Математический анализ.
2 курс совбак НИУ ВШЭ и ЦПМ, 1 семестр. 2023 г.

Программа экзамена за 2 модуль.

1. Сформулировать 1-ую краевую задачу для уравнения теплопроводности. Привести основные шаги метода Фурье (метода разделения переменных) для решения 1-ой краевой задачи уравнения теплопроводности (без обоснования сходимости).

2. Доказать сходимости ряда, представляющего решение 1-ой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности, которое получается по методу Фурье. Доказать теорему о существовании решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Доказать теорему о единственности решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Решить неоднородное уравнение теплопроводности с нулевыми начальными условиями.

3. Сформулировать 1-ую краевую задачу для уравнения упругих колебаний струны. Привести основные шаги метода Фурье (метода разделения переменных) для решения 1-ой краевой задачи для уравнения упругих колебаний струны. Сформулировать и доказать теорему о существовании и единственности решения 1-ой краевой задачи уравнения упругих колебаний струны.

4. Сформулировать общую задачу Штурма–Лиувилля. Доказать основные свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля: симметричность и положительность оператора, ортогональность собственных функций, однократность собственных значений. Теорема о полноте системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля (без доказательства).

5. Вывести формулу Фурье для функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ формально из ряда Фурье этой функции (без обоснования сходимости). Доказать теорему о сходимости интеграла Фурье функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ при выполнении условия Дини. Записать интеграл Фурье в комплексной форме и дать определение преобразования Фурье. Найти преобразование Фурье для функции $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$.

6. Доказать равномерную сходимость последовательности $\{F[f_n]\}$ преобразования Фурье, если известно, что $\{f_n\}$ сходится в норме $L_1(\mathbb{R})$. Доказать, что преобразование Фурье $F[f](\lambda)$ функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ является ограниченной непрерывной функцией, причем $F[f](\lambda) \to 0$ $(|\lambda| \to \infty)$. Вывести формулу для преобразования Фурье производной $f'(x)$ при условии, что $f,\ f' \in L_1(\mathbb{R})$. Получить аналогичную формулу для k-производной функции $f(x)$. Связь порядка гладкости функции со степенью убывания на бесконечности ее преобразования Фурье. Вывести формулу производной преобразования Фурье $F[f](\lambda)$ при условии, что $f(x)$, $xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Получить аналогичную формулу для k-производной функции $F[f](\lambda)$. Связь порядка гладкости функции $F[f](\lambda)$ со степенью убывания на бесконечности функции $f(x)$.

7. Дать определение пространства Шварца S. Привести примеры функций из пространства Шварца. Доказать, что операторы дифференцирования и умножения на полином переводят пространство Шварца в себя. Написать формулу для преобразования Фурье действия дифференциального оператора на функцию из пространства Шварца. Написать формулу для действия дифференциального оператора на преобразование Фурье функции из пространства Шварца. Доказать, что преобразование Фурье переводит пространство Шварца в себя. Формула обратного преобразования Фурье в

пространстве Шварца. Теорема об обращении преобразования Фурье в пространстве Шварца.

8. Получить формулу для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ методом разделения переменных (без строго обоснования). Вывести формулу для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ в пространстве Шварца с помощью преобразования Фурье. Вывести формулу Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$ с начальным условием из пространства Шварца. Доказать основные свойства ядра Пуассона $G(x,y,t)$: положительность, бесконечную дифференцируемость по всем аргументам при $t > 0$, выполнение уравнения теплопроводности для $G(x,y,t)$ при $t > 0$ (y – параметр), и равенство $\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)dx = 1$. Доказать, что формула Пуассона, в которой φ – непрерывная и ограниченная функция, задает бесконечно дифференцируемую функцию $u(x,t)$ при $t > 0$, которая является решением уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$. Доказать, что формула Пуассона, в которой φ – непрерывная и ограниченная функция, задает непрерывную функцию $u(x,t)$ при $t \geq 0$, которая удовлетворяет начальному условию $\varphi(x)$.

9. Дать определение свертки $f_1 * f_2$ функций из пространства $L_1(\mathbb{R})$. Доказать, что $f_1 * f_2 \in L_1(\mathbb{R})$. Вывести формулу преобразования Фурье от свертки двух функций. Вывести формулу Пуассона для решения задачи Коши одномерного уравнения теплопроводности в пространстве S с помощью формулы преобразования Фурье свертки.

10. Вывести формулу для решения уравнения упругих колебаний бесконечной струны в пространстве Шварца S с помощью преобразования Фурье. Доказать теорему Даламбера о представлении произвольного решения уравнения колебаний струны класса $C^2(D)$ в выпуклой области D в виде суммы двух бегущих волн. Доказать, что формула Даламбера, в которой $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, задает решение задачи Коши для уравнения колебаний бесконечной струны.

Порядок проведения экзамена

Экзамен проводится в устной форме. Все студенты получат по билету, в котором будет два вопроса из приведенной программы и одна задача из списка, выложенного на странице курса. На подготовку дается 30 минут. Дополнительными материалами пользоваться не разрешается. Правильный ответ на каждый вопрос и правильно решенная задача оцениваются в 3 балла. Если студент отвечает на все вопросы и решает задачу, то он получает оценку 10. В противном случае преподаватель может задать дополнительный вопрос, ответ на который может как повысить, так и понизить набранную за билет сумму баллов, которая формирует оценку.

Список задач экзамена будет опубликован на странице курса.