mathbb{V}$, и для всякой функции $f \in \mathbb{V}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ найдется $g \in \mathbb{V} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ такая, что $\forall x \in \mathbb{V} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (x \leq^* f \implies x \leq^* g)$. $\square$

Непосредственным следствием свойства $\leq^*$ -хорошести является свойство неограниченности континуума $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ исходного универсума в генерических расширениях, согласно следующей лемме.

Лемма 14.7.3. *Если ССС форсинг $\mathcal{P} \in \mathbb{V}$ является $\leq^*$ -хорошим, а множество $G \subseteq \mathcal{P}$ — $\mathcal{P}$ -генерическим над $\mathbb{V}$, то множество $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{V}$ финально неограничено в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{V}[G]$.*

⁷ Чётными считаются ординалы вида: «пределный ординал + четное натуральное число», включая 0.

Доказательство. Пусть напротив, $f \in \mathbb{V}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $x \leq^* f$ для всех $x \in \mathbb{V} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. По определению, найдется такая функция $g \in \mathbb{V} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что всё ещё $x \leq^* f$ для всех $x \in \mathbb{V} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Но этого не может быть: определим x условием $x(n) = g(n) + n$, $\forall n$. $\square$

Ниже будет доказана следующая техническая теорема:

Теорема 14.7.4. *В $\mathbb{L}$ истинно что каждый форсинг $\mathbb{P}_\xi$, $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$, является $\leq^*$ -хорошим.*

На самом деле, $\leq^*$ -хорошим является и сам форсинг $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\omega_1^{\mathbb{L}}}$, но вывод этого пункта потребовал бы дополнительного куска доказательства. Но мы это легко обойдем с помощью леммы 14.7.1.

Теперь мы уже имеем все необходимое для доказательства следующей теоремы — главного результата этого параграфа.

Теорема 14.7.5. *Пусть множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathbb{L}$. Тогда в $\mathbb{L}[G]$ имеет место соотношение $(\star 4)$, т. е. $\text{Coh } \mathbb{L}[a] \neq \emptyset$ и $\text{Rand } \mathbb{L}[a] \neq \emptyset$ для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а с другой стороны, множество $\mathbb{L} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ финально неограничено в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. По лемме 14.7.1, найдется такой ординал $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$, что $a \in \mathbb{L}[G_\xi]$. Мы можем считать ξ четным. Тогда, опять по лемме 14.7.1, множество $G^\xi \in \mathbb{L}[G]$ является $\mathbb{C}$ -генерическим над $\mathbb{L}[G_\xi]$, а множество $G^{\xi+1} \in \mathbb{L}[G]$ является $(\mathbf{R})^{\mathbb{L}[G_\xi]}$ -генерическим над $\mathbb{L}[G_{\xi+1}]$ — и, следовательно, над $\mathbb{L}[G_\xi]$. Поэтому $\text{Coh } \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{L}[G] \neq \emptyset$ и $\text{Rand } \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{L}[G] \neq \emptyset$.

Наконец, мы имеем $\mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}} \mathbb{L}[G_\xi] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ согласно лемме 14.7.1. Поэтому, для доказательства финальной неограниченности множества $\mathbb{L} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в $\mathbb{L}[G]$ достаточно доказать его финальную неограниченность в каждом из подклассов $\mathbb{L}[G_\xi]$. Однако каждый форсинг $\mathbb{P}$ является $\leq^*$ -хорошим в $\mathbb{L}$ по теореме 14.7.4, а потому множество $\mathbb{L} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ финально неограничено в $\mathbb{L}[G]$ по лемме 14.7.3.

$\square$ (теоремы 14.7.5 и 14.1.1(IV) — на основе теоремы 14.7.4)

14.7Б Сохранение «хорошести» при итерации

Этот пункт содержит **доказательство теоремы 14.7.4**. Начнем со следующей леммы, характеризующей $\leq^*$ -хорошие форсинги в терминах отношения вынуждения. Напомним, что $\Vdash_{\mathcal{P}}$ означает $\Vdash_{\mathcal{P}}^{\vee}$.

Лемма 14.7.6. *ССС форсинг $\mathcal{P}$ является $\leq^*$ -хорошим в том и только в том случае, когда для всякого $\mathcal{P}$ -имени t , если $\Vdash_{\mathcal{P}} t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то найдется функция $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющая*

$$\forall x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} ((\exists p \in \mathcal{P} (p \Vdash_{\mathcal{P}} \langle x \leq^* t \rangle)) \implies x \leq^* g).$$

Доказательство. В нетривиальном направлении, пусть $\mathcal{P}$ — хороший форсинг, и $\Vdash_{\mathcal{P}} \langle t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rangle$. Тогда множество

$$D = \{p \in \mathcal{P} : \exists g = g_p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \forall x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (p \Vdash_{\mathcal{P}} \langle \check{x} \leq^* t \implies \check{x} \leq^* \check{g} \rangle)\}$$

плотно в $\mathcal{P}$ вследствие «хорошести» форсинга $\mathcal{P}$. Согласно ССС, найдется счетная максимальная антицепь $A \subseteq D$. Из-за счетности, существует такая функция $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $g_p \leq^* g$ для всех $p \in A$. Нетрудно проверить что g обеспечивает искомый результат. $\square$

Теперь доказывается «хорошесть» форсингов-итерандов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$.

Лемма 14.7.7. *Форсинги $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ — $\leq^*$ -хорошие.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathbf{R}$ -генерическое над $\mathbb{V}$ множество $G \subseteq \mathbf{R}$, и пусть $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{V}[G]$. По теореме 9.2.6, найдется такое $\mathbf{R}$ -имя $t \in \mathbb{V}$, что $f = t[G]$ и $\Vdash_{\mathbf{R}} \langle t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rangle$. Докажем, что множество

$$D' = \{T' \in \mathbf{R} : \exists g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (T' \Vdash_{\mathbf{R}} \langle t \leq^* \check{g} \rangle)\}$$

плотно в $\mathbf{R}$. (Отсюда, благодаря генеричности G , следует что $f \leq^* g$ для некоторой функции $g \in \mathbb{V} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и «хорошесть» очевидна.) Пусть $T_0 \in \mathbf{R}$. Множество

$$D_n = \{T \in \mathbf{R} : T \subseteq T_0 \wedge \exists k (T \Vdash_{\mathbf{R}} \langle t(\check{n}) = \check{k} \rangle)\}$$

плотно в $\mathbf{R}$ ниже T_0 при любом n . Выбрав максимальную антицепь $A_n \subseteq D_n$ — она счетна благодаря ССС — мы можем подобрать такое конечное множество $A'_n \subseteq A_n$, что множество $X_n = \bigcup_{T \in A'_n} [T]$ (замкнутое подмножество $[T_0]$) удовлетворяет $\lambda(X_n) \geq \alpha(1 - 2^{-n-2})$, где $\alpha = \lambda([T_0])$. Тогда $T_n = \bigcup A'_n$ — дерево в $2^{<\omega}$ (без максимальных элементов) и $[T_n] = X_n$, так что $T_n \in \mathbf{R}$. А в силу конечности A'_n найдется такое число k_n , что $T_n \Vdash_{\mathbf{R}} \langle t(\check{n}) \leq \check{k}_n \rangle$.

Наконец, положим $T' = \bigcap_n T_n$. По построению, $\lambda([T']) \geq \frac{\alpha}{2}$, так что $T' \in \mathbf{R}$. Кроме того, $T' \Vdash_{\mathbf{R}} \langle t(\check{n}) \leq \check{k}_n \rangle$ для всех n , т. е. $T' \Vdash_{\mathbf{R}} \langle t \leq^* \check{g} \rangle$, где $g(n) = k_n$, $\forall n$, так что $T' \in D'$.

Для форсинга $\mathbf{C} = \mathbb{N}^{<\omega}$, рассуждаем иначе. Положим

$$F_{ns} = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \Vdash_{\mathbf{C}} \langle \check{x} \leq_n t \rangle\} \quad \text{для } s \in \mathbf{C} = \mathbb{N}^{<\omega} \text{ и } n \in \mathbb{N},$$

где $x \leq_n y$ означает что $x(i) \leq y(i)$ для всех $i \geq n$. Понятно что $M_{nsi} = \max_{h \in F_{ns}} h(i)$ конечно при $i \geq n$. Положим $f_{ns}(i) = M_{nsi}$ при $i \geq n$, и $= 0$ при $i < n$. Таким образом, $x \leq_n f_{ns}$ для всех $x \in F_{ns}$. Остается взять $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ так чтобы $f_{ns} \leq^* g$ для всех n, s . $\square$

Доказательство (теорема 14.7.4). «Хорошесть» форсингов $\mathbb{P}_\xi$ доказывается индукцией по ξ . Лемма 14.7.7 обосновывает индуктивный шаг $\xi \rightarrow \xi + 1$, поскольку, в рассматриваемой итерации, класс $\mathbb{L}[G_{\xi+1}]$ есть **R**- или **C**-генерическое расширение класса $\mathbb{L}[G_\xi]$.

Для выполнения предельного шага, рассмотрим предельный ординал $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$. Найдется возрастающая последовательность ординалов $\langle \xi_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{L}$ с $\xi = \sup_n \xi_n$. Фиксируем $f \in \mathbb{L}[G_\xi] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Как и выше, найдется такое $\mathbb{P}_\xi$ -имя $t \in \mathbb{L}$, что $f = t[G_\xi]$ и $\Vdash_{\mathbb{P}_\xi}^{\mathbb{L}} \langle t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rangle$.

Рассмотрим любое число n . Рассуждая в $\mathbb{L}[G_{\xi_n}]$, мы можем построить последовательность $\langle p_n^k \rangle_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{L}[G_{\xi_n}]$ «условий» $p_n^k \in \mathbb{P}_\xi$ так, что при любом k , $p_n^{k+1} \leq p_n^k$ (т. е. p_n^{k+1} сильнее в $\mathbb{P}_\xi$), $p_n^k \restriction \xi_n \in G_{\xi_n}$, и $p_n^k \Vdash_{\mathbb{P}_\xi}^{\mathbb{L}} \langle t \restriction \check{k} = \check{s}_k \rangle$ для некоторого кортежа $s_k \in \mathbb{N}^{<\omega}$ длины k . Тогда $s_k \subset s_{k+1}$, поэтому $f_n = \bigcup_k s_k \in \mathbb{L}[G_{\xi_n}] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Найдется $\mathbb{P}_{\xi_n}$ -имя $t_n \in \mathbb{L}$, для которого $f_n = t_n[G_{\xi_n}]$ и $\Vdash_{\mathbb{P}_{\xi_n}}^{\mathbb{L}} \langle t_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rangle$. На самом деле, это построение можно организовать так, чтобы последовательность имен $\langle t_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ принадлежала классу $\mathbb{L}$.

Вследствие «хорошести» форсинга $\mathbb{P}_{\xi_n}$, для каждого n по лемме 14.7.6 найдётся такая функция $g_n \in \mathbb{L} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что

$$\forall x \in \mathbb{L} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} ((\exists p \in \mathbb{P}_{\xi_n} (p \Vdash_{\mathbb{P}_{\xi_n}}^{\mathbb{L}} \langle \check{x} \leq^* t_n \rangle)) \implies x \leq^* g_n). \quad (*)$$

Снова можно считать что $\langle g_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{L}$. Имеется такая функция $g \in \mathbb{L} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $g_n \leq^* g$, $\forall n$. Докажем, что g влечет «хорошесть» $\mathbb{P}_\xi$ по отношению к f , т. е. $x \leq^* f \implies x \leq^* g$ для любого $x \in \mathbb{L} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Раз $x \leq^* f$, найдутся число m и «условие» $p \in G_\xi$, для которых $p \Vdash_{\mathbb{P}_\xi}^{\mathbb{L}} \langle \check{x} \leq_m t \rangle$, где $x \leq_m y$ означает, что $x(k) \leq y(k)$ для всех $k \geq m$. Имеем $\text{supp } p \subseteq \xi_n$ для некоторого n (итерация с конечной базой). Другими словами, $p = q \restriction \xi$, где $q = p \restriction \xi_n \in G_{\xi_n}$.

Мы утверждаем, что $x \leq_m f_n$. В самом деле, иначе $x(k) > f_n(k)$ для какого-то $k \geq m$. Однако по построению $f_n(k) = j$, где $j = s_n^{k+1}(k)$. С другой стороны, $p_n^{k+1} \Vdash_{\mathbb{P}_\xi}^{\mathbb{L}} \langle t(\check{k}) = \check{j} \rangle$. Заметим теперь, что «условия» p и p_n^{k+1} совместны в $\mathbb{P}_\xi$, так как $p = q \restriction \xi$, где $q \in G_{\xi_n}$, а $p_n^{k+1} \restriction \xi_n$ также принадлежит G_{ξ_n} . Следовательно, найдется $\mathbb{P}_\xi$ -генерическое над $\mathbb{L}$ множество G' , содержащее p и p_n^{k+1} . Мы имеем $f' = t[G'] \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $x \leq_m f'$ — так как $p \in G'$, и $f'(k) = j$ — так как $p_n^{k+1} \in G'$. Следовательно, $j = f_n(k) < x(k) \leq f'(k) = j$, противоречие. Итак, в самом деле $x \leq_m f_n$.

Но $f_n \in \mathbb{L}[G_{\xi_n}]$, а x даже принадлежит $\mathbb{L}$. Поэтому найдется «условие» $r \in \mathbb{P}_{\xi_n}$, удовлетворяющее $r \Vdash_{\mathbb{P}_{\xi_n}}^{\mathbb{L}} \langle \check{x} \leq^* t_n \rangle$. Отсюда согласно (*) следует $x \leq^* g_n$, так что $x \leq^* g$, что и требовалось.

□ (теоремы 14.7.4, 14.7.5, 14.1.1(IV))

§ 14.8 $\mathbf{BP}(\Sigma_2^1) \wedge \mathbf{LM}(\Delta_2^1) \not\Rightarrow \mathbf{LM}(\Sigma_2^1)$

Здесь мы доказываем оставшуюся часть теоремы 14.1.1: невыводимость импликации (V). Согласно теоремам 12.3.1 и 12.2.1 и следствию 10.2.2, достаточно построить модель, в которой выполнено:

$$\left. \begin{aligned} &\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset \wedge \mathbf{Rand} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset \wedge \\ &\wedge \text{множество } \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ финально ограничено в } \mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \wedge \\ &\wedge \text{множество } \ell_1 \cap \mathbb{L} \text{ финально неограничено в } \ell_1. \end{aligned} \right\} \quad (*5)$$

Такая модель получается итерацией доминирующего форсинга $\mathbf{D}$ и случайного форсинга $\mathbf{R}$, длины $\omega_1^{\mathbb{L}}$.

14.8А Итерация доминирующего и случайного форсингов

Мы определяем итерированный форсинг $\mathbb{P}$ по схеме $1^\circ - 6^\circ$ из § 14.6А, со следующей поправкой, теперь использующей, на чётных шагах, форсинг $\mathbf{D}$, а на нечетных — форсинг $\mathbf{R}$:

2°. Если форсинг $\mathbb{P}_\xi$ определен, а 1_ξ — самое слабое «условие» из $\mathbb{P}_\xi$, то по теореме 9.2.6 найдутся такие $\mathbb{P}_\xi$ -имена D^ξ и 1^ξ , что

$1_\xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \langle D^\xi \text{ есть форсинг } \mathbf{D} \wedge 1^\xi = {}^\vee \langle \Lambda, \mathbf{0} \rangle \rangle$ — при ξ четном, и

$1_\xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \langle D^\xi \text{ есть форсинг } \mathbf{R} \wedge 1^\xi = {}^\vee \langle 2^{<\omega} \rangle \rangle$ — при ξ нечетном.

Следующая лемма собирает те результаты об этом форсинге $\mathbb{P}$, которые аналогичны результатам 14.6.3, 14.6.4, 14.6.5, а также 14.7.1.

Лемма 14.8.1. *Форсинг $\mathbb{P}$ удовлетворяет ССС в $\mathbb{L}$.*

Пусть множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathbb{L}$.

Тогда $\omega_1^{\mathbb{L}[G]} = \omega_1^{\mathbb{L}}$, каждое из множеств $G_\xi = \{p \mid \xi : p \in G\}$ является $\mathbb{P}_\xi$ -генерическим над $\mathbb{L}$, и если $x \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то существует такой ординал $\vartheta < \omega_1^{\mathbb{L}}$, что $x \in \mathbb{L}[G_{<\vartheta}]$.

Наконец, если $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$, то множество $G^\xi = \{p(\xi)[G_\xi] : p \in G_{\xi+1}\}$ является $(\mathbf{D})^{\mathbb{L}[G_\xi]}$ -генерическим над классом $\mathbb{L}[G_\xi]$ — при четном ξ , и $(\mathbf{R})^{\mathbb{L}[G_\xi]}$ -генерическим над $\mathbb{L}[G_\xi]$ — при нечетном ξ . $\square$

Использование этого форсинга $\mathbb{P}$ здесь будет основано на одном специальном свойстве этого форсинга, родственном свойству $\leq^*$ -хорошести определения 14.7.2, но связанном скорее с теоремой 12.2.1.

Определение 14.8.2. Форсинг $\mathcal{P}$ называется ℓ_1 -хорошим если для любого $\mathcal{P}$ -генерического, над данным универсумом множеств $\mathbb{V}$, множества $G \subseteq \mathcal{P}$, и любой функции $f \in \mathbb{V}[G] \cap \ell_1$, найдется $g \in \mathbb{V} \cap \ell_1$ такая, что $\forall x \in \mathbb{V} \cap \ell_1 (x \leq^* f \implies x \leq^* g)$. $\square$

Следующая лемма, аналогичная лемме 14.7.3, показывает, что свойство ℓ_1 -хорошести тоже влечет определенную неограниченность множества ℓ_1 исходного универсума в генерических расширениях.

Лемма 14.8.3. *Если ССС форсинг $\mathcal{P} \in \mathbb{V}$ является ℓ_1 -хорошим, а множество $G \subseteq \mathcal{P}$ — $\mathcal{P}$ -генерическим над $\mathbb{V}$, то множество $\ell_1 \cap \mathbb{V}$ финально неограничено в $\ell_1 \cap \mathbb{V}[G]$.*

Доказательство. Пусть напротив, $f \in \mathbb{V}[G] \cap \ell_1$ и $x \leq^* f$ для всех $x \in \mathbb{V} \cap \ell_1$. По определению, найдется такая функция $g \in \mathbb{V} \cap \ell_1$, что всё еще $x \leq^* f$ для всех $x \in \mathbb{V} \cap \ell_1$. Но это невозможно: определим $x \in \mathbb{V} \cap \ell_1$ условием $x(n) = g(n) + n^{-2}$, $\forall n$. $\square$

Ниже мы докажем следующую техническую теорему:

Теорема 14.8.4. *В $\mathbb{L}$ истинно что каждый форсинг $\mathbb{P}_\xi$, $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$, является ℓ_1 -хорошим.*

С ее помощью, мы уже имеем все необходимое для доказательства следующей теоремы — главного результата этого параграфа.

Теорема 14.8.5. *Пусть множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$ -генерическим над $\mathbb{L}$. Тогда в $\mathbb{L}[G]$ имеет место соотношение $(\star 5)$, т. е. $\text{Coh } \mathbb{L}[a] \neq \emptyset$, $\text{Rand } \mathbb{L}[a] \neq \emptyset$, и множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ финально ограничено в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а с другой стороны, множество $\ell_1 \cap \mathbb{L}$ финально неограничено в $\ell_1 \cap \mathbb{L}[G]$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. По лемме 14.8.1, найдется такой ординал $\xi < \omega_1^{\mathbb{L}}$, что $a \in \mathbb{L}[G_\xi]$. Мы можем считать ξ четным. Тогда, опять по лемме 14.8.1, 1) множество $G^\xi \in \mathbb{L}[G]$ является $(\mathbf{D})^{\mathbb{L}[G_\xi]}$ -генерическим над $\mathbb{L}[G_\xi]$, и 2) множество $G^{\xi+1} \in \mathbb{L}[G]$ является $(\mathbf{R})^{\mathbb{L}[G_\xi]}$ -генерическим над $\mathbb{L}[G_{\xi+1}]$ — и, следовательно, над $\mathbb{L}[G_\xi]$. Из первого утверждения следует, что $\text{Coh } \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{L}[G] \neq \emptyset$ и множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ финально ограничено в $\mathbb{L}[G] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (см. доказательство теоремы 14.6.6), а из второго — что $\text{Rand } \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{L}[G] \neq \emptyset$.

Наконец, финальная неограниченность множества $\ell_1 \cap \mathbb{L}$ в $\ell_1 \cap \mathbb{L}[G]$ устанавливается тем же простым рассуждением на основе леммы 14.8.3 и теоремы 14.8.4, что и финальная неограниченность множества $\mathbb{L} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в доказательстве теоремы 14.7.5.

$\square$ (теоремы 14.8.5 и 14.1.1(V) — на основе теоремы 14.8.4)

14.8Б Сохранение «хорошести» при итерации

Чтобы подойти к доказательству теоремы 14.8.4, мы начнем со следующей леммы, дающей характеризацию ℓ_1 -хороших форсингов, аналогичную лемме 14.7.6.

Лемма 14.8.6. *ССС форсинг $\mathcal{P}$ является ℓ_1 -хорошим в том и только в том случае, когда для всякого $\mathcal{P}$ -имени t , если $\Vdash_{\mathcal{P}} t \in \ell_1$, то найдется функция $g \in \ell_1$, удовлетворяющая*

$$\forall x \in \ell_1 ((\exists p \in \mathcal{P} (p \Vdash_{\mathcal{P}} \langle \check{x} \leq^* t \rangle)) \implies x \leq^* g).$$

Доказательство. В нетривиальном направлении, допустим, что $\mathcal{P}$ — ℓ_1 -хороший форсинг, и $\Vdash_{\mathcal{P}} \langle t \in \ell_1 \rangle$. Тогда множество

$$D = \{p \in \mathcal{P} : \exists g = g_p \in \ell_1 \forall x \in \ell_1 (p \Vdash_{\mathcal{P}} \langle \check{x} \leq^* t \rangle \implies \check{x} \leq^* \check{g})\}$$

плотно в $\mathcal{P}$. Согласно ССС, найдется счетная максимальная антицепь $A \subseteq D$. Существует такая функция $g \in \ell_1$, что $g_p \leq^* g$ для всех $p \in A$ (упражнение 12.1.5). И т. д. $\square$

Лемма 14.8.7. *Форсинги $\mathbf{R}$ и $\mathbf{D}$ являются ℓ_1 -хорошими.*

Доказательство. Доказательство для форсинга $\mathbf{R}$ несколько отличается от соответствующей части доказательства леммы 14.7.7. Пусть множество $G \subseteq \mathbf{R}$ является генерическим над $\mathbb{V}$, и $f \in \ell_1 \cap \mathbb{V}[G]$. По определению, сумма $\sum_n f(n)$ конечна, следовательно, её можно сделать сколь угодно малой, изменив лишь конечное число значений f . Поскольку эта операция не влияет на отношение $\leq^*$, можно предполагать, что просто $\sum_n f(n) < 1$.

Имеем $f = t[G]$, где $t \in \mathbb{V}$ и предполагается, что $\Vdash_{\mathbf{R}} \sum_n t(n) < 1$. Используя ССС, нетрудно проверить, что для всякой пары $n, i \in \mathbb{N}$ существует такое борелевское множество $B_{ni} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что

$$\forall T \in \mathbf{R} ((T \Vdash_{\mathbf{R}} \langle t(n) \geq i 2^{-n} \rangle) \iff \lambda([T] \setminus B_{ni}) = 0). \quad (1)$$

Положим $g_m(n) = \sup\{i : \lambda(B_{ni}) > \frac{1}{m+1}\}$ и докажем

$$\sum_n g_m(n) 2^{-n} \leq m + 1, \quad \forall m. \quad (2)$$

Предположим противное: тогда $\sum_{n < n_0} g_m(n) 2^{-n} > m + 1$ для каких-то m и n_0 . Положим $U = \{\langle n, i, j \rangle : n < n_0 \wedge i < g_m(n) \wedge j < 2^{n_0-n}\}$ и $B_{nij} = B_{ni}$ для $\langle n, i, j \rangle \in U$. По определению $g_m(n)$ мы имеем $\lambda(B_{nij}) > \frac{1}{m+1}$ при $\langle n, i, j \rangle \in U$, откуда, по выбору m_0, n следует

$$\sum_{\langle n, i, j \rangle \in U} \lambda(B_{nij}) > \frac{1}{m+1} \sum_{n < n_0} g_m(n) 2^{n_0-n} > 2^{n_0}.$$

Следовательно, существует множество $V \subseteq U$, содержащее $2^{n_0} + 1$ элементов, и такое, что пересечение $B = \bigcap_{\langle n, i, j \rangle \in V} B_{nij}$ удовлетво-

рует $\lambda(B) > 0$.⁸ Положим

$$\begin{aligned} V_n &= \{ \langle i, j \rangle : \langle n, i, j \rangle \in V \}, & N &= \{ n < n_0 : V_n \neq \emptyset \}, \\ I_n &= \{ i : \exists j (\langle i, j \rangle \in V_n) \}, & i_n &= \sup I_n \quad (\text{при } n \in N). \end{aligned}$$

Раз $\lambda(B) > 0$, найдется «условие» $T \in \mathbf{R}$ с $\llbracket T \rrbracket \subseteq B$. Из (1) следует что $T \Vdash_{\mathbf{R}} \underline{f}(n) \geq i_n 2^{-n}$ для каждого $n \in N$. (Для уменьшения громоздкости, значки $\underline{}$ над i_n и т. п. опускаются.) Но по определению U , мы имеем $i_n 2^{n_0-n} \geq \#V_n$, откуда следует

$$T \Vdash_{\mathbf{R}} \underline{f}(n) \geq 2^{-n_0} \#V_n \quad (\text{при } n \in N).$$

Тем самым, $T \Vdash_{\mathbf{R}} \sum_{n < n_0} \underline{f}(n) \geq 2^{-n_0} \sum_{n \in N} \#V_n = 2^{-n_0} \#V > 1$ — что противоречит нашему предположению $\Vdash_{\mathbf{R}} \langle \sum_n \underline{f}(n) < 1 \rangle$. Это завершает доказательство утверждения (2).

Положим $h_m(n) = g_m(n) 2^{-n}$. Таким образом, $\sum_n h_m(n) < \infty$. Значит, найдется такая функция $g \in \ell_1$, что $h_m \leq^* g, \forall m$. Покажем, что g обеспечивает «хорошесть» форсинга $\mathbf{R}$ по отношению к f .

Пусть $h \in \ell_1 \cap \mathbb{V}$ и $h \leq^* f$. Найдется такое «условие» $T \in G$, что $T \Vdash_{\mathbf{R}} \forall n \geq k (h(n) \leq \underline{f}(n))$ для некоторого k . Возьмем m достаточно большое для $\lambda(\llbracket T \rrbracket) > \frac{1}{m+1}$. Тогда, при $n \geq k$, имеем $\lambda(B_{n, h(n) 2^n}) \geq \lambda(\llbracket T \rrbracket) > \frac{1}{m+1}$. Поэтому $h(n) 2^n \leq g_m(n)$, или, эквивалентно, $h(n) \leq h_m(n)$. Итак, $h \leq^* h_n$, откуда $h \leq^* g$.

Доказательство для форсинга $\mathbf{D}$ состоит в следующем. Во-первых, ЧУ множество $\mathbf{D}$ является *отделимым*, т. е. для любой пары «условий» $p \not\leq q$ из $\mathbf{D}$ найдется «условие» $r \leq p, r \not\leq q$. В этом случае найдется (см. [99, теорема 29В]) такая полная булева алгебра $\mathcal{B}$, что $\mathbf{D}$ порядково изоморфно некоторому плотному подмножеству множества $\mathcal{P} = \mathcal{B} \setminus \{0_{\mathcal{B}}\}$ всех ненулевых элементов $\mathcal{B}$ с порядком $a \leq b$ когда $a \cdot b = b$. Таким образом, достаточно доказать, что множество $\mathcal{P}$ является ℓ_1 -хорошим.

Множество $\mathbf{D}$ σ -центрировано: $\mathbf{D} = \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}} D_s$, где каждое $D_s = \{ \langle s, f \rangle : f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \}$ центрировано. Таким образом, и $\mathcal{P}$ σ -центрировано. Пусть $\mathcal{P} = \bigcup_n P_n$, где каждое P_n центрировано. Можно предполагать что каждое P_n является *максимальным* центрированным

⁸ Здесь мы ссылаемся на следующую лемму из теории меры: если $M \leq K$ и семейство $\{X_1, X_2, \dots, X_K\}$ измеримых множеств удовлетворяет $\lambda(\bigcap_{k \in V} X_k) > 0$ для любого M -элементного множества $V \subseteq \{1, 2, \dots, K\}$, то $\sum_k \lambda(X_k) \leq M - 1$. Доказательство индукцией по M одновременно для всех $K \geq M$ основано на разложении (где $\overline{X_K}$ есть дополнение множества X_K)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \lambda(X_k) &= \lambda(X_K) + \sum_{k=1}^{K-1} \lambda(X_k \cap X_K) + \sum_{k=1}^{K-1} \lambda(X_k \cap \overline{X_K}) \leq \\ &\leq \lambda(X_K) + (M-2) \lambda(X_K) + (M-1) \lambda(\overline{X_K}) = M-1. \end{aligned}$$

множеством — замкнутым относительно $\cdot$ (умножения в $\mathcal{B}$), удовлетворяющим $a \geq b \in P_n \implies a \in P_n$, и обязательно содержащим один из любых двух взаимно дополнительных элементов $a, -a$. В этом случае существует конечно аддитивная строго положительная на $\mathcal{P}$ мера $\mu(a) = \sum_{a \in P_n} 2^{-n}$ на $\mathcal{B}$. Имея такую меру, мы можем повторить для $\mathcal{P}$ доказательство, данное для форсинга $\mathbf{R}$. $\square$

Само же **доказательство теоремы 14.8.4** получается из последних двух лемм совершенно аналогично доказательству теоремы 14.7.4. Мы оставим это читателю как **упражнение**.

$\square$ (теоремы 14.8.4, 14.8.5, 14.1.1(V))

Исторические и библиографические замечания

История результатов, изложенных в этом разделе, растягивается от конца 60-х годов до середины 90-х годов, и, в общем, связана с развитием методов форсинга и итерированного форсинга.

Исходными ссылками по итерированному форсингу являются статьи [65, 170], а также книги [64, 100, 121]. На русском языке подходящих источников нет, кроме книг [99, гл. 22] и [49, гл. 4], где рассмотрены итерации длины 2, а также итерации произвольной длины, но в том частном случае, когда целью является непротиворечивость аксиомы Мартина.

Утверждение $\text{LM}(\Sigma_2^1) \not\Rightarrow \text{PK}(\Pi_1^1)$, как мы упоминали, следует из ранних работ по аксиоме Мартина. Результат независимо получен Любецким (см. [31, 32, 33]; доказательство через итерацию форсинга $\mathbf{R}_\epsilon$ дано в [35]).

Утверждение $\text{BP}(\Sigma_2^1) \wedge \text{LM}(\Delta_2^1) \not\Rightarrow \text{LM}(\Sigma_2^1)$ представляет собой теорему 9.3.6 в [64], данную там со ссылкой на статью [96], где такого результата, однако, в явном виде нет.

Что касается $\text{BP}(\Sigma_2^1) \not\Rightarrow \text{LM}(\Delta_2^1)$, то метод итерации доминирующего форсинга, как в §14.6, взят нами из [64, 9.3.5] (где опять приведена, видимо, некорректная ссылка на [96]). Впрочем, Стерн [177] еще раньше показал даже, что $\text{BP}(\Sigma_\infty^1) \not\Rightarrow \text{LM}(\Delta_2^1)$ (но при помощи более сложной модели, чем рассмотренная в §14.6).

Мы не смогли найти результат $\text{BP}(\Delta_2^1) \wedge \text{LM}(\Delta_2^1) \not\Rightarrow \text{BP}(\Sigma_2^1)$ сформулированным где-либо в явном виде, однако представленное нами доказательство представляет собой определенную комбинацию методов, известных, например, из [64].

Утверждение $\text{LM}(\Delta_2^1) \not\Rightarrow \text{BP}(\Delta_2^1)$ доказано в [35]. Отметим, что симметричное утверждение $\text{BP}(\Delta_2^1) \not\Rightarrow \text{LM}(\Delta_2^1)$ (более слабое, чем доказанные в этой главе $\text{BP}(\Sigma_2^1) \not\Rightarrow \text{LM}(\Delta_2^1)$ и $\text{BP}(\Delta_2^1) \not\Rightarrow \text{LM}(\Delta_2^1) \vee \text{BP}(\Sigma_2^1)$) было, вероятно, известно к 1968 г., поскольку оно легко выводится из теоремы Т 3323 в [143] (данной со ссылкой на Кюнена и Соловея) о том, что присоединение коэновских точек в любом числе к конструктивному универсуму $\mathbb{L}$ дает модель в которой имеется неизмеримое Δ_2^1 -множество.

Глава 15

Положительные решения проблем о конституантах

В этой главе доказывается теорема, согласно которой положительные решения проблем II, III, IV, IIIa, IIIb из § 7.5 не противоречат аксиомам **ZFC**, и на самом деле все они следуют из гипотезы

$$\exists a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\omega_1^{L[a]} = \omega_1).$$

Фактически мы доказываем, что если эта гипотеза выполнена, то существует неограниченная по индексу последовательность внешних конституант, среди членов которой имеется несчетное ограниченное по рангу семейство одноэлементных множеств, и при этом можно потребовать одно из двух: либо все не одноэлементные внешние конституанты на самом деле пусты, либо наоборот, все они (и тогда вообще все) внешние конституанты непусты.

§ 15.1 Главная теорема

Следующая теорема содержит главный результат этой главы.

Теорема 15.1.1. *Допустим, что $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\omega_1^{L[a]} = \omega_1$. Тогда существуют регулярные суслинские системы $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ замкнутых множеств $F_s \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которых выполняется по выбору одно из следующих двух условий:*

- (А) *последовательность внешних конституант $C_\xi = C_\xi[\mathfrak{F}]$ является неограниченной по индексу, и при этом каждая C_ξ содержит не более одной точки;*
- (В) *все внешние конституанты $C_\xi = C_\xi[\mathfrak{F}]$ непусты, и при этом для несчетно многих индексов $\xi < \omega_1$ конституанта C_ξ содержит ровно одну точку.*

А также существуют и решета $\mathbf{R} = \langle R_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ из замкнутых множеств $R_s \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, внешние конституанты $C_\xi = C_\xi[\mathbf{R}]$ которых удовлетворяют по выбору одному из условий (А), (В).

Совместив требования (А) и (В), мы получили бы последовательность конституант C_ξ , каждая из которых содержит ровно одну точку — т. е. положительное решение проблемы I из § 7.5, которое, как будет показано ниже, невозможно. Значит, условия (А) и (В) теоремы несовместимы, и их придется устраивать по отдельности.

Следствие 15.1.2. *Утверждение о том, что каждая из проблем II, III, IV, IIIa, IIIb решается положительно, не противоречит аксиомам теории **ZFC**.*

Доказательство. Понятно, что если последовательность внешних конституант суслинской системы или решета удовлетворяет требованию (А), то этим дается положительное решение проблем II, III, IV и IIIa из § 7.5, а если эта последовательность удовлетворяет требованию (В), то этим дается положительное решение проблемы IIIb. Остается заметить, что гипотеза $\exists a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\omega_1^{L[a]} = \omega_1)$ непротиворечива, так как она, очевидно, следует из непротиворечивой аксиомы конструктивности $\mathbb{V} = \mathbb{L}$. $\square$

§ 15.2 План доказательства

Напомним, что **ZFC**[−] есть теория **ZFC** без аксиомы степени. Если $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то MOD_x обозначает семейство всех счетных транзитивных множеств, содержащих x и являющихся $\in$ -моделями теории

$$\mathfrak{T}_x := \mathbf{ZFC}^- + \text{«все множества не более чем счетны»} + \mathbb{V} = \mathbb{L}[x].$$

Определение 15.2.1. По условию теоремы 15.1.1, фиксируем точку $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которой $\omega_1^{\mathbb{L}[\mathbf{a}]} = \omega_1$. Положим

$$\Xi_{\mathbf{a}} = \{\xi < \omega_1 : \text{множество } \mathbb{F}_{\xi}[\mathbf{a}] \text{ принадлежит } \text{MOD}_{\mathbf{a}}\},$$

где, напомним, $\mathbb{F}_{\xi}[\mathbf{a}] = \{\mathbf{F}_{\eta}[\mathbf{a}] : \eta < \xi\}$, см. § 8.2. $\square$

Лемма 15.2.2. Если $\mathfrak{M} \in \text{MOD}_{\mathbf{a}}$, то ординал $\xi = \text{Ord} \cap \mathfrak{M}$ предельный и принадлежит $\Xi_{\mathbf{a}}$, и на самом деле $\mathfrak{M} = \mathbb{F}_{\xi}[\mathbf{a}]$.

Дополнительно, множество $\Xi_{\mathbf{a}}$ неограничено в ω_1 .

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 8.4.4.

Для вывода неограниченности, пусть $\xi_0 < \omega_1$.

Рассмотрим модель $\mathbb{F}_{\omega_1}[\mathbf{a}] = \{\mathbf{F}_{\eta}[\mathbf{a}] : \eta < \omega_1\}$. Рассуждая *внутри* всего класса $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$, мы имеем $\mathbb{F}_{\omega_1}[\mathbf{a}] = \text{HC}$ по лемме 8.4.3, так что $\mathbb{F}_{\omega_1}[\mathbf{a}]$ — транзитивная модель теории $\mathbf{ZFC}^-$ согласно результату 3.6.2, и даже теории $\mathfrak{T}_{\mathbf{a}}$ по выбору точки $\mathbf{a}$.

По теореме Лёвенгейма – Скулема (теорема 3.2.5), найдется счетная элементарная подмодель $X \subseteq \mathbb{F}_{\omega_1}[\mathbf{a}]$, удовлетворяющая $\mathbb{F}_{\xi_0}[\mathbf{a}] \subseteq X$. Транзитивное замыкание $\text{TC}(X)$ также счетно, значит, $\text{TC}(X) \subseteq \mathbb{F}_{\zeta}[\mathbf{a}] = \{\mathbf{F}_{\eta}[\mathbf{a}] : \eta < \zeta\}$ для некоторого предельного ординала ζ , $\xi_0 < \zeta < \omega_1$. Итерируя это рассуждение, мы получаем последовательность счетных элементарных подмоделей $X_n \subseteq \mathbb{F}_{\omega_1}[\mathbf{a}]$ и предельных ординалов $\xi_0 = \zeta_0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \dots$, которые удовлетворяют

$$\zeta_n \cup \mathbb{F}_{\zeta_n}[\mathbf{a}] \subseteq X_n \subseteq \text{TC}(X_n) \subseteq \mathbb{F}_{\zeta_{n+1}}[\mathbf{a}] \quad \text{и} \quad \omega_1 \cap \mathbb{F}_{\zeta_n}[\mathbf{a}] \subseteq \zeta_{n+1}$$

для всех n . Тогда множество $X' = \bigcup_n X_n = \bigcup_n \text{TC}(X_n)$ — транзитивная элементарная подмодель $\mathbb{F}_{\omega_1}[\mathbf{a}]$. С другой стороны, по построению, $X' = \bigcup_n \mathbb{F}_{\zeta_n}[\mathbf{a}] = \mathbb{F}_{\xi}[\mathbf{a}]$, где $\xi = \sup_n \zeta_n$. $\square$ (лемма)

Пусть, согласно лемме, $\Xi_{\mathbf{a}} = \{\xi_{\gamma}^{\mathbf{a}} : \gamma < \omega_1\}$, в порядке возрастания. Положим $\vartheta_{\gamma}^{\mathbf{a}} = \sup_n \xi_{\gamma+n}^{\mathbf{a}}$ для всех $\gamma < \omega_1$, и

$$\Theta_{\mathbf{a}} = \{\vartheta_{\gamma}^{\mathbf{a}} : \gamma < \omega_1 \text{ — предельный ординал}\}.$$

Замечание 15.2.3. На самом деле $\vartheta_{\gamma}^{\mathbf{a}} = \sum_n \xi_{\gamma+n}^{\mathbf{a}}$. Равенство суммы и супремума следует из того, что $\xi_{\gamma}^{\mathbf{a}}$ — ординал в модели $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+1}}^{\mathbf{a}}[\mathbf{a}] \models \mathbf{ZFC}^-$, откуда $\xi_{\gamma+1}^{\mathbf{a}} > \xi_{\gamma}^{\mathbf{a}} \cdot \omega$, и далее $\xi_{\gamma}^{\mathbf{a}} + \xi_{\gamma+1}^{\mathbf{a}} = \xi_{\gamma+1}^{\mathbf{a}}$. $\square$

Наш план доказательства теоремы 15.1.1 состоит в следующем. Будет определено борелевское множество $\mathbf{X}_{\mathbf{a}}$, состоящее из бесконечных последовательностей вида $\vec{\varepsilon} = \langle \varepsilon_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, где каждое $\varepsilon_n \subseteq \mathbb{N}^2$ таково, что $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n \rangle$ — модель теории $\mathfrak{T}_{\mathbf{a}}$. Каждой такой последовательности $\vec{\varepsilon}$ будет сопоставлено линейно упорядоченное множество

$W(\vec{\varepsilon})$, равное порядковой сумме линейно упорядоченных множеств $\langle \text{Ord}^{\varepsilon_n}; \varepsilon_n \rangle$ (ординалы модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n \rangle$ с их естественным порядком). Окажется, что если $W(\vec{\varepsilon})$ **вполне** упорядочено, то его порядковый тип равен одному из ординалов $\vartheta \in \Theta_{\mathbf{a}}$ — и для каждого $\vartheta \in \Theta_{\mathbf{a}}$ имеется ровно одна последовательность $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(\vartheta) \in \mathbf{X}_{\mathbf{a}}$ с таким свойством. Это приведет к искомой суслинской системе $\mathfrak{F}$ сначала из борелевских, а потом и из замкнутых множеств, удовлетворяющей требованию (А) теоремы в том плане, что каждая константа $C_{\vartheta} = C_{\vartheta}[\mathfrak{F}]$ будет содержать единственную точку при $\vartheta \in \Theta_{\mathbf{a}}$ (а именно, указанную выше последовательность $\vec{\varepsilon}(\vartheta)$, а точнее, ее код в определенном смысле), и C_{ϑ} будет пуста при $\vartheta \notin \Theta_{\mathbf{a}}$.

В конце главы будет показано, как, на основе этого первого результата, получить и доказательство в части требования (В), а также доказательство в отношении решет.

§15.3 Последовательности счетных моделей

В этом параграфе используются определения и обозначения из §§ 3.9–3.11 в связи с моделями вида $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, где ε — бинарное отношение на $\mathbb{N}$, в частности, Ord^{ε} , WF_{ε} , $\mathfrak{M}_{\varepsilon}$, ϕ_{ε} , $(x)^{\varepsilon}$, $|\varepsilon|$. Напомним, что

$$\mathbf{E} = \{\varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2 : \langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle \text{ является } \omega\text{-моделью теории } \mathbf{ZFC}^{-}\}.$$

Также напомним, что $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ фиксировано определением 15.2.1.

Определение 15.3.1. $\mathbf{E}_{\mathbf{a}}$ есть множество всех таких $\varepsilon \in \mathbf{E}$, что точка $\mathbf{a}$ представлена в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ — т. е. имеется элемент $\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{a})^{\varepsilon} \in \mathbb{N}$, представляющий $\mathbf{a}$ в модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ в смысле определения 3.11.2, — и в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ истинны все аксиомы теории $\mathfrak{T}_{\bar{\mathbf{a}}}$. Вводится подмножество

$$\mathbf{E}_{\mathbf{a}}^{\text{wf}} = \{\varepsilon \in \mathbf{E}_{\mathbf{a}} : \text{модель } \langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle \text{ фундирована}\}$$

фундированных моделей (определение 3.9.1) в $\mathbf{E}_{\mathbf{a}}$. Если $\varepsilon \in \mathbf{E}_{\mathbf{a}}^{\text{wf}}$, то множество Ord^{ε} ординалов модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ вполне упорядочено, и его порядковый тип равен рангу $|\varepsilon|$ по лемме 3.9.2. Положим

$$\mathbf{E}_{\mathbf{a}}^{\text{wf}}(\xi) = \{\varepsilon \in \mathbf{E}_{\mathbf{a}}^{\text{wf}} : |\varepsilon| = \xi\}, \quad \text{для } \xi < \omega_1. \quad \square$$

Упражнение 15.3.2. Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивное множество, в котором истинны все аксиомы $\mathbf{ZFC}^{-}$, и $\mathbf{a} \in \mathfrak{M}$, $\varepsilon \in \mathfrak{M}$, $\varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2$. Докажите, что формулы $\varepsilon \in \mathbf{E}$, $\varepsilon \in \mathbf{E}_{\mathbf{a}}$, $\varepsilon \in \mathbf{E}_{\mathbf{a}}^{\text{wf}}$ абсолютны для $\mathfrak{M}$. Используйте результаты 3.8.1, 3.8.2. $\square$

Лемма 15.3.3. Пусть $\xi < \omega_1$ и $\varepsilon \in \mathbf{E}_{\mathbf{a}}^{\text{wf}}$. Тогда

$$\varepsilon \in \mathbf{CE}_{\mathbf{a}}^{\text{wf}}(\xi) \iff \xi \in \Xi_{\mathbf{a}} \wedge \mathfrak{M}_{\varepsilon} = \mathbb{F}_{\xi}[\mathbf{a}].$$

Доказательство. Модель $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ фундирована, так что ϕ_ε — изоморфизм самой модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ на (транзитивное множество) $\mathfrak{M}_\varepsilon$. После этого замечания, ссылаемся на лемму 15.2.2. $\square$ (лемма)

Определение 15.3.4. Множество $\mathbf{X}_\mathbf{a}$ состоит из всех точек $x \in 2^\mathbb{N}$, удовлетворяющих следующим условиям (1) – (4), в которых мы полагаем $\varepsilon_n^x = \{ \langle n, k \rangle : x(\llbracket n, k \rrbracket) = 1 \}$, где $\llbracket n, k \rrbracket = 2^n(2k+1) - 1$. Заметим сразу, что любая последовательность отношений $\varepsilon_n \subseteq \mathbb{N}^2$ определяет единственную точку $x \in 2^\mathbb{N}$, для которой $\varepsilon_n = \varepsilon_n^x$, $\forall n$.

- (1) если $n \in \mathbb{N}$, то $\varepsilon_n^x \in \mathbf{E}_\mathbf{a}$ — в частности, наша выбранная точка $\mathbf{a}$ представима в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n^x \rangle$;
- (2) если $n \in \mathbb{N}$, то множество $\varepsilon_n^x \subseteq \mathbb{N}^2$ представимо в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_{n+1}^x \rangle$.

Положим $\bar{\mathbf{a}}_n^x = (\mathbf{a})^{\varepsilon_n^x}$ и $\bar{\varepsilon}_n^x = (\varepsilon_n^x)^{\varepsilon_{n+1}^x}$ — это по определению 3.11.2 просто натуральные числа. Добавляем еще два условия:

- (3) если $n \in \mathbb{N}$, то в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_{n+1}^x \rangle$ истинны следующие предложения:
 - (a) « $\bar{\varepsilon}_n^x \in \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{a}}_{n+1}^x}^{\text{wf}}$ »,
 - (b) «нет такого $\varepsilon \in \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{a}}_{n+1}^x}^{\text{wf}}$, что $|\bar{\varepsilon}_n^x| < |\varepsilon|$ строго»,
 - (c) «нет такого $\varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2$, что $\varepsilon <_{\bar{\mathbf{a}}_{n+1}^x}^{\text{гёд}} \bar{\varepsilon}_n^x$ и модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ и $\langle \mathbb{N}; \bar{\varepsilon}_n^x \rangle$ изоморфны» — напомним, что $<_a^{\text{гёд}}$ — это канонический полный порядок на классе $\mathbb{L}[a] = \{ \mathbf{F}_a[\gamma] : \gamma \in \text{Ord} \}$.

- (4) в модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_0^x \rangle$ истинно следующее предложение:

«если $\varepsilon \in \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{a}}_0^x}^{\text{wf}}$, то $|\varepsilon| < |\varepsilon'|$ для какого-то другого $\varepsilon' \in \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{a}}_0^x}^{\text{wf}}$ ». $\square$

Аналогично следствию 8.7.3, мы получаем из леммы 8.7.2:

Следствие 15.3.5. $\mathbf{X}_\mathbf{a}$ — множество класса $\Delta_1^1(\mathbf{a})$ в $2^\mathbb{N}$, т. е. в частности борелевское. $\square$

§ 15.4 Фундированная подобласть

Смысл определения $\mathbf{X}_\mathbf{a}$ сводится к истинности некоторых предложений в счетных нефундированных моделях достаточно общего вида, так что сразу понятного здесь мало. Однако если точка $x \in \mathbf{X}_\mathbf{a}$ связана с *фундированными* моделями, то структура этих моделей уже становится достаточно прозрачной, см. следующую лемму.

Определение 15.4.1. $\mathbf{X}_\mathbf{a}^{\text{wf}}$ есть множество всех таких точек $x \in \mathbf{X}_\mathbf{a}$, что $\varepsilon_n^x \in \mathbf{E}_\mathbf{a}^{\text{wf}}$ — для всех n , где ε_n^x определены, как выше. В этом случае каждая модель $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n^x \rangle$ фундирована, так что $|\varepsilon_n^x| < \omega_1$, и мы можем определить $\|x\| = \sup_n |\varepsilon_n^x|$. $\square$

Можно было бы спросить, а почему бы нам не ограничиться сразу множеством $\mathbf{X}_a^{\text{wf}}$, и не возиться с общим определением $\mathbf{X}_a$ по 15.3.4. Ответ простой: в таком случае мы получаем Π_1^1 -множество $\mathbf{X}_a^{\text{wf}}$, которое само по себе не принесет нам тех суслинских систем, которые требуются теоремой 15.1.1. Именно поэтому нам требуется менее интуитивно ясное, но борелевское, множество $\mathbf{X}_a$.

Лемма 15.4.2. Пусть $x \in \mathbf{X}_a^{\text{wf}}$. Тогда $\|x\| \in \Theta_a$, т. е. найдется такой предельный ординал $\gamma < \omega_1$, что $\|x\| = \sup_n \xi_{\gamma+n}^a$ (см. в § 15.2). При этом если $n \in \mathbb{N}$, то

- (i) $|\varepsilon_n^x| = \xi_{\gamma+n}^a$, модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n^x \rangle$ и $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n}^a}^a[\mathbf{a}] = \mathfrak{M}_{\varepsilon_n^x}$ изоморфны, причем (единственный) изоморфизм $\phi_{\varepsilon_n^x}$ принадлежит следующей модели $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}^a[\mathbf{a}]$, и $\varepsilon_n^x \in \mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}^a[\mathbf{a}]$;
- (ii) нет такого отношения $\varepsilon \in \mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}^a[\mathbf{a}]$, $\varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2$, что $\varepsilon <_{\mathbf{a}}^{\text{гед}} \varepsilon_n^x$ и модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n^x \rangle$ изоморфны.

Доказательство. Определим $\bar{\varepsilon}_n^x$ и $\bar{\mathbf{a}}_n^x$ как указано выше. Тогда $\varepsilon_n^x \in \mathbf{E}_a^{\text{wf}}$ для каждого n , так что по лемме 15.3.3 все ординалы $\xi(n) = |\varepsilon_n^x|$ принадлежат Ξ_a , т. е. $\xi(n) = \xi_{\gamma(n)}^a$, где $\gamma(n) < \omega_1$, — и при этом каждая модель $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n^x \rangle$ изоморфна транзитивной $\in$ -модели $\mathfrak{M}_{\varepsilon_n^x} = \mathbb{F}_{\xi(n)}^a[\mathbf{a}]$, в которой истинны все аксиомы теории $\mathfrak{T}_a$, и $\varepsilon_n^x \in \mathbb{F}_{\xi(n+1)}^a[\mathbf{a}]$ согласно 15.3.4(2). А то, что изоморфизм $\phi_{\varepsilon_n^x} : \langle \mathbb{N}; \varepsilon_n^x \rangle \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{F}_{\xi(n)}^a[\mathbf{a}]$ принадлежит модели $\mathbb{F}_{\xi(n+1)}^a[\mathbf{a}]$, следует из предложения 3.7.5(ii).

Теперь для доказательства леммы — кроме утверждения (ii) — вполне достаточно проверить, что а) ординал $\gamma = \gamma(0)$ пределен, и б) $\gamma(n+1) = \gamma(n) + 1$, для всех n , так что $\xi(n) = \xi_{\gamma+n}^a$.

Для вывода первого утверждения, пусть напротив, $\gamma(0) = \delta + 1$. Ординал $\eta = \xi_{\delta}^a$ также принадлежит Ξ_a . Однако с другой стороны $\eta = \xi_{\delta}^a < \xi_{\gamma(0)}^a = \xi(0)$, так что транзитивное множество $\mathbb{F}_{\eta}^a[\mathbf{a}]$ является элементом модели $\mathbb{F}_{\xi(0)}^a[\mathbf{a}] = \mathfrak{M}_{\varepsilon_0^x}$ и счетно в $\mathbb{F}_{\xi(0)}^a[\mathbf{a}]$. Следовательно, найдется отношение $\varepsilon \in \mathbb{F}_{\xi(0)}^a[\mathbf{a}] \cap \mathbf{E}$, для которого модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ и $\langle \mathbb{F}_{\eta}^a[\mathbf{a}]; \in \rangle$ изоморфны, причем изоморфизм $\phi_{\varepsilon} : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{F}_{\eta}^a[\mathbf{a}]$ принадлежит $\mathbb{F}_{\xi(0)}^a[\mathbf{a}]$. Тогда $|\varepsilon| = \mathbb{F}_{\eta}^a[\mathbf{a}] \cap \omega_1 = \eta$, так что $\varepsilon \in \mathbf{E}_a^{\text{wf}}$ по лемме 15.3.3. Значит, « $\varepsilon \in \mathbf{E}_a^{\text{wf}}$ » истинно в $\mathbb{F}_{\xi(0)}^a[\mathbf{a}]$ согласно результату 15.3.2. Вследствие изоморфности, предложение « $\bar{\varepsilon} \in \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{a}}_0^x}^{\text{wf}}$ » истинно в модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_0^x \rangle$, где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon)^{\varepsilon_0^x}$. Тем самым, по 15.3.4(4), имеется элемент $\bar{e} \in \mathbb{N}$, для которого в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_0^x \rangle$ истинно « $\bar{e} \in \mathbf{E}_{\bar{\mathbf{a}}_0^x}^{\text{wf}} \wedge |\bar{e}| < |\bar{e}|$ ». Опять по изоморфности, в $\mathbb{F}_{\xi(0)}^a[\mathbf{a}]$ истинно « $e \in \mathbf{E}_a^{\text{wf}} \wedge |\varepsilon| < |e|$ », где $e = \phi_{\varepsilon_0^x}(\bar{e})$. Отсюда просто $e \in \mathbf{E}_a^{\text{wf}}$ согласно результату 15.3.2, и, конечно, $\eta = |\varepsilon| < \zeta = |e| < \xi(0)$. Однако $\zeta \in \Xi_a$ по лемме 15.3.3, так что $\zeta = \xi_{\alpha}^a$ для некоторого $\alpha < \omega_1$. Значит, $\delta < \alpha < \gamma(0)$, противоре-
чие.

Второе утверждение. Пусть напротив, $\gamma(n) < \delta < \gamma(n+1)$. Тогда $\eta = \xi_\delta^a \in \Xi_a$, и множество $\mathbb{F}_\eta[a]$ принадлежит модели $\mathbb{F}_{\xi(n+1)}[a]$ и счетно в ней. Как и выше, можно подобрать $\varepsilon \in \mathbf{E}_a^{wf} \cap \mathbb{F}_{\xi(n+1)}[a]$ так, что модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ и $\langle \mathbb{F}_\eta[a]; \varepsilon \rangle$ изоморфны, и тогда предложение « $\bar{\varepsilon} \in \mathbf{E}_{\bar{a}_{n+1}}^{wf}$ » истинно в модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_{n+1}^x \rangle$, где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon)^{\varepsilon_{n+1}^x}$. Однако $|\varepsilon| = \eta > \xi(n) = \xi_{\gamma(n)}^a = |\varepsilon_n^x|$. Отсюда по изоморфности вытекает, что « $|\bar{\varepsilon}| > |\bar{\varepsilon}_n^x|$ » истинно в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_{n+1}^x \rangle$, а это противоречит 15.3.4(3)b.

Отдельно доказываем утверждение (ii) леммы. Пусть напротив, $\varepsilon \in \mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}[a]$, $\varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2$, $\varepsilon <_{\bar{a}_n^{red}}^{\bar{a}_n^{red}} \varepsilon_n^x$, и модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n^x \rangle$ изоморфны. Действуя изоморфизмом $\phi_{\varepsilon_{n+1}^x}$, мы находим, что в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_{n+1}^x \rangle$ истинно: « $\bar{\varepsilon} \subseteq \mathbb{N}^2$, $\bar{\varepsilon} <_{\bar{a}_{n+1}^{red}}^{\bar{a}_{n+1}^{red}} \bar{\varepsilon}_n^x$, и модели $\langle \mathbb{N}; \bar{\varepsilon} \rangle$, $\langle \mathbb{N}; \bar{\varepsilon}_n^x \rangle$ изоморфны», где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon)^{\varepsilon_{n+1}^x} = \phi_{\varepsilon_{n+1}^x}^{-1}(\varepsilon)$, что противоречит условию 15.3.4(3)c. $\square$

Теперь получим в определенном смысле обратный результат.

Лемма 15.4.3. *Если $\vartheta \in \Theta_a$ то существует единственная точка $x \in \mathbf{X}_a^{wf}$, для которой $\|x\| = \vartheta$.*

Доказательство. Пусть $\gamma < \omega_1$ — предельный ординал, и $\vartheta = \sup_n \xi_{\gamma+n}^a \in \Theta_a$. Найдем такую точку $x \in \mathbf{X}_a^{wf}$, что $\|x\| = \vartheta$.

По определению, все ординалы $\xi_{\gamma+n}^a$ принадлежат множеству Ξ_a , так что, при любом n , множество $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n}^a}[a]$ принадлежит следующей модели $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}[a]$ и счетно в ней. Значит, найдутся такие отношения $\varepsilon \in \mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}[a]$, что модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ и $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n}^a}[a]$ изоморфны. Наименьшее в смысле $<_{\bar{a}^{red}}^{\bar{a}^{red}}$ из таких ε обозначим ε_n . Определим точку $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ условием $\varepsilon_n^x = \varepsilon_n$, $\forall n$. По построению, $|\varepsilon_n^x| = \mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n}^a}[a] \cap \omega_1 = \xi_{\gamma+n}^a$, поскольку $\xi_{\gamma+n}^a \in \Xi_a$. Значит, $\|x\| = \vartheta$. Теперь проверяем, что $x \in \mathbf{X}_a$ — тогда автоматически будет $x \in \mathbf{X}_a^{wf}$.

Проверка условий (1), (2) определения 15.3.4 несложна. Например, каждое множество ε_n представимо в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_{n+1} \rangle$, так как эта модель изоморфна модели $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}[a]$, а ε_n принадлежит последней.

(3)a По построению, модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n \rangle$ и $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n}^a}[a]$ изоморфны. Следовательно, первая фундирована, так что $\varepsilon_n \in \mathbf{E}_a^{wf}$. Но тогда предложение « $\varepsilon_n \in \mathbf{E}_a^{wf}$ » истинно и в $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}[a]$ согласно результату 15.3.2, так что, вследствие той же изоморфности, но на уровне $n+1$, предложение « $\bar{\varepsilon}_n \in \mathbf{E}_{\bar{a}_{n+1}}^{wf}$ » истинно в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_{n+1} \rangle$.

(3)b В силу той же изоморфности моделей $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_{n+1} \rangle$ и $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}[a]$, достаточно проверить, что в $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}[a]$ истинно:

«нет такого $\varepsilon \in \mathbf{E}_a^{wf}$, что $|\varepsilon_n| < |\varepsilon|$ строго».

Пусть напротив, $\varepsilon \in \mathbf{E}_a^{\text{wf}} \cap \mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}[\mathbf{a}]$ и $|\varepsilon_n| < |\varepsilon|$. Но ординал $\xi' = |\varepsilon|$ принадлежит Ξ_a по лемме 15.3.3. Поэтому $\xi' = \xi_\delta^a$, где $\gamma + n < \delta$. Однако $\xi' \in \mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}[\mathbf{a}]$, так как $\varepsilon \in \mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}[\mathbf{a}]$. Отсюда следует $\xi' < \xi_{\gamma+n+1}^a$, т. е. $\delta < \gamma + n + 1$. Итак, $\gamma + n < \delta < \gamma + n + 1$, противоречие.

(3)с Аналогично, требуется проверить, что предложение

«нет такого множества $\varepsilon \subseteq \mathbb{N}^2$, что $\varepsilon <_a^{\text{föd}}$ ε_n и модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n \rangle$ изоморфны»

истинно в $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}[\mathbf{a}]$. Но это следует из выбора ε_n .

(4) Требуется установить, что если $\varepsilon \in \mathbf{E}_a^{\text{wf}} \cap \mathbb{F}_{\xi_\gamma^a}[\mathbf{a}]$, то найдется другая точка $e \in \mathbf{E}_a^{\text{wf}} \cap \mathbb{F}_{\xi_\gamma^a}[\mathbf{a}]$, для которой $|\varepsilon| < |e|$. Однако ординал $\eta = |\varepsilon|$ принадлежит Ξ_a , и модель $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ изоморфна $\mathbb{F}_\eta[\mathbf{a}]$ по лемме 15.3.3. А поскольку $\varepsilon \in \mathbb{F}_{\xi_\gamma^a}[\mathbf{a}]$, мы имеем $\eta < \xi_\gamma^a$, т. е. $\eta = \xi_\delta^a$, где $\delta < \gamma$. Но ординал γ предельный, поэтому $\delta + 1 < \gamma$, и далее $\mathbb{F}_{\xi_{\delta+1}^a}[\mathbf{a}] \in \mathbb{F}_{\xi_\gamma^a}[\mathbf{a}]$. Однако в $\mathbb{F}_{\xi_\gamma^a}[\mathbf{a}]$ истинно, что все множества счетны — поэтому найдется такое отношение $e \in \mathbb{F}_{\xi_\gamma^a}[\mathbf{a}]$, $e \subseteq \mathbb{N}^2$, что модели $\langle \mathbb{N}; e \rangle$ и $\mathbb{F}_{\xi_{\delta+1}^a}[\mathbf{a}]$ изоморфны. Наконец, $|\varepsilon| = \eta = \xi_\delta^a < \xi_{\delta+1}^a = |e|$.

Теперь докажем *единственность*. Пусть $\gamma < \omega_1$ — предельный ординал, $\vartheta = \sup_n \xi_{\gamma+n}^a \in \Theta_a$, и точки $x, y \in \mathbf{X}_a^{\text{wf}}$ удовлетворяют $\|x\| = \|y\| = \vartheta$. По лемме 15.4.2, существует (единственный) предельный ординал $\gamma < \omega_1$, для которого $\vartheta = \sup_n \xi_{\gamma+n}^a \in \Theta_a$, и при этом, каково бы ни было n , отношения $\varepsilon_n^x, \varepsilon_n^y \subseteq \mathbb{N}^2$ принадлежат множеству $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n+1}^a}[\mathbf{a}]$, а модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n^x \rangle$ и $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n^y \rangle$ обе изоморфны модели $\mathbb{F}_{\xi_{\gamma+n}^a}[\mathbf{a}]$ и, следовательно, одна другой — и тогда мы имеем $\varepsilon_n^x = \varepsilon_n^y$ согласно утверждению (ii) леммы 15.4.2. Итак, равенство $\varepsilon_n^x = \varepsilon_n^y$ выполнено для всех n , откуда следует $x = y$. $\square$

§15.5 Суслинская система: вариант А

Здесь мы построим суслинскую систему, удовлетворяющую **требованию (А)** теоремы 15.1.1, но пока что систему не **замкнутых**, а **борелевских** множеств. Здесь мы будем опираться на леммы 15.4.2 и 15.4.3. Переход к замкнутым множествам см. ниже в §15.7.

Если $x \in \mathbf{X}_a$, то пусть $W_n(x) = \text{Ord}^{\varepsilon_n^x}$ — множество ординалов в модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n^x \rangle$. Положим также $W(x) = \sum_n \langle W_n(x); \varepsilon_n^x \rangle$ — порядковая сумма множеств $W_n(x)$ с их естественными порядками ε_n^x . Таким образом, $W(x)$ состоит из пар вида $\langle n, j \rangle$, где $n \in \mathbb{N}$ и $j \in \text{Ord}^{\varepsilon_n^x}$, которые упорядочены отношением $<_x$ так, что $\langle n, j \rangle <_x \langle n', j' \rangle$, когда либо $n < n'$ в $\mathbb{N}$, либо же $n = n'$ и $j \varepsilon_n^x j'$. Понятно, что $<_x$ — линейный порядок на множестве $W(x) \subseteq \mathbb{N}^2$.

Если $\gamma < \omega_1$ — предельный ординал, то $\vartheta_\gamma^a \in \Theta_a$, и через $\mathbf{x}_\gamma$ мы обозначим ту единственную — по лемме 15.4.3 — точку $x \in \mathbf{X}_a^{wf}$, для которой $\|x\| = \vartheta_\gamma^a$. Тогда $\mathbf{X}_a^{wf} = \{\mathbf{x}_\gamma : \gamma < \omega_1 \text{ предельно}\}$.

Лемма 15.5.1. *Отображения $x \mapsto W(x)$ и $x \mapsto <_x$ (где $x \in \mathbf{X}_a$) — борелевские, точнее, класса $\Delta_1^1(a)$, и при этом:*

- (i) *если $x \in \mathbf{X}_a \setminus \mathbf{X}_a^{wf}$, то $\langle W(x); <_x \rangle$ не вполне упорядочено;*
- (ii) *если $x \in \mathbf{X}_a^{wf}$, т. е., по предыдущему, $x = \mathbf{x}_\gamma$, где ординал $\gamma < \omega_1$ предельно, то $\langle W(x); <_x \rangle$ подобно ординалу ϑ_γ^a .*

Доказательство. Формальное определение $W(x)$ и $<_x$ для $x \in \mathbf{X}_a$ сводится к истинности определенных формул в моделях вида $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_n^x \rangle$, а это, как и выше, не выводит из области $\Delta_1^1(a)$ по лемме 8.7.2. Отсюда следует борелевость отображений. А оба дополнительных утверждения являются следствиями лемм 15.4.2 и 15.4.3, а также замечания 15.2.3, которое необходимо, поскольку по построению порядковый тип $\langle W(x); <_x \rangle$ равен сумме, а не супремуму порядковых типов $\text{otp} \langle W_n(x); \varepsilon_n^x \rangle = |\varepsilon_n^x| = \xi_{\gamma+n}^a$ при $x = \mathbf{x}_\gamma \in \mathbf{X}_a^{wf}$. $\square$

Следствие 15.5.2 (в условиях теоремы 15.1.1). *Имеется регулярная суслинская система $\mathfrak{F}$ борелевских множеств, удовлетворяющая требованию (А) теоремы 15.1.1, а точнее, требованию, что*

(А') *если $\vartheta \in \Theta_a$, то конституанта $C_\vartheta = C_\vartheta[\mathfrak{F}]$ содержит единственную точку $\mathbf{x}_\vartheta$, а конституанты C_ξ , $\xi \notin \Theta_a$, все пусты.*¹

Доказательство. Начиная с отображений $x \mapsto W(x)$ и $x \mapsto <_x$ леммы 15.5.1, мы несколько упростим ситуацию, предположив, что на самом деле $W(x) = \mathbb{N}$, а не $W(x) \subseteq \mathbb{N}^2$, для каждого $x \in \mathbf{X}_a$ — этого легко добиться, с сохранением прочих свойств, посредством 1) любой рекурсивной биекции $\mathbb{N}^2$ на $\mathbb{N}$, и 2) возрастающей биекции $\mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} W$, каково бы ни было бесконечное $W \subseteq \mathbb{N}$. Итак, мы имеем:

- (*) борелевское отображение $x \mapsto <_x$ ($x \in \mathbf{X}_a$) с тем свойством, что если $x \in \mathbf{X}_a$, то $<_x$ — линейное упорядочение множества $\mathbb{N}$, причем если $x = \mathbf{x}_\gamma \in \mathbf{X}_a^{wf}$, то $\text{otp} <_x = \vartheta_\gamma^a$, а если $x \in \mathbf{X}_a \setminus \mathbf{X}_a^{wf}$, то $<_x$ — вообще не полный порядок.

Ключевой шаг теперь состоит в следующем: имея линейный порядок $<$ на $\mathbb{N}$, мы построим дерево $T_< \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ так, что отображение $< \mapsto T_<$ — борелевское, и кроме того

¹ Напомним, что множество $\Theta_a \subseteq \omega_1$ несчетно по лемме 15.2.2.

- (1) если $\prec$ — не полный порядок, то $T_{\prec}$ не фундировано;
- (2) если $\prec$ — полный порядок по типу $\xi < \omega_1$, то $T_{\prec} \in \mathbf{WFT}_{\xi}$.

Если такое построение выполнено, то, согласно (*), множества

$$F_s = \{x \in \mathbf{X}_{\mathbf{a}} : s \in T_{\prec_x}\} \cup (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbf{X}_{\mathbf{a}})$$

— борелевские, и образуют систему $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$, удовлетворяющую (A'). Таким образом, остается выполнить построение.

Итак, пусть $\prec$ — некоторый линейный порядок на $\mathbb{N}$, возможно, никак не связанный с естественным полным упорядочением натуральных чисел. Начиная построение, мы определим, что Λ (пустой кортеж) принадлежит $T_{\prec}$, и положим $U_{\Lambda} = \mathbb{N}$.

Теперь индуктивный шаг. Допустим, что кортеж $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ уже зачислен в $T_{\prec}$, и ему сопоставлено некоторое множество $U_s \subseteq \mathbb{N}$, являющееся начальным сегментом $\mathbb{N}$ в смысле порядка $\prec$.

Если $U_s = \emptyset$, то s становится концевой вершиной дерева $T_{\prec}$.

Если U_s имеет $\prec$ -максимальный элемент k , то зачисляем кортеж $s^{\wedge}k$ в $T_{\prec}$ и полагаем $U_{s^{\wedge}k} = U_s \setminus \{k\}$.

Наконец, допустим, что $U_s \neq \emptyset$ не имеет $\prec$ -максимального элемента — тогда множество U_s бесконечно, и пусть $U_s = \{u_s(j) : j \in \mathbb{N}\}$ — его перечисление в возрастающем порядке натуральных чисел. Положим $v_s(0) = u_s(0)$, и если число $v_s(n) \in U_s$ определено, то пусть $v_s(j+1) = u_s(j')$, где j' — наименьший индекс, для которого $v_s(j) \prec u_s(j')$. По построению, последовательность чисел $v_s(n) \in U_s$ строго $\prec$ -возрастает и $\prec$ -конфинальна в U_s . Для каждого n , кортеж $s^{\wedge}v_s(n)$ зачисляется в $T_{\prec}$, и для него мы полагаем $U_{s^{\wedge}v_s(n)} = \{j \in U_s : j \prec v_s(n)\}$ — снова начальный сегмент $\mathbb{N}$ в смысле $\prec$.

Проверку борелевости этого построения мы оставляем читателю. Для проверки (1), пусть $\prec$ — не полный порядок, т. е. имеется бесконечная убывающая цепочка $j_0 \succ j_1 \succ j_2 \succ \dots$. Но тогда, по построению, если $s \in T_{\prec}$ и множество U_s содержит бесконечно много чисел j_n , то, для подходящего j , кортеж $s^{\wedge}j$ также принадлежит $T_{\prec}$ и множество U_s также содержит бесконечно много чисел j_n . Отсюда следует, что $T_{\prec}$ имеет бесконечную ветвь.

Для проверки (2), допустим, что $\prec$ — полный порядок. По построению, если $s = \langle j_0, j_1, \dots, j_n \rangle \in T_{\prec}$, то $j_0 \succ j_1 \succ \dots \succ j_n$, так что дерево $T_{\prec}$ фундировано. Остается проверить, что ранг $|s|_{T_{\prec}}$ по §5.2 любого кортежа $s \in T_{\prec}$ равен порядковому типу множества U_s . Простое доказательство трансфинитной индукцией по $|s|_{T_{\prec}}$ оставляется читателю как **упражнение**. $\square$

$\square$ (теорема 15.1.1(A), суслинские системы борелевских множеств)

§ 15.6 Суслинская система: вариант В

Покажем, как следует изменить построения § 15.5 с целью получить суслинскую систему борелевских множеств, удовлетворяющую **требованию (В)** теоремы 15.1.1. С этой целью, мы распространим отображения, введенные в начале § 15.5, на некоторую более широкую область, с тем, чтобы, сохранив условия (i), (ii) леммы 15.5.1, обеспечить представление всех ординалов $\xi \notin \Theta_{\mathbf{a}}$ вне области $\mathbf{X}_{\mathbf{a}}$.

Определение 15.6.1. Множество $\mathbf{Y}_{\mathbf{a}}$ состоит из всех точек $x \in 2^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющих следующим условиям (1) – (3), в которых, как и выше $\varepsilon_n^x = \{\langle n, k \rangle : x(\llbracket n, k \rrbracket) = 1\} \subseteq \mathbb{N}^2$, где $\llbracket n, k \rrbracket = 2^n(2k+1) - 1$.

- (1) $\varepsilon_0^x \in \mathbf{E}_{\mathbf{a}}$ — в частности, наша точка $\mathbf{a}$ представима в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_0^x \rangle$, и пусть $\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{a})^{\varepsilon_0^x} \in \mathbb{N}$ — представляющий элемент;
- (2) ε_1^x — строгое линейное упорядочение множества $\mathbb{N}$;
- (3) множество ε_1^x представимо в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_0^x \rangle$, и представляющий элемент $\bar{\varepsilon}_1^x = (\varepsilon_1^x)^{\varepsilon_0^x}$ удовлетворяет в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon_0^x \rangle$ такому условию:
 - «либо $\bar{\varepsilon}_1^x$ — не полное упорядочение, либо, в противном случае, для соответствующего порядкового числа, т. е. ординала $\bar{\alpha} = \text{otp}(\bar{\varepsilon}_1^x)$, выполнено $\bar{\alpha} \notin \Theta_{\bar{\mathbf{a}}}$ ». $\square$

Понятно, что $\mathbf{Y}_{\mathbf{a}} \cap \mathbf{X}_{\mathbf{a}} = \emptyset$. Для $x \in \mathbf{Y}_{\mathbf{a}}$ положим $W(x) = \mathbb{N}^2$ и $<_x = \bar{\varepsilon}_1^x$. Далее мы используем следующую лемму.

Лемма 15.6.2. Если $x \in \mathbf{Y}_{\mathbf{a}}$ и $<_x$ является полным порядком, то $\text{otp}(<_x) \notin \Theta_{\mathbf{a}}$. Обратно, если $\gamma < \omega_1$ и $\gamma \notin \Theta_{\mathbf{a}}$, то найдется точка $x \in \mathbf{Y}_{\mathbf{a}}$, для которой порядковый тип $\text{otp}(<_x)$ равен γ .

Имея эту лемму вместе с леммой 15.5.1 и следуя конструкции из доказательства следствия 15.5.2, читатель без труда осуществит построение суслинской системы борелевских множеств, удовлетворяющей условию (В) теоремы 15.1.1 — это оставляется как **упражнение**.

Доказательство. По построению, вполне достаточно проверить, что определение множества $\Theta_{\mathbf{a}}$ абсолютно в том смысле, что если $\varepsilon \in \mathbf{E}_{\mathbf{a}}^{\text{rf}}$ (т. е., в частности, модель $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ фундирована) и ординал α принадлежит стандартному множеству $\mathfrak{M}_{\varepsilon} = \{\phi_{\varepsilon}(z) : z \in \mathbb{N}\}$ модели $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, то $\alpha \in \Theta_{\mathbf{a}}$, если и только если в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$ истинно « $\bar{\alpha} \in \Theta_{\bar{\mathbf{a}}}$ ». Из-за изоморфности, правая часть этой эквивалентности равносильна тому, что в транзитивной модели $\mathfrak{M}_{\varepsilon}$ истинно « $\alpha \in \Theta_{\mathbf{a}}$ ».

Другими словами, требуется доказать, что определение множества $\Theta_{\mathbf{a}}$ абсолютно для всех транзитивных моделей теории $\mathbf{ZFC}^-$, содержащих нашу фиксированную точку $\mathbf{a}$.

Согласно определению (см. §15.2), для вывода этой абсолютности вполне достаточно доказать аналогичную абсолютность множества $\Xi_{\mathbf{a}}$. Однако определение этого множества сводится к операции $\xi \mapsto \mathbb{F}_{\xi}[\mathbf{a}]$ и проверке истинности формул в моделях, а эти действия абсолютны для транзитивных моделей $\mathbf{ZFC}^-$ согласно предложению 8.3.1 и лемме 3.8.1. $\square$ (лемма)

$\square$ (теорема 15.1.1(B), суслинские системы борелевских множеств)

§15.7 Редукция к замкнутым множествам

Здесь мы завершаем **доказательство теоремы 15.1.1**. Требуется доказать, что из существования системы **борелевских** множеств, удовлетворяющей одному из требований (A), (B) теоремы 15.1.1, следует существование (регулярной суслинской) системы **замкнутых** множеств, удовлетворяющей тому же требованию. Эта задача решается раздельно для обоих условий.

Требование (A). Допустим, что существует регулярная суслинская система $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ борелевских множеств $F_s \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющая условию (A) теоремы 15.1.1. График

$$P = \{\langle x, F^x \rangle : x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$$

функции сечений $x \mapsto F^x = \{s : x \in F_s\}$ этой системы будет тогда борелевским множеством в пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$. Пусть $P' \subseteq P$ — множество всех точек конденсации множества P . Тогда разность $D = P \setminus P'$ не более чем счетна, а по теореме 5.6.3(iv), найдется непрерывная взаимно однозначная функция $H : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} P'$.

Если $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $H(y) = \langle x, S \rangle \in P'$, то определим $\varphi(y) = x$ и $S(y) = S$. Функция $S : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ непрерывна, а функция $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — взаимно однозначна и также непрерывна, причем полный образ φ равен $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus X$, где множество $X = \{x : \exists S (\langle x, S \rangle \in D)\}$ не более чем счетно, и $S(y) = F^{\varphi(y)}$ для всех $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Из сказанного следует, что множества $G_s = \{y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \in S(y) = F^{\varphi(y)}\}$ ($s \in \mathbb{N}^{<\omega}$) открыто-замкнуты, а состоящая из них суслинская система $\mathfrak{G} = \langle G_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ удовлетворяет $G^y = F^{\varphi(y)}$, откуда получаем

$$C_{\nu}[\mathfrak{G}] = \varphi^{-1}[C_{\nu}[\mathfrak{F}] \setminus X] \quad \text{и} \quad A_{\nu}[\mathfrak{G}] = \varphi^{-1}[A_{\nu}[\mathfrak{F}] \setminus X]$$

для любого индекса $\nu < \omega_1$. Таким образом, ввиду взаимной однозначности φ , если последовательность конституант $C_{\nu}[\mathfrak{F}]$ удовлетворяет требованию (A) теоремы, то ему же будет удовлетворять и последовательность конституант $C_{\nu}[\mathfrak{G}]$, что нам и нужно.

Требование (В). Теперь допустим, что последовательность конститuant $C_\nu[\mathfrak{F}]$ удовлетворяет требованию (В). Мы уже не можем утверждать то же для конститuant $C_\nu[\mathfrak{G}]$, поскольку некоторые из них (не более чем счетное число) могут стать пустыми из-за удаления множества X . Поэтому конструкция несколько усложняется.

Разобьем пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на открыто-замкнутые бэровские интервалы $U_m = \{y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : y(0) = m\}$, (где $m \in \mathbb{N}$). Множество U_0 гомеоморфно всему пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и поэтому построение функций φ, H, S можно выполнить так, чтобы они были определены только на U_0 , а не на всем пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Далее, пусть $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Введем новую функцию сечений S' , полагая

$$S'(y) = \begin{cases} S(y), & \text{когда } y \in U_0; \\ F^{x_m} & \text{когда } y \in U_m \text{ и } m \geq 1; \end{cases}$$

Эта функция непрерывна вместе с S , а соответствующие множества

$$G'_s = \{y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \in S'(y)\} \quad (s \in \mathbb{N}^{<\omega})$$

открыто-замкнуты. Кроме того, если последовательность конститuant $C_\nu[\mathfrak{F}]$ удовлетворяет требованию (В) теоремы 15.1.1, то ему же будет удовлетворять и последовательность конститuant $C_\nu[\mathfrak{G}']$, порождаемая системой $\mathfrak{G}' = \langle G'_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$.

□ (теорема 15.1.1(А)(В) для суслинских систем)

§ 15.8 Случай решет

В заключение этой главы, мы излагаем набросок доказательства теоремы 15.1.1 для решет — при помощи соответствующего изменения конструкций в §§ 15.5–15.7. Прежде всего, имеет место следующий аналог следствия 15.5.2.

Следствие 15.8.1 (в условиях теоремы 15.1.1). *Имеется решет $\mathbf{R} = \langle R_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ из борелевских множеств $R_s \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющее требованию (А) теоремы 15.1.1, а точнее, требованию*

(А'') *если $\vartheta \in \Theta_{\mathbf{a}}$, то конститuant $C_\vartheta = C_\vartheta[\mathbf{R}]$ содержит единственную точку $\mathbf{x}_\vartheta$, а конститuanты $C_\xi, \xi \notin \Theta_{\mathbf{a}}$, все пусты.*

Доказательство. Возвращаясь отображению $x \mapsto <_x$ из (*) в доказательстве следствия 15.5.2, мы построим, начиная с произвольного линейного порядка $\prec$ на $\mathbb{N}$, такое множество $Q_\prec \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}$, что отображение $\prec \mapsto Q_\prec$ — борелевское, и кроме того

- (1) порядок $\langle \mathbb{N}; \prec \rangle$ подобен порядку $\langle Q_{\prec}; <_{\text{лс}} \rangle$, где $<_{\text{лс}}$ — порядок Лузина – Серпинского на $\mathbb{N}^{<\omega}$ из §5.5.

Если такое построение выполнено, то, согласно (*), множества

$$R_s = \{x \in \mathbf{X}_a : s \in Q_{<_x}\} \cup (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbf{X}_a) \quad (\text{отдельно } R_\Lambda = \emptyset)$$

— борелевские, и образуют решетку $\mathbf{R} = \langle R_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$, для которого выполнено требование (A'').

Чтобы выполнить построение, зададимся каким-либо линейным порядком $\prec$ на $\mathbb{N}$. Ключевой факт состоит в том, что $<_{\text{лс}}$ упорядочивает множество $\mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}$ подобно рациональным числам. Это позволяет определить кортеж $t_n \in \mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}$ индукцией по n так, чтобы

$$m \prec n \iff t_m <_{\text{лс}} t_n. \quad (2)$$

Собственно говоря, на каждом шагу n в качестве t_n следует взять кортеж, сохраняющий (2) для всех уже определенных t_k , и имеющий наименьший номер $\text{gn } t_n$ из всех подходящих t_n . (Относительно номеров $\text{gn } t$ кортежей $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ см. определение 4.2.1.) $\square$ (следствие)

Переход к решетке, удовлетворяющему требованию (B) теоремы 15.1.1, а затем пререход к решетам из замкнутых множеств осуществляются примерно тем же способом, что и в §§15.6, 15.7 соответственно. Подробности оставляются читателю как **упражнение**.

$\square$ (теорема 15.1.1 для решет)

Исторические и библиографические замечания

Результат теоремы 15.1.1 в варианте (A) (т. е. имеется несчетно много одноэлементных внешних конституант, а все остальные внешние конституанты пустые) был впервые получен для случая решет П. С. Новиковым в статье [42] на основе весьма сложных геометрических построений. В отношении варианта (B) (все внешние конституанты непустые, и среди них несчетно много одноэлементных множеств), результат, видимо, не был известен ни для суслинских систем, ни для решет до статьи В. Г. Кановея [10].

Глава 16

Отрицательные решения проблем о конституантах

В этой главе доказывается теорема 16.1.1 об отрицательных решениях лужинских проблем о конституантах II, III, IV, IIIa, IIIb из § 7.5. А именно, что они не противоречат аксиомам **ZFC**, и, более того, эти отрицательные решения следуют из гипотезы

$$\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\omega_1^{L[a]} < \omega_1).$$

Мы докажем, что, если эта гипотеза выполнена, то все упомянутые проблемы решаются отрицательно, как в контексте суслинских систем, так и в контексте решет, причем, даже если мы разрешим системы и решета, состоящие из борелевских множеств.

Дополнительно будет установлено (теорема 16.1.3), что проблемы I и ОПТАС имеют отрицательные решения в обычном математическом смысле, т. е. просто доказывается, что искомым последовательностей конституант не существует.

§ 16.1 Главные теоремы о конституантах

Первой главной целью в этой главе будет доказательство следующей теоремы, ведущей, как мы увидим, к неразрешимости некоторых проблем о конституантах (следствие 16.1.2).

Теорема 16.1.1. *Допустим, что $\omega_1^{L[a]} < \omega_1$ для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Если $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ является регулярной суслинской системой борелевских множеств $F_s \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то тогда

- ($\star$) *для каждого ординала $\rho < \omega_1$ существует лишь не более чем счетное множество таких ординалов $\xi < \omega_1$, что конституанта $C_\xi = C_\xi[\mathfrak{F}]$ непуста и Σ_ρ^0 -отделима от аппроксимации $C_{<\xi} = C_{<\xi}[\mathfrak{F}] = \bigcup_{\eta < \xi} C_\eta$.*
- ($\star'$) *и тем самым для каждого ординала $\rho < \omega_1$ существует лишь не более чем счетное множество таких ординалов $\xi < \omega_1$, что конституанта $C_\xi = C_\xi[\mathfrak{F}]$ принадлежит Σ_ρ^0 .*

Понятно, что если условие ($\star$) — а тогда и ($\star'$) — теоремы 16.1.1 выполнено для последовательности конституант C_ξ , то по очевидным соображениям эта последовательность не может давать положительного решения ни одной из проблем II, III, IV, IIIa, IIIb из § 7.5. Соединяя этот результат с теоремой 15.1.1 (и замечанием 15.1.2) предыдущей главы, мы немедленно получаем следствие, пополняющее список неразрешимых проблем теоремы 7.2.1:

Следствие 16.1.2. *Следующие предложения эквивалентны:*

- (1) $\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\omega_1^{L[a]} < \omega_1)$;
- (2) *проблема II из § 7.5 имеет отрицательное решение — т. е. не существует таких регулярных суслинских систем $\mathfrak{F}$ замкнутых множеств, что соответствующая последовательность внешних конституант $C_\xi = C_\xi[\mathfrak{F}]$ — неограниченная по индексу и состоит только из счетных множеств;*
- (3) *проблема III имеет отрицательное решение в том же смысле;*
- (4) *проблема IV имеет отрицательное решение;*
- (5) *проблема IIIa имеет отрицательное решение;*
- (6) *проблема IIIb имеет отрицательное решение.*

Результат сохраняется в силе для суслинских систем из борелевских множеств. □

Следующая теорема — второй главный результат этой главы — влечет отрицательные решения проблем I и ОПТАС из § 7.5.

Теорема 16.1.3. Пусть $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ — регулярная суслинская система борелевских множеств $F_s \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и $\rho < \omega_1$. Тогда

- (А) если все внешние конституйанты $C_\xi = C_\xi[\mathfrak{F}]$, $\xi < \omega_1$, непусты, то найдется такой ординал $\xi < \omega_1$, что конституйанта $C_\xi \Sigma_\rho^0$ -неотделима от аппроксимации $C_{<\xi} = \bigcup_{\eta < \xi} C_\eta$;
- (В) если имеется несчетно много непустых **внутренних** конституйант $A_\xi = A_\xi[\mathfrak{F}]$, то найдется такой ординал ξ , что конституйанта $A_\xi \Sigma_\rho^0$ -неотделима от $A_{<\xi} = \bigcup_{\eta < \xi} A_\eta$.

Следствие 16.1.4. Проблемы I и ОПТАС решаются отрицательно (в обычном математическом смысле), т. е. требуемых последовательностей конституйант нет. $\square$

Замечание 16.1.5. Обе теоремы и оба следствия верны также и для последовательностей *действительных* конституйант — т. е. тех, которые определяются решетками, а не суслинскими системами. Например, в отношении теоремы 16.1.1,

если $\omega_1^{L[a]} < \omega_1$ для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и $\mathbf{R} = \langle R_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ — решето из борелевских множеств $R_s \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то конституйанты $C_\xi = C_\xi[\mathbf{R}]$ также удовлетворяют условию $(\star)$ теоремы 16.1.1

Доказательство этого варианта теорем получается достаточно прямым изменением данного ниже доказательства теорем 16.1.1 и 16.1.3, сводящимся в основном к тому, что ссылки на формулы теоремы 5.4.3 должны быть заменены ссылками на 5.5.5. Мы ограничимся этим замечанием и опустим детали, чтобы не загромождать изложение, но самостоятельно восстановить их будет хорошим и совсем не тривиальным *упражнением для читателя*. $\square$

§ 16.2 Техническое введение в доказательство

Особенностью доказательства теорем 16.1.1 и 16.1.3 является то, что нам придется рассматривать «одну и ту же» последовательность конституйант как в общем теоретико-множественном универсуме $\mathbb{V}$, так и в других моделях теории множеств — в частности, в генерических расширениях универсума $\mathbb{V}$. В связи с этим, придется приложить определенные усилия к тому, чтобы придать изучаемым объектам и утверждениям о них форму, подходящую для рассмотрения в разных теоретико-множественных универсумах, а затем на этой основе уже рассмотреть абсолютность некоторых отношений.

Первая часть этой программы может быть характеризована как *переход от точечных множеств к определяющим их формулам*.

Общее соглашение 16.2.1 (в универсуме $\mathbb{V}$). На протяжении доказательства теорем 16.1.1, 16.1.3 в этом параграфе фиксируются:

- (1) регулярная суслинская система $\mathfrak{F} = \langle F_s \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$ борелевских множеств $F_s \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и такой параметр $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что множество $P_{\mathfrak{F}} = \{\langle s, x \rangle : s \in \mathbb{N}^{<\omega} \wedge x \in F_s\}$ принадлежит классу $\Delta_1^1(\mathbf{a})$.

(Множество $P_{\mathfrak{F}}$ — борелевское вместе с множествами F_s , следовательно, оно принадлежит классу Δ_1^1 , а значит, классу $\Delta_1^1(a)$ для какого-то $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.) Таким образом, имеются

- (2) формулы, $\Phi(s, x) := \Phi_{\mathfrak{F}}(s, x)$ типа Σ_1^1 и $\Psi(s, x) := \Psi_{\mathfrak{F}}(s, x)$ типа Π_1^1 , обе с единственным параметром $\mathbf{a}$, которые определяют множество $P_{\mathfrak{F}}$, так что

$$P_{\mathfrak{F}} = \{\langle s, x \rangle \in \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \Phi(s, x)\} = \{\langle s, x \rangle \in \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \Psi(s, x)\}.$$

Здесь мы можем уже забыть о примарности системы $\mathfrak{F}$, и напротив, считать примарными указанные формулы Φ и Ψ , удовлетворяющие

- (3) $\Phi(s, x) \iff \Psi(s, x)$ для всех $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и
 $\Phi(s, x) \implies \Phi(t, x)$ для всех $t \subset s$ и $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (регулярность!),

и уже из них формально определить

- (4) регулярную суслинскую систему $\mathfrak{F}_{\Phi\Psi} = \langle (F_s)_{\Phi\Psi} \rangle_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}}$, где $(F_s)_{\Phi\Psi} = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \Phi(s, x)\} = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \Psi(s, x)\}$ для $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$,

которая, естественно, совпадает с данной системой $\mathfrak{F}$ из (1).

Формулы, даваемые в этой ситуации теоремой 5.4.3, мы снабдим здесь индексами $\Phi\Psi$ — чтобы подчеркнуть их реальную зависимость от формул Φ и Ψ , а не от системы $\mathfrak{F}$ как таковой. Таким образом, имеются определенные канонические Σ_1^1 -формулы $\bar{\sigma}_{\Phi\Psi}(x)$, $\sigma_{\Phi\Psi}(T, x)$, $\sigma'_{\Phi\Psi}(T, x)$, и Π_1^1 -формулы $\bar{\pi}_{\Phi\Psi}(x)$, $\pi_{\Phi\Psi}(T, x)$, $\pi'_{\Phi\Psi}(T, x)$ — все также с единственным параметром $\mathbf{a}$ из (1), и такие, что

- (5) для любых $x \in \mathbb{X}$, $\xi < \omega_1$, и дерева $T \in \mathbf{WFT}_{\xi}$ мы имеем:

- (i) $x \in \mathbf{C}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \iff \bar{\pi}_{\Phi\Psi}(x)$ и $x \in \mathbf{A}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \iff \bar{\sigma}_{\Phi\Psi}(x)$;
- (ii) $x \in \mathbf{C}_{\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \iff \sigma_{\Phi\Psi}(T, x) \iff \pi_{\Phi\Psi}(T, x)$;
- (iii) $x \in \mathbf{A}_{\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \iff \sigma'_{\Phi\Psi}(T, x) \iff \pi'_{\Phi\Psi}(T, x)$. □

Соглашение 16.2.1 формально относится к универсуму всех множеств $\mathbb{V}$ теоремы 16.1.1, где данная суслинская система $\mathfrak{F}$ тождественна с $\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}$. Однако его содержание имеет и более широкий смысл!

Замечание 16.2.2. Свойство (3) из 16.2.1 выражается Π_2^1 -формулой (с параметром $\mathbf{a}$), а потому, по теореме абсолютности Шенфилда 5.9.1(ii) (плюс замечание 5.9.2), оно верно не только в нашем универсуме $\mathbb{V}$ всех множеств, но также и

(*) в любом его генерическом расширении $\mathbb{V}[G]$ и в любой транзитивной модели (классе) $\mathfrak{N} \subseteq \mathbb{V}[G]$, в которой истинны все аксиомы **ZFC** и которая содержит $\mathbf{a}$ и все ординалы

— при этом не обязательно предполагается, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathbb{V}$ (см. замечание 9.1.5 и предложение 9.1.6 о генерических расширениях).

Тем самым, **внутри любой такой модели $\mathfrak{N}$ можно определить:**

- регулярную суслинскую систему $\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}$ равенствами (4) из 16.2.1,
- внутреннее $\mathbf{A}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ и внешнее $\mathbf{C}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ множества для $\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}$, и
- последовательности конститuant $\mathbf{A}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ и $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$.

При этом, коль скоро построение формул, фигурирующих в эквивалентностях (5) соглашения 16.2.1, по Φ и Ψ носит канонический характер, а доказательство самих эквивалентностей (= теорема 5.4.3) является выводом из аксиом **ZFC**, мы заключаем, что **все эквивалентности из 16.2.1(5) верны в любой модели $\mathfrak{N}$ вида (*)**. $\square$

§ 16.3 Абсолютность некоторых утверждений

Получив возможность фактически рассматривать заданную суслинскую систему $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\Phi\Psi}$ и связанные с ней внутренние и внешние множества и конститuantы в различных моделях теории множеств — через ассоциированные с ней формулы Φ, Ψ и производные формулы из 16.2.1(5), как указано в соглашении 16.2.1 и замечании 16.2.2 — мы можем теперь перейти к доказательству некоторых утверждений об абсолютности свойств конститuant. Эта абсолютность будет играть важную роль в доказательстве теоремы 16.1.1, так как некоторые ключевые моменты доказательства потребуют рассмотрения генерических расширений данного универсума $\mathbb{V}$ и других моделей.

Теорема 16.3.1. *В соглашениях и обозначениях 16.2.1, пусть $\mathbb{V}[G]$ — генерическое расширение универсума $\mathbb{V}$, а $\mathfrak{N} \subseteq \mathbb{V}[G]$ — транзитивная модель, содержащая все ординалы и $\mathbf{a}$, как в 16.2.2(*). Пусть ξ, ρ — ординалы, для которых $\xi, \rho < \omega_1^{\mathbb{V}}$ и $\xi, \rho < \omega_1^{\mathfrak{N}}$. Тогда следующие предложения абсолютны для $\mathbb{V}[G]$ и для $\mathfrak{N}$:*

- (i) $\mathbf{C}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \neq \emptyset$, и $\mathbf{A}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \neq \emptyset$;
- (ii) $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \neq \emptyset$, и $\mathbf{A}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \neq \emptyset$;

- (iii) $\forall \eta < \omega_1 (C_\eta[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \neq \emptyset)$, и $\forall \eta < \omega_1 (A_\eta[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \neq \emptyset)$;
- (iv) $\forall \eta < \omega_1 \exists \nu > \eta (A_\nu[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \neq \emptyset)$;
- (v) $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Pi_\rho^0$, $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Sigma_\rho^0$, $A_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Pi_\rho^0$, $A_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Sigma_\rho^0$;
- (vi) $\forall \eta < \omega_1 (C_\eta[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Pi_\rho^0)$, $\forall \eta < \omega_1 (A_\eta[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Pi_\rho^0)$,
— и такие же два предложения для класса Σ_ρ^0 ;
- (vii) конституанта $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ Π_ρ^0 -отделима от $C_{<\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$,
конституанта $A_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ Π_ρ^0 -отделима от $A_{<\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$,
— и такие же два предложения для Σ_ρ^0 -отделимости;
- (viii) $\forall \eta < \omega_1$ (конституанта $C_\eta[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ Π_ρ^0 -отделима от $C_{<\eta}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$),
 $\forall \eta < \omega_1$ (конституанта $A_\eta[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ Π_ρ^0 -отделима от $A_{<\eta}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$),
— и такие же два предложения для Σ_ρ^0 -отделимости.

Если дополнительно борелевский код $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}$ и точка $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежат $\mathbb{V} \cap \mathfrak{N}$, то и следующие предложения абсолютны для $\mathbb{V}[G]$ и для $\mathfrak{N}$:

- (ix) $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = B_\varkappa$, $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus B_\varkappa$, и то же для $A_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$;
- (x) $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \cap B_\varkappa \neq \emptyset$, и $A_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \cap B_\varkappa \neq \emptyset$;
- (xi) $B_\varkappa$ отделяет конституанту $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ от $C_{<\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$, и
 $B_\varkappa$ отделяет конституанту $A_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ от $A_{<\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$;
- (xii) $B_\varkappa \subseteq C[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$, и $B_\varkappa \subseteq A[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$;
- (xiii) $x \in C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$, и $x \in A_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$.

Доказательство. Для начала, отметим, что классы $\mathbb{V}$ и $\mathfrak{N}$ обладают, по отношению к $\mathbb{V}[G]$, следующими общими свойствами:

- (†) $\mathfrak{N} \subseteq \mathbb{V}[G]$ и $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}[G]$, $\mathfrak{N}$ и $\mathbb{V}$ — транзитивные классы в $\mathbb{V}[G]$, содержащие **a** и все ординалы, и удовлетворяющие аксиомам **ZFC**, а ординалы ξ, ρ удовлетворяют $\xi, \rho < \omega_1^{\mathbb{V}}$ и $\xi, \rho < \omega_1^{\mathfrak{N}}$.

Поэтому нам достаточно доказать лишь абсолютность указанных предложений для модели $\mathbb{V}[G]$, исходя из (†), — последующий «спуск» к модели $\mathfrak{N}$ проходит на основе тех же соображений. Общий метод доказательства будет состоять в достаточно прямолинейном выражении рассматриваемых предложений в виде формул, составленных из формул 16.2.1 и формул теоремы 5.8.1, и абсолютных по теореме 5.9.1. И только для доказательства абсолютности в связи с пунктами (v)–(viii) придется сослаться на две дополнительные теоремы.

(i) Согласно первой эквивалентности (5)(i) из 16.2.1, предложение $C[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \neq \emptyset$ выражается формулой $\exists x \bar{\pi}_{\Phi\Psi}(x)$ (с параметром **a**) —

причем не только в универсуме $\mathbb{V}$, но и расширенном универсуме $\mathbb{V}[G]$, согласно сказанному в 16.2.2. Но формула $\exists x \bar{\pi}_{\Phi\Psi}(x)$ имеет, очевидно, тип Σ_2^1 (с параметром $\mathbf{a}$), так что она абсолютна для $\mathbb{V}[G]$ по теореме абсолютности Шенфилда 5.9.1. Абсолютность второго предложения проверяется аналогично.

(ii) Коль скоро $\xi < \omega_1^{\mathbb{V}}$, в универсуме $\mathbb{V}$ существует дерево $T \in \mathbf{WFT}_{\xi}$. Как и выше, предложение $C_{\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \neq \emptyset$ выражается формулой $\exists x \sigma_{\Phi\Psi}(x, T)$ в универсуме $\mathbb{V}$ и в его расширении $\mathbb{V}[G]$. И эта формула одновременно истинна в $\mathbb{V}$ и в $\mathbb{V}[G]$ по теореме 5.9.1. Абсолютность второго предложения проверяется аналогично, при помощи формулы $\exists x \sigma'_{\Phi\Psi}(x, T)$.

(iii) Формула $\forall T \exists x (\mathbf{wft}(T) \implies \sigma_{\Phi\Psi}(x, T))$ выражает первое предложение, причем эта формула имеет тип Π_2^1 , и потому абсолютна по теореме 5.9.1. Для второго предложения, нужно взять $\sigma'_{\Phi\Psi}(x, T)$.

(iv) Это предложение равносильно предложению

$$\forall \eta < \omega_1 \exists x (x \in \mathbf{A}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \wedge x \notin \mathbf{A}_{\eta}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]).$$

(В самом деле, $\mathbf{A}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathbf{A}_{\eta}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$.) Но последнее выражается формулой $\forall T \exists x (\mathbf{wft}(T) \implies (\bar{\sigma}_{\Phi\Psi}(x) \wedge \neg \pi_{\Phi\Psi}(x, T)))$, которая имеет тип Σ_2^1 , и т. д., как и выше. Здесь уместно заметить, что абсолютность не имеет места для аналогичного утверждения о *внешних* конституантах, поскольку, заменив Σ_1^1 -формулу $\bar{\sigma}_{\Phi\Psi}(x)$ Π_1^1 -формулой $\bar{\pi}_{\Phi\Psi}(x)$, мы получим в результате формулу типа Σ_3^1 — к которой теорема абсолютности неприменима.

(v) Эта часть теоремы основана на одном сложном результате, суть которого состоит в том, что, для любого ординала $\rho < \omega_1$, свойство «быть Π_{ρ}^0 -множеством» выражается Π_1^1 -формулой с параметром, отражающим счетность ординала ρ . Первый ингредиент этого результата — следующая теорема Луво, см. [19, теорема 11.6.3]:

Теорема 16.3.2. Пусть $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $1 \leq \rho < \omega_1$, и множества кодов $\boldsymbol{\pi}_{\gamma}$ и $\boldsymbol{\pi}_{<\gamma}$, $\gamma \leq \rho$, все принадлежат $\Delta_1^1(a)$. Тогда

- (1) все множества $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ из $\Pi_{\rho}^0 \cap \Delta_1^1(a)$ принадлежат $\Pi_{\rho}^*(a)$;
- (2) если $X, Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — непересекающиеся $\Sigma_1^1(a)$ -множества и X отделимо от Y Π_{ρ}^0 -множеством, то X отделимо от Y множеством класса $\Pi_{\rho}^*(a)$. $\square$

К обозначениям. Множества кодов $\boldsymbol{\pi}_{\gamma}$ введены в 5.7.4, и, как обычно, $\boldsymbol{\pi}_{<\gamma} = \bigcup_{\eta < \gamma} \boldsymbol{\pi}_{\eta}$. Эти множества — борелевские по теореме 5.8.1. Наконец, $\Pi_{\rho}^*(a)$ есть совокупность всех множеств вида $\mathbf{B}_{\varkappa}$, $\varkappa \in \Pi_{\rho}^*(a)$, где $\Pi_{\rho}^*(a)$ состоит из всех тех кодов $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \boldsymbol{\pi}_{\rho}$, что T и f принадлежат $\Delta_1^1(a)$ — так что $\Pi_{\rho}^*(a) \subseteq \Pi_{\rho}^0$ по лемме 5.7.7.

Вторым ключевым ингредиентом является следующий результат о кванторах по Δ_1^1 -точкам (см. [19, следствие 9.2.5]), вообще широко применяющийся в современной дескриптивной теории множеств.

Теорема 16.3.3. Пусть $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и множество $X \subseteq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^3$ принадлежат $\Pi_1^1(a)$. Тогда множество

$$X' = \{\langle x, y \rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2 : \exists z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \Delta_1^1(z) (\langle x, y, z \rangle \in X)\}$$

также принадлежит классу $\Pi_1^1(a)$.

Более того, если Π_1^1 -формула $\Phi(x, y, z)$ с единственным параметром a определяет множество X , то имеется некоторая каноническая, зависящая только от Φ , Π_1^1 -формула $\Phi'(x, y)$, также с единственным параметром a , определяющая множество X' . $\square$

Возвращаясь к теореме 16.3.1, раз предполагается $\rho, \xi < \omega_1^{\mathbb{V}}$, в универсуме $\mathbb{V}$ существуют деревья $S \in \mathbf{WFT}_{\xi}$ и $R \in \mathbf{WFT}_{\rho}$.

Лемма 16.3.4 (ср. с первыми строками теоремы 16.3.1). Как в универсуме $\mathbb{V}$, так и в расширении $\mathbb{V}[G]$, истинно следующее: если $\xi \leq \rho$, то множества кодов π_{ξ} и $\pi_{<\xi}$ принадлежат $\Delta_1^1(R)$.

Доказательство (лемма). Пусть $\xi \leq \rho$. По лемме 5.2.3, найдется вершина $u \in R$, для которой $|u|_R = |R \upharpoonright_u| = \xi$. Тогда

$$\pi_{\xi} = \{\langle T, f \rangle : \varphi(T, f, R \upharpoonright_u)\} = \{\langle T, f \rangle : \psi(T, f, R \upharpoonright_u)\} \in \Delta_1^1(R)$$

где формулы φ, ψ имеют тип, соответственно, Σ_1^1 , Π_1^1 — по теореме 5.8.1. Аналогично,

$$\begin{aligned} \langle T, f \rangle \in \pi_{<\xi} &\iff \exists v \in R (u \subseteq v \wedge \varphi(T, f, R \upharpoonright_v)) \\ &\iff \exists v \in R (u \subseteq v \wedge \psi(T, f, R \upharpoonright_v)) \in \Delta_1^1(R), \end{aligned}$$

т. е. снова $\pi_{<\xi} \in \Delta_1^1(R)$. Для $\xi = \rho$ нужно взять $u = \Lambda$. $\square$ (лемма)

Теперь следует доказательство части (v) теоремы 16.3.1, в отношении предложения $C_{\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Pi_{\rho}^0$. В терминах формул из 16.2.1, по выбору $S \in \mathbf{WFT}_{\xi}$ мы имеем

$$C_{\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = \{x : \sigma_{\Phi\Psi}(S, x)\} = \{x : \pi_{\Phi\Psi}(S, x)\},$$

так что константа $C_{\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ есть множество класса $\Delta_1^1(S, \mathbf{a})$. Поэтому, по теореме 16.3.2(1) (применимость обеспечена леммой),

$$\begin{aligned} C_{\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Pi_{\rho}^0 &\iff C_{\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Pi_{\rho}^*(R, S, \mathbf{a}) \iff \\ &\iff \exists \kappa = \langle T, f \rangle \in \Delta_1^1(R, S, \mathbf{a}) \underbrace{(\kappa \in \pi_{\rho} \wedge B_{\kappa} = C_{\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}])}_{\vartheta(\kappa, \xi)}. \end{aligned}$$

Цель последующих рассуждений — привести формулу во второй линии к Π_1^1 -виду, и на этой основе вывести абсолютность для первого предложения из 16.3.1(v) ссылкой на теорему 5.9.1. Выразим для этого соотношение $\varkappa \in \pi_\rho$ эквивалентной, по теореме 5.8.1, Π_1^1 -формулой $\psi(T, f, R)$, а равенство $B_\varkappa = C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ выразим формулой

$$\forall x ((x \in B_\varkappa \implies x \in C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]) \wedge (x \in C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \implies x \in B_\varkappa)),$$

которую перепишем в Π_1^1 -виде

$$\forall x ((\neg \pi'(T, f, x) \implies \pi_{\Phi\Psi}(S, x)) \wedge (\sigma_{\Phi\Psi}(S, x) \implies \pi(T, f, x))).$$

Здесь $\sigma_{\Phi\Psi}(S, x)$ и $\pi_{\Phi\Psi}(S, x)$ — формулы из 16.2.1, равносильные соотношению $x \in C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ при $S \in \mathbf{WFT}_\xi$ согласно 16.2.1(5)(ii), а $\pi(T, f, x)$, $\pi'(T, f, x)$ — формулы теоремы 5.8.1, равносильные соотношениям, соответственно, $x \in B_\varkappa$ и $x \notin B_\varkappa$ при условии, что $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \pi_\xi$. Таким образом, вся подформула $\vartheta(\varkappa, \xi)$ оказывается эквивалентной определенной Π_1^1 -формуле, скажем, $\Theta(T, f, S)$ — опять при условии, что $\varkappa = \langle T, f \rangle$ (и $S \in \mathbf{WFT}_\xi$). Связав переменные T, f квантором $\exists \langle T, f \rangle \in \Delta_1^1(R, S, \mathbf{a})$, мы получим всё еще Π_1^1 -формулу (с параметрами $R, S, \mathbf{a}$) по теореме 16.3.3.

Итак, формула $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Pi_\rho^0$ эквивалентна определенной Π_1^1 -формуле (с параметрами $R, S, \mathbf{a} \in \mathbb{V}$), причем эта эквивалентность имеет место как в универсуме $\mathbb{V}$ так и в его расширении $\mathbb{V}[G]$. Теперь абсолютность предложения $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Pi_\rho^0$ дается теоремой 5.9.1.

Доказательство для предложения $A_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Sigma_\rho^0$ требует замены равенства $B_\varkappa = C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ в формуле $\vartheta(\varkappa, \xi)$ равенством $B_\varkappa = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$, с корректировкой последующих Π_1^1 -формул.

Доказательство для конститутанты $A_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ аналогично.

(vii) Те же рассуждения проходят с некоторыми достаточно понятными изменениями. Именно, предложение «конститутанта $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \Pi_\rho^0$ -отделима от $C_{<\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ » эквивалентно формуле

$$\exists \varkappa = \langle T, f \rangle \in \pi_\rho (C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \subseteq B_\varkappa \wedge \forall \eta < \xi (B_\varkappa \cap C_\eta[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = \emptyset)),$$

которая, с помощью теперь теоремы 16.3.2(2), приводится к виду

$$\exists \varkappa = \langle T, f \rangle \in \Delta_1^1(R, S, \mathbf{a})$$

$$(\varkappa \in \pi_\rho \wedge C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \subseteq B_\varkappa \wedge \forall \eta < \xi (B_\varkappa \cap C_\eta[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = \emptyset)),$$

где, как и выше, $S \in \mathbf{WFT}_\xi$ и $R \in \mathbf{WFT}_\rho$, соотношение $\varkappa \in \pi_\rho$ выражается Π_1^1 -формулой $\psi(T, f, R)$ (теорема 5.8.1), соотношение $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \subseteq B_\varkappa$ — Π_1^1 -формулой $\forall x (\sigma_{\Phi\Psi}(S, x) \implies \pi(T, f, x))$, и соотношение $\forall \eta < \xi (B_\varkappa \cap C_\eta[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = \emptyset)$ — Π_1^1 -формулой

$$\forall x \forall t \in S \setminus \{\Lambda\} (\neg \pi'(T, f, x) \implies \neg \sigma_{\Phi\Psi}(S|_t, x)),$$

а формулы $\sigma_{\Phi\Psi}$, π , π' взяты из 16.2.1 и теоремы 5.8.1. Таким образом, предложение о Π_ρ^0 -отделимости конstituанты $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ от $\mathbf{C}_{<\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ выражается Π_1^1 -формулой (мы опять ссылаемся на теорему 16.3.3 для элиминации квантора по $\varkappa$), а потому абсолютно.

(vi) Здесь решение получается связыванием аргумента ξ в рассуждениях из доказательства в части (v) квантором $\forall \xi < \omega_1$, или, что то же самое, связыванием аргумента S квантором $\forall S \in \mathbf{WFT}$. Именно, формула $\forall \xi < \omega_1 (\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Pi_\rho^0)$ эквивалентна формуле

$$\forall S (S \in \mathbf{WFT} \implies \\ \implies \exists \varkappa = \langle T, f \rangle \in \Delta_1^1(R, S, \mathbf{a}) (\varkappa \in \pi_\rho \wedge B_\varkappa = \mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}])) ,$$

где по левую сторону импликации стоит Π_1^1 -формула (см. теорему 5.4.1), по правую — также Π_1^1 -формула (см. выкладки для части (v)), так что в результате (с учетом квантора $\forall S$) получается Π_1^1 -формула, абсолютная по теореме 5.9.1.

(viii) Аналогичное изменение рассуждений для части (vii).

(ix) Здесь снова всё довольно элементарно: наше предложение $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = \mathbf{B}_{Tf}$ выражается Π_1^1 -формулой

$$\forall x ((\sigma_{\Phi\Psi}(S, x) \implies \pi(T, f, x)) \wedge (\neg \pi'(T, f, x) \implies \pi_{\Phi\Psi}(S, x))),$$

где, как и выше, $S \in \mathbf{WFT}_\xi$ в $\mathbb{V}$, $\sigma_{\Phi\Psi}(S, x)$ и $\pi_{\Phi\Psi}(S, x)$ — формулы из 16.2.1, а π , π' — формулы теоремы 5.8.1.

(x) В тех же обозначениях, предложение $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \cap \mathbf{B}_{Tf} \neq \emptyset$ выражается Σ_1^1 -формулой $\exists x (\pi_{\Phi\Psi}(S, x) \wedge \neg \pi'(T, f, x))$.

(xi) Аналогично, предложение о том, что множество $\mathbf{B}_{Tf}$ отделяет $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ от $\mathbf{C}_{<\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$, выражается Π_1^1 -формулой

$$\forall x ((\sigma_{\Phi\Psi}(S, x) \implies \pi(T, f, x)) \wedge \\ \wedge \forall t \in S \setminus \{\Lambda\} (\sigma_{\Phi\Psi}(S \upharpoonright_t, x) \implies \pi'(T, f, x))),$$

где $S \in \mathbf{WFT}_\xi$ в $\mathbb{V}$, т. е. имеет место требуемая абсолютность.

Для доказательства (xii), выражаем рассматриваемые предложения абсолютными формулами (типов Π_1^1 и Π_2^1 соответственно)

$$\forall x (\neg \pi'(T, f, x) \implies \bar{\pi}_{\Phi\Psi}(S, x)) \quad \text{и} \quad \forall x (\neg \pi'(T, f, x) \implies \bar{\sigma}_{\Phi\Psi}(S, x)) .$$

Для вывода (xiii) берем формулы $\sigma_{\Phi\Psi}(S, x)$ и $\sigma'_{\Phi\Psi}(S, x)$ из 16.2.1. $\square$

§16.4 Обобщенные коды борелевских множеств

Вторым важным ингредиентом доказательства теорем 16.1.1 и 16.1.3 будет такое обобщение кодировки борелевских множеств из

§ 5.7Б, которое существенно расширяет набор кодов за счет фундированных деревьев из кортежей произвольных ординалов, а не только натуральных чисел. Здесь мы излагаем это обобщение, и в этом параграфе и двух следующих временно отменяется соглашение 16.2.1.

Как обычно, если α — ординал, то $\alpha^{<\omega}$ есть множество всех кортежей ординалов $\xi < \alpha$. Соответственно, через $\text{Ord}^{<\omega}$ обозначается класс всех кортежей произвольных ординалов.

Множество $T \subseteq \text{Ord}^{<\omega}$ называется *деревом*, если $t \in T$ выполнено всякий раз когда $s \in T$, $t \in \text{Ord}^{<\omega}$, $t \subset s$, и *фундированным* деревом, если T не имеет *бесконечных ветвей*, т. е. нет таких последовательностей $x \in \text{Ord}^{\mathbb{N}}$, что $x \upharpoonright m \in T$ для всех m . Через $\text{Max } T$ обозначается множество всех концевых, т. е. $\subseteq$ -максимальных вершин $s \in T$. Определения *ранга* $|s|_T$ любой вершины $s \in T$, и *ранга* $|T| = |\Lambda|_T$ самого фундированного дерева T также вводятся аналогично случаю $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ в § 5.2.

Если $T \subseteq \text{Ord}^{<\omega}$, то $\text{wid } T$ (*ширина* T) есть наименьший ординал α , для которого $T \subseteq \alpha^{<\omega}$.

Определение 16.4.1. $\mathbf{BC}^\infty$ есть класс всех таких пар $\varkappa = \langle T, f \rangle$, что $\emptyset \neq T \subseteq \text{Ord}^{<\omega}$ — фундированное дерево, а $f: \text{Max } T \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$. Такие пары называются *∞ -борелевскими кодами*. (В отличие от определения 5.7.4, здесь нет нужды искусственно продолжать функции f до всюду определенных на области вида $\alpha^{<\omega}$.)

Если $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}^\infty$, то для каждой вершины $s \in T$ определяется множество $B_\varkappa(s) = B_{Tf}(s) \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ индукцией по рангу $|s|_T$:

- (I) если $s \in \text{Max } T$, то по определению $f(s) \in \mathbb{N}^{<\omega}$ — если при этом $f(s) \neq \Lambda$, то $B_\varkappa(s) = B_{Tf}(s) = [f(s)] = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(s) \subset a\}$ (бэровский интервал), но $B_\varkappa(s) = B_{Tf}(s) = \emptyset$ при $f(s) = \Lambda$;
- (II) если $s \in T \setminus \text{Max } T$, то $B_\varkappa(s) = B_{Tf}(s) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{s^\wedge \xi \in T} B_\varkappa(s^\wedge \xi)$, (объединение по всем таким ординалам ξ , что $s^\wedge \xi \in T$).

Положим $B_\varkappa = B_{Tf} = B_\varkappa(\Lambda)$, где Λ — пустой кортеж. □

Множества, кодируемые кодами из совокупности

$$\mathbf{BC}^\alpha = \{\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}^\infty : \text{wid } T \leq \alpha\},$$

образуют класс α^+ -борелевских множеств в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, где α^+ есть наименьший кардинал строго больший, чем α — т. е. наименьший класс, содержащий все бэровские интервалы и замкнутый относительно операций α -объединения, α -пересечения, и дополнения. *Счетные* коды

$$\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}^{<\omega_1} = \{\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}^\infty : \text{wid } T < \omega_1\},$$

т. е. те, которые удовлетворяют неравенству $\text{wid } T < \omega_1$, в значительной мере равносильны простым кодам из **BC** определения 5.7.4. В частности, они кодируют обычные борелевские множества, и на них распространяются некоторые теоремы об абсолютности.

Упражнение 16.4.2. Пусть $\mathfrak{M}$ — транзитивное множество или класс, в котором истинны все аксиомы **ZFC**, код $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}^\infty$ принадлежит $\mathfrak{M}$, и $s \in T$. Докажите, что множество $(B_\varkappa(s))^\mathfrak{M}$, т. е. множество $B_\varkappa(s)$ определенное в $\mathfrak{M}$, совпадает с $B_\varkappa(s) \cap \mathfrak{M}$. Следуйте указаниям к 5.9.4. $\square$

Следствие 16.4.3. Пусть, в условиях теоремы 16.3.1, код $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}^\infty$ удовлетворяет $\gamma = \text{wid } T < \omega_1^\mathbb{V}$, и $\gamma < \omega_1^\mathfrak{M}$. Тогда следующие предложения абсолютны для $\mathbb{V}[G]$ и для $\mathfrak{N}$:

- (ix) $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = B_\varkappa$, $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = \mathbb{N}^\mathbb{N} \setminus B_\varkappa$, и то же для $A_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$;
- (x) $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \cap B_\varkappa \neq \emptyset$, и $A_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \cap B_\varkappa \neq \emptyset$;
- (xi) $B_\varkappa$ отделяет конституанту $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ от $C_{<\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$, и $B_\varkappa$ отделяет конституанту $A_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ от $A_{<\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$;
- (xii) $B_\varkappa \subseteq C[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$, $B_\varkappa \subseteq A[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$, и $B_\varkappa \neq \emptyset$.

Доказательство. Коль скоро $\gamma = \text{wid } T < \omega_1^\mathbb{V}$, существует отображение $h \in \mathbb{V}$, $h: \omega \xrightarrow{\text{на}} \gamma$. Оно индуцирует биекцию $\gamma^{<\omega} \xrightarrow{\text{на}} \omega^{<\omega}$ в $\mathbb{V}$, которая, в свою очередь, приносит такой код $\langle T', f' \rangle \in \mathbf{BC} \cap \mathbb{V}$, что $B_{T'f} = B_{T'f'}$ в $\mathbb{V}$ и в $\mathbb{V}[G]$. Теперь уже можно сослаться на соответствующие пункты теоремы 16.3.1 для кода $\langle T', f' \rangle$, либо на результат 5.9.3(vii) в отношении неравенства $B_\varkappa \neq \emptyset$. $\square$

§16.5 Универсальные деревья

Цель следующего построения — это определенная последовательность таких фундированных деревьев $\mathbf{T}_\rho$, $\rho < \omega_1$, что для получения всех Π_ρ^0 -множеств $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ достаточно кодов вида $\langle \mathbf{T}_\rho, f \rangle$ — т. е. с одним и тем же деревом $\mathbf{T}_\rho$.

Определение 16.5.1. Положим $\mathbf{T}_0 = \{\Lambda\}$.

Далее, пусть $\mathbf{T}_{\rho+1} = \{\Lambda\} \cup \{n^\wedge t : n \in \mathbb{N} \wedge t \in \mathbf{T}_\rho\}$ для всех ρ — в частности, понятно, что $\mathbf{T}_1 = \{\Lambda\} \cup \{\langle n \rangle : n \in \mathbb{N}\}$.

Наконец, $\mathbf{T}_\lambda = \{\Lambda\} \cup \{\rho^\wedge t : \rho < \lambda \wedge t \in \mathbf{T}_\rho\}$ для предельных λ . $\square$

Теорема 16.5.2. Если $\rho \in \text{Ord}$, то $\mathbf{T}_\rho$ — фундированное дерево, $\text{wid } \mathbf{T}_\rho \leq \max\{\rho, \omega\}$, $|\mathbf{T}_\rho| = \rho$, и $\mathbf{T}_\rho \in \mathbb{L}$ (класс конструктивных множеств), а последовательность деревьев $\mathbf{T}_\rho$ определима в $\mathbb{L}$.

Если $1 \leq \rho < \omega_1$, то семейство всех Π_ρ^0 -множеств $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ тождественно семейству всех множеств вида $B_{\mathbf{T}_\rho f}$, где функция $f: \text{Max } \mathbf{T}_\rho \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$ удовлетворяет такому добавочному условию:

(‡) если $s \in \text{Max } \mathbf{T}_\rho$, то $\text{lh } f(s) \leq \text{last } s$,

где $\text{last } s = s(\text{lh } s - 1)$ (последний член кортежа s).

Подчеркнем особую роль условия конструктивности деревьев. Без него, требуемые универсальные деревья можно было бы построить в $\mathbb{N}^{<\omega}$. Как видно, за «эффективность» (конструктивность) построения приходится платить выходом из более удобной области $\mathbb{N}^{<\omega}$.

Замечание 16.5.3. По построению (определение 16.5.1), если $\rho \in \text{Ord}$, то любой кортеж $s \in \mathbf{T}_\rho$ удовлетворяет $\text{last } s \in \mathbb{N}$. $\square$

Доказательство. Первая часть теоремы оставляется читателю как достаточно простое **упражнение**, с замечанием, что определенность построения в $\mathbb{L}$ следует из его очевидной абсолютичности.

Выведем теперь «универсальность» деревьев $\mathbf{T}_\rho$ в смысле последнего утверждения теоремы. Результат в одну сторону, т. е. $B_{\mathbf{T}_\rho f} \in \Pi_\rho^0$, доказывается, с учетом равенства $|\mathbf{T}_\rho| = \rho$, совершенно аналогично первой части доказательства леммы 5.7.7.

В обратную сторону, доказываем, что если $\rho \geq 1$, и множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит Π_ρ^0 , то $X = B_{\mathbf{T}_\rho f}$ для подходящей функции $f: \text{Max } \mathbf{T}_\rho \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющей добавочному условию (‡). Это утверждение доказывается трансфинитной индукцией по ρ .

Для случая $\rho = 1$, опять достаточно сослаться на соответствующий фрагмент второй части доказательства леммы 5.7.7 — так как использованное там множество T в точности равно нашему $\mathbf{T}_1$, а перечисление $(\mathbb{N}^{<\omega} \setminus R) \cup \{\Lambda\} = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ (если потребуется, то с повторениями) можно организовать так, что $\text{lh } t_n \leq n$ для всех n .

Теперь шаг $\rho \rightarrow \rho + 1$. Будем считать, что $\rho \geq \omega$ — т. е. $\mathbf{T}_\rho \subseteq \rho^{<\omega}$; случай, когда $\rho < \omega$ и $\mathbf{T}_\rho \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, рассматривается аналогично. Рассмотрим множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ класса $\Pi_{\rho+1}^0$, т. е. $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_n X_n$, где каждое X_n принадлежит Π_ρ^0 . Тем самым, по индукции, найдутся такие функции $f_n : \text{Max } \mathbf{T}_\rho \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$, что $X_n = B_{\mathbf{T}_\rho f_n}$, для всех n . Определим $f : \text{Max } \mathbf{T}_{\rho+1} \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$, так, чтобы $f(n^\wedge t) = f_n(t)$ всякий раз, когда $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \text{Max } \mathbf{T}_\rho$; таким образом, f тождественна f_n на «конусе» кортежей вида $n^\wedge t$, и добавочное условие (‡) переходит с функций f_n на f . По определению, тем же способом строится и дерево $\mathbf{T}_{\rho+1}$ из $\mathbf{T}_\rho$. Отсюда следует, для каждого n ,

$$X_n = B_{\mathbf{T}_\rho f_n} = B_{\mathbf{T}_\rho f_n}(\Lambda) = B_{\mathbf{T}_{\rho+1} f}(\langle n \rangle),$$

и далее $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_n X_n = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_n B_{\mathbf{T}_{\rho+1}f}(\langle n \rangle) = B_{\mathbf{T}_{\rho+1}f}(\Lambda) = B_{\mathbf{T}_{\rho+1}f}$, что и требовалось.

Наконец, допустим, что счетный ординал $\lambda \geq \omega$ предельен. Рассмотрим произвольное множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ класса Π^0_λ , т. е. $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{\rho < \lambda} \bigcup_n Z_{\rho n} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{\rho < \lambda} Y_\rho$, где каждое $Z_{\rho n}$ принадлежит Π^0_ρ , следовательно, $Y_\rho = \bigcup_n Z_{\rho n}$ принадлежит $\Sigma^0_{\rho+1}$ и $\Pi^0_{\rho+2}$. Таким образом, X имеет вид $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{\rho < \lambda} X_\rho$, где каждое множество X_ρ имеет класс Π^0_ρ . По индуктивному предположению, $X_\rho = B_{\mathbf{T}_\rho f_\rho}$, где $f_\rho : \text{Max } \mathbf{T}_\rho \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$. Подобно шагу $\rho \rightarrow \rho + 1$, определяем $f : \text{Max } \mathbf{T}_\lambda \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$ так, чтобы $f(\rho^\wedge t) = f_\rho(t)$ всякий раз, когда $\rho < \lambda$ и $t \in \text{Max } \mathbf{T}_\rho$ — и тогда, аналогично шагу $\rho \rightarrow \rho + 1$, $X = B_{\mathbf{T}_\lambda f}$. $\square$

§16.6 Сжатые коды и лемма о сжатии

Особенностью кодирующей системы определения 16.4.1 является то, что участвующие в кодах $\varkappa = \langle T, f \rangle$ фундированные деревья T допускают две оценки величины, т. е. *ранг* $|T|$ и *ширина* $\text{wid}T$. Мы увидим ниже, что на самом деле ранг определенным образом ограничивает *существенную* ширину деревьев в кодах — в плане следующего определения.

Определение 16.6.1. Пусть $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\rho \in \text{Ord}$. $\mathbf{K}_\rho(a)$ есть множество всех таких кодов $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}^\infty \cap \mathbb{L}[a]$, что $|T| = \rho$, и

(**) если $s \in T$, $|s|_T = 1 + \gamma$, $\xi \in \text{Ord}$, и $s^\wedge \xi \in T$, то $\xi < \omega_\gamma^{\mathbb{L}[a]}$

— в частности: если $s^\wedge \xi \in T$ и $|s|_T = 1$, то $\xi < \omega$,

если $s^\wedge \xi \in T$ и $|s|_T = n + 1 < \omega$, то $\xi < \omega_n^{\mathbb{L}[a]}$, но

если $s^\wedge \xi \in T$ и $|s|_T = \xi \geq \omega$, то $\xi < \omega_\xi^{\mathbb{L}[a]}$. $\square$

Например, $\mathbf{K}_0(a)$ состоит из всех таких борелевских кодов $\varkappa = \langle T, f \rangle$, что $T = \{\Lambda\}$, а $\mathbf{K}_1(a)$ содержит все такие борелевские коды $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}^\infty \cap \mathbb{L}[a]$, что $\{\Lambda\} \subsetneq T \subseteq \{\Lambda\} \cup \{\langle n \rangle : n \in \mathbb{N}\}$.

Лемма 16.6.2. Пусть $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\rho \in \text{Ord}$. Тогда $\mathbf{K}_\rho(a) \in \mathbb{L}[a]$, и каждый код $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{K}_\rho(a)$ удовлетворяет неравенству $\text{wid}T \leq \omega_\rho^{\mathbb{L}[a]}$ при $\rho \geq \omega$ и неравенству $\text{wid}T \leq \omega_{\rho-1}^{\mathbb{L}[a]}$ при $\rho < \omega$.

Следовательно, множество $\mathbf{K}_\rho(a)$ имеет мощность $\leq \omega_{\rho+1}^{\mathbb{L}[a]}$ в $\mathbb{L}[a]$ при $\rho \geq \omega$, и мощность $\leq \omega_\rho^{\mathbb{L}[a]}$ в $\mathbb{L}[a]$ при $\rho < \omega$. $\square$

Эта лемма 16.6.2 достаточно очевидна, но следующая более сложная «лемма о сжатии кодов» будет для нас чрезвычайно важна!

Лемма 16.6.3 (о сжатии). Если $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}^\infty \cap \mathbb{L}[a]$, $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и $|T| = \rho$, то найдется такой код $\varkappa' \in \mathbf{K}_\rho(a)$, что $B_{\varkappa'} = B_\varkappa$.

Доказательство. Каждому кортежу $s \in T$ мы сопоставим, индукцией по $|s|_T$, такой код $\varkappa_s = \langle T_s, f_s \rangle \in \mathbf{K}_{|s|_T}(a)$, что $B_{\varkappa_s} = B_{\varkappa}(s)$, и при этом отображение $s \mapsto \varkappa_s$ будет принадлежать $\mathbb{L}[a]$. Код $\varkappa' = \varkappa_\Lambda$, очевидно, докажет лемму.

Начало индукции. Пусть $|s|_T = 0$, т. е. $s \in M = \text{Max } T$. Положим $T_s = \{\Lambda\}$ и $f_s(\Lambda) = f(s)$ — тогда $B_{T_s f_s} = B_{T_s f_s}(\Lambda) = B_{T_f}(s)$. Каждый код $\varkappa_s = \langle T_s, f_s \rangle$ (где $s \in M$) принадлежит $\mathbf{K}_0(a)$ по очевидным соображениям, и всё индексированное семейство этих кодов принадлежит $\mathbb{L}[a]$, поскольку $\varkappa \in \mathbb{L}[a]$ по условию леммы.

Индуктивный шаг. Пусть $\nu = |s|_T \geq 1$. Тогда множество $S = \{s^\wedge \gamma : \gamma \in \text{Ord} \wedge s^\wedge \gamma \in T\}$ непусто, причем если $t \in S$, то $|t|_T < \nu$ строго. Предполагаем (индуктивное предположение), что каждой вершине $t \in S$ уже сопоставлен код $\varkappa_t = \langle T_t, f_t \rangle \in \mathbf{K}_{|t|_T}(a)$, удовлетворяющий $B_{T_f}(t) = B_{\varkappa_t}$, и при этом отображение $t \mapsto \varkappa_t$ принадлежит $\mathbb{L}[a]$. Укажем, как определяется код $\varkappa_s \in \mathbf{K}_\nu(a)$ в $\mathbb{L}[a]$.

Множество $S \in \mathbb{L}[a]$ имеет какую-то мощность $\zeta = \omega_\beta^{\mathbb{L}[a]} = \text{card } S$ в $\mathbb{L}[a]$. Тогда в $\mathbb{L}[a]$ существуют биекции $h : \zeta \xrightarrow{\text{на}} S$ — через $\mathbf{h}$ обозначим наименьшую из них в смысле гёделева полного упорядочения класса $\mathbb{L}[a]$. По предыдущему, если $\gamma < \zeta$, то определен код $\varkappa_{\mathbf{h}(\gamma)} = \langle T_{\mathbf{h}(\gamma)}, f_{\mathbf{h}(\gamma)} \rangle \in \mathbf{K}_{|\mathbf{h}(\gamma)|_T}(a)$, для которого $B_{\varkappa_{\mathbf{h}(\gamma)}} = B_{T_f}(\mathbf{h}(\gamma))$.

Положим $T' = \{\Lambda\} \cup \{\gamma^\wedge u : \gamma < \zeta \wedge u \in T_{\mathbf{h}(\gamma)}\}$ — тогда $\text{Max } T' = \{\gamma^\wedge u : \gamma < \zeta \wedge u \in \text{Max } T_{\mathbf{h}(\gamma)}\}$, и $f'(\gamma^\wedge u) = f_{\mathbf{h}(\gamma)}(u)$ для $u \in \text{Max } T_{\mathbf{h}(\gamma)}$. Понятно, что $\varkappa' = \langle T', f' \rangle \in \mathbf{BC}^\infty$ и $B_{T' f'}(\langle \gamma \rangle) = B_{\varkappa_{\mathbf{h}(\gamma)}} = B_{T_f}(\mathbf{h}(\gamma))$ для всех $\gamma < \zeta$ по предыдущему, а потому

$$B_{\varkappa'} = B_{T' f'}(\Lambda) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{\gamma < \zeta} B_{T_f}(\mathbf{h}(\gamma)) = B_{T_f}(s).$$

Таким образом, мы могли бы взять код $\varkappa'$ в роли $\varkappa_s$ — однако он не обязательно принадлежит к $\mathbf{K}_\nu(a)$. Действительно, мы имеем $\varkappa' \in \mathbb{L}[a]$ и $|T'| = \nu$ по построению, но ординал ζ может быть слишком велик для требования 16.6.1(**) при $s = \Lambda$!

Чтобы обойти эту проблему, применяется процедура «сжатия».

Все коды $\varkappa_{\mathbf{h}(\gamma)}$ принадлежат множеству $\mathbf{K}_{<\nu}(a) = \bigcup_{\mu < \nu} \mathbf{K}_\mu(a)$ по построению. Но $\mathbf{K}_{<\nu}(a)$ имеет, в $\mathbb{L}[a]$, мощность $\leq \lambda$ по лемме 16.6.2, где $\lambda = \omega_{\nu-1}^{\mathbb{L}[a]}$ при $\nu \geq 1$ конечном, и $\lambda = \omega_\nu^{\mathbb{L}[a]}$ при $\nu \geq \omega$. Это означает, что если ординал ζ велик по сравнению с λ , то среди кодов $\varkappa_{\mathbf{h}(\gamma)}$ будут совпадающие. Выкинув все ненужные копии и оставив лишь по одному индексу для каждого встречающегося кода, мы получим из $\varkappa$ искомый «сжатый» код.

Точнее, множество $\Gamma = \{\gamma < \zeta : \forall \eta < \gamma (\varkappa_{\mathbf{h}(\eta)} \neq \varkappa_{\mathbf{h}(\gamma)})\}$ имеет, по предыдущему, мощность не выше мощности множества $\mathbf{K}_{<\nu}(a)$ в $\mathbb{L}[a]$ т. е. не выше λ . Значит, в $\mathbb{L}[a]$ имеются функции $g : \lambda \xrightarrow{\text{на}} \Gamma$ —

через $\mathbf{g}$ обозначим наименьшую из них в смысле гёделева полного упорядочения $<_a^{\text{гёд}}$ класса $\mathbb{L}[a]$. Теперь положим

$$T'' = \{\Lambda\} \cup \{\varepsilon^\wedge s : \varepsilon < \lambda \wedge \mathbf{g}(\varepsilon)^\wedge s \in T'\}$$

(в сущности, поддереву терева T') и $f''(\varepsilon^\wedge s) = f'(\mathbf{g}(\varepsilon)^\wedge s)$ для всех таких ординалов $\varepsilon < \lambda$, что $\mathbf{g}(\varepsilon)^\wedge s \in \text{Max } T'$. Этим определен код $\kappa_s = \langle T'', f'' \rangle \in \mathbf{K}_\nu(a)$, удовлетворяющий $B_{\kappa_s} = B_\kappa(s)$ — что заканчивает индуктивное построение и доказательство леммы. $\square$

§ 16.7 Теорема ограничения ранга

Смысл следующей теоремы состоит в том, что ранги и индексы отделимости непустых конституант ограничены снизу. Это первый ключевой шаг в доказательстве теорем 16.1.1 и 16.1.3.

Теорема 16.7.1 (теорема ограничения ранга). *В соглашениях и обозначениях 16.2.1, пусть $1 \leq \rho < \omega_1$ и $\xi < \omega_1$. Тогда:*

- (i) *если $C_\xi[\mathfrak{F}] \neq \emptyset$ и конституанта $C_\xi[\mathfrak{F}]$ $\Sigma_{\rho+1}^0$ -отделима от множества $C_{<\xi}[\mathfrak{F}]$ (в частности, если просто $C_\xi[\mathfrak{F}] \in \Sigma_{\rho+1}^0$), то $\xi < \omega_\rho^{\mathbb{L}[a]}$ при $\rho < \omega$, но $\xi < \omega_{\rho+1}^{\mathbb{L}[a]}$ при $\rho \geq \omega$;*
- (ii) *если $A_\xi[\mathfrak{F}] \neq \emptyset$ и конституанта $A_\xi[\mathfrak{F}]$ $\Sigma_{\rho+1}^0$ -отделима от множества $A_{<\xi}[\mathfrak{F}]$ (в частности, если просто $A_\xi[\mathfrak{F}] \in \Sigma_{\rho+1}^0$), то $\xi < \omega_\rho^{\mathbb{L}[a]}$ при $\rho < \omega$, но $\xi < \omega_{\rho+1}^{\mathbb{L}[a]}$ при $\rho \geq \omega$.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующую теорему.

Теорема 16.7.2 (теорема о выборе кодов). *В соглашениях и обозначениях 16.2.1, пусть $\xi < \omega_1$ и $1 \leq \rho < \omega_1$. Тогда:*

- (A) *если $C_\xi[\mathfrak{F}] \in \Sigma_\rho^0$, то $C_\xi[\mathfrak{F}] = \mathbb{N}^\mathbb{N} \setminus B_\kappa$, где $\kappa \in \mathbf{K}_\rho(\mathbf{a})$;*
- (B) *если конституанта $C_\xi[\mathfrak{F}]$ Σ_ρ^0 -отделима от $C_{<\xi}[\mathfrak{F}]$, то имеется отделяющее множество вида $\mathbb{N}^\mathbb{N} \setminus B_\kappa$, где $\kappa \in \mathbf{K}_\rho(\mathbf{a})$;*
- (C) *если $A_\xi[\mathfrak{F}] \in \Sigma_\rho^0$, то $A_\xi[\mathfrak{F}] = \mathbb{N}^\mathbb{N} \setminus B_\kappa$, где $\kappa \in \mathbf{K}_\rho(\mathbf{a})$;*
- (D) *если конституанта $A_\xi[\mathfrak{F}]$ Σ_ρ^0 -отделима от $A_{<\xi}[\mathfrak{F}]$, то имеется отделяющее множество вида $\mathbb{N}^\mathbb{N} \setminus B_\kappa$, где $\kappa \in \mathbf{K}_\rho(\mathbf{a})$.*

Важный момент здесь состоит в том, что область $\mathbf{K}_\rho(\mathbf{a})$ кодов для конституант и отделяющих множеств не зависит от индекса конституанты — это и выведет нас к доказательству теоремы 16.7.1!

Отметим, что к теореме можно было бы присоединить и аналогичные утверждения для класса Π_ρ^0 и Π_ρ^0 -отделимости — например,

если $C_\xi[\mathfrak{F}] \in \Pi_\rho^0$, то $C_\xi[\mathfrak{F}] = B_\varkappa$, где $\varkappa$ — код из $\mathbf{K}_\rho(\mathbf{a})$,

ср. с (A). Мы же ограничились здесь теми утверждениями о выборе кодов, которые более важны для последующего изложения.

Доказательство (теорема 16.7.1 из теоремы 16.7.2). Пусть, в соглашениях и обозначениях из 16.2.1, $1 \leq \rho < \omega_1$, $\xi < \omega_1$, и конститuenta $C_\xi[\mathfrak{F}]$ непуста и принадлежит $\Sigma_{\rho+1}^0$ — мы ограничимся этой частью теоремы 16.7.1; остальные части доказываются аналогично. Пусть $\lambda = \omega_\rho^{\mathbb{L}[a]}$ и $\lambda^+ = \omega_{\rho+1}^{\mathbb{L}[a]}$ при $\rho \geq \omega$, но $\lambda = \omega_{\rho-1}^{\mathbb{L}[a]}$ и $\lambda^+ = \omega_\rho^{\mathbb{L}[a]}$ при $\rho < \omega$. Требуется доказать, что $\xi < \lambda^+$.

По теореме 16.7.2(A), имеется такой код $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{K}_{\rho+1}(\mathbf{a})$, что $C_\xi[\mathfrak{F}] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus B_\varkappa$. Следуя примеру 5.7.5(2), для каждого ординала $\gamma \in \Gamma = \{\gamma \in \text{Ord} : \langle \gamma \rangle \in T\}$ мы рассматриваем дерево $T_\gamma = \{s \in \text{Ord}^{<\omega} : \gamma \wedge s \in T\}$ — тогда $\text{Max } T_\gamma = \{t : \gamma \wedge t \in \text{Max } T\}$ — и функцию $f_\gamma : \text{Max } T_\gamma \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$, заданную равенством $f_\gamma(t) = f(\gamma \wedge t)$.

Легко видеть, что каждый код $\varkappa_\gamma = \langle T_\gamma, f_\gamma \rangle$ принадлежит множеству $\mathbf{K}_{\leq \rho}(\mathbf{a}) = \bigcup_{\nu \leq \rho} \mathbf{K}_\nu(\mathbf{a})$, в частности, $|T_\gamma| \leq \rho$. Кроме того, $B_\varkappa = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_{\varkappa_\gamma}$, и поэтому $C_\xi[\mathfrak{F}] = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_{\varkappa_\gamma}$. По предположению о непустоте, найдется ординал $\gamma \in \Gamma$, для которого $B_{\varkappa_\gamma} \neq \emptyset$. Таким образом, $\emptyset \neq B_{\varkappa_\gamma} \subseteq C[\mathfrak{F}]$.

Далее используется склеивающий форсинг $\text{Coll}(\omega, \lambda) = \lambda^{<\omega}$, состоящий из всех кортежей ординалов, меньших λ , § 9.7. Зафиксируем $\lambda^{<\omega}$ -генерическое, над универсумом $\mathbb{V}$, множество $G \subseteq \lambda^{<\omega}$. (См. предложение 9.1.6.) Рассмотрим генерическое расширение $\mathbb{V}[G]$. Также рассматривается класс $\mathbb{L}[\mathbf{a}] \subseteq \mathbb{V}$ всех множеств, конструктивных относительно параметра $\mathbf{a}$ из 16.2.1, и, соответственно, его расширение $\mathbb{L}[\mathbf{a}][G] \subseteq \mathbb{V}[G]$. По теореме 9.7.2, ординал λ счетен в $\mathbb{L}[\mathbf{a}][G]$, но λ^+ остается несчетным, так что $\lambda^+ = \omega_1^{\mathbb{L}[\mathbf{a}][G]}$.

Однако код $\varkappa_\gamma = \langle T_\gamma, f_\gamma \rangle$ удовлетворяет $\text{wid } T_\gamma \leq \lambda$ по лемме 16.6.2, так что $\text{wid } T_\gamma < \omega_1^{\mathbb{L}[\mathbf{a}][G]}$. Поэтому, согласно следствию 16.4.3(xii), в модели $\mathbb{L}[\mathbf{a}][G]$ также истинно $\emptyset \neq B_{\varkappa_\gamma} \subseteq C[\mathfrak{F}]$. Рассматривая разложение множества $C[\mathfrak{F}]$ на конститuenty в $\mathbb{L}[\mathbf{a}][G]$, мы получаем ординал $\eta < \omega_1^{\mathbb{L}[\mathbf{a}][G]} = \lambda^+$, для которого $B_{\varkappa_\gamma} \cap C_\eta[\mathfrak{F}] \neq \emptyset$ в $\mathbb{L}[\mathbf{a}][G]$. Тогда неравенство $B_{\varkappa_\gamma} \cap C_\eta[\mathfrak{F}] \neq \emptyset$ выполнено и в исходном универсуме $\mathbb{V}$ по следствию 16.4.3(x). Однако также имеет место $\emptyset \neq B_{\varkappa_\gamma} \subseteq C_\xi[\mathfrak{F}]$. Следовательно, поскольку конститuenty не пересекаются, мы имеем $\xi = \eta < \lambda^+$, что и требовалось. $\square$

§ 16.8 Доказательство главных теорем

Дальше наш план состоит в следующем. Здесь мы сразу покажем, как из теоремы 16.7.1 — которая сама, как мы видели, следует из

теоремы 16.7.2 — следуют теоремы 16.1.1 и 16.1.3. Доказательство теоремы 16.7.2 вынесено в следующий параграф.

Доказательство (теоремы 16.1.1, 16.1.3). Для первой теоремы всё достаточно просто. Коль скоро предполагается $\omega_1^{[a]} < \omega_1$ для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, мы имеем $\omega_{\rho+1}^{[a]} < \omega_1$ согласно лемме 8.5.2. Теперь требование (†) теоремы 16.1.1 сразу следует из теоремы 16.7.1.

Для теоремы 16.1.3 выкладки несколько сложнее — ведь уже не предполагается, что $\omega_1^{[a]} < \omega_1$ для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тем не менее, пусть $\rho < \omega_1$. Используя форсинг склейки кардиналов $\text{Coll}(\omega, \omega_{\rho+1}^{[a]})$ из § 9.7, мы получаем генерическое расширение $\mathbb{V}[G]$ универсума $\mathbb{V}$ всех множеств, для которого $\omega_{\rho+1}^{[a]} < \omega_1^{\mathbb{V}[G]}$, т. е., другими словами, в $\mathbb{V}[G]$ истинно, что $\omega_{\rho+1}^{[a]} < \omega_1$ (теорема 9.7.2).

Для доказательства утверждения (А) теоремы 16.1.3, допустим, что в $\mathbb{V}$ истинно, что «все конституанты $C_\xi[\mathfrak{F}]$, $\xi < \omega_1$ — непустые множества». Тогда это же предложение истинно и в $\mathbb{V}[G]$ по теореме 16.3.1(iii). Следовательно, согласно теореме 16.7.1, применяемой в расширенном универсуме $\mathbb{V}[G]$, найдется такой ординал ξ , $\omega_{\rho+1}^{[a]} \leq \xi < \omega_1^{\mathbb{V}[G]}$, что в $\mathbb{V}[G]$ истинно, что конституанта $C_\xi[\mathfrak{F}]$ Π_ρ^0 -неотделима от $C_{<\xi}[\mathfrak{F}]$. Снова по теореме абсолютности 16.3.1(viii), отсюда следует, что и в $\mathbb{V}$ истинно утверждение о существовании Π_ρ^0 -неотделимой внешней конституанты.

Для доказательства утверждения (В) теоремы 16.1.3, допустим, что в $\mathbb{V}$ истинно, что «имеется несчетно много непустых **внутренних** конституант $A_\xi[\mathfrak{F}]$ ». Тогда это же предложение истинно и в $\mathbb{V}[G]$ по теореме 16.3.1(iv). (Для **внешних** конституант рассуждение не проходит!) Согласно теореме 16.7.1, найдется такой ординал ξ , $\omega_{\rho+1}^{[a]} \leq \xi < \omega_1^{\mathbb{V}[G]}$, что в $\mathbb{V}[G]$ истинно, что конституанта $A_\xi[\mathfrak{F}]$ Π_ρ^0 -неотделима от $A_{<\xi}[\mathfrak{F}]$. По теореме 16.3.1(viii), отсюда следует, что и в $\mathbb{V}$ истинно утверждение о существовании Π_ρ^0 -неотделимой внутренней конституанты, что и требовалось. $\square$

$\square$ (теоремы 16.1.1, 16.1.3 из теоремы 16.7.2)

§ 16.9 Доказательство теоремы о выборе кодов

Здесь приводится доказательство теоремы 16.7.2.

Мы сосредоточимся на доказательстве утверждения (А) теоремы; необходимые изменения для вывода остальных трех утверждений будут указаны отдельно. Таким образом, предполагается, что

- (I) в соглашениях и обозначениях 16.2.1, дополнительно $\xi < \omega_1$, $1 \leq \rho < \omega_1$, и конституанта $C_\xi[\mathfrak{F}] = C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\mathbb{P}}]$ имеет класс Σ_ρ^0 .

Мы построим такой ∞ -борелевский код $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbb{L}[\mathbf{a}]$ с $|T| = \rho$, что $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbf{B}_\varkappa$, но, возможно, с деревом T слишком «широким» для того, чтобы было $\varkappa \in \mathbf{K}_\rho(\mathbf{a})$. Затем лемма 16.6.3 позволит нам «сжать» $\varkappa$ до кода из $\mathbf{K}_\rho(\mathbf{a})$.

Пусть $\vartheta = \max\{\rho, \xi\}$. Используя склеивающий форсинг $\vartheta^{<\omega} = \mathbf{Coll}(\omega, \vartheta)$, мы фиксируем $\vartheta^{<\omega}$ -генерическое, над универсумом $\mathbb{V}$, множество $G \subseteq \vartheta^{<\omega}$. Вместе с генерическим расширением $\mathbb{V}[G]$, рассматривается и расширение $\mathbb{L}[\mathbf{a}][G] \subseteq \mathbb{V}[G]$ класса $\mathbb{L}[\mathbf{a}] \subseteq \mathbb{V}$. По теореме 9.7.2, ординалы ϑ, ρ, ξ счетны в $\mathbb{L}[\mathbf{a}][G]$. Поэтому, согласно теореме 16.3.1(v), в моделях $\mathbb{V}[G]$ и $\mathbb{L}[\mathbf{a}][G]$ также истинно $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] \in \Sigma_\rho^0$.

Пусть $R = \mathbf{T}_\rho$ и $M = \mathbf{Max} R$.

По теореме 16.5.2, берем функцию $f \in \mathbb{L}[\mathbf{a}][G]$, $f: M \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющую условию 16.5.2(†) и такую, что в $\mathbb{L}[\mathbf{a}][G]$ выполнено $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbf{B}_{Rf}$. Это же равенство тогда истинно и в $\mathbb{V}[G]$ по следствию 16.4.3(ix). Множество G , очевидно, является генерическим не только над $\mathbb{V}$, но и над субуниверсумом $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$. Значит, по теореме 9.2.6, найдется такое $\vartheta^{<\omega}$ -имя $\tau \in \mathbb{L}[\mathbf{a}]$, что $f = \tau[G]$. Таким образом, в $\mathbb{V}[G]$ выполнено равенство $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbf{B}_{R,\tau[G]}$. Значит, по теореме 9.3.2(ii), найдется такое «условие» $p_0 \in G$, что

$$(II) \quad p_0 \Vdash \tau: \check{M} \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega} \text{ удовлетворяет } 16.5.2(\ddagger) \wedge \\ \wedge \mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\check{\Phi}\check{\Psi}}] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbf{B}_{\check{R}\tau},$$

где $\Vdash$ есть отношение вынуждения $\Vdash_{\vartheta^{<\omega}}$, $\check{M}, \check{\xi}, \check{R}$ — канонические имена соответствующих множеств в универсуме $\mathbb{V}$ (см. § 9.2), а $\check{\Phi}, \check{\Psi}$ получаются из формул Φ, Ψ заменой параметра $\mathbf{a}$ (см. 16.2.1) его каноническим именем $\check{\mathbf{a}}$.

Теперь, если $p \in \vartheta^{<\omega}$ и $s \in R$, то определим множество

$$Z_{ps} = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : p \Vdash \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s})\} \quad (\text{в } \mathbb{V}).$$

Лемма 16.9.1. *Если $s \in M = \mathbf{Max} R$ и $p \leq p_0$, то либо $Z_{ps} = \emptyset$, либо найдется такой кортеж $u_{ps} \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $u_{ps} \neq \Lambda$, что $Z_{ps} = [u_{ps}] = \{y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : u_{ps} \subset y\}$. При этом множество*

$$D = \{\langle p, s \rangle \in \vartheta^{<\omega} \times M : p \leq p_0 \wedge Z_{ps} \neq \emptyset\}$$

и отображение $\langle p, s \rangle \mapsto u_{ps} : D \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}$ принадлежат $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$.

Доказательство. Согласно (II), каждый кортеж

$$u \in U = \{u \in \mathbb{N}^{<\omega} : \exists q \leq p (q \Vdash \tau(\check{s}) = \check{u})\}$$

удовлетворяет $\mathbf{lh} u \leq \ell$, где $\ell = \mathbf{last} s \in \mathbb{N}$ (см. замечание 16.5.3). Если $\Lambda \in U$, то соответствующее «условие» $q \leq p$ вынуждает $\tau(\check{s}) = \Lambda$,

т. е. по определению вынуждает $\mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}) = \emptyset$ — откуда, очевидно, следует $Z_{ps} = \emptyset$. Поэтому предполагаем, что $\Lambda \notin U$. Легко видеть, что $Z_{ps} \subseteq \bigcap_{u \in U} [u]$ — так что если имеется пара несравнимых кортежей $u, v \in U$ (тогда $[u] \cap [v] = \emptyset$), то опять $Z_{ps} = \emptyset$. Остается случай, когда все кортежи из U попарно $\subseteq$ -сравнимы. Тогда, поскольку длины кортежей из U ограничены сверху числом $\ell = \text{last } s$, найдется такой кортеж $u \in U$, что $v \subseteq u$ для любого другого кортежа $v \in U$. В этом случае, нетрудно проверить, что $Z_{ps} = [u]$.

Для вывода $D \in \mathbb{L}[\mathbf{a}]$, пусть $p \leq p_0$ и $s \in M = \text{Max } R$. По определению, $\langle p, s \rangle \in D$, если и только если $p \Vdash_{\vartheta < \omega}^{\mathbb{V}} \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s})$ для какой-нибудь точки $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в $\mathbb{V}$. Однако по доказанному, любое непустое множество вида Z_{ps} ($s \in M$) — это бэровский интервал, так что для тестирования непустоты достаточно ограничиться такими точками $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $x(k) = 0$ для почти всех x — во всяком случае, точками из более узкого универсума $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$. Таким образом,

$$\langle p, s \rangle \in D \iff \exists x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}[\mathbf{a}] (p \Vdash_{\vartheta < \omega}^{\mathbb{V}} \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s})).$$

Мы утверждаем, что отношение $\Vdash_{\vartheta < \omega}^{\mathbb{V}}$ здесь можно заменить вынуждением $\Vdash_{\vartheta < \omega}^{\mathbb{L}[\mathbf{a}]}$ над более узкой моделью $\mathbb{L}[\mathbf{a}] \subseteq \mathbb{V}$ — этого достаточно для доказательства $D \in \mathbb{L}[\mathbf{a}]$, поскольку отношение $\Vdash_{\vartheta < \omega}^{\mathbb{L}[\mathbf{a}]}$ определимо в $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$ по теореме 9.3.2.

Итак, требуется доказать, что, при $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathbb{L}[\mathbf{a}]$, соотношения

$$p \Vdash_{\vartheta < \omega}^{\mathbb{V}} \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}) \quad \text{и} \quad p \Vdash_{\vartheta < \omega}^{\mathbb{L}[\mathbf{a}]} \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s})$$

равносильны. Это уже не так сложно. По теореме 9.3.2 и предложению 9.1.6, предположение противного приносит такое $\vartheta < \omega$ -гене-рическое множество над $\mathbb{V}$ (тогда, следовательно, и над $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$), что соотношение $x \in \mathbf{B}_{R, \tau[G]}(s)$ истинно в $\mathbb{V}[G]$, но ложно в $\mathbb{L}[\mathbf{a}][G]$, или наоборот — но это противоречит результату 16.4.2.

Последнее утверждение леммы (для отображения $\langle p, s \rangle \mapsto u_{ps}$) доказывается аналогично. $\square$

Следующая лемма позволит определять множества Z_{ps} трансфинитной индукцией по $|s|_R$. Пусть $\mathbb{Q}_p = \{q \in \vartheta < \omega : q \leq p\}$ для $p \in \vartheta < \omega$.

Лемма 16.9.2. *Если $s \in R$, $|s|_R > 0$, и $p \in \mathbb{Q}_{p_0}$, то $Z_{ps} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_p, s^{\wedge} \nu \in R} Z_{q, s^{\wedge} \nu}$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в универсуме $\mathbb{V}$. Если $x \in Z_{ps}$, то $p \Vdash \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s})$. Но в то же время, уже по определению борелевской кодировки, $p \Vdash \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{\check{s}^{\wedge} \nu \in \check{R}} \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}^{\wedge} \nu)$. Следовательно, если $s^{\wedge} \nu \in R$, то $p \Vdash \check{x} \notin \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}^{\wedge} \nu)$. Поэтому, если $q \leq p$, то и $q \Vdash \check{x} \notin \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}^{\wedge} \nu)$ — значит, $x \notin Z_{q, s^{\wedge} \nu}$.

Обратно, допустим, что $x \notin Z_{ps}$, т. е. «условие» p не вынуждает $\check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s})$. По теореме 9.3.2(vi), найдется «условие» $r \leq p$, для которого $r \Vdash \check{x} \notin \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s})$. Снова по определению борелевской кодировки, $r \Vdash \exists \nu (\check{s}^\wedge \nu \in \check{R} \wedge \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}^\wedge \nu))$. По теореме 9.3.2(x), найдутся «условие» $q \leq r$ и ординал ν , для которых $\check{s}^\wedge \nu \in R$ и $q \Vdash \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}^\wedge \nu)$, т. е. $x \in Z_{q, s^\wedge \nu}$, что и требовалось. $\square$

Наконец, связываем множества Z_{ps} с конститутантой $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$.

Лемма 16.9.3. $C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus Z_{p_0, \Lambda}$.

Доказательство. Пусть $x \in Z_{p_0, \Lambda}$, т. е. $p_0 \Vdash \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\Lambda)$, так что $p_0 \Vdash \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}$, а значит, $p_0 \Vdash \check{x} \notin C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ согласно соотношению (II) выше. Тогда в любом $\vartheta^{<\omega}$ -генерическом расширении универсума $\mathbb{V}$ истинно $x \notin C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$. Поэтому $x \notin C_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ и в $\mathbb{V}$ по теореме 16.3.1(xiii). Вывод обратной импликации аналогичен. $\square$

Итак, мы имеем, в данном универсуме $\mathbb{V}$, индексированное семейство множеств Z_{ps} , $p \in \vartheta^{<\omega}$ и $s \in R$, для которого выполнены леммы 16.9.1, 16.9.2, 16.9.3. С этого момента, мы продолжаем доказательство теоремы 16.7.1 в $\mathbb{V}$, уже не обращаясь к генерическим расширениям. Суть этого последнего этапа доказательства теоремы 16.7.1 состоит в превращении семейства множеств Z_{ps} в подходящий борелевский код — где мы опираемся на сходство соотношений 16.9.1, 16.9.2 с соотношениями определения 16.4.1.

Лемма 16.9.4. *Каждой паре из «условия» $p \in \mathbb{Q}_{p_0}$ и кортежа $s \in R$, можно сопоставить такой код $\varkappa_{ps} = \langle T_{ps}, f_{ps} \rangle \in \mathbf{BC}^\infty \cap \mathbb{L}[\mathbf{a}]$, что $|T_{ps}| = |s|_R$ и $Z_{ps} = \mathbf{B}_{\varkappa_{ps}}$, и при этом отображение $\langle p, s \rangle \mapsto \varkappa_{ps}$ принадлежит $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$.*

Доказательство. Рассуждаем индукцией по $|s|_R$.

Начало индукции. Пусть $|s|_R = 0$, т. е. $s \in M = \mathbf{Max} R$. Положим $T_{ps} = \{\Lambda\}$. Если $Z_{ps} = \emptyset$, т. е. $\langle p, s \rangle \notin D$, то положим $f_{ps}(\Lambda) = \Lambda$ — тогда $\mathbf{B}_{T_{ps}f_{ps}} = \mathbf{B}_{T_{ps}f_{ps}}(\Lambda) = \emptyset$, так что $Z_{ps} = \mathbf{B}_{T_{ps}f_{ps}}$. Если же $Z_{ps} \neq \emptyset$, т. е. $\langle p, s \rangle \in D$, то положим $f_{ps}(\Lambda) = u_{ps}$ — тогда $\mathbf{B}_{T_{ps}f_{ps}} = [u_{ps}]$, так что снова $Z_{ps} = \mathbf{B}_{T_{ps}f_{ps}}$ по лемме 16.9.1.

Остается заметить, что каждый код $\varkappa_{ps} = \langle T_{ps}, f_{ps} \rangle$ (где $s \in M$ и $p \leq p_0$) принадлежит $\mathbf{BC}^\infty \cap \mathbb{L}[\mathbf{a}]$ и удовлетворяет $|T_{ps}| = 0$ по очевидным соображениям, и более того, всё индексированное семейство этих кодов принадлежит $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$, поскольку вся конструкция в этой части может быть произведена в $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$ на основе множества D и отображения $\langle p, s \rangle \mapsto u_{ps}$, которые принадлежат $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$ по лемме 16.9.1.

Индуктивный шаг. Пусть $\nu = |s|_R \geq 1$, т. е. $s \in R \setminus M$. Тогда множество $S = \{s^\wedge \gamma : \gamma \in \text{Ord} \wedge s^\wedge \gamma \in R\}$ (все вершины дерева

R непосредственно над s) непусто, причем если $t \in S$, то $|t|_R < \nu$ строго. Мы предполагаем (это индуктивное предположение), что каждой паре из $p \in Q_{p_0} = \{p \in \vartheta^{<\omega} : p \leq p_0\}$ и $t \in S$ уже сопоставлен код $\varkappa_{pt} = \langle T_{pt}, f_{pt} \rangle \in \mathbf{BC}^\infty \cap \mathbb{L}[\mathbf{a}]$, удовлетворяющий $|T_{pt}| = |t|_R$ и $Z_{pt} = \mathbf{B}_{\varkappa_{pt}}$, и при этом отображение $\langle p, t \rangle \mapsto \varkappa_{pt}$ принадлежит $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$.

Теперь фиксируем $p \leq p_0$, и укажем, как определяется код $\varkappa_{ps} \in \mathbf{BC}^\infty \cap \mathbb{L}[\mathbf{a}]$ — это будет вполне определенная процедура в $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$.

Пусть $Q_p = \{q \in \vartheta^{<\omega} : q \leq p\}$. Множество $Q_p \times S$ принадлежит $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$ и имеет какую-то мощность $\lambda = \omega_\alpha^{\mathbb{L}[\mathbf{a}]} = \text{card}(Q \times S)$ в $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$; $\alpha \in \text{Ord}$. Тогда в $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$ существуют биекции $h : \lambda \xrightarrow{\text{ha}} Q \times S$ — через $\mathbf{h}$ обозначим наименьшую из них в смысле гёделева полного упорядочения $<_{\mathbf{a}}^{\text{гед}}$ класса $\mathbb{L}[\mathbf{a}]$. По предыдущему, если $\gamma < \lambda$, то уже определен код $\varkappa_{q^\gamma, t^\gamma} = \langle T_{q^\gamma, t^\gamma}, f_{q^\gamma, t^\gamma} \rangle \in \mathbf{BC}^\infty \cap \mathbb{L}[\mathbf{a}]$, для которого $|T_{q^\gamma, t^\gamma}| = |t^\gamma|_R$ и $Z_{q^\gamma, t^\gamma} = \mathbf{B}_{\varkappa_{q^\gamma, t^\gamma}}$, где $\langle q^\gamma, t^\gamma \rangle = \mathbf{h}(\gamma)$ — его мы обозначим, для уменьшения громоздкости, через $\varkappa^\gamma = \langle T^\gamma, f^\gamma \rangle$.

Положим $T = \{\Lambda\} \cup \{\gamma^\wedge u : \gamma < \lambda \wedge u \in T^\gamma\}$ (так что $\text{Max } T = \{\gamma^\wedge u : \gamma < \lambda \wedge u \in \text{Max } T^\gamma\}$), и $f(\gamma^\wedge u) = f^\gamma(u)$ для $u \in \text{Max } T^\gamma$. Понятно, что $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}^\infty$ и $\mathbf{B}_{Tf}(\langle \gamma \rangle) = \mathbf{B}_{\varkappa^\gamma} = Z_{q^\gamma, t^\gamma}$ для всех $\gamma < \lambda$ по предыдущему, а потому $\mathbf{B}_\varkappa = \mathbf{B}_{Tf}(\Lambda) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{\gamma < \lambda} Z_{q^\gamma, t^\gamma} = Z_{ps}$ согласно 16.9.2. Таким образом, код $\varkappa$ можно взять в качестве $\varkappa_{ps}$ — свойства $\varkappa \in \mathbb{L}[\mathbf{a}]$ и $|T| = \nu$ легко проверяются по построению. $\square$

Следствие 16.9.5. *Существует такой код $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}^\infty \cap \mathbb{L}[\mathbf{a}]$, что $|T_{ps}| = \rho$ и $\mathbf{C}_\gamma[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbf{B}_\varkappa$.*

Доказательство. В терминах теоремы 16.9.4, берем $\varkappa = \varkappa_{\Lambda, p_0}$ (при этом $|R|_\Lambda = |R| = \rho$) и ссылаемся на лемму 16.9.3. $\square$

Теперь доказательство леммы 16.7.2 в отношении утверждения (A) заканчивается ссылкой на лемму 16.6.3.

$\square$ (теорема 16.7.2(A))

Для вывода части (B) теоремы 16.7.2, в доказательстве части (A) следует заменить требование $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}] \in \Sigma_\rho^0$ в предположениях (I) из §16.9 требованием Σ_ρ^0 -отделимости константы $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}]$ от $\mathbf{C}_{<\xi}[\mathfrak{F}]$. Равенство $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbf{B}_{Rf}$ меняется, по ходу выкладок в §16.9, на требование, что множество $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbf{B}_{Rf}$ отделяет $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ от $\mathbf{C}_{<\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$. Соответственно, ссылаемся на следствие 16.4.3(xi) вместо (ix). Определение множеств Z_{ps} и леммы 16.9.1, 16.9.2 не изменяются, но лемма 16.9.3 меняется на утверждение о том, что множество $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus Z_{p_0, \Lambda}$ отделяет $\mathbf{C}_\xi[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$ от $\mathbf{C}_{<\xi}[\mathfrak{F}_{\Phi\Psi}]$. Лемма 16.9.4 и ее доказательство (включая лемму о сжатии) сохраняются без изменений.

Что касается частей (C), (D) теоремы 16.7.2, то их доказательство проходит совершенно аналогично доказательству частей (A), (B) —

с очевидной заменой формул из 16.2.1, относящихся к конституантам $C_\xi[\mathfrak{F}]$ и аппроксимациям $C_{<\xi}[\mathfrak{F}]$, на те, которые относятся ко внутренним конституантам $A_\xi[\mathfrak{F}]$ и аппроксимациям $A_{<\xi}[\mathfrak{F}]$.

□ (теоремы 16.7.2, 16.7.1, 16.1.1, 16.1.3)

Исторические и библиографические замечания

Теоремы 16.1.1 и 16.1.3 впервые получены В. Г. Кановеем, см. заметку [5], а доказательства опубликованы в работах [6, 8, 10]. Общий действительно ключевой момент доказательства обеих теорем — теорема 16.7.2 о выборе кодов, доказанная Стерном в заметке [175] (и лежащая в ее основе лемма о сжатии 16.6.3).

Дополнительный ключевой момент доказательства именно теоремы 16.1.3 состоит в использовании абсолютности некоторых утверждений по отношению к вспомогательному расширенному универсуму $\mathbb{V}[G]$ (см. выше § 16.8). Вообще, теорема 16.1.3 была отмечена специалистами в области теории множеств как один из весьма немногих результатов, когда удалось получить положительное решение проблемы классической дескриптивной теории множеств, которую не удавалось решить методами самой классической теории, см., например, работы Матиаса [144, § 7] и Хьерта [94, § 2]. Во второй из этих работ вскрыта и причина такого особенного статуса теоремы 16.1.3: а именно, ее *вообще невозможно доказать в теории Цермело $\mathbf{ZC}$* , в которой формализуются все построения и теоремы классической дескриптивной теории множеств. Всё же в работе [69] элементарными топологическими методами, т. е. в рамках $\mathbf{ZC}$, доказана маленькая часть теоремы 16.1.3(A): если все конституанты C_ξ непусты, то все они не могут содержать по одной точке. См. об этом также в статьях [70, 119].

Об истории лужинских проблем о конституантах см. также статью В. А. Успенского и В. Г. Кановея [53].

Глава 17

«Узкие проблемы» Лузина

Эта глава посвящена двум теоретико-множественным проблемам о последовательностях борелевских множеств ограниченного ранга, которые были введены Н. Н. Лузиным еще в 1930 году, но получили исчерпывающее решение лишь в 1980х годах. Это узкая проблема континуума, касающаяся разбиений континуума (например, бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) на борелевские множества ограниченного ранга, и узкая проблема Лебега, касающаяся несчетных последовательностей борелевских множеств ограниченного ранга, из § 7.6.

Эти проблемы сформулированы в терминах эффективного существования, но на самом деле поставленные вопросы имеют определенный смысл и в неэффективном плане, т. е. когда допускается не только эффективное построение требуемого объекта, но и просто доказательство его существования с помощью аксиомы выбора. С этого отдельного аспекта мы и начнем изложение в §§ 17.1, 17.2, а затем перейдем в § 17.3 к этим проблемам в лузинской, эффективной постановке. Мы покажем в § 17.4, что обе проблемы допускают положительные решения в некоторых моделях теории множеств (например, в конструктивной модели $\mathbb{L}$) — это, в общем, потребует не так много работы. Затем будет изложен главный результат этой главы — теорема о том, что как узкая проблема континуума, так и узкая проблема Лебега решаются отрицательно в модели Соловея.

§ 17.1 Используя аксиому выбора

Разумеется, аксиома выбора влечет существование последовательности из $\aleph_1$ точек в любом несчетном пространстве, а также, если речь идет о пространствах мощности континуума $\mathfrak{c}$ (т. е., например, о несчетных польских пространствах) и если выполнена континуум-гипотеза $\mathfrak{c} = \aleph_1$ — то и разбиение пространства на $\aleph_1$ непустых одноточечных множеств.

Несчетных и *строго возрастающих по включению* последовательностей открытых или замкнутых множеств в польском пространстве, разумеется, нет. Нет таких последовательностей и для класса Δ_2^0 (множества одновременно $\mathbf{F}_\sigma$ и $\mathbf{G}_\delta$). В самом деле, каждое Δ_2^0 -множество в польском пространстве разложимо в знакочередующийся ряд убывающих замкнутых множеств, см. [122, § 37. III], а с другой стороны, любая строго возрастающая последовательность множеств, разложимых указанным образом, счетна по теореме 2 в [122, § 24. III].

Но уже для класса $\mathbf{F}_\sigma = \Sigma_2^0$ несчетные последовательности тривиальны: определим $X_\xi = \{x_\alpha : \alpha < \xi\}$ для всех $\xi < \omega_1$, где $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha < \omega_1}$ — последовательность попарно различных точек в данном (несчетном) пространстве. Есть они и в двойственном классе $\mathbf{G}_\delta = \Pi_2^0$.

Пример 17.1.1 (Зальцвассер [183]). Возрастающую ω_1 -последовательность множеств класса $\mathbf{G}_\delta$ в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ можно получить при помощи следующей простой конструкции. Пусть $X_0 = \emptyset$. Если $\mathbf{G}_\delta$ -множество $X_\xi \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ уже построено и $\lambda(X_\xi) = 0$, где λ — мера из 6.1.1, то разность $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus X_\xi$ непуста. Берем точку $x_\xi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus X_\xi$. Найдется $\mathbf{G}_\delta$ -множество X , для которого $X_\xi \cup \{x_\xi\} \subseteq X$ и все еще $\lambda(X) = 0$. Берем в роли $X_{\xi+1}$ одно из таких множеств X . Если же ординал $\vartheta < \omega_1$ предельный, то в качестве X_ϑ берем одно из таких $\mathbf{G}_\delta$ -множеств X , что $\bigcup_{\xi < \vartheta} X_\xi \subseteq X$ и все еще $\lambda(X) = 0$. $\square$

Однако, как доказал Лузин в [26], никакая строго возрастающая ω_1 -последовательность $\mathbf{G}_\delta$ -множеств X_ξ не может обладать тем свойством, что $\bigcup_{\xi < \vartheta} X_\xi = X_\vartheta$ для всех предельных ординалов ϑ .

С другой стороны, в бэровском пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ существует возрастающая ω_1 -последовательность $\mathbf{G}_\delta$ -множеств X_ξ , для которой даже $\bigcup_\xi X_\xi = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Это следует из замечательной теоремы Хаусдорфа [87, 89] о щели — см. следствие 5.9.5 из теоремы 5.9.4 в нашей предыдущей книге [19], куда мы и отсылаем читателя. Удалив из каждого множества X_ξ такой последовательности все точки, принадлежащие объединению предшествующих множеств, мы получаем разбиение континуума на $\aleph_1$ непустых множеств класса $\Pi_3^0 = \mathbf{F}_{\sigma\delta}$.

Теорема Хаусдорфа оставляет открытым вопрос о возможности разбиения континуума на $\aleph_1$ непустых множеств более простого ти-

па, чем $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$. В частности, существует ли разбиение континуума на $\aleph_1$ непустых множеств класса $\mathbf{G}_\delta$? Эта проблема сформулирована Серпинским в [164] (см. также [122, с. 495]). Последующие работы связали эту проблему с аналогичными вопросами для разбиений на замкнутые и на нигде не плотные множества. Для дальнейшего предметного обсуждения, введем такие удобные формулировки.

- (A) существует разбиение пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $\aleph_1$ непустых (попарно дизъюнктивных) замкнутых множеств — или, что, как легко видеть равносильно — множеств класса $\mathbf{F}_\sigma$;
- (B) существует разбиение пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $\aleph_1$ непустых (попарно дизъюнктивных) $\mathbf{G}_\delta$ множеств — или, что опять равносильно — множеств класса $\mathbf{G}_{\delta\sigma} = \Sigma_3^0$;
- (C) существует разбиение пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $\aleph_1$ нигде не плотных множеств (попарно дизъюнктивных или нет — равносильно).

Разумеется, континуум-гипотеза $\mathfrak{c} = \aleph_1$ делает истинным каждое из трех. Однако, что происходит в предположении $\mathfrak{c} > \aleph_1$? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 17.1.2. *Каждое из утверждений (A), (B), (C) неразрешимо в теории $\mathbf{ZFC} + (\mathfrak{c} > \aleph_1)$. При этом (B) $\iff$ (C), (A) влечет (B), но обратная импликация (B) $\implies$ (A) недоказуема.*

Доказательство (эскиз). То, что (A) влечет (B), очевидно.

Импликация (B) $\implies$ (C) составляет предмет довольно сложной теоремы Фремлина — Шелаха в следующем параграфе.

Обратная импликация, напротив, довольно проста. Именно, пусть $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} X_\alpha$, где все множества $X_\alpha \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ нигде не плотны. Мы можем считать каждое из них замкнутым. Множества $Y_\xi = X_\xi \setminus \bigcup_{\alpha < \xi} X_\alpha$ образуют искомое разбиение.

Модель, в которой ложно предложение (C) (или, что эквивалентно по предыдущему, (B)), дается теоремой 14.4.2, а модель, в которой истинно предложение (A) — теоремой 14.4.1 (с учетом сноски). Наконец, модель, где истинно (C), но ложно (A), была построена Миллером в [145]; она достаточно сложна, чтобы ее рассматривать здесь. Это оставляет нас с импликацией (B) $\implies$ (C), доказательству которой посвящен следующий параграф. $\square$

Замечание 17.1.3. Предложения (A), (B), (C) сформулированы, для удобства, для бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Однако каждое из них одновременно истинно или одновременно ложно во **всех**

несчетных польских пространствах. Например, в отношении (С), достаточно воспользоваться тем, что в любом несчетном польском пространстве $\mathbb{X}$ имеется $\mathbf{G}_\delta$ -множество $\mathbb{X}' \subseteq \mathbb{X}$, ко-тощее и гомеоморфное бэровскому пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, см. теорему 1.6.4 в [19].

В отношении (В), воспользуемся тем, что любое польское пространство $\mathbb{X}$ является образом пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ при подходящем непрерывном отображении $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{X}$. Поэтому разбиение $\mathbb{X}$ на $\mathbf{G}_\delta$ -множества X_α влечет разбиение $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на множества $f^{-1}[X_\alpha]$. Обратно, если $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \bigcup_\alpha Y_\alpha$ — разбиение на $\mathbf{G}_\delta$ -множества, $\mathbb{X}' \subseteq \mathbb{X}$ выбрано как указано выше, и $h : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{X}'$ — соответствующий гомеоморфизм, то множества $X_\alpha = h^{-1}[Y_\alpha]$ будут $\mathbf{F}_\sigma$ -множествами в $\mathbb{X}'$, а следовательно, и в $\mathbb{X}$, поскольку быть $\mathbf{G}_\delta$ -множеством — это абсолютное свойство, равносильное полной метризуемости топологии данного множества. Наконец, множество-остаток $\mathbb{X} \setminus \mathbb{X}'$ имеет класс $\mathbf{F}_\sigma$, а потому является объединением счетного числа попарно дизъюнктивных даже замкнутых множеств.

Несколько более сложное доказательство независимости от выбора пространства в отношении (А) приведен в заметке [145]. $\square$

Подводя итог сказанному, мы видим, что если оставить в стороне аспект эффективности и разрешить аксиому выбора, то в любом несчетном польском пространстве:

- 1) узкая проблема Лебега для строго возрастающих¹ последовательностей точечных множеств решается отрицательно для класса открытых множеств, для класса замкнутых множеств, и даже для класса Δ_2^0 , но положительно для всех высших борелевских классов, начиная с $\mathbf{F}_\sigma = \Sigma_2^0$ и $\mathbf{G}_\delta = \Pi_2^0$.
- 2) узкая проблема континуума решается отрицательно для класса открытых множеств, положительно для класса Π_3^0 и всех высших классов, а в отношении класса замкнутых множеств и класса $\mathbf{G}_\delta = \Pi_2^0$ является неразрешимой в теории **ZFC**.

§17.2 Теорема Фремлина — Шелаха

Этот параграф посвящен ключевому элементу теоремы 17.1.2 — выводу импликации (В) $\implies$ (С).

¹ Если требовать только попарного различия членов последовательности, а не свойства строгого возрастания, то положительное решение узкой проблемы Лебега также и для классов открытых и замкнутых множеств будет элементарно следовать из существования последовательности из $\aleph_1$ различных точек, поэтому такой вариант проблемы малоинтересен.

Теорема 17.2.1 (Фремлин — Шелах [78]). $(B) \implies (C)$, т. е. если существует разбиение пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $\aleph_1$ непустых попарно дизъюнктивных $\mathbf{G}_\delta$ множеств, то существует и разбиение $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на $\aleph_1$ нигде не плотных множеств.

Доказательство. Через κ_0 обозначим наименьшую мощность семейства нигде не плотных множеств $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, объединение которых равно $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Понятно, что $\aleph_0 < \kappa_0 \leq \mathfrak{c}$, и гипотеза (C) выражается равенством $\kappa_0 = \aleph_1$. Через $\mathbf{G}_\Delta$ обозначим класс всех пересечений открытых множеств (данного пространства) в числе строго меньше κ_0 .

- Лемма 17.2.2.** (i) Для любого несчетного польского пространства $\mathbb{X}$, кардинал κ_0 равен наименьшей мощности семейства нигде не плотных множеств, объединение которых равно $\mathbb{X}$;
- (ii) каждое покрытие $\mathcal{E}$ любого Σ_1^1 -множества $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ замкнутыми множествами в числе $< \kappa_0$ имеет счетное подпокрытие $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$;
- (iii) любое $\mathbf{G}_\Delta$ множество в польском пространстве является бэровским в индуцированной топологии, т. е. любое счетное пересечение открытых всюду плотных множеств всюду плотно;
- (iv) если $\mathcal{Q}$ — семейство коинициальных² подмножеств счетного форсинга $\mathbb{P}$ в числе $< \kappa_0$, то существует линейно упорядоченное подмножество $G \subseteq \mathbb{P}$, непусто пересекающее каждое $Q \in \mathcal{Q}$.

Доказательство (лемма). (i) См. замечание 17.1.3 в отношении (C).

(ii) Положим $\mathcal{D} = \{f^{-1}[E] : E \in \mathcal{E}\}$, где $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} A$ — фиксированная непрерывная функция. Рассматривается семейство $\mathcal{G}$ всех тех открытых множеств $G \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, которые накрываются какой-то счетной частью $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$. Открытое множество $G_0 = \bigcup \mathcal{G}$ само принадлежит $\mathcal{G}$ из-за того, что $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет счетную базу. Пусть $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$ — счетное подсемейство, покрывающее G_0 . Множество $F = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus G_0$ замкнуто, и потому само является польским пространством. Теперь, если $D \in \mathcal{D}$, а множество $G \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ открыто и $F \cap G \subseteq D$, то $G \subseteq G_0 \cap D$ — и тогда $G \in \mathcal{G}$ и $F \cap G = \emptyset$. Поэтому, если $D \in \mathcal{D}$, то множество $F \cap D$ нигде не плотно в F , так что F накрывается нигде не плотными множествами в числе $< \kappa_0$. Значит, согласно (i), F не более чем счетно, т. е. F , а тогда и всё пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = F \cup G_0$, накрывается счетным числом множеств из $\mathcal{D}$, что и требовалось.

(iii) Рассмотрим $\mathbf{G}_\Delta$ -множество $Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и последовательность множеств $G_n \subseteq Y$, открытых и плотных в наследственной топологии. Топологическое замыкание $\bar{Y}$ само является польским пространством, а множество $E = \bigcap_n G_n$ является пересечением открытых плотных подмножеств $\bar{Y}$ в числе $< \kappa_0$. Следовательно, дополнительное множество $C = \bar{Y} \setminus E$

² Множество $D \subseteq \mathbb{P}$ коинициально, если $\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in D (q \leq p)$. Таким образом, коинициальные множества — это то же самое, что и плотные множества в смысле § 9.1. Это альтернативное название для одного и того же принято в рамках данного доказательства, чтобы избежать ненужных параллелей с плотными множествами рассматриваемых топологических пространств.

есть объединение замкнутых нигде не плотных множеств в числе $< \kappa_0$, которым, согласно (i), нельзя накрыть ни одно непустое открытое множество в $\bar{Y}$. Поэтому само E плотно в $\bar{Y}$ и в Y .

(iv) В компактном польском пространстве $\mathbb{X} = \mathcal{P}(\mathbb{P})$ (с топологией, индуцированной из произведения $2^{\mathbb{P}}$ отождествлением множеств с их характеристическими функциями), множество

$$\mathbb{Y} = \{t \in \mathbb{X} : \forall p, q \in t (p \leq q \vee q \leq p) \wedge \forall p \in \mathbb{P} \setminus t \exists q \in t (p \not\leq q \wedge q \not\leq p)\}$$

всех максимальных линейно упорядоченных $t \subseteq \mathbb{P}$ имеет класс $\mathbf{G}_\delta$, а потому является польским пространством в наследственной топологии.

Упражнение 17.2.3. Пусть $Q \in \mathcal{Q}$. Докажите, используя коинициальность множества Q , что множество $G_Q = \{t \in \mathbb{Y} : t \cap Q \neq \emptyset\}$ открыто и плотно в $\mathbb{Y}$. $\square$

Теперь, раз $\text{card } \mathcal{Q} < \kappa_0$, согласно (i) имеется элемент $t \in \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} G_Q$. Этот элемент t , очевидно, является таким линейно упорядоченным подмножеством в $\mathbb{P}$, которое пересекается с каждым $Q \in \mathcal{Q}$. $\square$ (лемма)

Продолжаем доказательство теоремы. Рассмотрим разбиение $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{\xi < \kappa} E_\xi$ пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ на κ непустых $\mathbf{G}_\delta$ -множеств $E_\xi = \bigcap_n E_\xi^n$, где каждое E_ξ^n открыто и $\omega \leq \kappa < \kappa_0$. Наша цель — установить, что на самом деле $\kappa \leq \omega$, т. е. данное покрытие счетно.

Предположим противное, т. е. $\kappa \geq \omega_1$.

Это означает просто, что само пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ не принадлежит σ -идеалу $\mathcal{I}$ всех множеств, накрываемых счетным числом множеств E_ξ .

Зафиксируем базу $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ топологии $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}$ множеств, порожденную семейством $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{E_\xi^n : n \in \mathbb{N} \wedge \xi < \kappa\}$ (т. е. наименьшее семейство множеств в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, содержащее все эти множества и замкнутое относительно операций $\cup, \cap, \setminus$). Тогда $\text{card } \mathfrak{A} \leq \kappa$ и все множества из $\mathfrak{A}$ суть Δ_2^0 , т. е. одновременно $\mathbf{F}_\sigma$ и $\mathbf{G}_\delta$. Положим $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A} \cap \mathcal{I}$ и $Y = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup \mathfrak{A}_0$, так что Y есть $\mathbf{G}_\Delta$.

Лемма 17.2.4. Если Σ_1^1 -множество $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет соотношению $A \cap Y \in \mathcal{I}$, то и $A \in \mathcal{I}$.

Следовательно, $Y \neq \emptyset$, и если $B \in \mathfrak{A}$ и $B \cap Y \neq \emptyset$, то $B \cap Y \notin \mathcal{I}$.

Доказательство (лемма). По определению, $A \cap Y \subseteq E = \bigcup_{\xi \in S} E_\xi$, где $S \subseteq \kappa$ счетно. Далее, имеем $B = A \setminus E \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus Y = \bigcup \mathfrak{A}_0$. Однако каждое множество из $\mathfrak{A}_0$ есть $\mathbf{F}_\sigma$, а $\text{card } \mathfrak{A}_0 \leq \kappa < \kappa_0$, так что Σ_1^1 -множество B накрыто семейством из $\kappa < \kappa_0$ замкнутых множеств из $\mathcal{I}$. Согласно лемме 17.2.2(ii), B накрывается некоторым счетным подсемейством этого семейства, откуда следует $B \in \mathcal{I}$, а тогда и $A \in \mathcal{I}$.

Для вывода первого следствия, берем $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. $\square$ (лемма)

Определим последовательность подалгебр $\mathfrak{B}_n$ алгебры $\mathfrak{A}$ так, что $\mathfrak{B}_0$ есть подалгебра, порожденная семейством $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, а каждая $\mathfrak{B}_{n+1}$ есть подалгебра, порожденная семейством

$$\mathfrak{B}_n \cup \{E_\xi^k : k \in \mathbb{N} \wedge \xi < \kappa \wedge \exists B \in \mathfrak{B}_n (\emptyset \neq B \cap Y \subseteq \overline{B \cap Y \cap E_\xi})\}$$

(где $\overline{X}$ обозначает топологическое замыкание в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$). Каждая подалгебра $\mathfrak{B}_n$ счетна — это доказывается по индукции с использованием того, что если $B \in \mathfrak{A}$ и $B \cap Y \neq \emptyset$, то $B \cap Y$ есть $\mathbf{G}_\Delta$ -множество, так что $E_\xi \cap B \cap Y$ может быть плотным в $B \cap Y$ для не более чем одного индекса $\xi < \kappa$, согласно лемме 17.2.2(iii). Следовательно, $\mathfrak{B} = \bigcup_n \mathfrak{B}_n$ — также счетная подалгебра в $\mathfrak{A}$, содержащая каждое U_n , и такая, что если

$$B \in \mathfrak{B} \wedge \xi < \kappa \wedge \emptyset \neq B \cap Y \subseteq \overline{B \cap Y \cap E_\xi},$$

то $E_\xi^k \in \mathfrak{B}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Теперь рассмотрим множество $\mathbb{P} = \{\overline{B \cap Y} : B \in \mathfrak{B} \wedge B \cap Y \neq \emptyset\}$ с порядком по включению. Положим $Q^n = \{F \in \mathbb{P} : \text{diam } F \leq 2^{-n}\}^3$ и

$$Q_\xi = \{F \in \mathbb{P} : F \cap E_\xi = \emptyset\} \quad \text{для } \xi < \kappa.$$

Утверждается, что каждое из этих множеств Q^n и Q_ξ коинициально в $\mathbb{P}$.

Для доказательства, пусть $n \in \mathbb{N}$ и $F = \overline{B \cap Y} \in \mathbb{P}$, где $B \in \mathfrak{B}$ и $B \cap Y \neq \emptyset$. Найдется такое k , что $\text{diam } U_k \leq 2^{-n}$ и $B \cap U_k \in \mathfrak{B}$. Тогда $B \cap Y \cap U_k \neq \emptyset$, и поэтому $F_1 = \overline{B \cap Y \cap U_k} \in \mathbb{P}$ и $F_1 \subseteq F$, $F_1 \in Q^n$.

Теперь пусть $\xi < \kappa$ и снова $F = \overline{B \cap Y} \in \mathbb{P}$, где $B \in \mathfrak{B}$ и $B \cap Y \neq \emptyset$.

Случай 1. Множество $E_\xi \cap B \cap Y$ плотно в $B \cap Y$. Тогда $E_\xi^k \in \mathfrak{B}$ для всех k . Но мы также имеем $B \cap Y \subsetneq E_\xi$, поскольку $B \cap Y \notin \mathcal{I}$ (по лемме 17.2.4), так что для некоторого k будет $(B \cap Y) \setminus E_\xi^k \neq \emptyset$. Имеем $B \setminus E_\xi^k \in \mathfrak{B}$, откуда следует, что множество $F_1 = \overline{(B \setminus E_\xi^k) \cap Y}$ принадлежит $\mathbb{P}$, $F_1 \subseteq F$, и $F_1 \cap E_\xi \subseteq F_1 \cap E_\xi^k = \emptyset$, и поэтому $F_1 \in Q_\xi$.

Случай 2. Множество $E_\xi \cap B \cap Y$ не плотно в $B \cap Y$. В этом случае мы используем лемму 17.2.2(iii) (поскольку $B \cap Y$ — множество из $\mathbf{G}_\Delta$), и получаем такой индекс k , что множество $E_\xi^k \cap B \cap Y$ не плотно в $B \cap Y$. Найдется базовое открытое множество $U_r \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которого $E_\xi^k \cap B \cap Y \cap U_r = \emptyset$, но $B \cap Y \cap U_r \neq \emptyset$. Мы заключаем, что множество $F_1 = \overline{B \cap U_r \cap Y}$ принадлежит $\mathbb{P}$, $F_1 \subseteq F$, и $F_1 \in Q_\xi$.

Завершив вывод коинициальности множеств Q^n и Q_ξ , мы заключаем, по лемме 17.2.2(iv), что существует линейно упорядоченное множество $P_0 \subseteq \mathbb{P}$, которое непусто пересекается с каждым из множеств Q^n и Q_ξ . Отсюда, в частности, следует, что пересечение $\bigcap P_0$ содержит единственный элемент t . При этом $t \notin \bigcup_\xi E_\xi$, так как P_0 пересекает каждое из множеств Q_ξ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

§ 17.3 Эффективная постановка проблем

Здесь мы переходим к обсуждению узкой проблемы континуума и узкой проблемы Лебега — в их лужинской постановке, см. § 7.6, которую здесь уместно еще раз напомнить.

³ Диаметр $\text{diam } F$ множества $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ равен 0, если F содержит не более одной точки, и $\frac{1}{n+1}$, где n — наибольшее число, удовлетворяющее $x \upharpoonright n = y \upharpoonright n$ для всех $x, y \in F$ — если F содержит по крайней мере две различные точки.

Узкая проблема континуума, УПК. Можно ли эффективно разбить континуум вещественных чисел на $\aleph_1$ непустых борелевских множеств ограниченного борелевского ранга?

Узкая проблема Лебега, УПЛ. Можно ли эффективно построить последовательность из $\aleph_1$ попарно различных борелевских множеств вещественной прямой ограниченного борелевского ранга?

Главные результаты по этим проблемам здесь сводятся к тому, что

- (I) положительные решения обеих проблем (т. е. «да, можно») следуют из аксиомы конструктивности $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ и даже из некоторых более слабых аксиом, а также достигаются в некоторых достаточно типичных моделях, получаемых методом форсинга — а потому они (положительные решения) не противоречат аксиомам теории множеств **ZFC**;
- (II) отрицательные решения обеих проблем (т. е. «нет, нельзя») достигаются в модели Соловея — а потому они также не противоречат аксиомам теории множеств **ZFC**.

Сначала мы займемся «положительной» частью программы — более легкой, поскольку основные результаты уже, собственно говоря, представлены в предшествующих главах, а затем займемся ее «отрицательной» частью.

§17.4 Положительные решения проблем

Напомним, что если выполнена аксиома конструктивности $\mathbb{V} = \mathbb{L}$, или хотя бы верно, что $\mathbb{V} = \mathbb{L}[a]$ для некоторого $a \in \mathbb{N}^{\aleph_1}$, то существует гёделёво полное упорядочение $<_a^{\text{гед}}$ всего универсума множеств, ограничение $\prec_a$ которого на $\mathbb{N}^{\aleph_1}$ вполне упорядочивает $\mathbb{N}^{\aleph_1}$ по типу $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} = \omega_1$ и является $\Sigma_2^1(a)$ -отношением по теореме 8.6.2. Обозначим через x_ξ ξ -ый элемент пространства $\mathbb{N}^{\aleph_1}$ в смысле $\prec_a$, мы имеем, в указанном предположении, $\mathbb{N}^{\aleph_1} = \{x_\xi : \xi < \omega_1\}$, т. е. как узкая проблема континуума, так и узкая проблема Лебега решаются положительно — и даже при помощи эффективной (точнее, $\text{OD}(a)$) последовательности одноэлементных множеств.

Результат для узкой проблемы Лебега, очевидно, сохраняется в более слабом предположении, что $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} = \omega_1$ для некоторой точки $a \in \mathbb{N}^{\aleph_1}$. Тогда отношение $\prec_a$ вполне упорядочивает всё еще несчетное множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\aleph_1}$ по типу $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} = \omega_1$, и мы снова имеем эффективную ω_1 -последовательность попарно различных точек множества $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\aleph_1}$. Она, однако, не обязательно содержит **все** точки пространства — коль скоро здесь не предполагается, что $\mathbb{N}^{\aleph_1} \subseteq \mathbb{L}[a]$.

Другое, более специальное решение узкой проблемы Лебега в положительном направлении можно получить на основе теоремы 15.1.1, согласно которой в том же предположении $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} = \omega_1$ имеются несчетные последовательности одноточечных конституант — т. е., в частности, эффективные ω_1 -последовательности точек.

Несколько усилив гипотезу $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} = \omega_1$, мы сможем получить положительное решение и для узкой проблемы континуума, однако при помощи несколько более сложной конструкции разбиений из § 14.4.

Теорема 17.4.1. *Предположим, что $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

- (i) *если $\mathbf{Coh} \mathbb{L}[a] = \emptyset$, то узкая проблема континуума решается положительно при помощи подходящей эффективной ω_1 -последовательности $\mathbf{G}_\delta$ -множеств;*
- (ii) *если $\mathbf{Rand} \mathbb{L}[a] = \emptyset$, то узкая проблема континуума решается положительно с помощью подходящей эффективной ω_1 -последовательности множеств класса $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$.*

Доказательство. (i) Согласно теореме 10.4.2 при $\mathfrak{M} = \mathbb{L}[a]$, для каждого $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ найдется такая точка $c \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что множество $\mathbb{F}[c]$ (см. § 5.7A) — тощее и $x \in \mathbb{F}[c]$. Другими словами, в наших предположениях пространство $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ целиком накрыто нигде не плотными (замкнутыми) множествами $\mathbb{F}[c]$, где $c \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Это означает, что множество $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ несчетно, так что $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} = \omega_1$, и даже множество

$$C = \{c \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \mathbb{F}[c] \text{ нигде не плотно}\}$$

несчетно. Для $\xi < \omega_1$, через c_ξ обозначим ξ -й в смысле порядка $\prec_a$ элемент множества C . Имеем $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{\xi < \omega_1} X_\xi$, где каждое множество $X_\xi = \mathbb{F}[c_\xi]$ замкнуто и нигде не плотно. Множества $Y_\xi = X_\xi \setminus \bigcup_{\eta < \xi} X_\eta$ принадлежат $\mathbf{G}_\delta$, среди них несчетно много непустых, и все еще $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{\xi < \omega_1} Y_\xi$. Остается заметить, что ω_1 -последовательности множеств X_ξ и Y_ξ , очевидно, построены эффективным образом — в частности, они определены с единственным параметром a .

(ii) Снова, по теореме 10.4.2 при $\mathfrak{M} = \mathbb{L}[a]$, для каждого $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ найдется такая точка $c \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что $x \in \mathbb{G}_\delta[c]$ и $\lambda(\mathbb{G}_\delta[c]) = 0$. Далее повторяем конструкцию из части (i) доказательства. $\square$

Заметим, что, по теореме 14.3.10, требование (i) выполнено в модели, рассмотренной в § 14.3 (присоединение случайных точек к $\mathbb{L}$) — причем даже для любой точки $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, в частности, для точки $\mathbf{0}$, заданной условием $\mathbf{0}(k) = 0$, $\forall k$. Этим достигается беспараметрическая эффективность полученной последовательности $\mathbf{G}_\delta$ -множеств.

При этом, как мы видели в §14.4, конструкция модели даже может быть модифицирована с тем, чтобы в ней было выполнено мощностное неравенство $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ (отрицание континуум-гипотезы).

Аналогично, по теореме 14.2.4, требование (ii) выполнено в модели, рассмотренной в §14.2 (присоединение точек, генерических по Коэну, к универсуму $\mathbb{L}$), которая также имеет модификацию с нарушением континуум-гипотезы.

Следствие 17.4.2. *Гипотеза о том, что узкая проблема Лебега и узкая проблема континуума обе решаются положительно, не противоречит аксиомам теории множеств **ZFC**.* $\square$

§17.5 Отрицательные решения проблем

Мы собираемся доказать, что и *отрицательные* решения узких проблем (т. е. «нет, нельзя») совместимы с аксиомами **ZFC**. Результат получается в следующей точной форме:

Теорема 17.5.1 (Стерн [176]). *В модели Соловея $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$, рассмотренной в теореме 13.6.3, нет **ROD** ω_1 -последовательностей попарно различных борелевских множеств ограниченного ранга.*

Соответственно, во второй модели Соловея $(\mathbf{HROD})^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$ (см. §13.7) нет вообще никаких ω_1 -последовательностей попарно различных борелевских множеств ограниченного ранга.

Следствие 17.5.2. *Гипотеза о том, что узкая проблема Лебега и узкая проблема континуума обе решаются отрицательно, не противоречит аксиомам теории множеств **ZFC**.*

*Таким образом, обе проблемы неразрешимы в **ZFC**.*

Доказательство. В отношении понятия *эффективности* в формулировках узких проблем мы принимаем то же самое соглашение, что и в отношении эффективности контрпримеров к свойствам регулярности в главе 13, — а именно, эффективность понимается в самом широком разумном смысле, как вещественно-ординальная определимость (класс **ROD**). На основе этого соглашения, результат сразу следует из теоремы 17.5.1. $\square$

Теперь о любопытном приложении второй части теоремы 17.5.1 к структуре мощностей в отсутствие аксиомы выбора. Обозначим через $\mathfrak{B}$ мощность множества всех борелевских множеств $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а через $\mathfrak{p}_\alpha$ — мощность множества всех Π_α^0 -множеств $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Тогда в $(\mathbf{HROD})^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$ истинно, что $\omega_1 \not\leq \mathfrak{p}_\alpha$ для всех $\alpha < \omega_1$ — по теореме 17.5.1, и в то же время $\omega_1 \leq \mathfrak{B}$ независимо от аксиомы выбора (можно взять последовательность множеств **WFT** $_\alpha$ из §5.2). Это означает, что $\mathfrak{B} > \mathfrak{p}_\alpha$ строго в $(\mathbf{HROD})^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$ для всех $\alpha < \omega_1$.

§ 17.6 Снова модель Соловея

Начиная доказательство теоремы 17.5.1, мы возвращаемся к модели Соловея из § 13.6. Напомним, что, по теореме 13.6.3, все **ROD** множества $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ измеримы в смысле меры λ из 6.1.1 (равно как и в смысле любой иной борелевской σ -конечной меры на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) а также имеют свойство Бэра и свойство совершенного ядра. Теорема 17.5.1 добавляет сюда еще одно свойство регулярности в области **ROD**.

Доказательство (теорема 17.5.1). Начиная доказательство, мы принимаем соглашения и обозначения определения 13.6.1. В частности, предполагается, что Ω — недостижимый кардинал в конструктивном универсуме $\mathbb{L}$, а форсинг $\mathcal{P} \in \mathbb{L}$ состоит из всех таких функций p , что область определения $\text{dom } p \subseteq \Omega$ конечна, и $p(\xi) \in \text{Coll}(\mathbb{N}, \xi)$ для каждого ординала $\xi \in \text{dom } p$.

Мы также будем использовать определения в связи с ∞ -борелевскими кодами из § 16.4, в частности, совокупности кодов $\mathbf{BC}^{\infty}$, $\mathbf{BC}^{\alpha}$, $\mathbf{BC}^{<\omega_1}$ и универсальные деревья $\mathbf{T}_{\rho}$ определения 16.5.1. Особую роль будут играть множества сжатых кодов $\mathbf{K}_{\rho}(a)$ определения 16.6.1, удовлетворяющие «лемме о сжатии» 16.6.3.

Главным элементом в доказательстве теоремы 17.5.1 является следующая теорема, аналогичная теореме 16.7.2. В ней $\text{OD}(a)$ обозначает класс всех тех множеств, которые можно определить $\in$ -формулами, содержащими только ординалы и само множество a в роли параметров. (Ср. с определением OD в § 3.5.)

Теорема 17.6.1. *Пусть множество $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}$ является $\mathcal{P}$ -генерическим над $\mathbb{L}$. Тогда в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$ истинно следующее: если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $1 \leq \rho < \omega_1^{\mathbb{L}[a]}$, и множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ принадлежит Π_{ρ}^0 и $\text{OD}(a)$, то найдется такой код $\kappa \in \mathbf{K}_{\rho}(a)$, что $X = B_{\kappa}$.*

Вывод теорема 17.5.1 из этой теоремы дается простой оценкой мощности. Именно, рассмотрим, в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$, произвольную трансфинитную **ROD** последовательность борелевских множеств из Π_{ρ}^0 для некоторого фиксированного ординала $\rho < \omega_1^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$. Понятно, что найдется точка $a \in \mathbb{L}[\mathcal{G}] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которой, во-первых, данная последовательность принадлежит $\text{OD}(a)$, и, во-вторых, $\rho < \omega_1^{\mathbb{L}[a]}$.

Тогда множество $\mathbf{K}_{\rho}(a)$ имеет мощность не выше $\omega_{\rho+1}^{\mathbb{L}[a]}$ в $\mathbb{L}[a]$. Однако мы имеем $\omega_{\rho+1}^{\mathbb{L}[a]} < \omega_1^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]} = \Omega$ в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$ по лемме 13.6.5, так что множество $\mathbf{K}_{\rho}(a)$ счетно в $\mathbb{L}[a]$.

С другой стороны, каждый член данной последовательности есть множество из $\text{OD}(a) \cap \Pi_{\rho}^0$ по выбору a — следовательно, он имеет код из $\mathbf{K}_{\rho}(a)$ по теореме 17.6.1. Тем самым, из-за счетности $\mathbf{K}_{\rho}(a)$,

данная последовательность имеет лишь счетное число попарно различных членов, что и требовалось.

□ (теорема 17.5.1 из теоремы 17.6.1)

§17.7 Доказательство теоремы о выборе кодов

Начиная доказательство теоремы 17.6.1, мы фиксируем

- (I) множество $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ -генерическое над $\mathbb{L}$, а также точку $a \in \mathbb{L}[\mathcal{G}_0] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ординал $1 \leq \rho < \omega_1^{\mathbb{L}[a]}$, и множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $X \in \mathbb{L}[\mathcal{G}_0]$, которое принадлежит $\Pi_\rho^0 \cap \text{OD}(a)$ в $\mathbb{L}[\mathcal{G}_0]$.

Иначе говоря, имеется $\in$ -формула $\varphi(a, x)$ с параметром a (и еще некоторыми ординалами в роли параметров — они для уменьшения громоздкости игнорируются), для которой $X = \{x : \varphi(a, x)\}$ в $\mathbb{L}[\mathcal{G}_0]$.

Следуя доказательству теоремы 16.7.2 в §16.9, мы построим такой ∞ -борелевский код $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbb{L}[a]$ с $|T| = \rho$, что $X = B_\varkappa$ в $\mathbb{L}[\mathcal{G}_0]$. Затем лемма 16.6.3 позволит нам «сжать» $\varkappa$ до кода из $K_\rho(a)$.

Пусть $R = T_\rho$ и $M = \text{Max } R$ (множество всех концевых вершин дерева R). По теореме 16.5.2, найдется функция $f \in \mathbb{L}[\mathcal{G}_0]$, $f: M \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющая условию 16.5.2(†) и такая, что в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$ выполнено $X = B_{Rf}$. По лемме 13.6.6, найдется $\mathcal{P}$ -генерическое над $\mathbb{L}[a]$ множество $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}$, для которого $\mathbb{L}[\mathcal{G}_0] = \mathbb{L}[a, \mathcal{G}]$. Теорема 9.2.6 приносит такое $\mathcal{P}$ -имя $\tau \in \mathbb{L}[a]$, что $f = \tau[\mathcal{G}]$. Таким образом, в $\mathbb{L}[\mathcal{G}_0] = \mathbb{L}[a, \mathcal{G}]$ выполнено равенство $X = B_{R, \tau[\mathcal{G}]}$. Значит, по теореме 9.3.2(ii), найдется такое «условие» $p_0 \in \mathcal{G}$, что

- (II) $p_0 \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a]} \langle \tau: \check{M} \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega} \text{ удовлетворяет } 16.5.2(\dagger) \wedge \wedge B_{\check{R}\tau} = \{x : \varphi(\check{a}, x)\} \rangle$,

где $\check{M}$, $\check{a}$, $\check{R}$ — канонические $\mathcal{P}$ -имена соответствующих множеств в универсуме $\mathbb{L}[a]$ (см. §9.2).

Далее нам понадобится следующая лемма, которая меняет форсинг $\Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a]}$ форсингом $\Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]}$ в существенной части условия (II).

Лемма 17.7.1. *Мы имеем $p_0 \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \langle B_{\check{R}\tau} = \{y : \varphi(\check{a}, y)\} \rangle$, каково бы ни было $x \in \mathbb{L}[a, \mathcal{G}] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Доказательство. Предположим противное. Найдется «условие» $p \in \mathcal{P}$, $p \leq p_0$, удовлетворяющее $p \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \langle B_{\check{R}\tau} \neq \{y : \varphi(\check{a}, y)\} \rangle$. Рассмотрим любое множество $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{P}$, содержащее p и $\mathcal{P}$ -генерическое над $\mathbb{L}[a, \mathcal{G}]$. Тогда $\mathcal{G}'$ будет $\mathcal{P}$ -генерическим и над $\mathbb{L}[a, x]$, а потому в $\mathbb{L}[a, x, \mathcal{G}']$ истинно: $B_{Rg} \neq \{y : \varphi(a, y)\}$, где $g = \tau[\mathcal{G}']$.

Напомним, что $R = \mathbf{T}_\rho \subseteq \rho^{<\omega}$ по теореме 16.5.2, и при этом $\rho < \omega_1^{\mathbb{L}[a]}$. Значит, существует биекция $\beta : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \rho^{<\omega}$, $\beta \in \mathbb{L}[a]$. С ее помощью, мы находим точку $c \in \mathbb{L}[a, \mathcal{G}] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которой $g \in \mathbb{L}[a, c]$. Итак, $\mathbf{B}_{Rg} \neq \{y : \varphi(a, y)\}$ есть $\in$ -формула с параметрами из $\mathbb{L}[a, c]$.

Заметим теперь, что, по лемме 13.6.6, в варианте с $\mathbb{L}[a, x]$ вместо $\mathbb{L}$ в роли исходной модели, класс $\mathbb{L}[a, x, \mathcal{G}']$ будет $\mathcal{P}$ -генерическим расширением класса $\mathbb{L}[a, x, c]$.

С другой стороны, по теореме о произведении форсингов 9.2.10, класс $\mathbb{L}[a, \mathcal{G}, \mathcal{G}']$ является $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ -генерическим расширением $\mathbb{L}[a]$, а следовательно, и $\mathcal{P}$ -генерическим расширением, поскольку форсинг $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, как нетрудно проверить, имеет плотное подмножество, изоморфное самому $\mathcal{P}$. Отсюда, опять по лемме 13.6.6, $\mathbb{L}[a, \mathcal{G}, \mathcal{G}']$ является $\mathcal{P}$ -генерическим расширением класса $\mathbb{L}[a, x, c]$.

Итак, мы имеем два $\mathcal{P}$ -генерических расширения, $\mathbb{L}[a, x, \mathcal{G}']$ и $\mathbb{L}[a, \mathcal{G}, \mathcal{G}']$, класса $\mathbb{L}[a, x, c]$. Отсюда, по лемме 13.6.7(D) в варианте с $\mathbb{L}[a, x, c]$ вместо $\mathbb{L}[w]$ в роли исходной модели, любая $\in$ -формула с параметрами из $\mathbb{L}[a, x, c]$ одновременно истинна либо одновременно ложна в обоих расширениях. Стало быть, по предыдущему, неравенство $\mathbf{B}_{Rg} \neq \{y : \varphi(a, y)\}$ выполнено в $\mathbb{L}[a, \mathcal{G}, \mathcal{G}']$.

Теперь зайдем с другой стороны. Множество $\mathcal{G}'$ является $\mathcal{P}$ -генерическим и над $\mathbb{L}[a]$, и, очевидно, $p_0 \in \mathcal{G}'$. Поэтому в $\mathbb{L}[a, \mathcal{G}']$ истинно равенство $\mathbf{B}_{Rg} = \{y : \varphi(a, y)\}$. При этом, снова по лемме 13.6.6, класс $\mathbb{L}[a, \mathcal{G}']$ является $\mathcal{P}$ -генерическим расширением класса $\mathbb{L}[a, c]$. С другой стороны, по тем же соображениям, что и выше (теорема о произведении 9.2.10 и лемма 13.6.6), $\mathbb{L}[a, \mathcal{G}, \mathcal{G}']$ является $\mathcal{P}$ -генерическим расширением классов $\mathbb{L}[a]$ и $\mathbb{L}[a, c]$. Следовательно, опять по лемме 13.6.7(D) в варианте с $\mathbb{L}[a, c]$ вместо $\mathbb{L}$ в роли исходной модели, равенство $\mathbf{B}_{Rg} = \{y : \varphi(a, y)\}$ выполнено и в $\mathbb{L}[a, \mathcal{G}, \mathcal{G}']$. Но это противоречит предыдущему. $\square$

Теперь, если $p \in \mathcal{P}$ и $s \in R$, то определим множество

$$Z_{ps} = \{x \in \mathbb{L}[\mathcal{G}_0] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : p \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \langle \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}_\tau}(\check{s}) \rangle\}.$$

Лемма 17.7.2. *Если $s \in M$ и $p \in \mathcal{P}$, $p \leq p_0$, то либо $Z_{ps} = \emptyset$, либо найдется такой кортеж $u_{ps} \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $u_{ps} \neq \Lambda$, что $Z_{ps} = [u_{ps}] \cap \mathbb{L}[\mathcal{G}_0] = \{y \in \mathbb{L}[\mathcal{G}_0] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : u_{ps} \subset y\}$. При этом множество*

$$D = \{\langle p, s \rangle \in \mathcal{P} \times M : p \leq p_0 \wedge Z_{ps} \neq \emptyset\}$$

и отображение $\langle p, s \rangle \mapsto u_{ps} : D \rightarrow \mathbb{N}^{<\omega} \setminus \{\Lambda\}$ принадлежат $\mathbb{L}[a]$.

Доказательство. В ходе доказательства, буквами p, q, r будут обозначаться только «условия» из $\mathcal{P}$. Мы утверждаем, что:

(А) если $q \leq p \leq p_0$, $\Lambda \neq u$, и $q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a]} \langle \tau(\check{s}) = \check{u} \rangle$, то $Z_{ps} \subseteq [u]$;

(В) если $q \leq p \leq p_0$ и $q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a]} \langle \tau(\check{s}) = \Lambda \rangle$, то $Z_{ps} = \emptyset$.

Для вывода (А), пусть $x \in Z_{ps}$, т. е. мы имеем $x \in \mathbb{L}[\mathcal{G}_0] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $p \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a,x]} \langle \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}) \rangle$, следовательно, и (1) $q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a,x]} \langle \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}) \rangle$, так как q — более сильное «условие». С другой стороны, коль скоро $q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a]} \langle \tau(\check{s}) = \check{u} \rangle$, мы имеем и (2) $q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a,x]} \langle \tau(\check{s}) = \check{u} \rangle$, так как всякое множество, генерическое над $\mathbb{L}[a, x]$, остается генерическим и над $\mathbb{L}[a] \subseteq \mathbb{L}[a, x]$. Соединяя (1) и (2), получаем $q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a,x]} \langle \check{u} \subset \check{x} \rangle$ по определению $\mathbf{B}_{Rf}(s)$ для $s \in \mathbf{Max} R$, так что просто $u \subset x$.

Вывод утверждения (В) аналогичен — но нужно помнить, что, по определению, $\mathbf{B}_{Rf}(s) = \emptyset$, когда $s \in \mathbf{Max} R$ и $f(s) = \Lambda$.

Вернемся к лемме. Согласно (II), если

$$u \in U = \{u \in \mathbb{N}^{<\omega} : \exists q \leq p (q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a]} \langle \tau(\check{s}) = \check{u} \rangle)\},$$

то $\mathbf{lh} u \leq \ell$, где $\ell = \mathbf{last} s \in \mathbb{N}$ (см. замечание 16.5.3). Теперь ход доказательства разбивается на три случая.

Случай 1: $\Lambda \in U$, т. е. имеется такое «условие» $q \leq p$, что $q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a]} \langle \tau(\check{s}) = \Lambda \rangle$ — тогда $Z_{ps} = \emptyset$ согласно (В).

Случай 2: $\Lambda \notin U$, и имеется пара несравнимых кортежей $u, v \in U$ (тогда $[u] \cap [v] = \emptyset$). Тогда $Z_{ps} \subseteq \bigcap_{u \in U} [u]$ по (А), так что $Z_{ps} = \emptyset$.

Случай 3: $\Lambda \notin U$, и все кортежи из U попарно $\subseteq$ -сравнимы. Тогда, раз длины кортежей из U ограничены сверху числом $\ell = \mathbf{last} s$, найдется такой кортеж $u_0 \in U$, что $v \subseteq u_0$ для любого другого кортежа $v \in U$. Мы утверждаем, что $Z_{ps} = [u_0] \cap \mathbb{L}[\mathcal{G}_0]$.

В нетривиальном направлении, пусть $x \in [u_0] \cap \mathbb{L}[\mathcal{G}_0]$; докажем, что $p \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a,x]} \langle \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}) \rangle$. Предположим противное: найдется такое «условие» $r \leq p$, что $r \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a,x]} \langle \check{x} \notin \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}) \rangle$. По выбору p_0 , существуют более сильное «условие» $q \leq r$ и кортеж $u \in \mathbb{N}^{<\omega}$, для которых $q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a]} \langle \tau(\check{s}) = \check{u} \rangle$. Тогда, с одной стороны, $u \in U$, в частности, $u \neq \Lambda$ по гипотезе случая 3, и (1) $u \subseteq u_0 \subset x$, т. е. $x \in [u]$. А с другой стороны, имеем $q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a,x]} \langle \tau(\check{s}) = \check{u} \rangle$, так что (2) $q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a,x]} \langle \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}) = [\check{u}] \rangle$ по определению $\mathbf{B}_{Rf}(s)$. Соединяя (1) и (2), получаем $q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a,x]} \langle \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}) \rangle$, что противоречит выбору r .

Для вывода второй части леммы, о множестве D и отображении $\langle p, s \rangle \mapsto u_{ps}$, достаточно заметить, что как первое так и второе определимы $\in$ -формулами с параметром a и, возможно, некоторыми ординалами в роли параметров, так что оба принадлежат $\mathbf{OD}(a)$ в $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$. Также очевидно, что оба они являются подмножествами класса $\mathbb{L}[a]$ (даже $\mathbb{L}$). Теперь искомый факт дается леммой 13.6.7(В). $\square$

Следующая лемма позволит определять множества Z_{ps} трансфинитной индукцией по $|s|_R$. Пусть $\mathbb{Q}_p = \{q \in \mathcal{P} : q \leq p\}$ для $p \in \mathcal{P}$.

Лемма 17.7.3. *Если $s \in R$, $|s|_R > 0$, и $p \in \mathbb{Q}_{p_0}$, то в $\mathbb{L}[\mathcal{G}_0]$ истинно, что $Z_{ps} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_p, s^\wedge \nu \in R} Z_{q, s^\wedge \nu}$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{L}[\mathcal{G}_0] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Если $x \in Z_{ps}$, то мы имеем $p \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \langle \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}) \rangle$. Но в то же время, по определению борелевской кодировки, $p \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \langle \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{\check{s}^\wedge \nu \in \check{R}} \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}^\wedge \nu) \rangle$. Следовательно, если $s^\wedge \nu \in R$, то $p \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \langle \check{x} \notin \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}^\wedge \check{\nu}) \rangle$. Поэтому, если $q \leq p$, то и $q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \langle \check{x} \notin \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}^\wedge \check{\nu}) \rangle$ — значит, $x \notin Z_{q, s^\wedge \nu}$.

Обратно, допустим, что $x \notin Z_{ps}$, т. е. $\neg p \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \langle \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}) \rangle$. Найдется «условие» $r \leq p$, для которого $r \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \langle \check{x} \notin \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}) \rangle$. Имеем $r \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \langle \exists \nu (\check{s}^\wedge \nu \in \check{R} \wedge \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}^\wedge \nu)) \rangle$ снова по определению борелевской кодировки. По теореме 9.3.2(х), найдутся «условие» $q \leq r$ и ординал ν , для которых $q \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \langle \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\check{s}^\wedge \check{\nu}) \rangle$ и $s^\wedge \nu \in R$. Тогда $x \in Z_{q, s^\wedge \nu}$, что и требовалось. $\square$

Наконец, связываем множества Z_{ps} с данным множеством X посредством следующей леммы.

Лемма 17.7.4. *В $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$ истинно, что $X = Z_{p_0, \Lambda}$.*

Доказательство. Пусть $x \in Z_{p_0, \Lambda}$, т. е. $p_0 \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\Lambda)$, так что $p_0 \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}$, а значит, $p_0 \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \varphi(\check{a}, \check{x})$ согласно лемме 17.7.1. Теперь из леммы 13.6.7 следует, что предложение $\varphi(a, x)$ истинно в любом $\mathcal{P}$ -генерическом расширении класса $\mathbb{L}[a, x]$. С другой стороны, класс $\mathbb{L}[\mathcal{G}_0] = \mathbb{L}[a, \mathcal{G}]$ является таким расширением — опять по лемме 13.6.6. Поэтому в $\mathbb{L}[\mathcal{G}_0]$ истинно $\varphi(a, x)$, т. е. $x \in X$, что и требовалось.

Обратно, пусть $x \in X$, т. е. в $\mathbb{L}[\mathcal{G}_0]$ истинно $\varphi(a, x)$. Опять по лемме 17.7.1, отсюда следует $p_0 \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}$, т. е. $p_0 \Vdash_{\mathcal{P}}^{\mathbb{L}[a, x]} \check{x} \in \mathbf{B}_{\check{R}\tau}(\Lambda)$ и $x \in Z_{p_0, \Lambda}$, что и требовалось. $\square$

Итак, мы имеем, в $\mathbb{L}[\mathcal{G}_0]$, индексированное семейство множеств Z_{ps} , $p \in \vartheta^{<\omega}$ и $s \in R$, для которого выполнены леммы 17.7.2, 17.7.3, 17.7.4. Следующая лемма доказывается совершенно аналогично лемме 16.9.4 — естественно, с помощью лемм 17.7.2 и 17.7.3 вместо 16.9.1 и 16.9.2 — и поэтому мы оставляем ее доказательство читателю в качестве **упражнения**.

Лемма 17.7.5. *Каждой паре из «условия» $p \in \mathbb{Q}_{p_0}$ и кортежа $s \in R$, можно сопоставить такой код $\kappa_{ps} = \langle T_{ps}, f_{ps} \rangle \in \mathbf{BC}^\infty \cap \mathbb{L}[a]$,*

что $|T_{ps}| = |s|_R$ и $Z_{ps} = \mathbf{B}_{\varkappa_{ps}}$, и при этом отображение $\langle p, s \rangle \mapsto \varkappa_{ps}$ принадлежит $\mathbb{L}[a]$. $\square$

Следствие 17.7.6. *Существует такой код $\varkappa = \langle T, f \rangle \in \mathbf{BC}^\infty \cap \mathbb{L}[a]$, что $|T_{ps}| = \rho$ и $X = \mathbf{B}_\varkappa$.*

Доказательство. Берем $\varkappa = \varkappa_{\Lambda, p_0}$ (при этом $|R|_\Lambda = |R| = \rho$) и ссылаемся на лемму 17.7.4. $\square$

Теперь доказательство теоремы 17.6.1 заканчивается ссылкой на лемму 16.6.3.

$\square$ (теоремы 17.6.1 и 17.5.1)

Исторические и библиографические замечания

Главной теореме 17.5.1 этой главы, дающей непротиворечивость отрицательных решений двух лузинских проблем из § 17.3, предшествовала серия близких и более частных результатов, которая была открыта теоремой Харрингтона о том, что, *в предположении полной аксиомы детерминированности $\mathbf{AD}^4$ не существует последовательностей из $\aleph_1$ попарно различных борелевских множеств ограниченного ранга*, и потому как узкая проблема континуума, так и узкая проблема Лебега решаются отрицательно — причем не только для эффективных в любом смысле, но и вообще для всех последовательностей борелевских множеств и разбиений континуума на борелевские множества.

Такая сильная форма отрицательного решения проблем оказалась возможна, разумеется, только вследствие того, что аксиома $\mathbf{AD}$ противоречит полной аксиоме выбора. Если ограничиться более умеренной аксиомой проективной детерминированности $\mathbf{PD}$ (которую принято считать совместимой с аксиомами $\mathbf{ZFC}$, хотя доказать это средствами современной теории множеств невозможно), то, как показал Стерн в [173, 174], результат о несуществовании сохраняет силу для проективно заданных последовательностей и разбиений.

Вопрос о замене гипотез детерминированности гораздо более слабым предположением о модели Соловея был поставлен Стерном в [174] и решен им же (теорема 17.5.1) в заключительной работе на эту тему [176] на основе метода заметки [175].

Мы вернемся к борелевским множествам ограниченного ранга в моделях Соловея в § 18.4.

⁴ Об этой аксиоме и других аксиомах детерминированности, которые здесь упоминаются, см. нашу книгу [19].

Глава 18

Дальнейшие результаты

В этой главе содержится краткий обзор результатов о свойствах регулярности проективных множеств, касающихся таких вопросов, как роль аксиомы существования недостижимого кардинала, свойства регулярности множеств начиная с третьего проективного уровня, и о некоторых менее традиционных свойствах регулярности. Размер книги заставляет нас ограничиться здесь лишь обзором главных результатов без доказательств, со ссылками на оригинальные работы. Соответственно, исторические ссылки приводятся здесь по ходу изложения.

§18.1 Нужен ли недостижимый кардинал?

Мы видели что аксиома существования (строго) недостижимого кардинала используется в доказательстве непротиворечивости предположения о том, что все проективные множества имеют каждое из трех свойств регулярности. Эта аксиома — довольно сильное утверждение, заведомо недоказуемое в **ZFC** (из него даже следует непротиворечивость **ZFC**), а потому возникает естественный вопрос: насколько эта гипотеза действительно необходима для достижения указанного результата.

Наиболее простой ответ получается для свойства совершенного ядра. Действительно, если каждое несчетное даже Π_1^1 -множество содержит совершенное подмножество то, по теореме 10.2.1, $\mathbb{L}[a] \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ счетно, т. е. $\omega_1^{\mathbb{L}[a]} < \omega_1$, для каждого $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Отсюда легко следует, что $\aleph_1$ — недостижимый кардинал в любом универсуме вида $\mathbb{L}[a]$, $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, в частности, в $\mathbb{L}$, или, другими словами, если утверждение $\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\omega_1^{\mathbb{L}[a]} < \omega_1)$ не противоречит **ZFC** то существование строго недостижимого кардинала также непротиворечиво (отмечено Любецким в [4]). Таким образом, в отношении доказательства непротиворечивости свойства совершенного ядра даже для Π_1^1 -множеств использование недостижимых кардиналов совершенно необходимо.

Вопрос о роли недостижимого кардинала для проблем LM и BP оказался значительно более сложным. Ответ различается для меры и категории:

Теорема 18.1.1 (Шелах [161], Райзонье [154]). *Из непротиворечивости **ZFC** следует непротиворечивость $\mathbf{ZFC} + \text{BP}(\Sigma_\infty^1)$, и даже $\mathbf{ZFC} + \text{BP}(\text{ROD})$.*

В то же время, любая из двух гипотез, $\text{LM}(\Sigma_2^1) \wedge \text{BP}(\Sigma_3^1)$, или $\text{LM}(\Sigma_3^1)$, влечет что $\aleph_1$ — недостижимый кардинал в $\mathbb{L}$ и в $\mathbb{L}[a]$ для любого $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, и тем самым влечет $\text{PK}(\Pi_1^1)$ по теореме 10.2.1(i).

Таким образом, аксиома недостижимого кардинала необходима для положительного решения проблемы измеримости для проективных (даже Σ_3^1) множеств, но без нее можно обойтись для положительного решения проблемы свойства Бэра. Впрочем, как показал Стерн [178], непротиворечивость $\text{LM}(\text{OD})$ (для ординально определимых множеств!) не требует недостижимого кардинала.

Аксиома Мартина **MA** (о ней см. [49, гл. 6]) существенно усиливает некоторые формы гипотез LM и BP. Например, в предположении **MA** $_{\aleph_1}$, недостижимость $\aleph_1$ в $\mathbb{L}[a]$, $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ следует уже из $\text{LM}(\Delta_3^1)$, а также из $\text{BP}(\Delta_3^1)$, см. [103]. (Без **MA** $_{\aleph_1}$ это не имеет места согласно теоремам 18.1.1 и 18.2.1.) Однако на самом деле непротиворечивость

теории $\mathbf{ZFC} + \mathbf{MA}_{\aleph_1} + \text{LM}(\Delta_3^1)$ (или, вместо последнего слагаемого, $\text{BP}(\Delta_3^1)$) влечет непротиворечивость существования даже такого большого кардинала как суперкомпактный [85, 98].

§ 18.2 Третий проективный уровень

Взаимоотношения между гипотезами $\text{LM}(\Sigma_2^1)$, $\text{BP}(\Sigma_2^1)$, $\text{LM}(\Delta_2^1)$, $\text{BP}(\Delta_2^1)$ в $\mathbf{ZFC}$ исчерпывающим образом решаются следствием 10.2.3 и теоремой 12.4.1 (в части доказуемых связей между ними) и теоремой 14.1.1 (в части недоказуемых связей). Для третьего проективного уровня сколько-нибудь полной картины нет. Однако удалось доказать следующее:

Теорема 18.2.1. (i) (Шелах [161]) *Из непротиворечивости $\mathbf{ZFC}$ следует непротиворечивость теории $\mathbf{ZFC} + \text{BP}(\Sigma_3^1)$;*

(ii) (Джюдах [102]) $\text{LM}(\Delta_3^1) \not\Rightarrow \text{BP}(\Delta_3^1)$;

(iii) (Джюдах [101, 102]) $\text{BP}(\Delta_3^1) \not\Rightarrow \text{LM}(\Delta_3^1)$.

В этой теореме, $A \not\Rightarrow B$ означает, что импликация $A \Rightarrow B$ недоказуема в $\mathbf{ZFC}$ (в предположении, что сама эта теория непротиворечива).

Комментарии к теореме.

(i) Наиболее простая модель для $\text{BP}(\Sigma_3^1)$ описана в [64, р. 470]: это итерированное расширение класса $\mathbb{L}$ с конечной базой, длины $\omega_1^{\mathbb{L}}$, в котором на предельных шагах применяется ε -случайный форсинг, а на непредельных шагах, по очереди, случайный и коэновский форсинги. Другая модель для $\text{BP}(\Sigma_3^1)$ представлена в [98]; в ней, кроме того, аксиома Мартина $\mathbf{MA}_{\aleph_1}$ верна для достаточно широкого класса ЧУ множеств.

(ii) Эта часть теоремы характеризуется в [104, 62] как совместный результат Багария и Джюдах. Модель, описанная в [64, теорема 9.4.19], выглядит так: мы начинаем с модели для $\mathbf{MA} + (\omega_1 = \omega_1^{\mathbb{L}})$, а затем используем форсинг, описанный в § 14.3 (присоединение $\aleph_1$ случайных точек). Более простая модель, использующая, однако, измеримый кардинал, указана в [103].

(iii) В сущности, может быть применена модель из § 14.6 (итерация доминирующего форсинга), поскольку, как показано в [64, теорема 9.4.7], в этой модели истинно не только $\text{BP}(\Sigma_2^1)$ но и $\text{BP}(\Delta_3^1)$.

Что касается *четвертого* проективного уровня, первый нетривиальный результат о свойствах регулярности здесь был получен Джюдахом и Спиасом [104]: $\text{LM}(\Delta_4^1) \not\Rightarrow \text{BP}(\Delta_4^1)$. (Доказательство использует аксиому о недостижимом кардинале, чего в этом случае

избежать нельзя, поскольку уже гипотеза $\text{LM}(\Sigma_3^1)$ влечет существование недостижимого кардинала по теореме 18.1.1.) Невыводимость обратной импликации здесь очевидна: согласно теореме 18.1.1, даже гипотеза $\text{BP}(\Delta_\infty^1)$ не влечет $\text{LM}(\Sigma_3^1)$. О дальнейших исследованиях в этом направлении см. [62].

Для пятого и более высоких уровней, никаких заслуживающих внимания результатов в этом направлении не появилось. В то же самое время, установлено, что некоторые комбинации утверждений о проективных множествах связаны либо с большими кардиналами, либо с гипотезами детерминированности. Так, в статье [80] доказано, что при любом n гипотеза $\text{BP}(\Sigma_3^1)$ (и даже гипотеза о некотором более сильном варианте свойства Бэра) совместима с предположением о существовании проективного полного упорядочения пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. При $n \geq 3$, в доказательстве предполагается непротиворечивость одной из гипотез больших кардиналов, зависящей от n . Этот результат интересен тем, что в типичных моделях для свойства Бэра в высших классах проективной иерархии, таких, как модель Соловея, или модели, указанные в комментарии (i) выше, проективных полных упорядочений континуума нет. О других подобных результатах см., например, работы [104, 105].

С другой стороны, Хаузер [91] установил, что если все проективные множества измеримы и имеют свойство Бэра, и дополнительно принцип **Униформизации** выполнен для класса Π_3^1 , то все игры класса Σ_2^1 детерминированы — что ведет к очень большим кардиналам.

§18.3 σ -ССС-идеалы и регулярность

Помимо меры, и категории польских топологий, еще одним типичным методом получения σ -ССС-идеалов являются не-польские ССС-топологии. С целью сохранения единства терминологии, назовем σ -ССС-топологией такую топологию, которая удовлетворяет второй аксиоме счетности (т. е. нет несчетных семейств попарно непересекающихся непустых открытых множеств) и является бэровской, т. е. непустые открытые множества не могут быть тощими. Сюда относится, например, польская топология бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или любого другого польского пространства, в частности, обычная топология вещественной прямой.

Богатым источником σ -ССС-топологий являются ССС форсинги. Рассмотрим, к примеру, доминирующий форсинг **D**. Каждому «условию» $p = \langle s, f \rangle \in \mathbf{D}$ сопоставляется множество

$$U_p = U_f^s = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : s \subset x \wedge \forall n (x(n) \geq f(n))\}.$$

Семейство всех множеств вида U_p , $p \in \mathbf{D}$, замкнуто относительно непустых конечных пересечений, вследствие чего его можно взять в роли базы топологии на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, которую мы обозначим через $\mathbf{t}_{\mathbf{D}}$. Вторая аксиома счетности для $\mathbf{t}_{\mathbf{D}}$ следует из условия ССС для $\mathbf{D}$, а бэровость — из того, что пересечение убывающей системы множеств $U_{f_0}^{s_0} \supseteq U_{f_1}^{s_1} \supseteq \dots \supseteq U_{f_n}^{s_n} \supseteq \dots$, такой что $\text{lh } s_n \rightarrow \infty$, содержит точку $x = \bigcup_n s_n$. Таким образом, идеал $\mathcal{I}_{\mathbf{D}}$ всех $\mathbf{t}_{\mathbf{D}}$ -тощих борелевских множеств $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является σ -ССС-идеалом.

Лемма 18.3.1. *Множество $\text{cod } \mathcal{I}_{\mathbf{D}} = \{c \in \mathbf{BC} : B_c \in \mathcal{I}_{\mathbf{D}}\}$ принадлежит классу Σ_2^1 .*

Доказательство. Рассматривая двойные последовательности вида $\langle \langle s_{kn}, f_{kn} \rangle \rangle_{k,n \in \mathbb{N}}$ как точки соответствующего пространства, мы находим, что соотношение $B_c \in \mathcal{I}_{\mathbf{D}}$ эквивалентно формуле

$$\begin{aligned} \exists \langle \langle s_{kn}, f_{kn} \rangle \rangle \left(\forall k, n \left(\langle s_{kn}, f_{kn} \rangle \in \mathbf{D} \right) \wedge \forall k \left(B_c \cap \bigcup_n U_{f_{kn}}^{s_{kn}} = \emptyset \right) \wedge \right. \\ \left. \wedge \forall k \forall \langle s, f \rangle \left(\langle s, f \rangle \in \mathbf{D} \implies \exists n \left(U_{f_{kn}}^{s_{kn}} \cap U_f^s \neq \emptyset \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь формулы $\langle s_{kn}, f_{kn} \rangle \in \mathbf{D}$ и $U_{f_{kn}}^{s_{kn}} \cap U_f^s \neq \emptyset$ являются арифметическими, а формула $B_c \cap \bigcup_n U_{f_{kn}}^{s_{kn}} = \emptyset$ легко приводится к Π_1^1 -виду при помощи формул теоремы 5.8.1, так что результат становится Σ_2^1 , что и требовалось. $\square$

Таким образом, $\mathcal{I}_{\mathbf{D}}$ является $\mathbb{L}$ -абсолютным σ -ССС-идеалом. Это означает, что к $\mathcal{I}_{\mathbf{D}}$ применима теорема 10.8.2. Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \text{Mes}_{\mathcal{I}_{\mathbf{D}}}(\Sigma_2^1) &\iff \forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \left(\mathbf{Rand}_{\mathcal{I}_{\mathbf{D}}} \mathbb{L}[a] - \text{не } \mathcal{I}\text{-полное} \right); \\ \text{Mes}_{\mathcal{I}_{\mathbf{D}}}(\Delta_2^1) &\iff \forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \forall c \in \mathbb{L}[a] \cap \mathbf{BC} \left(B_c \notin \mathcal{I}_{\mathbf{D}} \implies \right. \\ &\quad \left. \implies \mathbf{Rand}_{\mathcal{I}_{\mathbf{D}}} \mathbb{L}[a] \cap B_c \neq \emptyset \right). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить что к идеалу $\mathcal{I}_{\mathbf{D}}$ применимо доказательство, данное выше для теоремы 10.5.3(ii), что позволяет переписать вторую эквивалентность так:

$$\text{Mes}_{\mathcal{I}_{\mathbf{D}}}(\Delta_2^1) \iff \forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \left(\mathbf{Rand}_{\mathcal{I}_{\mathbf{D}}} \mathbb{L}[a] \neq \emptyset \right).$$

Значение и смысл свойства $\mathcal{I}_{\mathbf{D}}$ -измеримости, а также гипотез $\text{Mes}_{\mathcal{I}_{\mathbf{D}}}(\Sigma_2^1)$ и $\text{Mes}_{\mathcal{I}_{\mathbf{D}}}(\Delta_2^1)$, далеко не столь ясны как для идеалов $\mathcal{I}_{\text{cat}}$ и $\mathcal{I}_{\lambda}$. Тем более интересными представляются следующие результаты работы [66]:

- (i) $\text{Mes}_{\mathcal{I}_{\mathbf{D}}}(\Delta_2^1)$ эквивалентно $\text{BP}(\Sigma_2^1)$;

- (ii) $\text{Mes}_{\mathcal{S}_D}(\Sigma_2^1)$ эквивалентно $\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\omega_1^{\mathbb{L}[a]} < \omega_1^{\mathbb{L}})$, т. е. эквивалентно РК(Π_1^1) по теореме 10.2.1(i).

Итак, по заданному форсингу D мы построили $\mathbb{L}$ -абсолютный σ -ССС-идеал $\mathcal{S}_D$. В обратную сторону, определение 11.2.5 извлекает из последнего форсинг $\mathbb{P}_{\mathcal{S}_D}$, который дает те же генерические расширения что и исходный форсинг D — и по тем же причинам, что и для форсинга Коэна в § 11.5.

Как показано в книге [64, 3.4.В и 3.7], эту конструкцию σ -идеала можно модифицировать так, что она становится применимой к ряду других форсингов $\mathbb{P}$, не обязательно ССС и не обязательно связанных с какой-либо топологией. Ключевая идея может быть объяснена так. Предположим что t есть такое $\mathbb{P}$ -имя, что $\Vdash_{\mathbb{P}} (t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$, т. е. каждое «условие» из $\mathbb{P}$ вынуждает $t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ над универсумом всех множеств $\mathbb{V}$. Определим $\mathcal{S}_{\mathbb{P}t}$ как множество всех таких борелевских множеств вида B_p , что $\Vdash_{\mathbb{P}} (t \notin B_p)$. Если $\mathbb{P}$ есть ССС-форсинг, то $\mathcal{S}_{\mathbb{P}t}$ является σ -ССС-идеалом. Эта конструкция применима и к не-ССС-форсингам, вроде форсинга Сакса. Соответствующие свойства регулярности, уже не обязательно напрямую связанные с тем или иным идеалом, рассмотрены в статье [66]. О самых последних исследованиях в этом направлении можно узнать из книг [185], [115].

Еще один подход к построению σ -ССС-идеалов изложен в [157].

В заключение скажем несколько слов еще о двух свойствах регулярности, возникающих из топологических соображений. Множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ называется σ -ограниченным, если оно покрывается σ -компактным множеством, и называется $\mathbf{K}_{\sigma}$ -регулярным, если оно либо σ -ограничено, либо содержит суперсовершенное¹ подмножество. (Ср. со свойством совершенного ядра.) Множество

$$X \subseteq [\mathbb{N}]^{\omega} = \{x \subseteq \mathbb{N} : \text{card } x = \aleph_0\}$$

называется *рамсеевским*, если найдется такое бесконечное множество $z \subseteq \mathbb{N}$, что $[z]^{\omega} \subseteq X$ или $[z]^{\omega} \cap X = \emptyset$. (Это свойство возникает при рассмотрении некоторых вопросов инфинитарной комбинаторики и в теории моделей.)

Подобно свойствам РК, LM, ВР, каждое Σ_1^1 -множество $\mathbf{K}_{\sigma}$ -регулярно и является рамсеевским (см., например, [100, 116]), в то время как на втором проективном уровне возникают неразрешимые проблемы. См. статьи [96, 97] об исследованиях в этом направлении.

¹ Множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ называется *суперсовершенным*, если оно замкнуто в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, не имеет изолированных точек, и не является σ -компактным ни на одном из своих непустых пересечений с бэровскими интервалами. Это равносильно тому, что X замкнуто и гомеоморфно самому пространству $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Для примера, приведем один из полученных результатов: гипотеза $\text{BP}(\Sigma_2^1)$ влечет $\mathbf{K}_\sigma$ -регулярность всех Σ_2^1 -множеств, но не наоборот.

§ 18.4 Континуум-гипотеза и отношения эквивалентности

Здесь мы возвращаемся к свойству совершенного ядра, рассмотренному выше в § 6.1 в связи с континуум-гипотезой. Имеется другая, более общая постановка вопроса, в которой место точек занимают точечные множества — а именно, классы эквивалентности того или иного отношения эквивалентности на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или другом польском пространстве $\mathbb{X}$, или, что равносильно, элементы X_α какого-нибудь разбиения $\mathbb{X} = \bigcup_\alpha X_\alpha$ пространства $\mathbb{X}$ на попарно дизъюнктные множества. Рассматривается следующий вариант определения из § 6.1.

Свойство совершенной трансверсали. Отношение эквивалентности $\mathbf{E}$ на пространстве $\mathbb{X}$ имеет *свойство совершенной трансверсали*, если либо существует лишь счетно много классов $\mathbf{E}$ -эквивалентности (т. е. фактор-множество $\mathbb{X}/\mathbf{E}$ не более чем счетно), либо существует совершенная $\mathbf{E}$ -трансверсаль, т. е. совершенное множество $P \subseteq \mathbb{X}$, являющееся $\mathbf{E}$ -трансверсалью.²

Упражнение 18.4.1. Покажите, что определение из § 6.1 является частным случаем данного определения. Для этого сопоставьте множеству X польского пространства $\mathbb{X}$ отношение эквивалентности $\mathbf{E}_X$ на $\mathbb{X}$ так, что $x \mathbf{E}_X y$, когда либо $x = y \in X$ либо $x, y \in \mathbb{X} \setminus X$ — так что классами эквивалентности являются все синглетоны $\{x\}$, $x \in X$, а также множество $\mathbb{X} \setminus X$. Тогда X имеет совершенное подмножество, если и только если $\mathbf{E}_X$ имеет совершенную трансверсаль.

Докажите, что если X — множество класса Σ_n^1 или Π_n^1 , то $\mathbf{E}_X$ — отношение двойственного класса, соответственно, Π_n^1 или Σ_n^1 . $\square$

Подобно свойству совершенного ядра, это свойство совершенной трансверсали имеет отношение к континуум-гипотезе $\mathfrak{c} = \aleph_1$. Именно, если мы докажем, что отношения эквивалентности $\mathbf{E}$ из некоторого класса $\mathcal{E}$ все имеют свойство совершенной трансверсали, то отсюда сразу можно заключить, что множества вида $\mathbb{X}/\mathbf{E}$, где $\mathbf{E} \in \mathcal{E}$ и $\mathbb{X} = \text{dom } \mathbf{E}$ (польское пространство) не могут служить опровержениями к $\mathfrak{c} = \aleph_1$. Таким образом, в сущности, речь идет о продолжении того подхода к **СН**, который был начат классическими теоремами

² $\mathbf{E}$ -трансверсалью, или попарно $\mathbf{E}$ -неэквивалентным множеством называется любое множество X из попарно $\mathbf{E}$ -неэквивалентных точек. Мы не требуем, чтобы трансверсаль пересекала каждый класс $\mathbf{E}$ -эквивалентности.

Александрова – Хаусдорфа и Суслина о свойстве совершенного ядра для борелевских и Σ_1^1 -множеств.

В этом контексте весьма важна следующая теорема (на русском языке см. [19, теорема 12.1.1 и § 12.8]), которая, в силу сказанного выше, является обобщением классических результатов (теорема 6.3.1 в отношении $\text{PK}(\Sigma_1^1)$ и следствие 6.3.2).

- Теорема 18.4.2.** (i) (Сильвер [165]) *Любое Π_1^1 -отношение эквивалентности E на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет свойство совершенной трансверсали: либо E имеет лишь счетно много классов E -эквивалентности, либо существует совершенная E -трансверсаль.*
- (ii) (Бэрджес [67]) *Любое Σ_1^1 -отношение эквивалентности E на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ либо имеет $\leq \aleph_1$ классов эквивалентности, либо же существует совершенная E -трансверсаль.* $\square$

Назовем *тонким* (в англоязычной литературе: thin) такое отношение эквивалентности (на множестве одного из польских пространств), для которого нет совершенного множества попарно неэквивалентных точек. В этой терминологии теорему 18.4.2(i) можно переформулировать так: *всякое тонкое Π_1^1 -отношение эквивалентности имеет не более чем счетное число классов эквивалентности.* Ключевым моментом доказательства является то, что если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то любой класс эквивалентности тонкого $\Pi_1^1(a)$ -отношения эквивалентности есть $\Delta_1^1(a)$ -множество.

К сожалению, теорема 18.4.2(ii) уже не имеет места для Σ_1^1 -отношений эквивалентности, не говоря об отношениях более высоких проективных классов.

Упражнение 18.4.3 (= предложение 12.8.1 в [19]). Рассмотрим любое неборелевское Π_1^1 -множество $C \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, разбитое на борелевские конституанты: $C = \bigcup_{\alpha < \omega_1} C_\alpha$. Определим отношение E так:

$$x E y, \text{ если и только если } \exists \alpha (x \in C_\alpha \wedge y \in C_\alpha) \vee (x \notin C \wedge y \notin C).$$

Докажите, что E — тонкое Σ_1^1 -отношение эквивалентности, и E имеет несчетно много (ровно $\aleph_1$) классов эквивалентности. $\square$

Остается открытым вопрос всегда ли можно получить *абсолютный* список классов эквивалентности данного тонкого Σ_1^1 -отношения E в виде последовательности $\langle K_\alpha \rangle_{\alpha < \omega_1}$, где каждый класс E -эквивалентности K_α задан конкретным, эффективным образом. (Известные доказательства не приносят этого свойства.) Такая эффективность достижима (см. работы [68] и [93]), если предположить, что выполняется «гипотеза дизелов» (она родственна некоторым гипотезам существования больших кардиналов), либо же универсум всех

множеств $\mathbb{V}$ является генерическим расширением конструктивного универсума $\mathbb{L}$. (Известно, что эти две гипотезы несовместимы.)

Исследование тонких Σ_1^1 -отношений облегчается в случае, когда все классы эквивалентности данного отношения суть борелевские множества, причем *ограниченного ранга* — такие отношения принято называть *лузинскими*, поскольку Н. Н. Лузин был инициатором их изучения (см. § 7.5 об истории вопроса). Хотя и здесь нельзя утверждать, что каждое лузинское Σ_1^1 -отношение имеет лишь счетно много классов (пример тонкого Σ_1^1 -отношения с классами эквивалентности из Π_3^0 и несчетным числом классов указан Сами в работе [158]), но в этом случае классы по крайней мере допускают эффективное перечисление счетными ординалами.

Заметим также, что те полные разбиения на внешние и внутренние конституанты, о которых идет речь в проблеме ОПТАС (см. § 7.5), соответствуют тонким Σ_1^1 -отношениям эквивалентности, однако для этого специального типа Σ_1^1 -отношений удастся доказать (следствие 16.1.4), что каждое лузинское Σ_1^1 -отношение этого типа имеет лишь счетно много классов.

Стандартная дополнительная гипотеза о том, что $\omega_1^{L[a]} < \omega_1$ для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, позволяет получить свойство совершенной трансверсали для лузинских даже Δ_2^1 -отношений, согласно следующей теореме Стерна [176] (см. также статью В. Г. Кановея [10], где результат получен специально для отношений эквивалентности, порожденных разбиением на конституанты).

Теорема 18.4.4. *Если $\omega_1^{L[a]} < \omega_1$ для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то всякое лузинское Δ_2^1 -отношение эквивалентности на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет свойство совершенной трансверсали.* $\square$

Эта теорема влечет теорему 16.1.1 в варианте $(\star')$. В самом деле, в условиях теоремы 16.1.1, отношение эквивалентности

$$x \mathrel{E} y \iff \text{либо обе точки } x, y \text{ принадлежат внутреннему множеству } A[\mathfrak{F}], \text{ либо же обе точки } x, y \text{ принадлежат одной и той же внешней конституанте } C_\xi[\mathfrak{F}]$$

является Σ_1^1 -отношением на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (по теореме 5.4.3), а совершенное множество $P \subseteq C[\mathfrak{F}]$ может пересекать лишь счетно много внешних конституант $C_\xi[\mathfrak{F}]$ по теореме 5.3.4.

На самом деле, работа [176] содержит и более тонкий поуровневый анализ роли неравенств вида $\omega_\xi^{L[a]} < \omega_1$.³ В частности, установ-

³ Напомним, что если $\omega_1^{L[a]} < \omega_1$ для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, то, по лемме 8.5.2, и $\omega_\xi^{L[a]} < \omega_1$ для всех $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\xi < \omega_1$.

лено, что если $n \in \mathbb{N}$ и $\omega_n^{L[a]} < \omega_1$, то для любого тонкого $\Sigma_1^1(a)$ -отношения E , если все E -классы являются Σ_{n+3}^0 -множествами, то E имеет лишь счетно много классов эквивалентности. Отметим, что при $n = 0$ гипотеза $\omega_0^{L[a]} = \omega < \omega_1$ просто очевидна, а потому в качестве следствия мы получаем, что если $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и все классы эквивалентности тонкого $\Sigma_1^1(a)$ -отношения E являются Σ_{n+3}^0 -множествами, то E имеет лишь счетно много классов. О дальнейших исследованиях в этом направлении см. большую статью Дебса и Сан Раймона [74].

Более сильная, чем $\omega_1^{L[a]} < \omega_1, \forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, гипотеза модели Соловея, приносит и следующий более общий результат, который уместно сравнить не только с 18.4.4, но и с теоремами 17.5.1 и 18.4.2, а также с теоремой 6.3.1 (в отношении $\text{PK}(\Sigma_1^1)$) и следствием 6.3.2.

Теорема 18.4.5. *В модели Соловея $\mathbb{L}[\mathcal{G}]$ истинно следующее.*

- (i) (Соловей [166]) *каждое **ROD** множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет свойство совершенного ядра;*
- (ii) (Стерн [176]) *каждое **ROD** отношение эквивалентности E на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ либо имеет $\leq \aleph_1$ классов эквивалентности, либо существует совершенная E -трансверсаль;*
- (iii) (Стерн [176]) *каждое **лузинское ROD** отношение эквивалентности E на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет свойство совершенной трансверсали, т. е. либо E имеет лишь счетно много классов эквивалентности, либо существует совершенная E -трансверсаль.*

Соответственно, во второй модели Соловея $(\mathbf{HROD})^{\mathbb{L}[\mathcal{G}]}$ вообще каждое множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет свойство совершенного ядра, каждое отношение эквивалентности E на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ либо имеет $\leq \aleph_1$ классов эквивалентности, либо существует совершенная E -трансверсаль, и каждое **лузинское** отношение эквивалентности имеет свойство совершенной трансверсали. $\square$

В последнее время одной из центральных тем в работах по дескриптивной теории множеств стало исследование трансверсалей, «больших» в других смыслах, чем просто совершенные множества. Собственно говоря, для любого σ -идеала $\mathcal{I}$ в алгебре борелевских множеств $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ можно ставить вопрос о критериях того, что данное борелевское (или Σ_1^1 , Π_1^1 , и т. д.) отношение эквивалентности E на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеет $\mathcal{I}$ -большую трансверсаль $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — т. е. просто E -трансверсаль P должна быть борелевским множеством не из идеала $\mathcal{I}$. Наиболее простым из нетривиальных здесь является случай идеала $\mathcal{I}_{\text{счет}}$ всех не более чем счетных $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, для которого поставленный вопрос равносителен существованию совершенной трансверсали — со всеми изложенными выше результатами.

Ряд других σ -идеалов борелевских множеств рассмотрен в этом плане в монографии [115]. Одним из лучше изученных среди них является идеал $\mathcal{I}_{\sigma\text{-огр}}$ σ -ограниченных множеств $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (т. е. тех, которые покрываются σ -компактными множествами). По теореме Гуревича – Сан Раймона (теорема 3.5.4 в книге [19]), для того, чтобы Σ_1^1 -множество $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ содержало суперсовершенное (см. сноску 1 на стр. 348) подмножество, необходимо и достаточно (необходимость очевидна), чтобы X не принадлежало идеалу $\mathcal{I}_{\sigma\text{-огр}}$. Следующая теорема В. Г. Кановея и В. А. Любецкого [110] может рассматриваться как далеко идущее обобщение этого классического результата.

Теорема 18.4.6. *Если $F_1, \dots, F_n$ — борелевские отношения эквивалентности на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ — множество из Σ_1^1 , то для существования суперсовершенного множества $P \subseteq X$, являющегося F_k -трансверсалью для всех $k = 1, \dots, n$, необходимо и достаточно, чтобы X нельзя было накрыть объединением счетного числа компактных множеств и классов эквивалентности отношений F_k .*

Обобщения этого результата на проективные или **ROD** множества и отношения в модели Соловея пока неизвестны, но в статье [107] получены некоторые обнадеживающие результаты.

Цитированная литература

- [1] *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию — Москва: Наука, 1977. — 368 с.
- [2] *Арсенин В. Я., Ляпунов А. А.* Теория A -множеств // *УМН.* — 1950. — Т. 5, № 5. — С. 45–108.
- [3] *Архангельский А. В.* Канторовская теория множеств. — Москва: Изд-во МГУ, 1988. — 112 с.
- [4] *Драгалин А. Г., Любецкий В. А.* Независимость некоторых проблем аксиоматической теории множеств // Тезисы докладов на Всесоюзном симпозиуме по математической логике. — Алма-Ата, 1969. — С. 12–17.
- [5] *Кановей В. Г.* О несчетных последовательностях множеств, даваемых операцией решета // *Доклады АН СССР.* — 1981. — Т. 257, № 4. — С. 808–812.
- [6] *Кановей В. Г.* Добавление. Проективная иерархия Лузина: современное состояние теории // В книге [49]. — 1982. — С. 273–364.
- [7] *Кановей В. Г.* О некоторых проблемах дескриптивной теории множеств и определимости в теории типов // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам / Под ред. А. Михайлов. — Москва: Наука, 1983. — С. 21–81.
- [8] *Кановей В. Г.* О структуре конститuant Π_1^1 -множеств // *Сиб. матем. журн.* — 1983. — Т. 24, № 2. — С. 56–76.
- [9] *Кановей В. Г.* Аксиома выбора и аксиома детерминированности. — Москва: Наука, 1984. — 64 с.
- [10] *Кановей В. Г.* Неразрешимые и разрешимые свойства конститuant // *Матем. Сб.* — 1984. — Т. 125, № 4. — С. 505–535.
- [11] *Кановей В. Г.* Развитие дескриптивной теории множеств под влиянием работ Н. Н. Лузина // *УМН.* — 1985. — Т. 40, № 3(243). — С. 117–155, 240.

¹В настоящей книге все ссылки на переведенные публикации даются на их русские переводы а не на оригиналы, если не оговорено противное.

- [12] Кановей В. Г. К проблемам Н. Н. Лузина о существовании СА-множеств, не имеющих совершенных подмножеств // *Мат. Заметки*. — 1987. — Т. 41, № 5. — С. 750–759.
- [13] Кановей В. Г. Об упорядоченных структурах Хаусдорфа // *Известия РАН, сер. матем.* — 2009. — Т. 73, № 5. — С. 83–104.
- [14] Кановей В. Г., Любецкий В. А. О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств // *УМН*. — 2003. — Т. 58, № 5(353). — С. 3–88.
- [15] Кановей В. Г., Любецкий В. А. О множестве конструктивных вещественных чисел // *Труды МИАН*. — 2004. — Т. 247. — С. 95–128.
- [16] Кановей В. Г., Любецкий В. А. О совершенных подмножествах инвариантных СА-множеств // *Математические заметки*. — 2005. — Т. 77, № 3. — С. 334–338.
- [17] Кановей В. Г., Любецкий В. А. Проблемы теоретико-множественного нестандартного анализа // *УМН*. — 2007. — Т. 62, № 1. — С. 51–122.
- [18] Кановей В. Г., Любецкий В. А. Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики. — Москва: Наука, 2007. — 231 с.
- [19] Кановей В. Г., Любецкий В. А. Современная теория множеств: борелевские и проективные множества. — Москва: МЦНМЕ, 2010. — 320 с.
- [20] Кановей В. Г., Любецкий В. А., Реекен М. О сводимости монадических отношений эквивалентности // *Математические заметки*. — 2007. — Т. 81, № 6. — С. 842–854.
- [21] Келдыш Л. В. Верхние оценки для классов действительных конституант аналитического дополнения // *Изв. АН СССР. Серия матем.* — 1937. — Т. 1, № 2. — С. 265–284.
- [22] Келдыш Л. В. Идеи Н. Н. Лузина в дескриптивной теории множеств // *УМН*. — 1974. — Т. 29, № 5. — С. 183–196.
- [23] Кук Р. Архив Лузина // *ИМИ*. — 1993. — Т. 34. — С. 246–255.
- [24] Кусраев А., Кутателадзе С. Введение в булевозначный анализ. — Москва: Наука, 2005. — 526 с.
- [25] Лузин Н. Н. Современное состояние теории функций действительного переменного. — М.-Л.: ГТТИ, 1933. — 58 с.
- [26] Лузин Н. Н. О стационарных последовательностях // *Труды физ.-мат. ин-та, отд. матем.* — 1934. — Т. 5. — С. 125–147.
- [27] Лузин Н. Н. О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций. — Москва: Изд-во АН СССР, 1935. — 86 с.
- [28] Лузин Н. Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. Редакция, предисловие, и примечания Л. В. Келдыш и П. С. Новикова. — Москва: ГИТТЛ, 1953. — 360 с. — Сокращенный пер. с фр. книги [135].

- [29] Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. — Москва: Изд-во АН СССР, 1958. — 744 с.
- [30] Любецкий В. А. Некоторые следствия гипотезы о несчетности множества конструктивных действительных чисел // *ДАН СССР*. — 1968. — Т. 182, № 43. — С. 758–759.
- [31] Любецкий В. А. Из существования неизмеримого множества типа A_2 вытекает существование несчетного множества, не содержащего совершенного подмножества, типа CA // *ДАН СССР*. — 1970. — Т. 195, № 3. — С. 548–550.
- [32] Любецкий В. А. Из существования неизмеримого множества типа A_2 следует существование несчетного множества типа CA , не содержащего совершенного подмножества // Тезисы докладов по алгебре, математической логике и вычислительной математике конференции педвузов центральной зоны РСФСР. — Иваново, 1970. — С. 22–24.
- [33] Любецкий В. А. Измеримость и наличие совершенного ядра у проективных множеств: Дис ... канд. ф.-м. наук / Московский Университет. — 1971.
- [34] Любецкий В. А. Независимость некоторых предложений дескриптивной теории множеств от теории множеств Цермело – Френкеля // *Вестник Моск. Унив. сер. мат., мех.* — 1971. — № 2. — С. 78–82.
- [35] Любецкий В. А. Случайные последовательности чисел и A_2 -множества // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам / Под ред. Д. А. Бочвар. — Москва: Наука, 1976. — С. 96–122.
- [36] Любецкий В. А. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа // *УМН*. — 1988. — Т. 44, № 4. — С. 99–153.
- [37] Ляпунов А. А. Обзор по дескриптивной теории множеств // В книге [40]. — С. 55–82.
- [38] Ляпунов А. А. О некоторых равномерных аналитических дополнениях // *Изв. АН СССР. Серия матем.* — 1937. — Т. 1, № 2. — С. 285–305.
- [39] Ляпунов А. А. B -функции // *УМН*. — 1950. — Т. 5, № 5. — С. 109–119.
- [40] Ляпунов А. А. Вопросы теории множеств и теории функций. — Москва: Наука, 1979. — 264 с.
- [41] Малыгин В. И. Топология и форсинг // *УМН*. — 1983. — Т. 38, № 1. — С. 69–118.
- [42] Новиков П. С. О взаимоотношении второго класса проективных множеств и проекций равномерных аналитических дополнений // *Изв. АН СССР. Серия матем.* — 1937. — Т. 1, № 2. — С. 231–252. — В кн. [44] стр. 64–77.
- [43] Новиков П. С. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств // *Тр. матем. ин-та АН СССР им.*

- В. А. Стеклова.* — 1951. — Т. 38. — С. 279–316. — В кн. [44] стр. 170–202.
- [44] *Новиков П. С.* Избранные труды: теория множеств и функций, математическая логика и алгебра. — Москва: Наука, 1979. — 397 с.
- [45] *Новиков П. С., Келдыш Л. В.* Комментарии к работам Н. Н. Лузина // В книге [29]. — С. 725–739.
- [46] *Новиков П. С., Келдыш Л. В.* Работы Н. Н. Лузина в области дескриптивной теории множеств // *УМН.* — 1953. — Vol. 8, no. 2. — Рр. 93–104. — В кн. [44] стр. 108–116.
- [47] *Новиков П. С., Ляпунов А. А.* Дескриптивная теория множеств // *Математика в СССР за 30 лет.* — М.-Л.: Гостехиздат, 1948. — С. 243–255. — В кн. [44] стр. 96–107.
- [48] *Справочная книга по математической логике. Часть I. Теория моделей / Под ред. К. Д. Баруайз. Пер. с англ. С. С. Гончарова, В. Д. Дзгоева, К. Ф. Самохвалова, Д. И. Свириденко, под ред. Ю. Л. Ершова, Е. А. Палютина, А. Д. Тайманова.* — Москва: Наука, 1982. — 392 с.
- [49] *Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств / Под ред. К. Д. Баруайз. Пер. с англ. В. Г. Кановея, под ред. и с предисловием В. Н. Гришина, с добавлением В. Г. Кановея.* — Москва: Наука, 1982. — 375 с.
- [50] *Справочная книга по математической логике. Часть III. Теория рекурсии / Под ред. К. Д. Баруайз. Пер. с англ. С. Г. Дворникова и В. А. Лаврова, под ред. Ю. Л. Ершова.* — Москва: Наука, 1982. — 360 с.
- [51] *Тихомиров В. М.* Открытие $\mathcal{A}$ -множеств // *Историко-матем. исследования.* — 1993. — Т. 34. — С. 129–139.
- [52] *Успенский В. А.* Вклад Н. Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания // *УМН.* — 1985. — Т. 40, № 3(243). — С. 85–116, 240.
- [53] *Успенский В. А., Кановея В. Г.* Проблемы Лузина о конституантах и их судьба // *Вестник Моск. Унив. сер. мат., мех.* — 1983. — С. 73–87.
- [54] *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. Пер. с нем. Н. Б. Веденисова, под редакцией и с дополнениями проф. П. С. Александрова и проф. А. Н. Колмогорова. — Москва: ОНТИ, 1937. — 305 с.
- [55] *Шенфилд Д.* Неразветвленное вынуждение // В русском переводе книги [163]. — С. 482–519.
- [56] *Щегольков Е. А.* Элементы теории B -множеств // *УМН.* — 1950. — Т. 5, № 5. — С. 14–44.
- [57] *Янков В.* Об унификации $\mathcal{A}$ -множеств // *ДАН СССР.* — 1941. — Т. 30, № 7. — С. 591–592.

- [58] *Aczel P.* Non-well-founded sets. — Stanford: Stanford University, 1988. — Vol. 14 of *CSLI Lecture Notes*. — xx+137 pp.
- [59] *Addison J. W.* Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory. // *Fundam. Math.* — 1959. — Vol. 46. — Pp. 123–135.
- [60] *Addison J. W.* Some consequences of the axiom of constructibility. // *Fundam. Math.* — 1959. — Vol. 46. — Pp. 337–357.
- [61] *Alexandroff P.* Sur la puissance des ensembles mesurables B . // *C. R. Acad. Sci. Paris*. — 1916. — Vol. 162. — Pp. 323–325.
- [62] *Bagaria J., Woodin W. H.* Δ_n^1 sets of reals. // *J. Symb. Log.* — 1997. — Vol. 62, no. 4. — Pp. 1379–1428.
- [63] *Bartoszyński T.* Additivity of measure implies additivity of category // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1984. — Vol. 281, no. 1. — Pp. 209–213.
- [64] *Bartoszyński T., Judah H.* Set theory, on the structure of the real line. — Wellesley, Massachusetts: A K Peters, 1995. — xii+546 pp.
- [65] *Baumgartner J. E.* Iterated forcing // *Surveys in set theory*. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983. — Vol. 87 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* — Pp. 1–59.
- [66] *Brendle J., Löwe B.* Solovay-type characterizations for forcing-algebras. // *J. Symb. Log.* — 1999. — Vol. 64, no. 3. — Pp. 1307–1323.
- [67] *Burgess J. P.* Equivalences generated by families of Borel sets. // *Proc. Am. Math. Soc.* — 1978. — Vol. 69. — Pp. 323–326.
- [68] *Burgess J. P.* Effective enumeration of classes in a Σ_1^1 equivalence relation. // *Indiana Univ. Math. J.* — 1979. — Vol. 28. — Pp. 353–364.
- [69] *Chaber J., Gruenhage G., Pol R.* On a perfect set theorem of A. H. Stone and N. N. Lusin's constituents // *Fundam. Math.* — 1995. — Vol. 148, no. 3. — Pp. 309–318.
- [70] *Chaber J., Pol R.* On the Cantor-Bendixson derivative, resolvable ranks, and perfect set theorems of A. H. Stone. // *Isr. J. Math.* — 1999. — Vol. 110. — Pp. 103–123.
- [71] *Chang C. C., Keisler H. J.* Model Theory, 3rd edition. — Amsterdam: North Holland, 1992. — XIV + 650 pp. — Русский перевод первого издания книги: Кейслер Г., Чэн Ч. Ч., Теория моделей, М.: Мир, 1977.
- [72] Cinq lettres sur la théorie des ensembles / R. Baire, E. Borel, J. Hadamard, H. Lebesgue // *Bulletin de la Société Mathématique de France*. — 1905. — Vol. 33. — Pp. 261–273.
- [73] *Cohen P.* Set theory and the continuum hypothesis. — New York – Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc., 1966. — VI + 154 pp. — Русский перевод: Коэн, П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, М.: Мир, 1969.

- [74] *Debs G., Saint Raymond J.* Borel liftings of Borel sets: some decidable and undecidable statements. // *Mem. Am. Math. Soc.* — 2007. — Vol. 876. — 118 pp.
- [75] *Devlin K.* The joy of sets. Fundamentals of contemporary set theory. Undergraduate Texts in Mathematics. — 2 edition. — New York et. al.: Springer-Verlag, 1993. — x+192 pp.
- [76] *Douwen, E. van.* The integers and topology // *Handbook of Set Theoretic Topology.* — North Holland, 1984. — Pp. 111–167.
- [77] *Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y.* Foundations of set theory. — Amsterdam: North- Holland, 1958. — X+415 pp. — Русский перевод: Френкель, А. А. и Бар-Хиллел, И., Основания теории множеств, М.: Мир, 1966.
- [78] *Fremlin D., Shelah S.* On partitions of the real line. // *Isr. J. Math.* — 1979. — Vol. 32. — Pp. 299–304.
- [79] *Friedman H.* Countable models of set theories // Cambridge summer school in mathematical logic, Cambridge, 1971 / Ed. by Mathias, A.R.D. and Rogers, H. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1973. — Vol. 337 of *Lecture Notes in Mathematics.* — Pp. 539–573.
- [80] *Friedman S. D., Schindler R.* Universally Baire sets and definable well-orderings of the reals. // *J. Symb. Log.* — 2003. — Vol. 68, no. 4. — Pp. 1065–1081.
- [81] *Gao S.* Invariant descriptive set theory. — Boca Raton, Fl.: CRC Press, 2009. — xiv+383 pp.
- [82] *Gödel K.* The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* — 1938. — Vol. 24. — Pp. 556–557.
- [83] *Gödel K.* The Consistency of the Axiom of Choice and of the Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory. — Princeton: Princeton University Press, 1940. — Vol. 3 of *Annals of Mathematics Studies.* — 66 pp. — Русский перевод: Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, УМН, 1948, т. 3, вып. 1, с. 96–149.
- [84] *Groszek M. J., Slaman T. A.* A basis theorem for perfect sets // *Bull. Symbolic Logic.* — 1998. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 204–209.
- [85] *Harrington L., Shelah S.* Some exact equiconsistency results in set theory. // *Notre Dame J. Formal Logic.* — 1985. — Vol. 26. — Pp. 178–188.
- [86] Harvey Friedman's research on the foundations of mathematics / Ed. by Harrington, L. A. and Morley, M. D. and Ščedrov, A. and Simpson, S. G. — Amsterdam - New York - Oxford: North-Holland, 1985. — Vol. 117 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* — XVI+408 pp.
- [87] *Hausdorff F.* Die Graduierung nach dem Endverlauf. // *Leipzig Abh.* — 1909. — Vol. 31. — Pp. 297–334.

- [88] *Hausdorff F.* Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen. // *Math. Ann.* — 1916. — Vol. 77. — Pp. 430–437.
- [89] *Hausdorff F.* Summen von $\aleph_1$ Mengen. // *Fundam. Math.* — 1936. — Vol. 26. — Pp. 241–255.
- [90] *Hausdorff F.* Hausdorff on ordered sets. — American Mathematical Society, Providence; London Mathematical Society, London, 2005. — Vol. 25 of *History of Mathematics*. — xviii+322 pp. — Translated from the German, edited and with commentary by J. M. Plotkin.
- [91] *Hauser K.* Definable sets of real numbers, infinite games and core model theory. — Singapore: World Scientific; Singapore: Singapore University Press, 1998.
- [92] *Hechler S. H.* On the existence of certain cofinal subsets of ω_ω // *Axiomatic set theory*, vol. 2 / Ed. by T. J. Jech. — Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1974. — Vol. 13, Part II of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. — Pp. 155–173.
- [93] *Hjorth G.* Thin equivalence relations and effective decompositions. // *J. Symb. Log.* — 1993. — Vol. 58, no. 4. — Pp. 1153–1164.
- [94] *Hjorth G.* An absoluteness principle for Borel sets // *J. Symbolic Logic*. — 1998. — Vol. 63, no. 2. — Pp. 663–693.
- [95] *Hjorth G.* Classification and orbit equivalence relations. — Providence, RI: American Mathematical Society, 2000. — xviii+195 pp.
- [96] *Ihoda J. I.* Σ_2^1 -sets of reals. // *J. Symb. Log.* — 1988. — Vol. 53, no. 2. — Pp. 636–642.
- [97] *Ihoda J. I., Shelah S.* Δ_2^1 -sets of reals. // *Ann. Pure Appl. Logic*. — 1989. — Vol. 42, no. 3. — Pp. 207–223.
- [98] *Ihoda J. I., Shelah S.* Martin's axioms, measurability and equiconsistency results. // *J. Symb. Log.* — 1989. — Vol. 54, no. 1. — Pp. 78–94.
- [99] *Jech T.* Lectures in set theory with particular emphasis on the method of forcing. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971. — Vol. 217 of *Lecture Notes in Mathematics*. — 137 pp. — Русский перевод: Йех, Т., Теория множеств и метод форсинга, М.: Мир, 1973.
- [100] *Jech T.* Set theory. Springer Monographs in Mathematics. — Berlin: Springer, 2003. — xiv+769 pp. — The third millennium edition, revised and expanded.
- [101] *Judah H.* Exact equiconsistency results for Δ_3^1 -sets of reals. // *Arch. Math. Logic*. — 1992. — Vol. 32, no. 2. — Pp. 101–112.
- [102] *Judah H.* Δ_3^1 -sets of reals. // Set theory of the reals. Proceedings of a Winter institute on set theory of the reals held at Bar-Ilan University, Ramat-Gan, January 1991 / Ed. by H. Judah. — Vol. 6 of *Isr. Math. Conf. Proc.* — Providence, RI: American Mathematical Society, 1993. — Pp. 361–384.

- [103] Judah H., Shelah S. Δ_3^1 sets of reals // *J. Symbolic Logic*. — 1993. — Vol. 58, no. 1. — Pp. 72–80.
- [104] Judah H., Spinas O. On the structure of Δ_4^1 -sets of reals. // *Arch. Math. Logic*. — 1995. — Vol. 34, no. 5. — Pp. 301–312.
- [105] Judah H., Spinas O. Large cardinals and projective sets. // *Arch. Math. Logic*. — 1997. — Vol. 36, no. 2. — Pp. 137–155.
- [106] Kanovei V. Borel equivalence relations: structure and classification. — New York: American Mathematical Society, 2008. — Vol. 44 of *University Lecture Series of AMS*. — x+250 pp.
- [107] Kanovei V. On effective compactness and sigma-compactness // *ArXiv e-prints*. — 2011. — no. 1103.1060.
- [108] Kanovei V., Koepke P. Comments to Hausdorff's paper "Die Machtigkeit der Borelschen Mengen" // Felix Hausdorff, *Gesammelte Werke, Band III: Descriptive Mengenlehre und Topologie*. — Berlin: Springer, 2008. — Pp. 439–442.
- [109] Kanovei V., Lyubetsky V. An infinity which depends on the axiom of choice // *Applied Mathematics and Computation*. — 2012. — Vol. 218, no. 16. — Pp. 8196–8202.
- [110] Kanovei V., Lyubetsky V. On effective σ -boundedness and σ -compactness // *Mathematical Logic Quarterly*. — 2013. — в печати.
- [111] Kanovei V., Reeken M. Borel and countably determined reducibility in nonstandard domain. // *Monatsh. Math.* — 2003. — Vol. 140, no. 3. — Pp. 197–231.
- [112] Kanovei V., Reeken M. *Nonstandard Analysis: Axiomatically*. Springer Monographs in Mathematics. — Berlin: Springer, 2004. — xvi+408 pp.
- [113] Kanovei V., Reeken M. Effective cardinals in the nonstandard universe // *Mathematical Logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian Logic Conference*. Novosibirsk, Russia, 16–19 August, 2005. — World Scientific, 2006. — Pp. 70–89.
- [114] Kanovei V., Reeken M. Development in nonstandard set theoretic analysis // *Mathematicae Japonica*. — 2008. — Vol. 68, no. 1. — Pp. 141–176.
- [115] Kanovei V., Sabok M., Zapletal J. r. *Canonical Ramsey theory on Polish spaces*. Cambridge Tracts in Mathematics. — Cambridge: Cambridge University Press, 2013. — x+246 pp.
- [116] Kechris A. S. *Classical descriptive set theory*. — New York: Springer, 1995. — Vol. 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. — xviii+402 pp.
- [117] Kechris A. S., Miller B. D. *Topics in orbit equivalence*. — Berlin: Springer, 2004. — Vol. 1852 of *Lecture Notes in Mathematics*. — x+134 pp.

- [118] *Kelley J. L.* General topology. — New York: D. van Nostrand Co., 1955. — 298 pp. — Русский перевод: Келли, Дж., Общая топология, М.: Наука, 1968.
- [119] *Komisariski A.* Some descriptive set-theoretic properties of the isomorphism relation between Banach spaces. // *Proc. Am. Math. Soc.* — 2001. — Vol. 129, no. 10. — Pp. 3085–3090.
- [120] *Kondô M.* L'uniformisation des complémentaires analytiques. // *Proc. Imp. Acad. Tokyo.* — 1937. — Vol. 13. — Pp. 287–291.
- [121] *Kunen K.* Set theory, An introduction to independence proofs. — Amsterdam: North-Holland, 1983. — Vol. 102 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* — xvi+313 pp. — Reprint of the 1980 original.
- [122] *Kuratowski C.* Topologie. Vol. I. — Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1958. — Vol. 20 of *Monografie Matematyczne.* — XII+494 pp. — Русский перевод: Куратовский, К., Топология, том I, М.: Мир, 1966.
- [123] *Kuratowski K.* Sur les théorèmes de séparation dans la théorie des ensembles // *Fundam. Math.* — 1936. — Vol. 26. — Pp. 183–191.
- [124] *Kuratowski K., Mostowski A.* Set theory. — Amsterdam: North-Holland, 1968. — XII+417 pp. — Русский перевод: Куратовский, К. и Мостовский, А., Теория множеств, М.: Мир, 1970.
- [125] *Lebesgue H.* Sur les fonctions représentable analytiquement // *Journ. de Math. (Sér. 6).* — 1905. — Vol. 1. — Pp. 139–216.
- [126] *Levy A.* Definability in axiomatic set theory. II // *Mathematical logic and foundations of set theory. Proceedings of an international colloquium, Jerusalem, 11-14 November 1968* / Ed. by Y. Bar-Hillel. — Amsterdam: North-Holland, 1970. — Vol. 59 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* — Pp. 129–145.
- [127] *Lorentz G.* Who discovered analytic sets // *The Mathematical Intelligencer.* — 2001. — Vol. 23. — Pp. 1–5.
- [128] *Lusin N.* Sur la classification de M. Baire. // *C. R. Acad. Sci. Paris.* — 1917. — Vol. 164. — Pp. 91–94. — Русский перевод в кн. [29] с. 270–272.
- [129] *Lusin N.* Sur les ensembles proectifs de M. Henri Lebesgue // *C. R. Acad. Sci. Paris.* — 1925. — Vol. 180. — Pp. 1572–1574. — Русский перевод в кн. [29] с. 304–306.
- [130] *Lusin N.* Sur les ensembles analytiques // *Fundam. Math.* — 1927. — Vol. 10. — Pp. 1–95. — Русский перевод в кн. [29] с. 380–459.
- [131] *Lusin N.* Sur le problème de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensembles // *Mathématica Cluj.* — 1930. — Vol. 4. — Pp. 54–66. — Эта заметка Лузина не вошла в книгу [29], и ее перевод на русский язык авторам настоящей книги неизвестен.

- [132] *Lusin N.* Sur une famille des complementaires analytiques // *Fundam. Math.* — 1931. — Vol. 17. — Pp. 4–7. — Русский перевод в кн. [29] с. 624–626.
- [133] *Lusin N.* Sur les classes des constituantes des complementaires analytiques // *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, II. Ser.* — 1933. — Vol. 2. — Pp. 269–282. — Русский перевод в кн. [29] с. 627–641.
- [134] *Lusin N.* Sur les ensembles analytiques nuls // *Fundam. Math.* — 1935. — Vol. 25. — Pp. 109–131. — Русский перевод в кн. [29] с. 662–680.
- [135] *Lusin N.* Lecons sur les ensembles analytiques et leurs applications. — 2nd corrected edition. — New York: Chelsea Publishing Company, 1972. — XIV+326 pp. — Русский перевод в кн. [29] с. 9–269. Сокращенный русский перевод в кн. [28].
- [136] *Lusin N., Novikoff P.* Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire, donné par un crible. // *Fundam. Math.* — 1935. — Vol. 25. — Pp. 559–560. — Русский перевод в кн. [29] с. 621–623. Другой русский перевод в кн. [44] с. 49–50.
- [137] *Lusin N., Sierpinski W.* Sur quelques proprietes des ensembles mesurables (A). // *Krak. Anz.* — 1918. — Vol. 1918. — Pp. 35–48. — Русский перевод в кн. [29] с. 273–284.
- [138] *Lusin N., Sierpinski W.* Sur un ensemble non mesurable B. // *Journ. de Math.* — 1923. — Vol. 2. — Pp. 53–72. — Русский перевод в кн. [29] с. 285–300.
- [139] *Magidor M., Shelah S., Stavi J.* On the Standard Part of Nonstandard Models of Set Theory // *J. Symb. Log.* — 1983. — Vol. 48, no. 1. — Pp. 33–38.
- [140] *Mansfield R.* Perfect subsets of definable sets of real numbers // *Pacific J. Math.* — 1970. — Vol. 35, no. 2. — Pp. 451–457.
- [141] *Martin D. A.* The axiom of determinateness and reduction principles in the analytical hierarchy. // *Bull. Am. Math. Soc.* — 1968. — Vol. 74. — Pp. 687–689.
- [142] *Martin D. A., Solovay R. M.* Internal Cohen extensions. // *Ann. Math. Logic.* — 1970. — Vol. 2. — Pp. 143–178.
- [143] *Mathias A. R. D.* Surrealist landscape with figures (a survey of recent results in set theory) // *Periodica Math. Hung.* — 1979. — Vol. 10. — Pp. 109–175. — Все наши ссылки на эту работу относятся к её первоначальной версии, известной под названием: A survey of recent results in set theory. Stanford University. July 1968. Этот препринт содержит предварительные объявления о ранних результатах в теории множеств, за редкими исключениями без ссылок на публикацию и без (даже набросков) доказательств. Некоторые из приведенных там результатов цитируются в нашей книге.
- [144] *Mathias A. R. D.* Strong statements of analysis // *Bulletin of the London Mathematical Society.* — 2000. — 8. — Vol. 32. — Pp. 513–526.

- [145] *Miller A. W.* Covering 2^ω with ω_1 disjoint closed sets // The Kleene Symp., Proc., Madison, Wisconsin, 1978 / Ed. by Jon Barwise et. al. — Amst.-N. Y.-Oxford: North-Holland, 1980. — Vol. 101 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. — Pp. 415–421.
- [146] *Mirimanoff D.* Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles // *Ens. Math.* — 1917. — Vol. 19. — Pp. 37–52.
- [147] *Moschovakis Y. N.* Uniformization in a playful universe. // *Bull. Am. Math. Soc.* — 1971. — Vol. 77. — Pp. 731–736.
- [148] *Moschovakis Y. N.* Descriptive set theory. — 2nd edition. — Providence, RI: American Mathematical Society, 2009. — Vol. 155 of *Mathematical Surveys and Monographs*. — xiv+502 pp.
- [149] *Mostowski A.* On absolute properties of relations. // *The Journal of Symbolic Logic*. — 1947. — Vol. 12. — Pp. 33–42.
- [150] *Mostowski A.* Formal system of analysis based on an infinitistic rule of proof // Infinitistic methods. Proceedings of the symposium on foundations of mathematics. Warsaw, 2-9 September 1959. — Oxford-London-New York-Paris: Pergamon Press, 1961. — Pp. 141–166.
- [151] *Myhill J., Scott D.* Ordinal definability // Proceedings of the symposium in pure mathematics of the American Mathematical Society. Held at the University of California, Los Angeles, California, July 10 – August 5, 1967 / Ed. by D. S. Scott. — Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1971. — Vol. 13, Part I of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. — Pp. 271–278.
- [152] *Novikoff P.* Sur les fonctions implicites mesurables B. // *Fundam. Math.* — 1931. — Vol. 17. — Pp. 8–25. — Русский перевод в кн. [44], с. 13–25.
- [153] *Novikoff P.* Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe // *Fundam. Math.* — 1935. — Vol. 25. — Pp. 459–466. — Русский перевод в кн. [44], с. 43–48.
- [154] *Raisonnier J.* A mathematical proof of S. Shelah's theorem on the measure problem and related results. // *Isr. J. Math.* — 1984. — Vol. 48. — Pp. 48–56.
- [155] *Raisonnier J., Stern J.* The strength of the measurability hypothesis // *Isr. J. Math.* — 1985. — Vol. 50. — Pp. 337–349.
- [156] *Rogers H.* Theory of recursive functions and effective computability. — NY et. al.: McGraw-Hill, 1967. — 512 pp. — Русский перевод: Роджерс, Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М.: Мир, 1972.
- [157] *Rosłanowski A., Shelah S.* Norms on possibilities. II: More ccc ideals on 2^ω . // *J. Appl. Anal.* — 1997. — Vol. 3, no. 1. — Pp. 103–127.
- [158] *Sami R. L.* On Σ_1^1 equivalence relations with Borel classes of bounded rank. // *J. Symb. Log.* — 1984. — Vol. 49. — Pp. 1273–1283.

- [159] *Scheepers M.* Gaps in ω^ω // Set Theory of the Reals, Proceedings of a winter institute on set theory of the reals held at Bar-Ilan University, Ramat-Gan (Israel), January 1991 / Ed. by H. Judah. — Vol. 6 of *Israel Math. Conf. Proceedings*. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1993. — Pp. 439–561.
- [160] *Selivanowski E.* Sur les propriétés des constituantes des ensembles analytiques // *Fundam. Math.* — 1933. — Vol. 21. — Pp. 20–28.
- [161] *Shelah S.* Can you take Solovay's inaccessible away? // *Isr. J. Math.* — 1984. — Vol. 48. — Pp. 1–47.
- [162] *Shoenfield J. R.* The problem of predicativity // Essays on the foundations of mathematics, Dedicat. to A.A. Fraenkel on his 70th Anniv. / Ed. by Bar-Hillel, Y. et al. — Amsterdam: North-Holland, 1962. — Pp. 132–139.
- [163] *Shoenfield J. R.* Mathematical logic. — Reading et. al.: Addison-Wesley, 1967. — VII+344 pp. — Русский перевод: Шенфилд, Дж., Математическая логика, М.: Наука, 1975.
- [164] *Sierpiński W.* Sur deux consequences d'un théorème de Hausdorff. // *Fundam. Math.* — 1945. — Vol. 33. — Pp. 269–272.
- [165] *Silver J. H.* Counting the number of equivalence classes of Borel and coanalytic equivalence relations // *Ann. Math. Logic*. — 1980. — Vol. 18, no. 1. — Pp. 1–28.
- [166] *Solecki S.* Analytic ideals // *Bull. Symbolic Logic*. — 1996. — Vol. 2, no. 3. — Pp. 339–348.
- [167] *Solecki S.* Analytic ideals and their applications // *Ann. Pure Appl. Logic*. — 1999. — Vol. 99, no. 1-3. — Pp. 51–72.
- [168] *Solovay R. M.* On the cardinality of Σ_2^1 sets of reals // Foundations of Mathematics, Symposium Papers Commemorating 60th Birthday of Kurt Gödel, Columbus 1966 / Ed. by J. J. Bulloff et al. — Berlin: Springer, 1969. — Pp. 58–73.
- [169] *Solovay R. M.* A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. // *Ann. Math. (2)*. — 1970. — Vol. 92. — Pp. 1–56.
- [170] *Solovay R. M., Tennenbaum S.* Iterated Cohen extensions and Souslin's problem. // *Ann. Math. (2)*. — 1971. — Pp. 201–245.
- [171] *Souslin M.* Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis. // *C. R. Acad. Sci. Paris*. — 1917. — Vol. 164. — Pp. 88–91.
- [172] *Stern J.* Partitions of the real line into $\aleph_1$ closed sets // Higher Set Theory, Proceedings, Oberwolfach, Germany, April 13-23, 1977 / Ed. by G. H. Müller and D. Scott. — Berlin: Springer, 1978. — Vol. 669 of *Lect. Notes Math.* — Pp. 455–461.
- [173] *Stern J.* Perfect set theorems for analytic and coanalytic equivalence relations. // Logic colloquium '77, Proc., Wrocław 1977 / edited by A. Macintyre, L. Pacholski, J. Paris. — North-Holland, 1978. — Vol. 96 of *Stud. Logic Found. Math.* — Pp. 277–284.

- [174] *Stern J.* Effective partitions of the real line into borel sets of bounded rank // *Ann. Math. Logic.* — 1980. — Vol. 18, no. 1. — Pp. 29–60.
- [175] *Stern J.* Suites transfinies d'ensembles boreliennes // *C. r. Acad. sci. Paris, ser. A.* — 1980. — Vol. 288, no. 10. — Pp. 527–529.
- [176] *Stern J.* On Lusin's restricted continuum problem // *Ann. Math.* — 1984. — Vol. 120. — Pp. 7–37.
- [177] *Stern J.* Generic extensions which do not add random reals // *Methods in mathematical logic, Proc. 6th Latin Amer. Symp., Caracas 1983.* — Springer, 1985. — Vol. 1130 of *Lect. Notes Math.* — Pp. 395–407.
- [178] *Stern J.* Regularity properties of definable sets of reals. // *Ann. Pure Appl. Logic.* — 1985. — Vol. 29. — Pp. 289–324.
- [179] *Velickovic B., Woodin W. H.* Complexity of the reals of inner models of set theory // *Ann. Pure Appl. Logic.* — 1998. — Vol. 92, no. 3. — Pp. 283–295.
- [180] *von Neumann J.* Eine Axiomatisierung der Mengenlehre // *J. f. M.* 154, 219–240. *Berichtigung dazu J. f. M.* — 1925. — Vol. 155. — P. 128.
- [181] *von Neumann J.* On rings of operators, reduction theory // *Annals of Mathematics.* — 1949. — Vol. 50. — Pp. 448–451.
- [182] *Wang H., McNaughton R.* Les système axiomatiques de la théorie des ensembles. — Paris: Gauthier-Villars, 1953. — Vol. IV of *Collection de Logique Mathématique, sér. A.* — 54 pp. — Русский перевод: Хао, Ван и Мак-Нотон, Р., Аксиоматические системы теории множеств, М.: ИЛ, 1963.
- [183] *Zalcwasser Z.* Un théorème sur les ensembles qui sont à la fois F_σ et G_δ . // *Fundam. Math.* — 1922. — Vol. 3. — Pp. 44–45.
- [184] *Zapletal J.* Descriptive set theory and definable forcing // *Mem. Am. Math. Soc.* — 2004. — Vol. 793. — 141 pp.
- [185] *Zapletal J.* Forcing idealized. — Cambridge: Cambridge University Press, 2008. — Vol. 174 of *Cambridge tracts in mathematics.* — vi+314 pp.

Предметный указатель

аксиома

Бесконечность, 40

Выбор, 41

Выбор

 счетный, 43

 зависимый, 44

Выделение, 40

конструктивности, $\mathbb{V} = \mathbb{L}$, 155

Объединение, 40

Пара, 40

Подстановка, 41

Пустое множество, 40

Регулярность, 41

Собирание, 41

Степень, 40

 Счетная Степень, 67

схема аксиом, 41

Экстенциональность, 40

DC, 44

антицепь, 170

 максимальная, 171

$\mathcal{I}$ -антицепь, 197, 210

A-операция, 100

аппроксимация, 105, 112

ассоциированное отображение, 102

блок кванторов, 93

борелевский изоморфизм, 80

борелевский код, 116, 315

 множество **BC**, 116

 множество **FC**, 119

 множество **PFC**, 119

∞ -борелевский, 315

 счетный, 316

$\bigwedge_n \kappa_n$, 117

$\bigvee_n \kappa_n$, 117

$\kappa_1 \searrow \kappa_2$, 117

$\kappa_1 \wedge \kappa_2$, 117

$\kappa_1 \vee \kappa_2$, 117

$\kappa[s]$, 116

$0 = \kappa[\Lambda]$, 215

$1 = \neg 0$, 215

$\nabla_n \kappa_n$, 116

$\neg \kappa$, 117

борелевский образ, 80

борелевский прообраз, 80

борелевское отображение, 80

бэровский интервал, 21, 81

бэровское произведение, 81

 обобщенное, 88

верхний предел $\limsup$, 229

вершина

 дерева, 102

 концевая, 103, 315

$\subseteq$ -максимальная, 103, 315

выполнимость, $M \models \varphi$, 61

выполнимость, **Sat**(M), 61

выполнимость, **Sat**(M, ε), 59

выполнимость, $\langle M; \varepsilon \rangle \models \varphi$, 59

генерическое расширение, 174

гёделев номер

$\mathbf{gn} \, s$, 82

декартово произведение, 20

дерево, 81, 102, 246, 315

 вершина, 102

 обрезанное, 102

 ранг, $|T|$, 103, 315

 точка ветвления, 182

 ширина, $\mathbf{wid} \, T$, 315

 фундированное, 102, 315

идеал

 множеств меры 0, $\mathcal{I}_\lambda$, 197

 тощих множеств $\mathcal{I}_{\text{cat}}$, 194

- $\mathcal{I}_{\text{счет}}$, 354
- $\mathcal{I}_{\sigma\text{-огр}}$, 355
- $(\mathcal{I})^{\mathfrak{M}}$, 198
- σ -ССС-идеал, 197
- $\mathfrak{M}$ -абсолютный, 198
- иерархия
 - борелевская, 82
 - проективная, 83
- изоморфизм, 29
- имя
 - $\underline{G}$, 173
 - $\mathbb{P}$ -имя, 172
 - $\check{x}$, 172
- индукция, 48
 - трансфинитная, 47
 - $\in$ -индукция, 63
- интервал
 - бэровский интервал, 21
- интерпретация
 - простая, $t[\llbracket G \rrbracket]$, 173
 - G -интерпретация, $\varphi[G]$, 176
 - G -интерпретация, $t[G]$, 172
- исходная модель, 170
- кардинал, 53
 - большой, 243
 - конфинальность, 54
 - непрedefельный, 55
 - предельный, 55
 - регулярный, 55
 - сингулярный, 55
 - слабо недостижимый, 55
 - следующий по величине, κ^+ , 54
 - степень, 2^κ , 53
 - строго недостижимый, 55
 - строго предельный, 55
 - 2^κ , 54
 - $\aleph_0$, 53
 - $\aleph_1$, 54
 - $\aleph_\xi$, 53
 - $\mathfrak{c}$, 54
 - $\omega_1^{\mathfrak{M}}$, 140
- кванторная приставка
 - класс Π_n^1 , 93
 - класс Σ_n^1 , 93
 - редуцированная к типу 1, 93
- класс, 45
- HOD , 65
- HROD**, 65
- OD, 65
- OD(a), 339
- OD(P), 65
- OD(P), 245
- ROD**, 65
- Σ_ξ^0 , Π_ξ^0 , Δ_ξ^0 , Γ_ξ^0 , 82
- Σ_0^1 , Π_0^1 , Δ_n^1 , Γ_0^1 , 83
- Σ_n^1 , Π_n^1 , Δ_n^1 , Γ_n^1 , 83
- Σ_n^0 , Π_n^0 , Δ_n^0 , 87
- $\Sigma_n^0(a)$, $\Pi_n^0(a)$, $\Delta_n^0(a)$, 87
- Σ_n^1 , Π_n^1 , Δ_n^1 , 87
- $\Sigma_n^1(a)$, $\Pi_n^1(a)$, $\Delta_n^1(a)$, 87
- $\Sigma_2^1[\mathbb{L}[a]]$, $\Pi_2^1[\mathbb{L}[a]]$, $\Delta_2^1[\mathbb{L}[a]]$, 200
- $\Sigma_n^1[P]$, $\Pi_n^1[P]$, $\Delta_n^1[P]$, 87
- код
 - борелевский, 116, 315
 - ∞ -борелевский, 315
 - счетный, 316
- конфинальность, 54
- конституанта, 105, 112, 142
 - внешняя, 105, 112, 142
 - внутренняя, 105, 112, 142
 - действительная, 142
 - последовательности
 - сопряженные, 142
 - явная, 142
- континуум-гипотеза, **CH**, 54
 - обобщенная, **GCH**, 54
- кортеж, 20
 - длины n , 20
 - множество $\alpha^{<\omega}$, 315
 - множество $\mathbb{N}^{<\omega}$, 20
 - множество $\text{Ord}^{<\omega}$, 315
 - множество X^n , 20
 - множество $X^{<\omega}$, 20
 - last s , 317
- мера
 - борелевская, 126
 - вероятностная, 126
 - класса K , 129
 - код $\text{Cod}_{<}(\mu)$, 193
 - мера λ , 126
 - мера λ_p , 126
 - σ -конечная, 126

- K -мера**, 129
множество
 аналитическое дополнение, 123
 бесконечное, 54
 борелевское, 80
 верхний предел, 229
 вещественно-ординально определенное, 65
 наследственно, 65
 внешнее, 105, 111
 внутреннее, 105, 111
 вынуждающих «условий», 170
 генерическое, 171
 допустимое, 69
 измеримое, 126
 индексированное, $\langle X_a \rangle_{a \in A}$, 28
 индуктивное, 40
 коинициальное, 333
 конечное, 54
 конструктивное, 151
 относительно, 151
 конфинальное, 54
 косуслинское, 123
 котошее, 126
 наследственно конечное, 64
 наследственно счетное, 64
 натуральных чисел, $\mathbb{N}$, 33, 42
 неограниченное, 54
 однозначное, 113
 определимое, 64
 ординально определенное, 65
 наследственно, 65
 открыто плотное, 170
 плотное, 246
 попарно неэквивалентное, 351
 представленное в $\langle \mathbb{N}; \varepsilon \rangle$, 76
 пустое, $\emptyset$, 40
 рамсеевское, 350
 редуцированное, P^{red} , 88
 СБ множество, 269
 борелевское, 269
 замкнутое, 269
 открытое, 269
 «слабое», 245
 совершенное, 126
 стандартное модели, 74
 суперсовершенное, 350
 суслинское, 123
 счетное, 54
 не более чем, 54
 счетной базы, 269
СЧТ, 269
 тощее, 126
 транзитивное, 46
 равномерное, 113
 «условий» открыто плотное, 170
 «условий» плотное, 170
 «условий» предплотное, 170
 финально ограниченное, 228
 центрированное, 280
 экстенциональное, 60
 А-множество, 100
BC, 116
 $B_{\neq}$, 116
 $B_{\neq}^2$, 119
 B_{Tf} , 116
 СА-множество, 100
 E_0 -инвариантное, 127
FC, 119
 $\mathcal{I}$ -измеримое, 197
 $\mathcal{I}$ -нулевое, 197
 $\mathcal{I}$ -позитивное, 197
 $\mathcal{I}$ -полное, 197
 K -в-кодах, 199
 K_σ -регулярное, 350
MOD_a, 292
PFC, 119
PE(t), 173
 R -транзитивное, 50
 σ -центрированное, 280
 σ -ограниченное, 350
 $\{x \in X : \varphi(x)\}$, 25
 множество-степень, 20
 счетная, $\mathcal{P}_{\text{ctbl}}(X)$, 67
 множество-степень, $\mathcal{P}(X)$, 40
 модель
 область, 58
 Соловея, 258
 Соловея вторая, 262
 теоретико-множественная, 58
 теории, 60
 фундированная, 73

- фундированная подмодель WF_ε , 74
- элементарная подмодель, 61
- элементарное расширение, 61
- ω -модель, 73
- $\in$ -модель, 60
 - транзитивная, 60
- мощность, 53
 - континуума, c , 54
- неразрешимость, 138
- область фундированности, 102
- ОБП, 88
- образ, 21
- обрезанное дерево, 102
- объединение, $\bigcup X$, 40
- ограничение, 20
 - $a \Vdash m$, 85
 - $f \upharpoonright X$, 20
 - $s \upharpoonright m$, 35
- операции
 - гёделевы, 150
 - $\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_8$, 150
- ординал, 46
 - бесконечный, 47
 - конечный, 47
 - нечетный, 282
 - непредельный, 49
 - предельный, 49
 - четный, 282
- ω , 49
- ω_1 , 54
- $\omega_1^{\mathbb{L}[a]}$, 157
- $\omega_1^{\mathbb{L}}$, 157
- ω_ξ , 53
- $\omega_\xi^{\mathbb{L}}$, 157
- $\omega_\xi^{\mathbb{L}[a]}$, 157
- отношение
 - арности n , 35
 - бинарное, 29, 35
 - выполнимости, $\models$, 59
 - изоморфизм, 29
 - истинности, $\models$, 59
 - область первого аргумента, 29
 - область второго аргумента, 29
 - обратное, 29
 - порядка
 - линейное, 31
 - полное, 31
 - фундированное, 31
 - частичное, 31
 - предпорядка, 31
 - линейное, 31
 - фундированное, 31
 - ранг, $|R|$, 50
 - тернарное, 35
 - финальное, 227
 - финальное доминирование, 181, 228
 - фундированное, 30
 - эвентуальное, 227
 - эквивалентности, 30
 - E_0 , 127
 - экстенциональное, 51
 - n -арное, 35
- отношение эквивалентности
 - лузинское, 353
 - тонкое, 352
- отображение, 28
 - борелевский изоморфизм, 80
 - борелевское, 80
- пара
 - арифметическая, $\llbracket i, j \rrbracket$, 81
 - неупорядоченная, $\{x, y\}$, 27
 - упорядоченная, $\langle x, y \rangle$, 27
- перечисление s_n , 81
- переменная
 - типа 0, 84
 - типа 1, 84
 - типа $\mathbb{N}$, 84
 - типа $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 84
 - типа $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}^{<\omega}}$, 89
 - типа $\mathbb{N}^{<\omega}$, 89
 - типа $(\mathbb{N}^{<\omega})^{\mathbb{N}}$, 89
 - типа $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$, 89
- порядок
 - гёделев, $<_{\mathcal{X}}^{\text{гед}}$, 152
 - гёделев, $<^{\text{гед}}$, 152
 - лексикографический, $<_{\text{lex}}$, 129
 - Лузина – Серпинского, $<_{\text{лс}}$, 111
- последовательности
 - сопряженные, 142
- последовательность

- бесконечная, 47
- конечная, 47
- неограниченная по индексу, 142
- неограниченная по рангу, 143
- ограниченная по индексу, 142
- ограниченная по рангу, 143
- трансфинитная, 47
- почти все, 20, 227
- принцип
 - Отделимость**, 114
 - Редукция**, 114
 - Униформизация**, 113
- проблема
 - измеримости для Σ_2^1 , 136
 - совершенного ядра для Π_1^1 , 132
 - свойства Бэра для Σ_2^1 , 137
 - узкая проблема континуума, 146, 336
 - узкая проблема Лебега, 146, 336
 - УПК, 146, 336
 - УПЛ, 146, 336
- прообраз, 21
- пространство
 - Бэра, 81
 - бэровское, 81
 - бэровское произведение, 81
 - обобщенное, 88
 - ОБП, 88
 - польское, 80
- ранг, 103, 315
 - Кантора – Бендиксона, 104
- ранг по фон Нейману, 62
- рекурсия
 - трансфинитная, 47
- релятивизация, φ^M , 61
- релятивизация, $\varphi^{(M; \varepsilon)}$, 58
- решето, 111
 - сечение, 111
- СБ множество, 269
 - борелевское, 269
 - открытое, 269
 - замкнутое, 269
- свойство
 - Бэра, 126
 - измеримость, 126
 - совершенного ядра, 126, 127
 - совершенной трансверсали, 351
- свёртка Мостовского, 61
- сечение, 20, 102, 105, 113
- сечение решета, 111
- симметрическая разность, 20
- синглетон, 27, 94
- система
 - измельчающаяся, 100
 - монотонная, 100
 - неисчезающая, 100
 - регулярная, 100
 - суслинская, 100
- склейка
 - генерическая коэновская, 184
 - кардиналов, 184
- сопряженные последовательности, 142
- совместная независимость, 229
- стандартное множество, 74
- степень
 - счетная, $\mathcal{P}_{\text{ctbl}}(X)$, 67
- степень, $\mathcal{P}(X)$, 40
- структура
 - изоморфизм, 30
 - изоморфные, 30
 - область, 58
 - реляционная, 29
 - теоретико-множественная, 58
- супремум
 - $\sup X$, 49
- суслинская система, 100
 - ассоциированное отображение, 102
- схема аксиом, 41
- СЧТ**, 269
- теория
 - $\mathfrak{T}_x$, 292
 - ZC**, 66
 - ZF**, 41
 - ZFC**, 41
 - ZFC**⁻, 66
 - ZFC**_{с-орр}⁻, 69
 - ZFCI**⁻, 242
 - ZFC**_{ℵ₀}⁻, 67
- терм
 - арность, 85
 - типа $\mathbb{N}$, 84

точка

ветвления, 182

генерическая по Коэну, 178

коэновская, 186

случайная, 180, 186

случайная по Соловею, 180

 μ -случайная, 186 $\mathbb{P}_{\text{coh}}^{\mathfrak{M}}$ -генерическая, 217 $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$ -генерическая, 214 $\mathbb{P}_{\lambda}^{\mathfrak{M}}$ -генерическая, 217

точка ветвления, 182

точка фундированности, 102

транзитивное замыкание, 62

трансверсаль, 351

совершенная, 351

 R -транзитивное замыкание, 50

узкая проблема континуума, 146, 336

узкая проблема Лебега, 146, 336

универсум

булевозначный, 172

универсум множеств $\mathbb{V}$, 44

УПК, 146, 336

УПЛ, 146, 336

«условие»

более сильное, 170

вынуждающее, 170

«условия»

несовместимые, 170

совместимые, 170

 $\mathcal{J}$ -совместимые, 210

финальное доминирование, 181, 228

финальное отношение, 227, 228

формула

абсолютная, 71

аналитическая, 86

арифметическая, 86

атомарная, 86

выполнимая, 59

выполнимость, $M \models \varphi$, 61выполнимость, $\text{Sat}(M)$, 61выполнимость, $\text{Sat}(M, \varepsilon)$, 59выполнимость, $\langle M; \varepsilon \rangle \models \varphi$, 59

истинная, 59

истинная в модели, 59

каноническая, 107, 133

множество $\mathbf{CIFORM}(X)$, 59множество $\mathbf{Form}(X)$, 59

ограниченная, 68, 87

редуцированная, $\Phi^{\text{ук}}$, 90релятивизация, φ^M , 61релятивизация, $\varphi^{\langle M; \varepsilon \rangle}$, 58 $\in$ -формула, 40 $\text{od } x$, 65 $\text{ord}(\xi)$, 71 Π_n^0 , 87 Π_n^1 , 87

практически, 92, 93

 Σ_n^0 , 87 Σ_n^1 , 87

практически, 92, 93

форсинг, 170

доминирующий, $\mathbf{D}$, 181Коэна, $\mathbb{P}_{\text{coh}}$, 217Коэна, $\mathbf{C}$, 177

Леви – Соловея, 262

отношение $\Vdash_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$, 214отношение $\Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathfrak{M}}$, 175

порожденный идеалом, 210, 211

присоединяющий точку, 179

Сакса, $\mathbf{S}$, 182случайный, $\mathbb{P}_{\lambda}$, 217случайный, $\mathbf{R}$, 179

Соловея, 262

эквивалентные форсинги, 218

 $\mathbf{Coll}(\omega, \kappa)$, 183 ε -случайный, $\mathbf{R}_{\varepsilon}$, 182 κ -склеивающий, 183 $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}$, 210 $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}^{\mathfrak{M}}$, 211фундированная подмодель WF_{ε} , 74

фундированное ядро, 74

фундированный

ординал, 74

элемент, 74

функция, 28

биекция, 28

выбора, 41, 43

инъекция, 28

класс-функция, 45

класса K , 94

медленная, 228

Мостовского, ϕ_R , 52

- область значений, 20, 28
- область определения, 20, 28
- сюрьекция, 28
- K -функция, 94
- функция ранга, 50
- центрированное
 - множество, форсинг, 280
- σ -центрированное
 - множество, форсинг, 280
- число элементов, 20
- элементарная подмодель, 61
- элементарное расширение, 61
- язык
 - $\in$ -язык, 40
- язык аналитических формул, 84
 - расширенный, 89

Индекс обозначений¹

- $A[\mathfrak{F}]$, 100, 105
 $A_{<\xi}[\mathfrak{F}]$, 105
 $A_\xi[\mathfrak{F}]$, 105
 a_G , 177, 179, 181
 a_G , 213
 $A[R]$, 111
 $A_{<\xi}[R]$, 112
 $A_\xi[R]$, 111
 BC , 116
 BC^∞ , 315
 $BC^{<\omega_1}$, 316
 BC^α , 315
 $(BC)^{\mathfrak{M}}$, 121
 $B_\times$, 315
 $(B_\times)^{\mathfrak{M}}$, 121
 $B_\times(s)$, 116, 315
 $B_\times$, 116
 $B_\times^2$, 119
 $\text{Bor}(\mathbb{X})$, 80
 $\text{BP}(\mathbf{K})$, 128
 B_{Tf} , 116, 315
 $B_{Tf}(s)$, 116, 315
 b_u , 269, 270
 C , 177
 c , мощность континуума, 54, 67
 $\text{card } X$, 52, 53
 $C[\mathfrak{F}]$, 105
 $C_{<\xi}[\mathfrak{F}]$, 105
 $C_\xi[\mathfrak{F}]$, 105
 CH , 54
 $\text{ClForm}(X)$, 59
 $\text{cod } \mathcal{I}$, 198, 210
 $\text{Cod}_{<}(\mu)$, 193
 $\text{Cod}_{<}(\mu)$, 129
 $\text{cof } \kappa$, 54
 $\text{Coh } \mathfrak{M}$, 186
 $C[R]$, 111
 $C_{<\xi}[R]$, 112
 $C_\xi[R]$, 111
 $\mathbb{C}X$, 20
 D , 181
 DC , 44
 $\text{dom } f$, 20, 28
 $\text{dom } R$, 29
 E , 73
 E_0 , 127
 E_0 , 73
 s^{ext} , 89
 $\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_8$, 150
 $f_{\{a\}}$, 88
 FC , 119
 $(FC)^{\mathfrak{M}}$, 121
 f_G , 183
 F_γ , 151
 $\mathbb{F}_\gamma$, 153
 $F_\gamma[X]$, 151
 $\mathbb{F}_\gamma[x]$, 153
 $\text{Form}(X)$, 59
 F^x , 102, 105
 GCH , 54
 $\text{gn } s$, 82
 HC , 64
 HF , 64
 $H_{k\ell}$, 81
 HOD , 65
 $HROD$, 65
 H_u , 269, 270
 $\mathcal{I}_{\text{счет}}$, 354
 $\mathcal{I}_{\text{cat}}$, 194
 IFT , 104
 IFT_ξ , 104
 $IFT_{<\xi}$, 104
 $\mathcal{I}_\lambda$, 197
 $(\mathcal{I})^{\mathfrak{M}}$, 198
 IO , 112
 $\mathcal{I}_{\sigma\text{-орб}}$, 355

¹ Основные теоретико-множественные и логические обозначения, используемые в настоящей книге, приведены на стр. 18, 19.

Алфавитная часть нижеследующего индекса группирует отдельно латинские и греческие буквы (к последним присоединен и алеф $\aleph$). Затем следует символьная часть индекса со скобочными и иными обозначениями, прямо не связанными с определенной буквой или группой букв.

- $\mathbb{L}$, 151
- ℓ_1 , 228
- last s , 317
- $\mathcal{S}$, 228
- lh s , 20
- $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, 229
- $\text{LM}(\mathbf{K})$, 128
- $\mathbb{L}[X]$, 151
- $\mathbb{L}_\xi$, 152
- $\mathbb{L}_\xi[X]$, 152
- $\text{Max } T$, 103, 315
- $\mathfrak{M}_\varepsilon$, 74
- $\mathfrak{M}[G]$, 173
- $\text{MOD}_{\mathbf{a}}$, 292
- $\mathbb{N}$, 20, 21, 33, 42
- $\mathbb{N}^{<\omega}$, 20
- $(\mathbb{N})^\varepsilon$, 73
- $(n)^\varepsilon$, 76
- $\mathbb{N}^\varepsilon$, 73
- OD, 65
- $\text{OD}(a)$, 339
- $\text{OD}(P)$, 65
- $\text{OD}(P)$, 245
- od x , 65
- Ord^ε , 73
- ord(ξ), 71
- $\mathcal{P}(A)$, 20
- pair(z, a, b), 28
- $\mathbb{P}_{\text{coh}}$, 217
- $\text{PE}(t)$, 173
- PFC, 119
- $(\text{PFC})^{\mathfrak{M}}$, 121
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}$, 210
- $\mathbb{P}_{\mathcal{S}}^{\mathfrak{M}}$, 211
- $\text{PK}(\mathbf{K})$, 127
- $\mathbb{P}_\lambda$, 217
- $\mathcal{P}(X)$, 40
- $\mathcal{P}_{\text{ctbl}}(X)$, 67
- $\mathbf{R}$, 179
- $\mathbf{R}_\varepsilon$, 182
- ran f , 20, 28
- ran R , 29
- Rand $\mathfrak{M}$, 186
- $\text{Rand}_\mu \mathfrak{M}$, 186
- P^{red} , 88
- rnk x , 62
- ROD, 65
- $\mathbf{S}$, 182
- $\text{Sat}(M)$, 61
- $\text{Sat}(M, \varepsilon)$, 59
- s_n , 81
- s_n^{ext} , 82
- $\sup X$, 49
- Tree, 102
- $\mathfrak{T}_x$, 292
- $T_{\{a\}}$, 88
- $\text{TC}_\varepsilon(x)$, 74
- $\text{TC}_R(x)$, 50
- $\text{TC}(X)$, 62
- $\mathbb{V}$, 44
- $\mathbb{V}^{(\mathbb{P})}$, 172
- $\mathbb{V}_\xi$, 61
- WF_ε , 74
- WF_ε , 74
- WFOrd^ε , 74
- WFT, 104
- WFT_ξ , 104
- $\text{WFT}_{<\xi}$, 104
- wid T , 315
- WO, 112
- WO_ξ , 112
- T_{wf} , 102
- ZC, 66
- ZFC^- , 66
- $\text{ZFC}_{\subseteq\text{-orp}}^-$, 69
- $\text{ZFC}_{\aleph_0}^-$, 67
- ZFCI, 242
- $\aleph_0$, 53
- $\aleph_1$, 54
- $\aleph_\xi$, 53
- $\gamma_{\{a\}}$, 88
- $\varkappa[s]$, 116
- λ , 126
- λ_p , 126
- $\alpha^{<\omega}$, 315
- $\omega_1^{\mathfrak{M}}$, 140
- ω_1 , 54
- $\omega_1^{\mathbb{L}[a]}$, 157
- $\omega_1^{\mathbb{L}}$, 157
- ω_ξ , 53
- $\omega_\xi^{\mathbb{L}}$, 157

- $\omega_\xi^{\mathbb{L}[a]}$, 157
- $\text{Ord}^{<\omega}$, 315
- $X^{<\omega}$, 20
- π_ρ , 117
- Σ_ξ^0 , Π_ξ^0 , Δ_ξ^0 , Γ_ξ^0 , 82
- Σ_0^1 , Π_0^1 , Δ_0^1 , Γ_0^1 , 83
- Σ_n^1 , Π_n^1 , Δ_n^1 , Γ_n^1 , 83
- Σ_n^0 , Π_n^0 , Δ_n^0 , 87
- $\Sigma_n^0(a)$, $\Pi_n^0(a)$, $\Delta_n^0(a)$, 87
- Σ_n^1 , Π_n^1 , Δ_n^1 , 87
- $\Sigma_n^1(a)$, $\Pi_n^1(a)$, $\Delta_n^1(a)$, 87
- $\Sigma_2^1[\mathbb{L}[a]]$, $\Pi_2^1[\mathbb{L}[a]]$, $\Delta_2^1[\mathbb{L}[a]]$, 200
- $\Sigma_n^1[P]$, $\Pi_n^1[P]$, $\Delta_n^1[P]$, 87
- ϕ_R , 52
- ϕ_ε , 74
- $\varphi[G]$, 176
- $\varphi^{(M; \varepsilon)}$, 58
- φ^M , 61
- $\Phi^{y\text{эк}}$, 90
- $\mathbb{O} = \varkappa[\Lambda]$, 215
- $\mathbb{1} = \neg \mathbb{O}$, 215
- 2^n , 20
- 2^κ , 53, 54
- $2^{<\omega}$, 20
- ∞ , 103
- $\emptyset$, 40
- $\#(X)$, 20
- $\leq^*$, 181
- $<^*$, 228
- $\leq^*$, 228
- $<^{\text{ред}}$, 152
- $<_X^{\text{ред}}$, 152
- $<_{\text{lex}}$, 129
- $<_{\text{лс}}$, 111
- $:=$, 21
- $\in^*$, 228
- $\subseteq^*$, 228
- $\{x, y\}$, 27
- $\langle x, y \rangle$, 27
- $\bigwedge_n \varkappa_n$, 117
- $\bigvee_n \varkappa_n$, 117
- $\varkappa_1 \setminus \varkappa_2$, 117
- $\varkappa_1 \wedge \varkappa_2$, 117
- $\varkappa_1 \vee \varkappa_2$, 117
- $\nabla_n \varkappa_n$, 116
- $\neg \varkappa$, 117
- $\bigcup X$, 40
- X^n , 20
- X^Y , 20
- $(X)_a$, 20
- $\langle X_a \rangle_{a \in A}$, 28
- $X \triangle Y$, 20
- $A \times B$, 20
- $f \upharpoonright X$, 20
- $f^{-1}[X]$, 21
- $f[X]$, 21
- $R^{-1}(x)$, 50
- R^{-1} , 29
- $(n)_{\text{лев}}$, 81
- $(n)_{\text{пра}}$, 81
- $(a)_{\text{лев}}$, 82
- $(a)_n$, 82
- $(a)_{\text{пра}}$, 82
- a^- , 82
- $a \Vdash m$, 85
- $[s]$, 21
- $s \upharpoonright m$, 35
- $\llbracket i, j \rrbracket$, 81
- $\llbracket x \rrbracket$, 81
- $M \models \varphi$, 61
- $\langle M; \varepsilon \rangle \models \varphi$, 59
- $\Vdash_{\mathcal{M}}^{\text{м}}$, 214
- $\Vdash_{\mathbb{P}}^{\text{м}}$, 175
- $t[G]$, 172
- $t[\llbracket G \rrbracket]$, 173
- $|R|$, 50
- $[s]$, 81
- $\llbracket T \rrbracket$, 81
- $|T|$, 103, 315
- $T \upharpoonright_s$, 102
- $(Q)_x$, 113
- R^x , 111
- $|\varepsilon|$, 73
- $(s)^\varepsilon$, 76
- $\varepsilon^{-1}(x)$, 73
- $(x)^\varepsilon$, 76
- κ^+ , 54
- $\hat{\tau}$, 85
- $\hat{\varphi}$, 96