Листок 4. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

Анализ. 2 курс. Осенний семестр, **дедлайн 29.12.2023**

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Интегралом Фурье функции f в точке x называется величина

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt d\lambda = \frac{1}{2\pi} (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt d\lambda.$$

Преобразованием Фурье $F[f]$ от $f(x)$ называется функция $\tilde{f}(\lambda)$

$$\tilde{f}(\lambda) = F[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Напомним формулу обращения:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f](\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad x \in \mathbb{R},$$

которая справедлива при условии, что в точке x выполнено условие Дини.

4◇1 (Интеграл Дирихле) Докажите, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Указание: проверить тождество $\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xy} dy$ и свести к задачу к нахождению повторного интеграла, который явно вычисляется.

4◇2 Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и у функции f в некоторой точке $x \in \mathbb{R}$ существует левый и правый пределы $f(x-0)$ и $f(x+0)$, а также имеются левая и правая производные в точке x. Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f](\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Указание: свести левую часть к вычислению предела $\lim_{A\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin At}{t} dt$ и воспользоваться рассуждениями из лекции 12.

4◇3 Представьте функцию $f(x)$ в виде интеграла Фурье, если

а) $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$; **б)** $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & \text{при} \quad |x| < a \\ 0, & \text{при} \quad |x| \geq a. \end{cases}$

в) чему в пункте **б)** равен интеграл Фурье в точках $x = \pm a$?

4◇4 **а)** Какой функцией будет преобразование Фурье функции $f(x)$, если известно, что функция f 1) четная, 2) нечетная, 3) вещественная, 4) удовлетворяет условию $f(x) = \overline{f(-x)}$?

б) Аналогичный вопрос про функцию f, если этими свойствами обладает ее преобразование Фурье $F[f](\lambda)$ по переменной λ.

4◇5 **а)** Доказать, что функция $f(x) = e^{-x^2}$ принадлежит пространству Шварца S.
б) Принадлежит ли функция $f(x) = e^{-x^2} \cos(e^{x^2})$ пространству Шварца S?

4◇6 Пусть F преобразование Фурье в пространстве Шварца S. Что представляет собой отображение $G = F \circ F$, т.е. $G[f] = F[F[f]]$?

4◇7 Рассмотрим преобразование Фурье как отображение $f(x) \mapsto F[f](\lambda)$. Проверьте следующие соответствия

а) $f(ax) \mapsto \frac{1}{|a|}F[f]\left(\frac{\lambda}{a}\right), \quad f(x+x_0) \mapsto e^{ix_0\lambda}F[f](\lambda),$
$f(x+x_0)+f(x-x_0) \mapsto 2\cos(\lambda x_0)F[f](\lambda), \quad f(x+x_0)-f(x-x_0) \mapsto 2i\sin(\lambda x_0)F[f](\lambda).$

б) $f(x)e^{\pm i\lambda_0 x} \mapsto F[f](\lambda \mp \lambda_0), \quad f(x)\cos(\lambda_0 x) \mapsto \frac{1}{2}\left(F[f](\lambda-\lambda_0)+F[f](\lambda+\lambda_0)\right),$
$f(x)\sin(\lambda_0 x) \mapsto \frac{1}{2i}\left(F[f](\lambda-\lambda_0)-F[f](\lambda+\lambda_0)\right).$

4◇8 (*) (Формула Пуассона) Пусть функция $f(x)$ принадлежит пространству Шварца. Докажите равенство

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} F[f](n)e^{inx}.$$

Указание: левая часть является периодической функцией. Найдите для нее коэффициенты Фурье по ортогональной системе $\{e^{inx}\}$ и убедитесь в равномерной сходимости соответствующего ряда Фурье.

4◇9 (*) Пусть функция $u = u(x,y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}_+$ принадлежит пространству Шварца по переменной x равномерно по y (т.е., константы в оценках производных $u(x,y)$ по по переменной x не зависят от y) и является решением следующей задачи в верхней полуплоскости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0 \quad \text{(уравнение Лапласа)},$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{(граничное условие)}.$$

причем $u(x,y) \to 0$ при $y \to +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$.
а) Проверьте, что преобразование Фурье функции $u(x,y)$ по переменной x имеет следующий вид

$$F[u](\lambda) = F[\varphi](\lambda)e^{-y|\lambda|},\ \forall y \geqslant 0.$$

б) С помощью формулы обращения получите формулу для решения рассматриваемой задачи в виде интеграла Пуассона

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\varphi(\xi)d\xi.$$