Дескриптивная теория множеств
Лекция 1
Борелевские и проективные множества в польских пространствах

Владимир Григорьевич Кановей (ИППИ)

Осень 2023, МИАН Москва

http://iitp.ru/ru/userpages/156/300.htm

kanovei@iitp.ru — email для контактов

https://www.mathnet.ru/conf2305 — сайт курса http://iitp.ru/ru/userpages/156/300.htm

kanovei@iitp.ru — email для контактов

https://www.mathnet.ru/conf2305 — сайт курса

Jech03 *Millenium* — **Базовая**

K-AMS Kanovei, *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification*, AMS University Lecture Series.

Kechris *Descriptive set theory*

Mos Moschovakis, *Descriptive set theory*

Йех73 *Теория множеств и метод форсинга*

КЛ-1 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики*

КЛ-2 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*

КЛ-3 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы*

Кур-1 Куратовский, *Топология том 1*

СКМЛ *Справочная книга по математической логике том 2: теория множеств.*

Цитирую Московакиса [Mos]:

Descriptive set theory deals with sets of reals that are described in some simple way: sets that have a simple topological structure (e.g., continuous images of closed sets) or are definable in a simple way. The main theme is that questions that are difficult to answer if asked for arbitrary sets of reals, become much easier when asked for sets that have a simple description. An example of that is

Теорема (Кантор–Бендиксон)

Every closed set of reals is either at most countable or has size of continuum $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Можно сказать и так: **классификация, структура, и свойства точечных множеств в зависимости от сложности их определения или построения.**

История ДТМ берет начало около границы XIX / XX веков.

Источники и первые шаги:

Канторова теория множеств, 1880е годы.

Теория интеграла и меры, 1890е годы, Борель, Лебег.

Analysis situs (анализ положений), 1890е годы – Пуанкаре, теорема Жордана о простых кривых.

Борелевские множества, 1905, Лебег.

Мощность борелевских множеств, 1916, Александров–Хаусдорф.

A-множества (класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$), 1917, Суслин – Лузин – Серпинский.

Проективные множества (класс $\mathbf{\Sigma}^1_\omega$), 1925, Лузин.

История ДТМ берет начало около границы XIX / XX веков.

Источники и первые шаги:

Канторова теория множеств, 1880е годы.

Теория интеграла и меры, 1890е годы, Борель, Лебег.

Analysis situs (анализ положений), 1890е годы – Пуанкаре, теорема Жордана о простых кривых.

Борелевские множества, 1905, Лебег.

Мощность борелевских множеств, 1916, Александров–Хаусдорф.

A-множества (класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$), 1917, Суслин – Лузин – Серпинский.

Проективные множества (класс $\mathbf{\Sigma}^1_\omega$), 1925, Лузин.

Польские пространства = полные сепарабельные метрические.

В классе топологических пространств: сепарабельные топологические пространства, метризуемые полной метрикой.

Примеры: вещественная прямая $\mathbb{R}$ и её отрезок $[0.1]$, бэровское пространство $\mathcal{N} = \omega^\omega =$ все функции $x : \omega \to \omega$ (или все последовательности натуральных чисел), метрика $\rho(x, y) = \frac{1}{m+1}$, где $m = \min\{m : x(m) \neq y(m)\}$. Отображение

$$h(x) = \frac{1}{x(0) + 1 + \frac{1}{x(1)+1+\frac{1}{x(2)+1+\dots}}}$$

есть гомеоморфизм $\mathcal{N}$ на иррациональные числа $\mathscr{I} = [0, 1] \smallsetminus \mathbb{Q}$ единичного интервала (но конечно не изометрия).

Следовательно, $\mathscr{I}$ — польское пространство.

Польские пространства = полные сепарабельные метрические.

В классе топологических пространств: сепарабельные топологические пространства, метризуемые полной метрикой.

Примеры: вещественная прямая $\mathbb{R}$ и её отрезок $[0.1]$, бэровское пространство $\mathcal{N} = \omega^\omega =$ все функции $x : \omega \to \omega$ (или все последовательности натуральных чисел), метрика $\rho(x, y) = \frac{1}{m+1}$, где $m = \mathbf{min}\{m : x(m) \neq y(m)\}$. Отображение

$$h(x) = \cfrac{1}{x(0) + 1 + \cfrac{1}{x(1)+1+\cfrac{1}{x(2)+1+\ldots}}}$$

есть гомеоморфизм $\mathcal{N}$ на иррациональные числа $\mathscr{I} = [0, 1] \smallsetminus \mathbb{Q}$ единичного интервала (но конечно не изометрия).

Следовательно, $\mathscr{I}$ — польское пространство.

Вопрос: почему множество $\mathscr{I} = [0,1] \smallsetminus \mathbb{Q}$ иррациональных чисел единичного интервала **не есть** полное пространство с обычной метрикой $\mathbb{R}$?

Теорема

Любое $\mathbf{G}_\delta$*-множество* Y *в польском пространстве* X *само есть польское пространство с наследственной топологией: оно метризуемо полной метрикой, возможно, отличной от метрики* X.

Вопрос: почему множество $\mathscr{I} = [0,1] \smallsetminus \mathbb{Q}$ иррациональных чисел единичного интервала **не есть** полное пространство с обычной метрикой $\mathbb{R}$?

Теорема

Любое $\mathbf{G}_\delta$*-множество* Y *в польском пространстве* X *само есть польское пространство с наследственной топологией: оно метризуемо полной метрикой, возможно, отличной от метрики* X.

Совершенное множество = замкнутое и нет изолированных точек.

Совершенное множество в несчетном польском пространстве обязательно имеет мощность континуума $\mathfrak{c}$! (Jech Theorem 4.5.)

Теорема (Кантор–Бендиксон)

Каждое замкнутое множество X в польском пространстве имеет вид $X = X' \cup C$, где X' – совершенное множество (равное объединению всех точек конденсации X), а C не более чем счетно.

Совершенное множество = замкнутое и нет изолированных точек.

Совершенное множество в несчетном польском пространстве обязательно имеет мощность континуума $\mathfrak{c}$!   (Jech Theorem 4.5.)

Теорема (Кантор–Бендиксон)

Каждое замкнутое множество X в польском пространстве имеет вид $X = X' \cup C$, где X' – совершенное множество (равное объединению всех точек конденсации X), а C не более чем счетно.

Еще о **бэровском пространстве** $\mathcal{N} = \omega^\omega$. Множества вида

$$\mathcal{N}_s = \{x \in \mathcal{N} : s \subset x\}, \quad \text{где} \quad s \in \omega^{<\omega}$$

(т.е. s – кортеж натуральных чисел) называются бэровскими интервалами — они открыто-замкнуты в $\mathcal{N}$ и являются базовыми окрестностями топологии $\mathcal{N}$.

Канторов дисконтинуум $\mathscr{D} = 2^\omega$ = функции $x : \omega \to 2 = \{0, 1\}$ (или все последовательности чисел 0,1). Это замкнутое множество в $\mathcal{N}$ с наследственной метрикой и топологией.

$\mathscr{D}$ — не только полное, но и компактное прост-во (не как $\mathcal{N}$).

Канторовы интервалы $\mathscr{D}_s = \{x \in \mathscr{D} : s \subset x\}$, где $s \in 2^{<\omega}$.

Еще о **бэровском пространстве** $\mathcal{N} = \omega^\omega$. Множества вида

$$\mathcal{N}_s = \{x \in \mathcal{N} : s \subset x\}, \quad \text{где} \quad s \in \omega^{<\omega}$$

(т.е. s – кортеж натуральных чисел) называются бэровскими интервалами — они открыто-замкнуты в $\mathcal{N}$ и являются базовыми окрестностями топологии $\mathcal{N}$.

Канторов дисконтинуум $\mathscr{D} = 2^\omega$ = функции $x : \omega \to 2 = \{0, 1\}$ (или все последовательности чисел 0,1). Это замкнутое множество в $\mathcal{N}$ с наследственной метрикой и топологией.

$\mathscr{D}$ — не только полное, но и компактное прост-во (не как $\mathcal{N}$).

Канторовы интервалы $\mathscr{D}_s = \{x \in \mathscr{D} : s \subset x\}$, где $s \in 2^{<\omega}$.

Теорема (об изоморфизме класса (0,1))

Пусть X — польское пространство. Найдутся:

$1)$ *замкнутое множество* $E \subseteq \mathcal{N} = \omega^\omega$ *и*

$2)$ *взаимно однозначная биекция* $H : E \xrightarrow{\text{на}} X$,

которая является изоморфизмом класса $(0,1)$, *то есть образы и прообразы замкнутых множеств суть множества* $\mathbf{G}_\delta$.

Другими словами, польские пространства = (0,1)-изоморфные образы замкнутых множеств бэровского пространства.
Ссылка: Куратовский, стр. 454.

Замечание

Теорема позволяет рассматривать точечные множества только в бэровском пространстве $\mathcal{N} = \omega^\omega$ *и в пространствах вида* $\omega^m \times \mathcal{N}^n$ *— в отношении понятий и результатов, инвариантных относительно изоморфизмов класса* $(0,1)$.

Теорема (об изоморфизме класса (0,1))

Пусть X — польское пространство. Найдутся:

$1)$ *замкнутое множество* $E \subseteq \mathcal{N} = \omega^\omega$ *и*

$2)$ *взаимно однозначная биекция* $H : E \xrightarrow{\text{на}} X$,

*которая является **изоморфизмом класса** $(0,1)$, то есть образы и прообразы замкнутых множеств суть множества* $\mathbf{G}_\delta$.

Другими словами, польские пространства = (0,1)-изоморфные образы замкнутых множеств бэровского пространства.
Ссылка: Куратовский, стр. 454.

Замечание

Теорема позволяет рассматривать точечные множества только в бэровском пространстве $\mathcal{N} = \omega^\omega$ *и в пространствах вида* $\omega^m \times \mathcal{N}^n$ *— в отношении понятий и результатов, инвариантных относительно изоморфизмов класса* $(0,1)$.

Let X be a Polish space. A set $A \subseteq X$ is a Borel set if it belongs to the smallest σ-algebra of subsets of X containing all closed sets.

For each $\alpha < \omega_1$, define the collections $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ and $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ of subsets of X:

$\mathbf{\Sigma}^0_1$ = все открытые мн-ва; $\Leftarrow$ Это борелевская иерархия $\Downarrow$

$\mathbf{\Pi}^0_1$ = все замкнутые множества; $\Downarrow$ $\Downarrow$

$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ = все мн-ва $A = \bigcup_n A_n$, где все A_n принадлежат $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta$;

$\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ = все мн-ва $A = \bigcap_n A_n$, где все A_n принадлежат $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_\beta$;

Оказывается, что $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ = все дополнения множеств из $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$.

$\mathbf{\Delta}^0_\alpha = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ = двусторонние борелевские мн-ва уровня α.

Связь с топологическими обозначениями $\mathbf{\Pi}^0_2 = \mathbf{G}_\delta$, $\mathbf{\Sigma}^0_2 = \mathbf{F}_\sigma$.

Факт: $\mathbf{\Sigma}^0_{\omega_1} := \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \bigcup_\alpha \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ = все борелевские множества.

Let X be a Polish space. A set $A \subseteq X$ is a Borel set if it belongs to the smallest σ-algebra of subsets of X containing all closed sets. For each $\alpha < \omega_1$, define the collections $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ and $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ of subsets of X:

$\mathbf{\Sigma}^0_1$ = все открытые мн-ва; $\Leftarrow$ Это борелевская иерархия $\Downarrow$

$\mathbf{\Pi}^0_1$ = все замкнутые множества; $\Downarrow$ $\Downarrow$

$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ = все мн-ва $A = \bigcup_n A_n$, где все A_n принадлежат $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta$;

$\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ = все мн-ва $A = \bigcap_n A_n$, где все A_n принадлежат $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_\beta$;

Оказывается, что $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ = все дополнения множеств из $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$.

$\mathbf{\Delta}^0_\alpha = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ = двусторонние борелевские мн-ва уровня α.

Связь с топологическими обозначениями $\mathbf{\Pi}^0_2 = \mathbf{G}_\delta$, $\mathbf{\Sigma}^0_2 = \mathbf{F}_\sigma$.

Факт: $\mathbf{\Sigma}^0_{\omega_1} := \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \bigcup_\alpha \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ = все борелевские множества.

Верно ли что каждый уровень $\alpha < \omega_1$ дает новые множества?

Если данное польское пространство X счетно то ответ **отрицательный**: любое множество $A \subseteq$ (счетное X) принадлежит классу $\mathbf{\Delta}^0_2 = \mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta$. — **Почему?**

Напротив, для несчетных пространств имеет место:

Теорема (теорема иерархии, [Jech])

Пусть X – несчетное польское пространство, и $\alpha < \omega_1$. Тогда

1. $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \not\subseteq \mathbf{\Pi}^0_\alpha$, *и соответственно* $\mathbf{\Pi}^0_\alpha \not\subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$.
2. $\mathbf{\Delta}^0_\alpha \subsetneqq \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ *и* $\mathbf{\Delta}^0_\alpha \subsetneqq \mathbf{\Pi}^0_\alpha$.
3. $\mathbf{\Sigma}^0_{<\alpha} \cup \mathbf{\Pi}^0_{<\alpha} \subsetneqq \mathbf{\Delta}^0_\alpha$, *где* $\mathbf{\Sigma}^0_{<\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_\beta$ *и* $\mathbf{\Pi}^0_{<\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta$.

Верно ли что каждый уровень $\alpha < \omega_1$ дает новые множества?

Если данное польское пространство X счетно то ответ **отрицательный**: любое множество $A \subseteq$ (счетное X) принадлежит классу $\mathbf{\Delta}_2^0 = \mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta$. — **Почему?**

Напротив, для несчетных пространств имеет место:

Теорема (теорема иерархии, [Jech])

Пусть X – несчетное польское пространство, и $\alpha < \omega_1$. Тогда

1. $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0 \not\subseteq \mathbf{\Pi}_\alpha^0$, *и соответственно* $\mathbf{\Pi}_\alpha^0 \not\subseteq \mathbf{\Sigma}_\alpha^0$.
2. $\mathbf{\Delta}_\alpha^0 \subsetneqq \mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ *и* $\mathbf{\Delta}_\alpha^0 \subsetneqq \mathbf{\Pi}_\alpha^0$.
3. $\mathbf{\Sigma}_{<\alpha}^0 \cup \mathbf{\Pi}_{<\alpha}^0 \subsetneqq \mathbf{\Delta}_\alpha^0$, *где* $\mathbf{\Sigma}_{<\alpha}^0 = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Sigma}_\beta^0$ *и* $\mathbf{\Pi}_{<\alpha}^0 = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}_\beta^0$.

Док-во (для бэровского пространства $X = \mathcal{N} = \omega^\omega$)

Доказательство ключевого утверждения 1 использует понятие универсального множества.

Множество $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ (“плоское”) называется *универсальным $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-множеством*, если U само есть $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ в $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, и для любого множества $A \subseteq \mathcal{N}$ из $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ имеется точка $x \in \mathcal{N}$, для которой $A = U_x := \{y : \langle x, y \rangle \in U\}$.

U_x называется **сечением** множества U.

Факт: *Если $\alpha < \omega_1$ то найдется универсальное $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-множество* $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. — Док-во по индукции см. [Jech] лемма 11.2.

Док-во (для бэровского пространства $X = \mathcal{N} = \omega^\omega$)

Доказательство ключевого утверждения 1 использует понятие универсального множества.

Множество $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ (“плоское”) называется *универсальным $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-множеством*, если U само есть $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ в $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, и для любого множества $A \subseteq \mathcal{N}$ из $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ имеется точка $x \in \mathcal{N}$, для которой $A = U_x := \{y : \langle x, y\rangle \in U\}$.

U_x называется **сечением** множества U.

Факт: *Если $\alpha < \omega_1$ то найдется универсальное $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-множество* $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. — Док-во по индукции см. [Jech] лемма 11.2.

Доказательство: продолжение

Теперь имея универсальное $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-множество $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, мы рассмотрим его диагональ: $A = \{x : \langle x, x \rangle \in U\}$.

Факт 2: $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$.
Ключ: A есть прообраз $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-множества U при непрерывном отображении $x \mapsto \langle x, x \rangle$, а все борелевские классы замкнуты относительно непрерывных прообразов в польских пространствах. — Упражнение: доказать это по индукции!.

Факт 3: $A \notin \mathbf{\Pi}^0_\alpha$.
Иначе дополнительное множество $B = \mathcal{N} \smallsetminus A$ принадлежит $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$. По универсальности, для какого-то $x \in \mathcal{N}$ будет $B = \{y : \langle x, y \rangle \in U\}$. Имеем противоречие:

$$x \in B \Longleftrightarrow x \notin A \Longleftrightarrow \langle x, x \rangle \notin U \Longleftrightarrow x \notin B.$$

Факт 2 + Факт 3 $\Longrightarrow$ теорема иерархии.

Теперь имея универсальное $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-множество $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, мы рассмотрим его диагональ: $A = \{x : \langle x, x\rangle \in U\}$.

Факт 2: $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$.
Ключ: A есть прообраз $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-множества U при непрерывном отображении $x \mapsto \langle x, x\rangle$, а все борелевские классы замкнуты относительно непрерывных прообразов в польских пространствах. — Упражнение: доказать это по индукции!.

Факт 3: $A \notin \mathbf{\Pi}^0_\alpha$.
Иначе дополнительное множество $B = \mathcal{N} \smallsetminus A$ принадлежит $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$.
По универсальности, для какого-то $x \in \mathcal{N}$ будет $B = \{y : \langle x, y\rangle \in U\}$. Имеем противоречие:

$$x \in B \Longleftrightarrow x \notin A \Longleftrightarrow \langle x, x\rangle \notin U \Longleftrightarrow x \notin B.$$

Факт 2 + Факт 3 $\Longrightarrow$ теорема иерархии.

- Классы $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ замкнуты относительно счетных объединений (очевидно) и конечных пересечений.
- Классы $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ замкнуты относительно счетных пересечений (очевидно) и конечных объединений.
- Классы $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ замкнуты относительно конечных объединений и пересечений, а также дополнений.
- Каждый класс $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \mathbf{\Pi}^0_\alpha, \mathbf{\Delta}^0_\alpha$ замкнут относительно прообразов при (всюду определенных) непрерывных отображениях одного польского пространства в другое.

Док-во для конечных пересечений в классе $\mathbf{\Sigma}^0_2 = \mathbf{F}_\sigma$.
Пусть $X = \bigcup_m X_m \in \mathbf{\Sigma}^0_2$, $Y = \bigcup_n Y_n \in \mathbf{\Sigma}^0_2$, все множества X_m, Y_n принадлежат $\mathbf{\Pi}^0_1$, т.е. замкнуты. Тогда $X \cap Y = \bigcup_{m,n}(X_m \cap Y_n)$ — опять счетное объединение замкнутых множеств $X_m \cap Y_n$.

- Классы $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ замкнуты относительно счетных объединений (очевидно) и конечных пересечений.
- Классы $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ замкнуты относительно счетных пересечений (очевидно) и конечных объединений.
- Классы $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ замкнуты относительно конечных объединений и пересечений, а также дополнений.
- Каждый класс $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \mathbf{\Pi}^0_\alpha, \mathbf{\Delta}^0_\alpha$ замкнут относительно прообразов при (всюду определенных) непрерывных отображениях одного польского пространства в другое.

Док-во для конечных пересечений в классе $\mathbf{\Sigma}^0_2 = \mathbf{F}_\sigma$. Пусть $X = \bigcup_m X_m \in \mathbf{\Sigma}^0_2$, $Y = \bigcup_n Y_n \in \mathbf{\Sigma}^0_2$, все множества X_m, Y_n принадлежат $\mathbf{\Pi}^0_1$, т.е. замкнуты. Тогда $X \cap Y = \bigcup_{m,n}(X_m \cap Y_n)$ — опять счетное объединение замкнутых множеств $X_m \cap Y_n$.

Лемма (о пяти определениях [Jech] с. 142–144)

Следующие классы множеств совпадают в любом польском X :

1. *непрерывные образы пространства $\mathcal{N}$ в X;*
2. *непрерывные образы борелевских множеств расположенных в польских пространствах;*
3. *проекции на X борелевских множеств в $X \times Y$, где Y — любое несчетное польское пространство;*
4. *проекции на X замкнутых множеств в $X \times \mathcal{N}$.*
5. *действие А-операции на замкнутые множества в X .*

Этот класс сейчас называется: $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества. Исторические названия: суслинские, аналитические, А-множества.

Факт. *Класс всех $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств в любом польском X замкнут относительно счетного объединения и счетного пересечения.*

Лемма (о пяти определениях [Jech] с. 142–144)

Следующие классы множеств совпадают в любом польском X :

1. *непрерывные образы пространства $\mathcal{N}$ в X;*
2. *непрерывные образы борелевских множеств расположенных в польских пространствах;*
3. *проекции на X борелевских множеств в $X \times Y$, где Y — любое несчетное польское пространство;*
4. *проекции на X замкнутых множеств в $X \times \mathcal{N}$.*
5. *действие А-операции на замкнутые множества в X .*

Этот класс сейчас называется: $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества. Исторические названия: суслинские, аналитические, А-множества.

Факт. *Класс всех $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств в любом польском X замкнут относительно счетного объединения и счетного пересечения.*

Пусть X польское пространство. Для каждого $n \geq 1$, определяются классы $\mathbf{\Sigma}^1_n$ and $\mathbf{\Pi}^1_n$ множеств в пространстве X:

$\mathbf{\Sigma}^1_1$ = аналитические мн-ва; $\Leftarrow$ Это проективная иерархия $\Downarrow$

$\mathbf{\Pi}^1_n$ = дополнения множеств из $\mathbf{\Sigma}^1_n$ в X; $\Downarrow$ $\Downarrow$

$\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ = мн-ва $A \subseteq X$, которые можно получить проекцией на X множеств $P \subseteq X \times \mathcal{N}$ класса $\mathbf{\Pi}^1_n$;

$\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathbf{\Pi}^1_n$ = двусторонние проективные множ-ва уровня n.

$\mathbf{\Sigma}^1_\omega := \bigcup_n \mathbf{\Sigma}^1_n = \bigcup_n \mathbf{\Pi}^1_n$ = все проективные множества

Пусть X польское пространство. Для каждого $n \ge 1$, определяются классы $\mathbf{\Sigma}^1_n$ and $\mathbf{\Pi}^1_n$ множеств в пространстве X:

$\mathbf{\Sigma}^1_1$ = аналитические мн-ва; $\Leftarrow$ Это проективная иерархия $\Downarrow$

$\mathbf{\Pi}^1_n$ = дополнения множеств из $\mathbf{\Sigma}^1_n$ в X; $\Downarrow$ $\Downarrow$

$\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ = мн-ва $A \subseteq X$, которые можно получить проекцией на X множеств $P \subseteq X \times \mathcal{N}$ класса $\mathbf{\Pi}^1_n$;

$\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathbf{\Pi}^1_n$ = двусторонние проективные множ-ва уровня n.

$\mathbf{\Sigma}^1_\omega := \bigcup_n \mathbf{\Sigma}^1_n = \bigcup_n \mathbf{\Pi}^1_n$ = все проективные множества.

Теорема (теорема иерархии, [Jech] стр. 145)

Пусть X – несчетное польское пространство, и $n \ge 1$. Тогда

1. $\mathbf{\Sigma}^1_n \not\subseteq \mathbf{\Pi}^1_n$ *и соответственно* $\mathbf{\Pi}^1_n \not\subseteq \mathbf{\Sigma}^1_n$.
2. $\mathbf{\Delta}^1_n \subsetneqq \mathbf{\Sigma}^1_n$ *и* $\mathbf{\Delta}^1_n \subsetneqq \mathbf{\Pi}^1_n$.
3. $\mathbf{\Sigma}^1_n \cup \mathbf{\Pi}^1_n \subsetneqq \mathbf{\Delta}^1_{n+1}$.
4. *Даже* **борелевское замыкание**$(\mathbf{\Sigma}^1_n \cup \mathbf{\Pi}^1_n) \subsetneqq \mathbf{\Delta}^1_{n+1}$.

Доказательство ключевого утверждения 1 в [Jech] для $X = \mathcal{N}$ (бэровское пространство), подобно борелевскому случаю, использует универсальное $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множество $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, которое строится индукцией по n.

Теорема (теорема иерархии, [Jech] стр. 145)

Пусть X *– несчетное польское пространство, и* $n \geq 1$. *Тогда*

1. $\mathbf{\Sigma}^1_n \not\subseteq \mathbf{\Pi}^1_n$ *и соответственно* $\mathbf{\Pi}^1_n \not\subseteq \mathbf{\Sigma}^1_n$.
2. $\mathbf{\Delta}^1_n \subsetneqq \mathbf{\Sigma}^1_n$ *и* $\mathbf{\Delta}^1_n \subsetneqq \mathbf{\Pi}^1_n$.
3. $\mathbf{\Sigma}^1_n \cup \mathbf{\Pi}^1_n \subsetneqq \mathbf{\Delta}^1_{n+1}$.
4. *Даже* борелевское замыкание$(\mathbf{\Sigma}^1_n \cup \mathbf{\Pi}^1_n) \subsetneqq \mathbf{\Delta}^1_{n+1}$.

Доказательство ключевого утверждения 1 в [Jech] для $X = \mathcal{N}$ (бэровское пространство), подобно борелевскому случаю, использует универсальное $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множество $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, которое строится индукцией по n.

- Классы $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $n \geq 1$, замкнуты относительно счетных объединений и пересечений, проекций, непрерывных образов и прообразов.
- Классы $\mathbf{\Pi}^1_n$, $n \geq 1$, замкнуты относительно счетных объединений и пересечений, непрерывных прообразов.
- Классы $\mathbf{\Delta}^1_n$, $n \geq 1$, замкнуты относительно счетных объединений и пересечений, дополнений, непрерывных прообразов.

- Классы $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $n \geq 1$, замкнуты относительно счетных объединений и пересечений, проекций, непрерывных образов и прообразов.

- Классы $\mathbf{\Pi}^1_n$, $n \geq 1$, замкнуты относительно счетных объединений и пересечений, непрерывных прообразов.

- Классы $\mathbf{\Delta}^1_n$, $n \geq 1$, замкнуты относительно счетных объединений и пересечений, дополнений, непрерывных прообразов.

Теорема 1

Класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств в любом польском X замкнут относительно счетных объединений и пересечений, проекций, непрерывных образов и прообразов.

Док-во

Проекции = непрерывные образы. Для самих непрерывных образов, по лемме о 5 определениях, $\mathbf{\Sigma}^1_1$ = непрерывные образы $\mathcal{N}$. Но суперпозиция непрерывных отображений — непрерывна.

Для прообраза — **упражнение**.

Пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots \subseteq X$ принадлежат $\mathbf{\Sigma}^1_1$. По лемме о 5 определениях $A_k = f_k[\mathcal{N}] = \{f(x) : x \in \mathcal{N}\}$, где $f_k : \mathcal{N} \to X$ — **непрерывны**.

Тогда $g(k^\frown x) = f_k(x)$ $(k < \omega,\ x \in \mathcal{N})$, $g : \mathcal{N} \to X$, тоже непрерывно. С другой стороны, множество $U = \bigcup_k A_k$ удовлетворяет $U = g[\mathcal{N}]$.

Поэтому U есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество.

Теорема 1

Класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств в любом польском X замкнут относительно счетных объединений и пересечений, проекций, непрерывных образов и прообразов.

Док-во

Проекции = непрерывные образы. Для самих непрерывных образов, по лемме о 5 определениях, $\mathbf{\Sigma}^1_1$ = непрерывные образы $\mathcal{N}$. Но суперпозиция непрерывных отображений — непрерывна.

Для прообраза — **упражнение**.

Пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots \subseteq X$ принадлежат $\mathbf{\Sigma}^1_1$. По лемме о 5 определениях $A_k = f_k[\mathcal{N}] = \{f(x) : x \in \mathcal{N}\}$, где $f_k : \mathcal{N} \to X$ — **непрерывны**.

Тогда $g(k^\frown x) = f_k(x)$ $(k < \omega,\ x \in \mathcal{N})$, $g : \mathcal{N} \to X$, тоже непрерывно. С другой стороны, множество $U = \bigcup_k A_k$ удовлетворяет $U = g[\mathcal{N}]$.

Поэтому U есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество.

Док-во (продолжение)

В тех же обозначениях, докажем, что $P = \bigcap_k A_k$ есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$.

Положим $x_{(k)}(j) = x(2^k(2j+1)-1)$, так что $x_{(k)} \in \mathcal{N}$ и

- множество $X = \{x \in \mathcal{N} : \forall k \, \forall \ell \, (f_k(x_{(k)}) = f_\ell(x_{(\ell)})\}$ замкнуто;
- отображение $h(x) := f_0(x_{(0)}) = f_1(x_{(1)}) = f_2(x_{(2)}) = \dots$ из X в $\mathcal{N}$ непрерывно;
- $P = h[X] = \{h(x) : x \in X\}$ есть непрерывный образ замкнутого множества X.

Значит P есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество по лемме о 5 определениях. □

Следствие (из теоремы 1)

(борелевские множества) $\subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1$, *следовательно,* $\subseteq \mathbf{\Pi}^1_1$ *и* $\subseteq \mathbf{\Delta}^1_1$.

Док-во (продолжение)

В тех же обозначениях, докажем, что $P = \bigcap_k A_k$ есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$.

Положим $x_{(k)}(j) = x(2^k(2j+1)-1)$, так что $x_{(k)} \in \mathcal{N}$ и

- множество $X = \{x \in \mathcal{N} : \forall\, k\, \forall\, \ell\, (f_k(x_{(k)}) = f_\ell(x_{(\ell)})\}$ замкнуто;
- отображение $h(x) := f_0(x_{(0)}) = f_1(x_{(1)}) = f_2(x_{(2)}) = \dots$ из X в $\mathcal{N}$ непрерывно;
- $P = h[X] = \{h(x) : x \in X\}$ есть непрерывный образ замкнутого множества X.

Значит P есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество по лемме о 5 определениях. □

Следствие (из теоремы 1)

(борелевские множества) $\subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1$, *следовательно,* $\subseteq \mathbf{\Pi}^1_1$ *и* $\subseteq \mathbf{\Delta}^1_1$.

Теорема 2

В любом польском пространстве P, каждое несчетное $\mathbf{\Sigma}^1_1$ множество $P' \subseteq P$ содержит совершенное подмножество, также называемое ***совершенным ядром.***

Док-во

По лемме о пяти определениях, имеется непрерывная $f : \mathcal{N} \to P$, для которой $P' = f[\mathcal{N}]$.

Множество $X \subseteq \mathcal{N}$ то пусть f-несчетно, если его прообраз $f[X] = \{f(x) : x \in X\} \subseteq P$ несчетен. Само $\mathcal{N}$ f-несчетно.

Удалим из $\mathcal{N}$ все открытые f-счетные множества.

1. Оставшееся замкнутое $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ само f-несчетно, и любое относительно открытое $\varnothing \neq X \subseteq \mathcal{N}'$ также f-несчетно.

Теорема 2

В любом польском пространстве P, каждое несчетное $\mathbf{\Sigma}^1_1$ множество $P' \subseteq P$ содержит совершенное подмножество, также называемое ***совершенным ядром.***

Док-во

По лемме о пяти определениях, имеется непрерывная $f : \mathcal{N} \to P$, для которой $P' = f[\mathcal{N}]$.

Множество $X \subseteq \mathcal{N}$ то пусть f-несчетно, если его прообраз $f[X] = \{f(x) : x \in X\} \subseteq P$ несчетен. Само $\mathcal{N}$ f-несчетно.

Удалим из $\mathcal{N}$ все открытые f-счетные множества.

1. Оставшееся замкнутое $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ само f-несчетно, и любое относительно открытое $\varnothing \neq X \subseteq \mathcal{N}'$ также f-несчетно.

Множества $X, Y \subseteq \mathcal{N}'$ **f-дизъюнктны**, если их образы $f[X] \cap f[Y] = \varnothing$ в P дизъюнктны.

2 Если множество $\varnothing \neq X \subseteq \mathcal{N}'$ относительно открыто, и $\varepsilon > 0$, то существуют относительно открытые f-дизъюнктные $Y, Z \subseteq X$ диаметра $< \varepsilon$.

В самом деле, X f-несчетно по **1**.
Значит, найдутся точки $y_0 \neq z_0 \in X$, для которых $f(y_0) \neq f(z_0)$.

Берем дизъюнктные окрестности $U_{f(y_0)}, U_{f(z_0)}$ этих точек в P, и

$$U_{y_0} = \{x \in X : f(x) \in U_{f(y_0)}\}, \quad U_{z_0} = \{x \in X : f(x) \in U_{f(y_0)}\}$$

их прообразы в X.

Берем любые относительно открытые множества $\varnothing \neq Y \subseteq U_{y_0}$ и $\varnothing \neq Z \subseteq U_{z_0}$, оба диаметра $< \varepsilon$, и используем **1**. $\square$ (**2**)

Множества $X, Y \subseteq \mathcal{N}'$ f-дизъюнктны, если их образы $f[X] \cap f[Y] = \varnothing$ в P дизъюнктны.

2 Если множество $\varnothing \neq X \subseteq \mathcal{N}'$ относительно открыто, и $\varepsilon > 0$, то существуют относительно открытые f-дизъюнктные $Y, Z \subseteq X$ диаметра $< \varepsilon$.

В самом деле, X f-несчетно по **1**.
Значит, найдутся точки $y_0 \neq z_0 \in X$, для которых $f(y_0) \neq f(z_0)$.

Берем дизъюнктные окрестности $U_{f(y_0)}, U_{f(z_0)}$ этих точек в P, и

$$U_{y_0} = \{x \in X : f(x) \in U_{f(y_0)}\}, \quad U_{z_0} = \{x \in X : f(x) \in U_{f(y_0)}\}$$

их прообразы в X.

Берем любые относительно открытые множества $\varnothing \neq Y \subseteq U_{y_0}$ и $\varnothing \neq Z \subseteq U_{z_0}$, оба диаметра $< \varepsilon$, и используем **1**. □ (**2**)

Свойство совершенного ядра: продолжение 2

Строим, используя **1**, **2**, сплит-систему открытых множеств $X_s \subseteq \mathcal{N}'$, $s \in 2^{<\omega}$ (0, 1-кортежи) с такими свойствами:

3 Каждое $\varnothing \neq X_s$ f-несчетно.

4 $X_{s^\frown 0}, X_{s^\frown 1}$ f-дизъюнктны, поэтому и просто дизъюнктны.

5 Диаметр $X_s < 2^{-n}$, где $n = \operatorname{len} s$ (длина s).

Теперь, если $a \in 2^\omega$ (бесконечная 0,1-последовательность), то из **5** и полноты $\mathcal{N}$ следует, что пересечение $\bigcap_n X_{a \restriction n} = \{h(a)\}$ содержит единственную точку $h(a) \in \mathcal{N}$. **Докажите:**

6 Функция $h : 2^\omega \to \mathcal{N}'$ непрерывна и 1–1, а потому её образ $Y = \{h(a) : a \in 2^\omega\}$ — совершенное компактное множество.

7 $f \restriction Y$ есть 1–1 по **4**.

8 Образ $Z = f[Y]$ также совершенное компактное множество, поэтому Z несчетно. $\square$ (Теорема 2)

Свойство совершенного ядра: продолжение 2

Строим, используя $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, сплит-систему открытых множеств $X_s \subseteq \mathcal{N}'$, $s \in 2^{<\omega}$ (0, 1-кортежи) с такими свойствами:

3 Каждое $\varnothing \neq X_s$ f-несчетно.

4 $X_{s^\frown 0}, X_{s^\frown 1}$ f-дизъюнктны, поэтому и просто дизъюнктны.

5 Диаметр $X_s < 2^{-n}$, где $n = \operatorname{len} s$ (длина s).

Теперь, если $a \in 2^\omega$ (бесконечная 0,1-последовательность), то из $\boxed{5}$ и полноты $\mathcal{N}$ следует, что пересечение $\bigcap_n X_{a \restriction n} = \{h(a)\}$ содержит единственную точку $h(a) \in \mathcal{N}$. **Докажите:**

6 Функция $h : 2^\omega \to \mathcal{N}'$ непрерывна и 1–1, а потому её образ $Y = \{h(a) : a \in 2^\omega\}$ — совершенное компактное множество.

7 $f \restriction Y$ есть 1–1 по $\boxed{4}$.

8 Образ $Z = f[Y]$ также совершенное компактное множество, поэтому Z несчетно. $\square$ (Теорема 2)

Теорема 3 ([Jech] теорема 11.18)

В любом польском пространстве X, каждое несчетное $\mathbf{\Sigma}^1_1$ множество $A \subseteq X$ измеримо по Лебегу и имеет свойство Бэра.

Измеримость понимается в смысле любой сигма-аддитивной борелевской меры.

Множество имеет свойство Бэра, если оно совпадает с открытым множеством с точностью до тощего множества.

А тощее множество — это счетное объединение множеств нигде не плотных.

Теорема 3 ([Jech] теорема 11.18)

В любом польском пространстве X, каждое несчетное $\mathbf{\Sigma}^1_1$ множество $A \subseteq X$ измеримо по Лебегу и имеет свойство Бэра.

Измеримость понимается в смысле любой сигма-аддитивной борелевской меры.

Множество имеет свойство Бэра, если оно совпадает с открытым множеством с точностью до тощего множества.

А тощее множество — это счетное объединение множеств нигде не плотных.

Содержание I

Содержание II