Листок 2. Тригонометрические ряды Фурье

Анализ, 2 курс, **дедлайн 06.11.2023**

2◇1 Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ сходится абсолютно. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx)$ сходится равномерно при $x \in \mathbb{R}$ и его сумма является непрерывной периодической функцией. Чему равны коэффициенты Фурье этой функции по системе $\{\sin(nx)\}$ на отрезке $[0, \pi]$?

2◇2 Пусть $f \in L_2[-\pi; \pi]$ и a_n, b_n $(n = 1, 2, \dots)$ – коэффициенты Фурье f по тригонометрической системе. Доказать равномерную сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nx$ при $x \in \mathbb{R}$.

2◇3 Пусть функция $f \in L_1[0, \pi]$. Рассмотрим ее коэффициенты Фурье $\{c_n\}$ по тригонометрической системе $\{\sin(nx)\}$ или $\{1, \cos(nx)\}$.
а) Доказать, что $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$. (Указание: использовать лемму Римана).
б) Обязательно ли сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$?
в) При каком условии сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$?

2◇4 Пусть $f,\ g \in L_1[-\pi, \pi]$. Доказать *принцип локализации*: если функции f и g совпадают в сколь угодно малой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in]-\pi, \pi[$, то их ряды Фурье по тригонометрической системе сходятся и расходятся в точке x_0 одновременно, а в случае сходимости их суммы совпадают. (Указание: использовать лемму Римана.)

2◇5 Зная коэффициенты Фурье $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, \dots)$ интегрируемой функции $f(x)$, имеющей период 2π, вычислите коэффициенты Фурье $\tilde{a}_0, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ следующих функций:
а) “смещенной” функции $f(x + h), h = const$, **б)** “усредненной” функции $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$.

2◇6 Пусть функции $f, g \in L_2([-\pi; \pi]; \mathbb{C})$. Рассмотрим соответствующие им тригонометрические ряды Фурье в комплексной форме $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx}$, где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,\ d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Докажите, что $fg \in L_1([-\pi; \pi]; \mathbb{C})$ и коэффициенты Фурье произведения fg могут быть получены при перемножении формальных рядов Фурье функций f и g. Обоснуйте полученные формулы.

2◇7 Пусть вещественная функция f непрерывна на отрезке $[0, \pi]$ и имеет на нем производную f', которая принадлежит $L_2[0, \pi]$. Пусть выполнено одно из условий:
а) $\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$ или **б)** $f(0) = f(\pi) = 0$.
Доказать неравенство:

$$\int_0^{\pi} (f(x))^2 dx \le \int_0^{\pi} (f'(x))^2 dx,$$

в котором равенство достигается лишь при **а)** $f(x) = a \cos x$, **б)** $f(x) = a \sin x$.

2◇8 Пусть функция $f \in C[0, \pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$, причем для ее коэффициентов Фурье $\{c_n\}$ по системе $\{\sin(nx)\}$ выполнено условие $c_n = o(1/n)$. Доказать, что ряд Фурье сходится к f равномерно на $[0, \pi]$. (Указание: применить теорему Фейера.)

2◇9 (*) Пусть комплексная 2π-периодическая функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица $|f(x) - f(y)| \le K|x - y|$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$. Доказать, что $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$, где c_n – коэффициенты Фурье f, и ряд Фурье сходится к f равномерно на всей оси.

2◇10 (*) Пусть $f \in L_1[-\pi, \pi]$. **а)** Доказать, что суммы Фейера $\sigma_n(x)$ функции f сходятся к f по норме пространства $L_1[-\pi, \pi]$. **б)** Доказать, что всякая функция из пространства $L_1[-\pi, \pi]$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.

2⋄11 **а)** (*) Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $x \in [0, 2\pi]$, сходится при каждом x, его сумма $f(x)$ непрерывна при $x \in]0, 2\pi[$, и $f \in L_1[0, 2\pi]$, но $f \notin L_2[0, 2\pi]$.

б) (*) Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln n}$ сходится при каждом $x \in]0, 2\pi[$ к некоторой непрерывной функции $f(x)$ на этом интервале, но $f \notin L_1[0, 2\pi]$.

2⋄12 (*) Решить уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = 0.$$