Математический анализ.
2 курс совбак НИУ ВШЭ и ЦПМ, 1 семестр. 2023 г.

Задачи для коллоквиума за 1 модуль.

1. Является ли множество $X_0 = \{x \in X \mid x(0) = x(1)\}$ замкнутым в пространстве
   а) $X = C[0,1]$ с нормой max; б) $X = C_2[0,1]$ с нормой $L_2(0,1)$?
2. Вывести из неравенства Коши-Буняковского неравенство треугольника для нормы в евклидовом пространстве.
3. Привести пример бесконечномерного полного евклидова пространства.
4. Привести пример неполного евклидова пространства.
5. Привести пример нормированного пространства, которое не является евклидовым.
6. Доказать, что в евклидовом пространстве векторы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (теорема Пифагора).
7. Пусть M – произвольное множество в гильбертовом пространстве H.
   Доказать, что $M^\perp := \{x \in H \ : \ (x,y) = 0, \ \forall y \in M\}$ является (замкнутым) линейным подпространством H.
8. В евклидовом пространстве $L_2[0,1]$ найти угол между векторами $x(t) = 1$ и $y(t) = t$.
9. В евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$ найти углы треугольника с вершинами в точках
   $x(t) = 0, \ y(t) = 1$ и $z(t) = t$.
10. Пусть векторы $\{e_1, e_2, e_3\}$ в $\mathbb{R}^3$ образуют правильный тетраэдра со стороной 1, т.е., их длины равны 1, а углы между ними равны $\pi/3$. Проделать ортогонализацию для этой системы.
11. Пусть $\{x_n\}$ – ортогональная система в гильбертовом пространстве H. Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится в H если, и только если, числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$ сходится.
12. Примените процесс ортогонализации к системе $\{1, t, t^2\}$ в пространстве $L_2[0,1]$.
13. В пространстве $L_2[-1,1]$ построить ортогональное дополнение для множества
    $M = \{x \in L_2[-1,1] : \int_{-1}^{1} x(t)dt = 0\}$.
14. Найти расстояние в $L_2(0,\pi)$ от вектора $x(t) = \sin t$ до подпространства
    $H_0 = \left\{x \in L_2(0,\pi) \mid \int_0^\pi tx(t)dt = 0\right\}$.
15. Пусть M – линейное подпространство гильбертова пространства H. Доказать, что
    $(M^\perp)^\perp = M$.
16. Доказать, что для произвольного множества X в гильбертовом пространстве выполнено следующее включение: $X \subseteq (X^\perp)^\perp$. Возможно ли здесь строгое включение?
17. Ортогонализуйте следующую систему функций в $L_2[0,\pi]$:

$$\cos\frac{x}{2}, \ \sin\frac{x}{2}\sin x, \ \ldots, \ \sin\frac{x}{2}\sin nx \ \ldots$$

18. Доказать, что система $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i(n+1/2)t},\ n\in\mathbb{Z}\right\}$ является ортонормированной в $L_2[-\pi,\pi]$.

    $L_2[-\pi,\pi]$.

19. Доказать, что система функций $\{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x,\ n\in\mathbb{N}\}$ ортогональна $L_2[0,\pi]$.

20. Привести пример незамкнутого линейного многообразия в гильбертовом пространстве ℓ_2.

21. Привести пример функции, из $L_1[0,1]$, которая не принадлежит $L_2[0,1]$.

22. Привести пример функции, из $L_2(\mathbb{R})$, которая не принадлежит $L_1(\mathbb{R})$.

23. Привести пример функциональной последовательности, которая сходится к 0 в $L_2(\mathbb{R})$, но которая не имеет предела в $L_1(\mathbb{R})$.

24. Является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ тригонометрическим рядом Фурье какой-то функции из $L_2(-\pi,\pi)$?

25. Функцию $f(x)=x$ разложить в ряд Фурье в пространстве $L_2[0,\pi]$ по ортогональной системе $\{\sin kx,\ k\in\mathbb{N}\}$ и записать для нее равенство Парсеваля.

26. Функцию $f(x)=x^2$ разложить в ряд Фурье в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ по тригонометрической системе.

27. Функцию $f(x)=\cos^3 x$ разложить в ряд Фурье в пространстве $L_2[0,\pi]$ по ортогональной системе $\{\cos kx,\ k\in\mathbb{Z}_+\}$.

28. Функцию $f(x)=\cos x$ разложить в ряд Фурье в пространстве $L_2[0,\pi]$ по ортогональной системе $\{\sin kx,\ k\in\mathbb{N}\}$.

29. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{sign}x,\ x\in[-\pi,\pi]$, и объяснить, к чему сходится этот ряд в каждой точке x.

30. Пусть $\{c_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f\in L_2[0,\pi]$ по тригонометрической системе $\{\sin(nx)\}$. Обязательно ли сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$?

31. Пусть функция $f(x)\in L_1[-\pi,\pi]$ удовлетворяет в точке $x_0\in[-\pi,\pi]$ локальному условию Липшица, т.е. существуют такие числа $\delta>0$ и $L>0$, что

    $$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|,\ \forall x,y\in\mathcal{O}_\delta(x_0).$$

    Доказать, что ряд Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе сходится в точке x_0.

32. Является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{3/2}}$ рядом Фурье непрерывной функции?

33. Является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{7/3}}$ рядом Фурье непрерывно диффернецируемой функции?

34. Пусть $f\in C[0,\pi]$ и c_n – коэффициенты Фурье f по тригонометрической системе $\{\sin nx,\ n\in\mathbb{N}\}$. Доказать равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n}\cos nx$. Чем является сумма $F(x)$ этого ряда для функции $f(x)$?