Теория множеств
Лекция 2
Первый проективный уровень

Владимир Григорьевич Кановей (ИППИ)

Осень 2023, МИАН Москва

http://iitp.ru/ru/userpages/156/300.htm

kanovei@iitp.ru — email для контактов

https://www.mathnet.ru/conf2305 — сайт курса

Jech03 *Millenium* — **Базовая**

K-AMS Kanovei, *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification*, AMS University Lecture Series.

Kechris *Descriptive set theory*

Mos Moschovakis, *Descriptive set theory*

Йех73 *Теория множеств и метод форсинга*

КЛ-1 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики*

КЛ-2 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*

КЛ-3 Кановей и Любецкий, *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы*

Кур-1 Куратовский, *Топология том 1*

СКМЛ *Справочная книга по математической логике том 2*: *теория множеств.*

Польские пространства P.

Множества $X \subseteq P$ — точечные множества.

Борелевские множества $X \subseteq P$.

Борелевские классы $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \mathbf{\Pi}^0_\alpha, \mathbf{\Delta}^0_\alpha$.

$\mathbf{\Sigma}^0_1 =$ открытые, $\mathbf{\Pi}^0_1 =$ замкнутые, $\mathbf{\Sigma}^0_2 = \mathbf{F}_\sigma$, $\mathbf{\Pi}^0_2 = \mathbf{G}_\delta$.

Проективные множества $X \subseteq P$.

Проективные классы $\mathbf{\Sigma}^1_n, \mathbf{\Pi}^1_n, \mathbf{\Delta}^1_n$.

Кортежи натуральных чисел $\mathbf{Cort} = \mathbb{N}^{<\omega}$.

Лемма (лемма о пяти определениях, [Jech] с. 142–144)

Следующие классы множеств совпадают в любом польском P :

1. *непрерывные образы пространства $\mathcal{N}$ в P ;*
2. *непрерывные образы борелевских множеств, расположенных в польских пространствах ;*
3. *проекции на борелевских множеств в $P \times Y$, где Y — любое польское пространство ;*
4. *проекции на P замкнутых множеств в $P \times \mathcal{N}$;*
5. *действие А-операции на замкнутые множества в P .*

Этот класс сейчас называется: $\mathbf{\Sigma}^1_1$*-множества* .

Класс дополнительных множеств обозначается $\mathbf{\Pi}^1_1$: если множество A в пространстве P принадлежит $\mathbf{\Sigma}^1_1$ то его дополнение $P \smallsetminus A$ принадлежит $\mathbf{\Pi}^1_1$, и наоборот.
$\mathbf{\Delta}^1_1 = \mathbf{\Sigma}^1_1 \cap \mathbf{\Pi}^1_1$ — множ-ва, принадлежащие одновременно $\mathbf{\Sigma}^1_1$ и $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Множ-ва X, Y в пространстве P **B-отделимы**, если есть такое ***борелевское*** множество Z, что $X \subseteq Z$ но $Z \cap Y = \varnothing$, рис. 1.

Контрпример. Если $X \subseteq \mathcal{N}$ — множество класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$ но не $\mathbf{\Pi}^1_1$, и $Y = \mathcal{N} \smallsetminus X$, то X, Y B-неотделимы.

В самом деле, отделяющее множество может быть только само X. Но X — не борелевское, т.к. все борелевские множества принадлежат $\mathbf{\Sigma}^1_1$ согласно следствию из теоремы 1 Лекции 1.

Теорема 2 (теорема отделимости, [Jech] Lemma 11.11)

Любые два дизъюнктных $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества X, Y в польском пространстве P B-отделимы.

Док-во

Предположим противное: множества X, Y B-неотделимы.

Множ-ва X, Y в пространстве P **B-отделимы**, если есть такое ***борелевское*** множество Z, что $X \subseteq Z$ но $Z \cap Y = \varnothing$, рис. 1.

Контрпример. Если $X \subseteq \mathcal{N}$ — множество класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$ но не $\mathbf{\Pi}^1_1$, и $Y = \mathcal{N} \smallsetminus X$, то X, Y B-неотделимы.

В самом деле, отделяющее множество может быть только само X. Но X — не борелевское, т.к. все борелевские множества принадлежат $\mathbf{\Sigma}^1_1$ согласно следствию из теоремы 1 Лекции 1.

Теорема 2 (теорема отделимости, [Jech] Lemma 11.11)

Любые два дизъюнктных $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества X, Y в польском пространстве P B-отделимы.

Док-во

Предположим противное: множества X, Y B-неотделимы.

По лемме о 5 определениях, имеются непрерывные $f, g : \mathcal{N} \to P$, для которых $X = f[\mathcal{N}]$, $Y = g[\mathcal{N}]$ — f-образы.

Если $s \in \mathbf{Cort}$ то пусть $\mathcal{N}_s = \{x \in \mathcal{N} : s \subseteq x\}$ (бэровский интервал) и $X_s = f[\mathcal{N}_s]$, $Y_s = g[\mathcal{N}_s]$ — это тоже $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества.

Имеем $X = \bigcup_n X_{\langle n \rangle}$, $Y = \bigcup_m Y_{\langle m \rangle}$; $\langle n \rangle$ — одночленный кортеж.

Найдутся $n, m < \omega$ для которых $X_{\langle n \rangle}$ и $Y_{\langle m \rangle}$ также B-неотделимы.

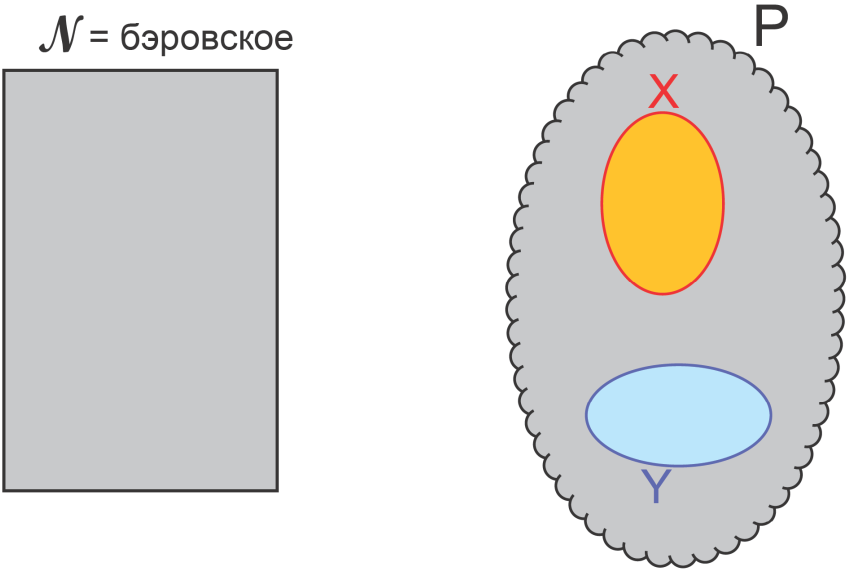
(Иначе, если какое-то борелевское C_{nm} отделяет $X_{\langle n \rangle}$ от $Y_{\langle m \rangle}$ для всех n, m, то борелевское $C = \bigcup_n \bigcap_m C_{nm}$ отделяет X от Y.)

Аналогично, $\exists\, n', m' < \omega$ для кот. $X_{\langle n, n' \rangle}$ и $Y_{\langle m, m' \rangle}$ B-неотделимы.

Аналогично, $\exists\, n'', m'' < \omega$, $X_{\langle n, n', n'' \rangle}$ и $Y_{\langle m, m', m'' \rangle}$ B-неотделимы.

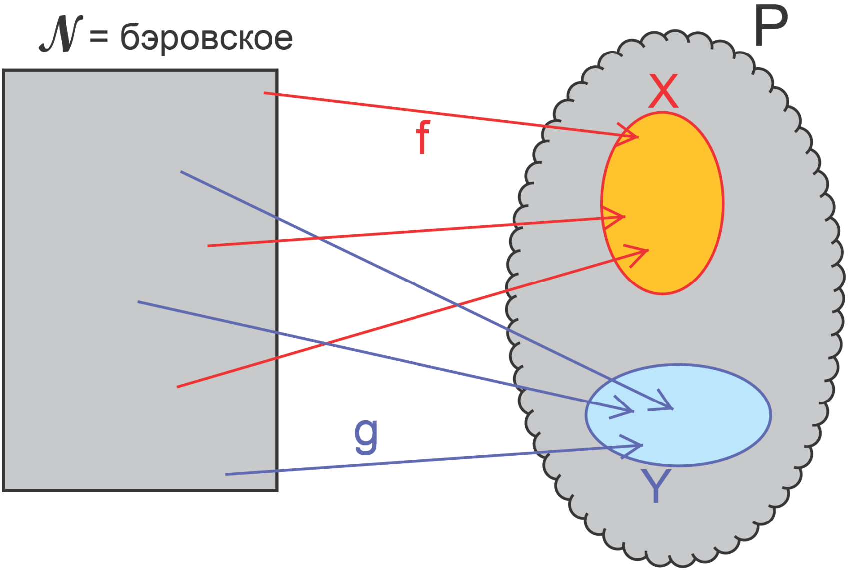
И так далее.

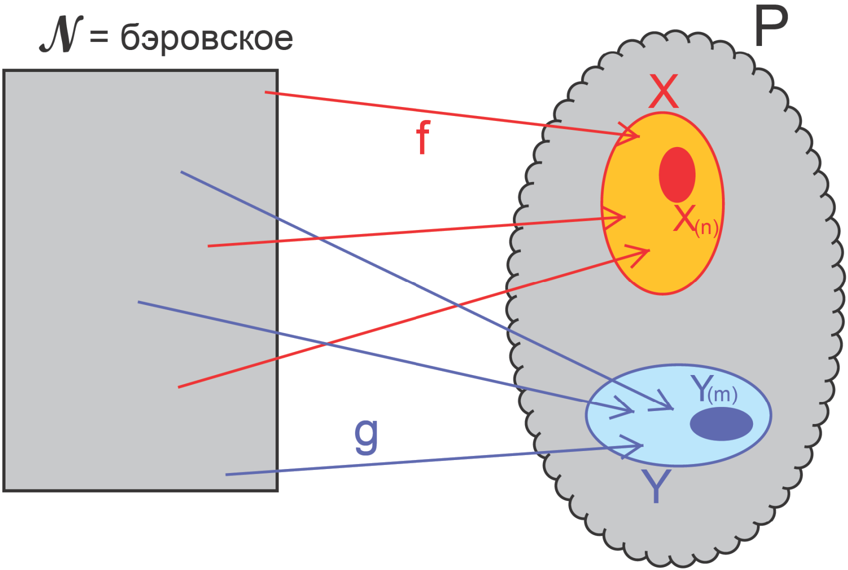
X, Y неотделимые Σ^1_1



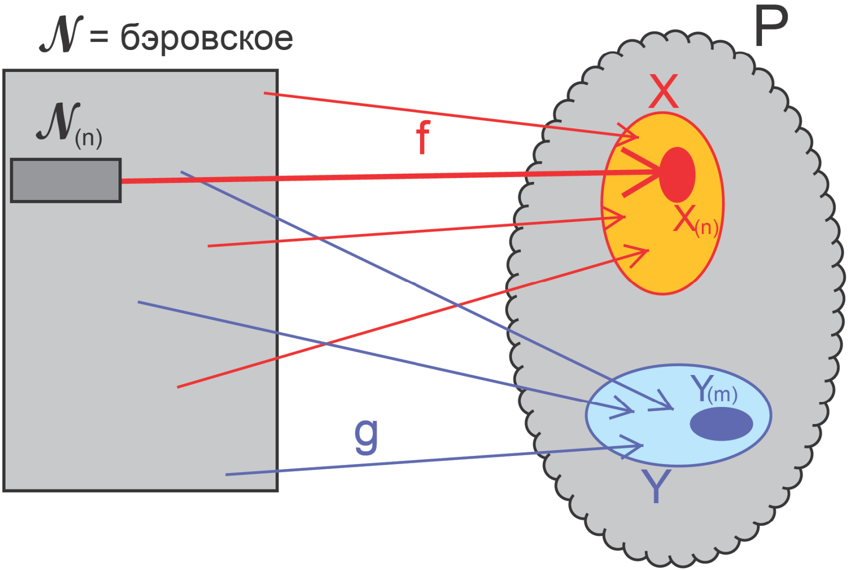
$X = f[\mathcal{N}]$ и $Y = g[\mathcal{N}]$

оглавл

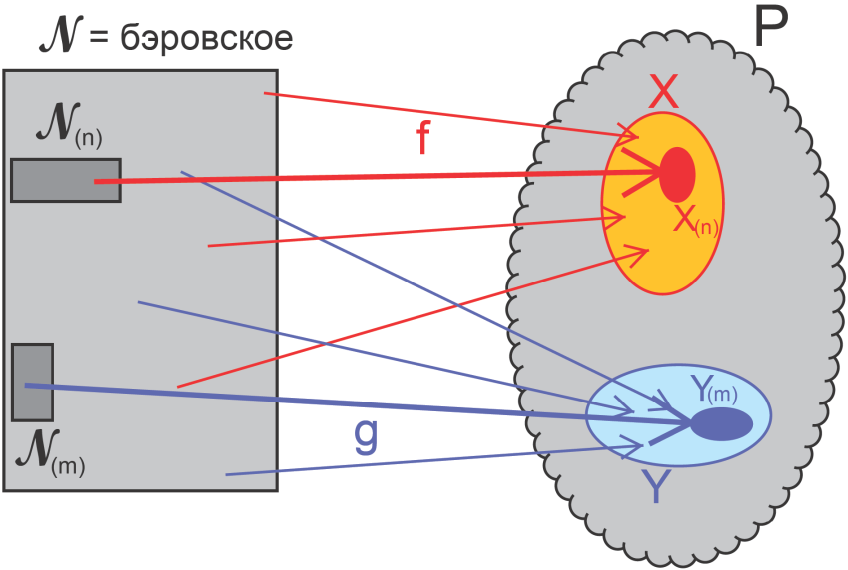




$\mathcal{N}$ = бэровское
P
X
f
X(n)
Y(m)
g
Y



𝒩 = бэровское
𝒩(n)
f
P
X
X(n)
Y(m)
g
Y


𝒩 = бэровское
𝒩(n)
𝒩(m)
f
g
P
X
X(n)
Y(m)
Y

По лемме о 5 определениях, имеются непрерывные $f, g : \mathcal{N} \to P$, для которых $X = f[\mathcal{N}]$, $Y = g[\mathcal{N}]$ — f-образы.

Если $s \in \mathbf{Cort}$ то пусть $\mathcal{N}_s = \{x \in \mathcal{N} : s \subseteq x\}$ (бэровский интервал) и $X_s = f[\mathcal{N}_s]$, $Y_s = g[\mathcal{N}_s]$ — это тоже $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества.

Имеем $X = \bigcup_n X_{\langle n \rangle}$, $Y = \bigcup_m Y_{\langle m \rangle}$; $\langle n \rangle$ — одночленный кортеж.

Найдутся $n, m < \omega$ для которых $X_{\langle n \rangle}$ и $Y_{\langle m \rangle}$ также B-неотделимы.

(Иначе, если какое-то борелевское C_{nm} отделяет $X_{\langle n \rangle}$ от $Y_{\langle m \rangle}$ для всех n, m, то борелевское $C = \bigcup_n \bigcap_m C_{nm}$ отделяет X от Y.)

Аналогично, $\exists\, n', m' < \omega$ для кот. $X_{\langle n, n' \rangle}$ и $Y_{\langle m, m' \rangle}$ B-неотделимы.

Аналогично, $\exists\, n'', m'' < \omega$, $X_{\langle n, n', n'' \rangle}$ и $Y_{\langle m, m', m'' \rangle}$ B-неотделимы.

И так далее.

Это приносит нам две последовательности

$$a = \langle n, n', n'', \dots \rangle \quad \text{и} \quad b = \langle m, m', m'', \dots \rangle \quad \text{в} \quad \mathcal{N} = \omega^\omega,$$

такие что множество $X_{a \restriction k}$ В-неотделимо от $Y_{b \restriction k}$, $\forall k$.

Тогда $x = f(a) \in X$ и $y = g(b) \in Y$, так что $x \neq y$.
Рассмотрим непересекающиеся окрестности $x \in U_x$, $y \in U_y$.
По непрерывности, найдется такое k для которого

$$X_{a \restriction k} = f[\mathcal{N}_{a \restriction k}] \subseteq U_x \quad \text{и} \quad Y_{b \restriction k} = g[\mathcal{N}_{b \restriction k}] \subseteq U_y$$

Следовательно, множества $X_{a \restriction k}$ и $Y_{b \restriction k}$ отделимы открытым множеством U_a.

Это противоречие завершает доказ-во теоремы отделимости. $\square$

Это приносит нам две последовательности

$$a = \langle n, n', n'', \dots \rangle \quad \text{и} \quad b = \langle m, m', m'', \dots \rangle \quad \text{в} \quad \mathcal{N} = \omega^\omega,$$

такие что множество $X_{a\restriction k}$ B-неотделимо от $Y_{b\restriction k}$, $\forall\, k$.

Тогда $x = f(a) \in X$ и $y = g(b) \in Y$, так что $x \neq y$.
Рассмотрим непересекающиеся окрестности $x \in U_x$, $y \in U_y$.
По непрерывности, найдется такое k для которого

$$X_{a\restriction k} = f[\mathcal{N}_{a\restriction k}] \subseteq U_x \quad \text{и} \quad Y_{b\restriction k} = g[\mathcal{N}_{b\restriction k}] \subseteq U_y$$

Следовательно, множества $X_{a\restriction k}$ и $Y_{b\restriction k}$ отделимы открытым множеством U_a.

Это противоречие завершает доказ-во теоремы отделимости. $\square$

Следствие (теорема Суслина)

В любом польском пространстве P, класс борелевских множеств совпадает с классом $\mathbf{\Delta}^1_1$.

Док-во

Если $X \subseteq P$ борелевское то X принадлежит $\mathbf{\Delta}^1_1$.

Обратно, рассмотрим $\mathbf{\Delta}^1_1$-множество $X \subseteq P$.

Тогда X и дополнительное множество $Y = P \setminus X$ принадлежат $\mathbf{\Delta}^1_1$, следовательно принадлежат $\mathbf{\Sigma}^1_1$.

Поэтому по теореме отделимости найдется борелевское множество B, отделяющее X от Y.

Но это множество B обязано быть равным X.

Значит, и X — борелевское множество, что и требовалось. $\square$

Следствие (теорема Суслина)

В любом польском пространстве P, класс борелевских множеств совпадает с классом $\mathbf{\Delta}^1_1$.

Док-во

Если $X \subseteq P$ борелевское то X принадлежит $\mathbf{\Delta}^1_1$.

Обратно, рассмотрим $\mathbf{\Delta}^1_1$-множество $X \subseteq P$.

Тогда X и дополнительное множество $Y = P \smallsetminus X$ принадлежат $\mathbf{\Delta}^1_1$, следовательно принадлежат $\mathbf{\Sigma}^1_1$.

Поэтому по теореме отделимости найдется борелевское множество B, отделяющее X от Y.

Но это множество B обязано быть равным X.

Значит, и X — борелевское множество, что и требовалось. $\square$

$\mathbf{Cort} = \mathbf{Cort}_1 := \omega^{<\omega} = \bigcup_n \omega^n$ — **кортежи** натуральных чисел;

$\mathbf{lh}(s)$ — **длина** кортежа s, т. е. $s \in \omega^n \Longrightarrow \mathbf{lh}(s) = n$;

$\Lambda = \varnothing$ — **пустой** кортеж, $\mathbf{lh}(\Lambda) = 0$;

$\mathbf{Cort}_2 = \{\langle s, t\rangle : s, t \in \mathbf{Cort} \wedge \mathbf{lh}(s) = \mathbf{lh}(t)\}$ — **мультикортежи**
$\mathbf{Cort}_3 = \{\langle s, t, u\rangle : s, t, u \in \mathbf{Cort} \wedge \mathbf{lh}(s) = \mathbf{lh}(t) = \mathbf{lh}(u)\}$, и т. д.

Множество $T \subseteq \mathbf{Cort}$ — **дерево**, если для каждого кортежа $s \in T$: $m < \mathbf{lh}(s) \Longrightarrow s \restriction m \in T$, и тогда $[T] = \{x \in \mathcal{N} : \forall m\, (x \restriction m \in T)\}$ — замкнутое множество в $\mathcal{N}$. Если $T \neq \varnothing$ то $\Lambda \in T$.

Аналогично, $T \subseteq \mathbf{Cort}_2$ — **дерево**, если для каждого $\langle s, t\rangle \in T$: $n < \mathbf{lh}(s) = \mathbf{lh}(t) \Longrightarrow \langle s \restriction n, t \restriction n\rangle \in T$, и в этом случае

$$[T] = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : \forall m\, (\langle x \restriction m, y \restriction m\rangle \in T)\}$$

— замкнутое множество в $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

То же для $T \subseteq \mathbf{Cort}_r$, для любой размерности $r \geq 1$.

$\mathbf{Cort} = \mathbf{Cort}_1 := \omega^{<\omega} = \bigcup_n \omega^n$ — **кортежи** натуральных чисел;

$\mathbf{lh}(s)$ — **длина** кортежа s, т. е. $s \in \omega^n \Longrightarrow \mathbf{lh}(s) = n$;

$\Lambda = \varnothing$ — **пустой** кортеж, $\mathbf{lh}(\Lambda) = 0$;

$\mathbf{Cort}_2 = \{\langle s, t\rangle : s, t \in \mathbf{Cort} \wedge \mathbf{lh}(s) = \mathbf{lh}(t)\}$ — **мультикортежи**
$\mathbf{Cort}_3 = \{\langle s, t, u\rangle : s, t, u \in \mathbf{Cort} \wedge \mathbf{lh}(s) = \mathbf{lh}(t) = \mathbf{lh}(u)\}$, и т. д.

Множество $T \subseteq \mathbf{Cort}$ — **дерево**, если для каждого кортежа $s \in T$: $m < \mathbf{lh}(s) \Longrightarrow s \restriction m \in T$, и тогда $[T] = \{x \in \mathcal{N} : \forall\, m\, (x \restriction m \in T)\}$ — замкнутое множество в $\mathcal{N}$. Если $T \neq \varnothing$ то $\Lambda \in T$.

Аналогично, $T \subseteq \mathbf{Cort}_2$ — **дерево**, если для каждого $\langle s, t\rangle \in T$: $n < \mathbf{lh}(s) = \mathbf{lh}(t) \Longrightarrow \langle s \restriction n, t \restriction n\rangle \in T$, и в этом случае

$$[T] = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : \forall\, m\, (\langle x \restriction m, y \restriction m\rangle \in T)\}$$

— замкнутое множество в $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

То же для $T \subseteq \mathbf{Cort}_r$, для любой размерности $r \geq 1$.

Дерево $T \subseteq \mathbf{Cort}$ называется **нефундированным**, если есть такая точка $x \in \mathcal{N}$ что $x \restriction m \in T$ для всех m. Такая точка x если она есть называется **бесконечной ветвью** дерева T, она принадлежит множеству $[T] = \{x \in \mathcal{N} : \forall\, m\, (x \restriction m \in T)\}$.

Дерево $T \subseteq \mathbf{Cort}$, не имеющее бесконечных ветвей, называется **фундированным**. В этом случае T допускает единственную **функцию ранга** $\varrho_T : T \to \mathtt{Ord}$, удовлетворяющую условию

$$\varrho_T(s) = \sup_{s^\frown k \in T} \left(\varrho_T(s^\frown k) + 1\right) \quad - \quad \text{[Jech] Theorem 2.27.}$$

В частности $\varrho_T(s) = 0$ для концевых вершин $s \in T$.

Если $T \subseteq \mathbf{Cort}$ фундировано то ординал $\|T\| = \sup_{s \in T} \left(\varrho_T(s) + 1\right)$ называется **высотой** дерева T.

Упражнение: $\|\varnothing\| = 0$, $\|\{\Lambda\}\| = 1$, $\|\{\Lambda, \langle 3\rangle, \langle 5\rangle, \langle 5, 0\rangle\}\| = 3$.

Дерево $T \subseteq \textbf{Cort}$ называется **нефундированным**, если есть такая точка $x \in \mathcal{N}$ что $x \restriction m \in T$ для всех m. Такая точка x если она есть называется **бесконечной ветвью** дерева T, она принадлежит множеству $[T] = \{x \in \mathcal{N} : \forall\, m\,(x \restriction m \in T)\}$.

Дерево $T \subseteq \textbf{Cort}$, не имеющее бесконечных ветвей, называется **фундированным**. В этом случае T допускает единственную **функцию ранга** $\varrho_T : T \to \mathtt{Ord}$, удовлетворяющую условию

$$\varrho_T(s) = \sup_{s^\frown k \in T} \left(\varrho_T(s^\frown k) + 1\right) \quad - \quad \text{[Jech] Theorem 2.27.}$$

В частности $\varrho_T(s) = 0$ для концевых вершин $s \in T$.

Если $T \subseteq \textbf{Cort}$ фундировано то ординал $\|T\| = \sup_{s \in T} \left(\varrho_T(s) + 1\right)$ называется **высотой** дерева T.

Упражнение: $\|\varnothing\| = 0$, $\|\{\Lambda\}\| = 1$, $\|\{\Lambda, \langle 3\rangle, \langle 5\rangle, \langle 5, 0\rangle\}\| = 3$.

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \text{все деревья } T \subseteq \mathsf{Cort}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{if}} = \text{нефундированные деревья в } \boldsymbol{\mathcal{T}}, \text{ ill-founded}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}} = \text{фундированные деревья в } \boldsymbol{\mathcal{T}}, \text{ well-founded}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}_{\alpha} = \{T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}} : \|T\| = \alpha\}, \quad \alpha < \omega_1$$
$$\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\alpha}(s) = \{T \in \boldsymbol{\mathcal{T}} : s \in T \wedge T{\restriction}_s \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}} \wedge \|T{\restriction}_s\| \le \alpha\}, \text{ где}$$
$$T{\restriction}_s = \{t \in \mathsf{Cort} : s^\frown t \in T\} \ - \ s\text{-конус в } T.$$

Теорема (о характеризации)

Множество $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ замкнуто в польском пространстве 2^{Cort}. — **Упражн.**
Множества $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{if}}$, $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}$ имеет классы $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$, $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ соответственно.
Множества $\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\alpha}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}_{\alpha}$ борелевские.

Док-во

По определению, $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{if}}$ равносильно $\exists x \in \mathcal{N}\, \forall m\, (x \restriction m \in T)$.
Упражнение: $U_m = \{\langle x, T\rangle : x{\restriction} m \in T\}$ замкнуты (даже ОЗ) в $\mathcal{N} \times \boldsymbol{\mathcal{T}}$.
Это значит, что $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{if}}$ = проекция замкнутого множества $U = \bigcap_m U_m$.
Остается сослаться на лемму о 5 определениях.

$$\mathcal{T} = \text{все деревья } T \subseteq \mathbf{Cort}$$

$$\mathcal{T}^{\mathrm{if}} = \text{нефундированные деревья в } \mathcal{T}, \text{ ill-founded}$$

$$\mathcal{T}^{\mathrm{wf}} = \text{фундированные деревья в } \mathcal{T}, \text{ well-founded}$$

$$\mathcal{T}^{\mathrm{wf}}_\alpha = \{T \in \mathcal{T}^{\mathrm{wf}} : \|T\| = \alpha\}, \quad \alpha < \omega_1$$

$$\mathcal{T}_\alpha(s) = \{T \in \mathcal{T} : s \in T \wedge T\restriction_s \in \mathcal{T}^{\mathrm{wf}} \wedge \|T\restriction_s\| \le \alpha\}, \text{ где}$$

$T\restriction_s = \{t \in \mathbf{Cort} : s^\frown t \in T\}$ – **s-конус** в T.

Теорема (о характеризации)

Множество $\mathcal{T}$ замкнуто в польском пространстве $2^{\mathbf{Cort}}$. — **Упражн.**
Множества $\mathcal{T}^{\mathrm{if}}$, $\mathcal{T}^{\mathrm{wf}}$ имеет классы $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_1$ соответственно.
Множества $\mathcal{T}_\alpha(s)$ и $\mathcal{T}^{\mathrm{wf}}_\alpha$ борелевские.

Док-во

По определению, $T \in \mathcal{T}^{\mathrm{if}}$ равносильно $\exists x \in \mathcal{N}\, \forall m\, (x \restriction m \in T)$.
Упражнение: $U_m = \{\langle x, T\rangle : x\restriction m \in T\}$ замкнуты (даже ОЗ) в $\mathcal{N} \times \mathcal{T}$.
Это значит, что $\mathcal{T}^{\mathrm{if}} =$ проекция замкнутого множества $U = \bigcap_m U_m$.
Остается сослаться на лемму о 5 определениях.

Доказательство борелевости множеств $\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha(s)$ ведем трансфинитной индукцией по α.

Положим $\boldsymbol{\mathcal{T}}(s) = \{T \in \boldsymbol{\mathcal{T}} : s \in T\}$ — замкнутое.

База: $\boldsymbol{\alpha = 0}$. $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}_0(s) \Longleftrightarrow s \notin T$, значит $\boldsymbol{\mathcal{T}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{T}} \smallsetminus \boldsymbol{\mathcal{T}}(s)$ – борел.

Шаг: $\alpha > 0$ и лемма доказана для всех $\beta < \alpha$, $s \in \mathbf{Cort}$. Имеем

$$T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha(s) \iff s \in T \wedge \forall k \left(s^\frown k \in T \Longrightarrow \exists \beta < \alpha \left(T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}_\beta(s^\frown k)\right)\right),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha(s) = \boldsymbol{\mathcal{T}}(s) \cap \bigcap_k \Big(\big(\boldsymbol{\mathcal{T}} \smallsetminus \boldsymbol{\mathcal{T}}(s^\frown k)\big) \cup \big(\bigcup_{\beta<\alpha} \boldsymbol{\mathcal{T}}_\beta(s^\frown k)\big)\Big).$$

Отсюда по индуктивному предположению следует борелевость $\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha(s)$.

Наконец, $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}_\alpha = \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha(\Lambda) \smallsetminus \bigcup_{\beta<\alpha} \boldsymbol{\mathcal{T}}_\beta(\Lambda)$, также борелевское. $\square$

Доказательство борелевости множеств $\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha(s)$ ведем трансфинитной индукцией по α.

Положим $\boldsymbol{\mathcal{T}}(s) = \{T \in \boldsymbol{\mathcal{T}} : s \in T\}$ — замкнутое.

База: $\boldsymbol{\alpha = 0}$. $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}_0(s) \Longleftrightarrow s \notin T$, значит $\boldsymbol{\mathcal{T}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{T}} \smallsetminus \boldsymbol{\mathcal{T}}(s)$ – борел.

Шаг: $\alpha > 0$ и лемма доказана для всех $\beta < \alpha$, $s \in \mathbf{Cort}$. Имеем

$$T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha(s) \iff s \in T \wedge \forall\, k \left(s^\frown k \in T \Longrightarrow \exists\, \beta < \alpha \left(T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}_\beta(s^\frown k)\right)\right),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha(s) = \boldsymbol{\mathcal{T}}(s) \cap \bigcap\nolimits_k \Big(\big(\boldsymbol{\mathcal{T}} \smallsetminus \boldsymbol{\mathcal{T}}(s^\frown k)\big) \cup \big(\bigcup\nolimits_{\beta<\alpha} \boldsymbol{\mathcal{T}}_\beta(s^\frown k)\big)\Big).$$

Отсюда по индуктивному предположению следует борелевость $\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha(s)$.

Наконец, $\boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha^{\mathrm{wf}} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_\alpha(\Lambda) \smallsetminus \bigcup_{\beta<\alpha} \boldsymbol{\mathcal{T}}_\beta(\Lambda)$, также борелевское. $\square$

Теорема ([Jech], Theorem 25.3)

Если $C \subseteq \mathcal{N}$ есть $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество то найдется непрерывная функция $x \longmapsto T(x)$ из $\mathcal{N}$ в $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, для которой

$$C = \{x \in \mathcal{N} : T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}\}$$ — **нормальная форма**.

Док-во

Дополнительное множество $A = \mathcal{N} \smallsetminus C$ принадлежит $\mathbf{\Sigma}^1_1$. По лемме о 5 определениях, найдется замкнутое $Z \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, для которого

$$x \in A \iff \exists y \in \mathcal{N}\, Z(x,y) . \tag{1}$$

Пишем $Z(x,y)$ вместо $\langle x, y\rangle \in Z$ — реляционная запись.

Теорема ([Jech], Theorem 25.3)

Если $C \subseteq \mathcal{N}$ *есть* $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество то найдется непрерывная функция* $x \longmapsto T(x)$ *из* $\mathcal{N}$ *в* $\boldsymbol{\mathcal{T}}$*, для которой*

$$C = \{x \in \mathcal{N} : T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}\}$$ — **нормальная форма**.

Док-во

Дополнительное множество $A = \mathcal{N} \setminus C$ принадлежит $\mathbf{\Sigma}^1_1$. По лемме о 5 определениях, найдется замкнутое $Z \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, для которого

$$x \in A \iff \exists y \in \mathcal{N}\, Z(x, y) . \tag{1}$$

Пишем $Z(x, y)$ вместо $\langle x, y \rangle \in Z$ — реляционная запись.

Множество $R = \{\langle s,t\rangle \in \mathbf{Cort}_2 : (\mathcal{N}_s \times \mathcal{N}_t) \cap Z \neq \varnothing\}$ — **дерево**: если $s' \subset s$ и $t' \subset t$ то $(\mathcal{N}_s \times \mathcal{N}_t) \subseteq (\mathcal{N}_{s'} \times \mathcal{N}_{t'})$.

Кроме того, $Z(x,y) \iff \forall\, m\, R(x \restriction m, y \restriction m)$. Отсюда имеем:

$$x \in A \iff \exists\, y \in \mathcal{N}\, \forall\, m\, R(x \restriction m, y \restriction m). \tag{2}$$

Теперь если $x \in \mathcal{N}$ то пусть

$$T(x) = \{t \in \mathbf{Cort} : R(x \restriction \mathbf{lh}(t), t)\}. \tag{3}$$

Эта функция $x \longmapsto T(x)$, из $\mathcal{N}$ в $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, непрерывна.

А из (2) следует, что $C = \{x \in \mathcal{N} : T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}\}$. □

Множество $R = \{\langle s,t\rangle \in \mathbf{Cort}_2 : (\mathcal{N}_s \times \mathcal{N}_t) \cap Z \neq \varnothing\}$ — **дерево**: если $s' \subset s$ и $t' \subset t$ то $(\mathcal{N}_s \times \mathcal{N}_t) \subseteq (\mathcal{N}_{s'} \times \mathcal{N}_{t'})$.

Кроме того, $Z(x,y) \iff \forall\, m\, R(x \restriction m, y \restriction m)$. Отсюда имеем:

$$x \in A \iff \exists\, y \in \mathcal{N}\, \forall\, m\, R(x \restriction m, y \restriction m). \tag{2}$$

Теперь если $x \in \mathcal{N}$ то пусть

$$T(x) = \{t \in \mathbf{Cort} : R(x \restriction \mathbf{lh}(t), t)\}. \tag{3}$$

Эта функция $x \longmapsto T(x)$, из $\mathcal{N}$ в $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, непрерывна.

А из (2) следует, что $C = \{x \in \mathcal{N} : T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}\}$. □

Лемма

Множество $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{if}}$ является строго $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством, т. е. не $\mathbf{\Pi}^1_1$, и соответственно $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}$ является строго $\mathbf{\Pi}^1_1$ (не $\mathbf{\Sigma}^1_1$).

Док-во

В самом деле, иначе $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}$ есть $\mathbf{\Delta}^1_1$.

Следовательно, по теореме о нормальной форме, все $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества суть $\mathbf{\Delta}^1_1$ как непрерывные прообразы $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}$.

Противоречие с теоремой иерархии (Лекция 1). $\square$

Лемма

Множество $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{if}}$ является строго $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством, т. е. не $\mathbf{\Pi}^1_1$, и соответственно $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}$ является строго $\mathbf{\Pi}^1_1$ (не $\mathbf{\Sigma}^1_1$).

Док-во

В самом деле, иначе $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}$ есть $\mathbf{\Delta}^1_1$.

Следовательно, по теореме о нормальной форме, все $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества суть $\mathbf{\Delta}^1_1$ как непрерывные прообразы $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}$.

Противоречие с теоремой иерархии (Лекция 1). □

Следствие (о борелевости конституант)

В условиях теоремы о нормальной форме, если $\alpha < \omega_1$ *то множество-***конституанта**

$$C_\alpha = \{x \in C : \|T(x)\| = \alpha\}$$

борелевское.

Док-во: $C_\alpha = \{x \in C : T(x) \in \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{wf}}_\alpha\}$ есть непрерывный T-прообраз борелевского множества $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{wf}}_\alpha$. □

Следствие (о разложении на $\aleph_1$ борелевских множеств)

Каждое $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество есть объединение* $\aleph_1$ *борел. множеств.*

Док-во: $C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$, где конституанты C_α борелевские по предыдущему следствию. □

Следствие (о борелевости конституант)

В условиях теоремы о нормальной форме если $\alpha < \omega_1$ *то множество-***конституанта**

$$C_\alpha = \{x \in C : \|T(x)\| = \alpha\}$$

борелевское.

Док-во: $C_\alpha = \{x \in C : T(x) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}_\alpha\}$ есть непрерывный T-прообраз борелевского множества $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}_\alpha$. □

Следствие (о разложении на $\aleph_1$ борелевских множеств)

Каждое $\mathbf{\Pi}^1_1$*-множество есть объединение* $\aleph_1$ *борел. множеств.*

Док-во: $C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$, где конституанты C_α борелевские по предыдущему следствию. □

Напомним: $\boldsymbol{\mathcal{T}}=$ все деревья $T \subseteq \mathbf{Cort}$,
$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}=$ все фундированные $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$, это строго $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-множество!
каждое $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}$ имеет **высоту** $\|T\| < \omega_1$.

Цель этого раздела — показать, что бинарные отношения $\|S\| \le \|T\|$ и $\|S\| < \|T\|$ (как множества пар в польском $\boldsymbol{\mathcal{T}} \times \boldsymbol{\mathcal{T}}$) являются **внезапно!! как-бы** $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-отношениями.

Пусть $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$. Отображение $f : T \to \mathbf{Cort}$ сохраняет порядок, кратко ОСП, если $s \subset t \Longrightarrow f(s) \subset f(t)$ для всех $s, t \in T$.

Вводятся бинарные **отношения сводимости** $\leqslant_{\text{СП}}$, $<_{\text{СП}}$ на $\boldsymbol{\mathcal{T}}$.

$S \leqslant_{\text{СП}} T$, если найдется ОСП $f : S \to T$;

$S <_{\text{СП}} T$, если $S \leqslant_{\text{СП}} (T{\restriction}_s)$ для какого-то $s \in T$, $s \neq \Lambda$,
где, напомним, $T{\restriction}_s = \{u \in \mathbf{Cort} : s^\frown u \in T\}$ есть s-конус в T.

Отношение $<_{\text{СП}}$ не антирефлексивно, может быть $T <_{\text{СП}} T$.

Напомним: $\boldsymbol{\mathcal{T}} =$ все деревья $T \subseteq \mathbf{Cort}$,

$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}} =$ все фундированные $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$, это строго $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество !

каждое $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\mathrm{wf}}$ имеет **высоту** $\|T\| < \omega_1$.

Цель этого раздела — показать, что бинарные отношения $\|S\| \le \|T\|$ и $\|S\| < \|T\|$ (как множества пар в польском $\boldsymbol{\mathcal{T}} \times \boldsymbol{\mathcal{T}}$) являются **внезапно!! как-бы** $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношениями.

Пусть $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$. Отображение $f : T \to \mathbf{Cort}$ сохраняет порядок, кратко ОСП, если $s \subset t \Longrightarrow f(s) \subset f(t)$ для всех $s, t \in T$.

Вводятся бинарные **отношения сводимости** $\leqslant_{\text{СП}}$, $<_{\text{СП}}$ на $\boldsymbol{\mathcal{T}}$.

$S \leqslant_{\text{СП}} T$, если найдется ОСП $f : S \to T$;

$S <_{\text{СП}} T$, если $S \leqslant_{\text{СП}} (T \restriction_s)$ для какого-то $s \in T$, $s \neq \Lambda$, где, напомним, $T \restriction_s = \{u \in \mathbf{Cort} : s^\frown u \in T\}$ есть s-конус в T.

Отношение $<_{\text{СП}}$ не антирефлексивно, может быть $T <_{\text{СП}} T$.

Теорема (о рангах и отображениях)

Пусть $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$ *— деревья. Тогда*

1. *если* $S \leqslant_{\text{сп}} T$ *и* $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *то* $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| \le \|T\|$;
2. *если* $S <_{\text{сп}} T$ *и* $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *то* $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| < \|T\|$;
3. *если* $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{if}}$ *то* $S <_{\text{сп}} T$;
4. *если* $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| \le \|T\|$ *то* $S \leqslant_{\text{сп}} T$;
5. *если* $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| < \|T\|$ *то* $S <_{\text{сп}} T$.

Дополнительно, отношения $\leqslant_{\text{сп}}$ *и* $<_{\text{сп}}$ *имеют класс* $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ *как множества пар в польском* $\boldsymbol{\mathcal{T}} \times \boldsymbol{\mathcal{T}}$.

Теорема (о рангах и отображениях)

Пусть $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$ *— деревья. Тогда*

1. *если* $S \leqslant_{\text{сп}} T$ *и* $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *то* $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| \leq \|T\|$;
2. *если* $S <_{\text{сп}} T$ *и* $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *то* $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| < \|T\|$;
3. *если* $S \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{if}}$ *то* $S <_{\text{сп}} T$;
4. *если* $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| \leq \|T\|$ *то* $S \leqslant_{\text{сп}} T$;
5. *если* $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}^{\text{wf}}$ *и* $\|S\| < \|T\|$ *то* $S <_{\text{сп}} T$.

Дополнительно, отношения $\leqslant_{\text{сп}}$ *и* $<_{\text{сп}}$ *имеют класс* $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ *как множества пар в польском* $\boldsymbol{\mathcal{T}} \times \boldsymbol{\mathcal{T}}$.

Отношения $\leqslant_{\text{сп}}$ и $<_{\text{сп}}$ имеют класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$ как множества пар.

Пусть $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$.

$$S \leqslant_{\text{сп}} T \iff \exists f : \mathbf{Cort} \to \mathbf{Cort}, \text{ для которой:}$$

1. $\forall s \in \mathbf{Cort}\,(s \in S \Longrightarrow f(s) \in T)$, т. е. $f : S \to T$;

2. $\forall s, s'\,(s, s' \in S \wedge s \subset s' \Longrightarrow f(s) \subset f(s'))$, сохран. порядок.

Множество $W = \{\langle S, T, f\rangle : S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}} \wedge f$ удовлетворяет 1, 2$\}$ — борелевское в польском $\boldsymbol{\mathcal{T}} \times \boldsymbol{\mathcal{T}} \times \mathbf{Cort}^{\mathbf{Cort}}$.

Например 1 выражается через $\langle S, T, f\rangle \in W' = \bigcap_{s,t \in \mathbf{Cort}} W_{st}$, где $W_{st} = \{\langle S, T, f\rangle : s \in S \wedge \langle s, t\rangle \in f \Longrightarrow t \in T\}$ — борелевские множества. **Упражнение:** доказать борелевость W_{st} и W.

Итак, $\leqslant_{\text{сп}}$ — проекция борелевского W.
Осталось применить лемму о 5 определениях.

Продолжение док-ва Теоремы о рангах и отображениях в след. лекции

Отношения $\leqslant_{\text{сп}}$ и $<_{\text{сп}}$ имеют класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$ как множества пар.

Пусть $S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$.

$$S \leqslant_{\text{сп}} T \iff \exists f : \mathbf{Cort} \to \mathbf{Cort}, \text{ для которой:}$$

1. $\forall s \in \mathbf{Cort}\, (s \in S \Longrightarrow f(s) \in T)$, т. е. $f : S \to T$;

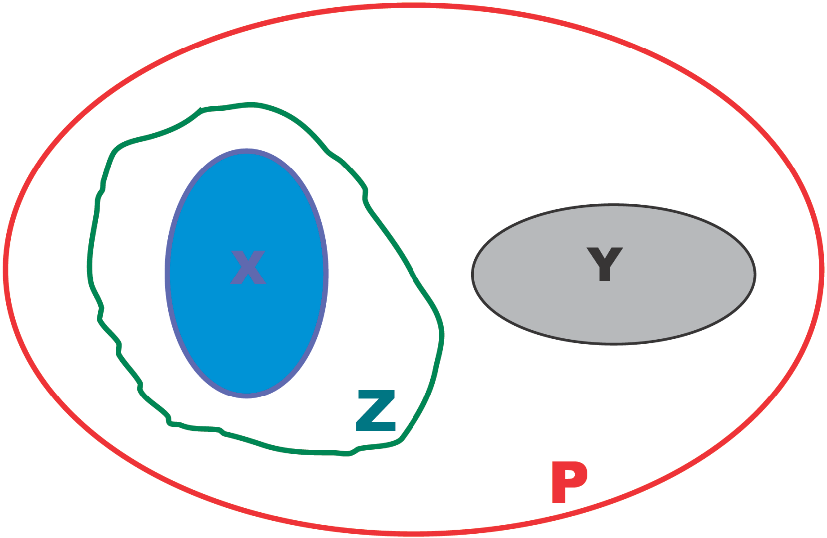
2. $\forall s, s' \, (s, s' \in S \wedge s \subset s' \Longrightarrow f(s) \subset f(s'))$, сохран. порядок.

Множество $W = \{\langle S, T, f\rangle : S, T \in \boldsymbol{\mathcal{T}} \wedge f$ удовлетворяет 1, 2$\}$ — борелевское в польском $\boldsymbol{\mathcal{T}} \times \boldsymbol{\mathcal{T}} \times \mathbf{Cort}^{\mathbf{Cort}}$.

Например 1 выражается через $\langle S, T, f\rangle \in W' = \bigcap_{s,t \in \mathbf{Cort}} W_{st}$, где $W_{st} = \{\langle S, T, f\rangle : s \in S \wedge \langle s, t\rangle \in f \Longrightarrow t \in T\}$ — борелевские множества. **Упражнение:** доказать борелевость W_{st} и W.

Итак, $\leqslant_{\text{сп}}$ — проекция борелевского W.
Осталось применить лемму о 5 определениях.

Продолжение док-ва Теоремы о рангах и отображениях в след. лекции


X
Y
Z
P

Содержание I

Содержание II