

**ЛИСТОК 3. ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ К ЗАДАЧАМ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ**
АНАЛИЗ, 2 КУРС, дедлайн 11.12.2023

3◊1 Решите методом Фурье следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = x^2 - 1.$$

3◊2 Концы стержня $[0, 1]$ поддерживаются при постоянных температурах $u|_{x=0} = a$, $u|_{x=1} = b$, а начальная температура равна $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$. Найти $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

3◊3 Решите методом Фурье следующую задачу для уравнения колебаний струны:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = t, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$$

(Указание к задачам 2 и 3: выберите такое частное решение $v(x, t)$ рассматриваемого уравнения, чтобы граничные условия разности $u(x, t) - v(x, t)$ стали нулевыми, и решите для разности это уравнение с новыми начальными условиями.)

3◊4 Найдите формулу решения следующей задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $D = \{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$ методом Фурье:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, b) = \psi(x).$$

3◊5 Решите следующие задачи Штурма–Лиувилля, т.е. найдите все собственные значения λ и соответствующие им собственные функции $y(x)$, $x \in [0, \ell]$:

а) $-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\ell) = 0;$

б) $-y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(\ell) = 0.$

в) Доказать полноту в $L_2[0, \ell]$ этих систем собственных функций.

3◊6 (*) Доказать, что задача Штурма–Лиувилля на отрезке $[0, 1]$

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

а) имеет собственные значения $\{\mu_n^2, n \in \mathbb{N}\}$, где μ_n – это все положительные корни уравнения $\operatorname{tg}(\mu) = -\mu$.

б) Какие у этой задачи собственные функции?

в) Найти асимптотику собственных значений $\lambda_n = \mu_n^2$ при $n \rightarrow \infty$.

3◊7 Доказать, что оператор Штурма–Лиувилля задачи

$$\begin{aligned} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) &= \lambda y(x), \quad x \in [0, \ell], \\ \alpha y'(0) + \beta y(0) &= 0, \quad \gamma y'(\ell) + \delta y(\ell) = 0. \end{aligned}$$

где $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, является симметричным в пространстве $L_2(0, \ell)$. При каких условиях на эти константы оператор положителен?