Листок 1. Норма. Ортогональные системы

Анализ, 2 курс, осенний семестр, **дедлайн 15.10.2023**

1⋄1 Доказать, что в конечномерном линейном векторном пространстве L любые две нормы эквивалентны. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в L называются эквивалентными, если для некоторых чисел $a, b > 0$ выполнены неравенства $a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1$ для для всех $x \in L$.

1⋄2 Рассмотрим в пространстве $C[0,1]$ две нормы: $\|f\|_C = \max\{|f(x)|,\ x \in [0,1]\}$ и $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$. Доказать, что эти нормы не эквивалентны.

1⋄3 Теорема Вейерштрасса утверждает: множество многочленов всюду плотно в пространстве $C[-1,1]$. Доказать, что в пространстве $C[0,1]$ всюду плотно множество всех четных многочленов (т.е., у которых равны нулю коэффициенты при нечетных степенях), а в пространстве $C_0[0,1] = \{f(t) \in C[0,1], f(0) = 0\}$ всюду плотно множество всех нечетных многочленов (т.е., у которых равны нулю коэффициенты при четных степенях).

1⋄4 (*) Рассмотрим пространство ℓ_{loc}, элементами которого служат любые числовые последовательности $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Рассмотрим в ℓ_{loc} топологию покомпонентной сходимости, т.е., по определению последовательность $x^{(n)}$ сходится к x в ℓ_{loc}, если $x_k^{(n)} \to x_k$ при $n \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Доказать, что эта топология не является нормируемой, т.е., не существует нормы в ℓ_{loc}, которая порождает эту сходимость, но является метризуемой, т.е., найдется метрика в ℓ_{loc}, которая порождает эту сходимость.

1⋄5 Пусть (x, y) обозначает скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве.
а) Докажите, что функция $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ удовлетворяет аксиомам нормы.
б) Докажите, что в евклидовом пространстве равенство $|(x,y)| = \|x\| \cdot \|y\|$ выполнено тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны.

1⋄6 Доказать, что нормированное пространство является евклидовым тогда и только тогда, когда для любых двух векторов x и y выполнено равенство параллелограмма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

1⋄7 Докажите, что следующие пространства не являются евклидовыми: **а)** ℓ_p при $p \in [1,2) \cup (2,\infty]$; **б)** $C[0,1]$. Пространство ℓ_p состоит из последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, и норма в нем задается формулой $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$ при $p < \infty$ и $\|x\|_\infty = \sup\{|x_k|,\ k = 1, 2, \ldots\}$ при $p = \infty$.

1⋄8 В пространстве $L_2[-1,1]$ построить ортогональное дополнение для следующих множеств
а) $M = \{x \in L_2[-1,1] :\ x(t) = 0$ для всех $t \leq 0\}$;
б) $M = \{x \in L_2[-1,1] :\ x(t) = x(-t)$ для всех $t \in [-1,1]\}$;
в) $M = \{x \in L_2[-1,1] :\ \int_{-1}^0 x(t)dt = \int_0^1 x(t)dt\}$.

1⋄9 В пространстве $L_2[0,1]$ найти расстояние от вектора $x(t) = t^n$ до подпространства $H_0 = \{x \in L_2[0,1] :\ \int_0^1 x(t)dt = 0\}$.

1⋄10 Пусть векторы $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ в евклидовом пространстве образуют правильный симплекс (n-мерный тетраэдр) со стороной 1, т.е., угол между любыми двумя векторами e_i и

e_j при $i \neq j$ равен 60° и $\|e_i\| = 1$. Проделать процесс ортогонализации для этой системы и найти нормы получившихся ортогональных векторов. Указание: проделайте первые 3 шага ортогонализации, угадайте ответ для следующих шагов и докажите ортогональность полученной системы.

1◇11 Пусть для векторов x, y, z евклидова пространства выполнено равенство Пифагора

$$\|x + y + z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

Верно ли, что эти векторы ортогональны между собой? А если еще $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$?

1◇12 Докажите, что система Радемахера $r_n(t) = \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ортонормированна, но не полна в $L_2[0, 1]$.