

## Математический анализ.

2 курс совбак НИУ ВШЭ и ЦПМ, 1 семестр, 2023 г.

### Задачи для экзамена за 2 модуль.

1. Решить методом Фурье следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \sin x \cos x.$$

2. Решить методом Фурье следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \sin^3 x.$$

3. Решить методом Фурье следующую задачу для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \sin^3 x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

4. Решить методом Фурье следующую задачу для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin x \cos x.$$

5. Решить следующую задачу Штурма–Лиувилля, т.е. найдите все функции  $y(x)$  и значения  $\lambda$ , удовлетворяющие условиям:

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y'(l) = 0.$$

6. Решить следующую задачу Штурма–Лиувилля, т.е. найдите все функции  $y(x)$  и значения  $\lambda$ , удовлетворяющие условиям:

$$-y'' = \lambda y, \quad y(0) = y'(\pi) = 0.$$

7. Докажите, что  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ . (Указание: воспользоваться тождеством  $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy$ ).

8. Пусть  $f \in L_1(\mathbb{R})$  удовлетворяет в точке 0 локальному условию Липшица, т.е. существуют такие числа  $\delta > 0$  и  $L > 0$ , что

$$|f(0) - f(x)| \leq L|x|, \quad \forall x, |x| < \delta.$$

Пусть  $g(\lambda)$  – преобразование Фурье от  $f$ . Доказать, что  $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty g(\lambda) d\lambda$ .

9. Найти преобразование Фурье функции  $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ ,  $\alpha > 0$ .

10. Найти преобразование Фурье функции  $f(x) = \{1 \text{ при } |x| \leq a; f(x) = 0 \text{ при } |x| > a.\}$

11. Найти преобразование Фурье функции  $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ .

12. Найти преобразование Фурье функции  $f(x) = \frac{d}{dx}(x^2 e^{-|x|})$ .

13. Найти преобразование Фурье функции  $f(x) = x e^{-ax^2}$ .

14. Восстановить функцию  $f(x)$  по ее преобразованию Фурье  $F[f](\lambda) = \frac{\sin a\lambda}{\lambda}$  ( $a \neq 0$ ).

15. Восстановить функцию  $f(x)$  по ее преобразованию Фурье  $F[f](\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 + \alpha^2}$ .
16. Пусть  $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ . Верно ли, что преобразование Фурье  $F[f](\lambda) \in L_1(\mathbb{R}_\lambda)$ ?
17. Пусть  $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$  и  $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ , причем  $f'(x), f''(x) \in L_1(\mathbb{R})$ . Доказать, что преобразование Фурье  $F[f](\lambda) \in L_1(\mathbb{R}_\lambda)$ .
18. Пусть  $f(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ . Верно ли, что преобразование Фурье  $F[f](\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R}_\lambda)$ ?
19. Пусть  $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$  является финитной функцией, т.е.  $f(x) = 0$  при почти всех  $|x| > a$  для некоторого  $a > 0$ . Доказать, что преобразование Фурье  $F[f](\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R}_\lambda)$ .
20. Доказать, что функция  $f(x) = \exp(-x^2)$  принадлежит пространству Шварца  $S$ .
21. Принадлежит ли функция  $f(x) = e^{-x^2} \cos(e^{x^2})$  пространству Шварца  $S$ ?
22. Пусть  $F$  преобразование Фурье в пространстве Шварца  $S$ . Что представляет собой отображение  $G = F \circ F$ , т.е.  $G[f] = F[F[f]]$ ?
23. Пусть  $f(x) \in S$ . Рассмотрим первообразную  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds$ . Доказать, что функция  $F(x) \in S$  если и только если  $\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds = 0$ .
24. Пусть  $f(x) \in S$ . Доказать, что функция  $\frac{f(x)}{x} \in S$  если и только если  $f(0) = 0$ .
25. Пусть  $f(x) \in S$ . Доказать, что  $\frac{F[f](\lambda)}{\lambda} \in S_\lambda$  если и только если  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0$ .
26. Что можно сказать про преобразование Фурье функции  $f$ , если известно, что функция  $f$  1) четная, 2) нечетная?
27. Что можно сказать про преобразование Фурье функции  $f$ , если известно, что функция  $f$  1) вещественная, 2) удовлетворяет условию  $f(x) = \overline{f(-x)}$ ?
28. Рассмотрим преобразование Фурье как отображение  $f(x) \mapsto F[f](\lambda)$ . Проверьте соответствие (здесь три задачи)
- а)  $f(ax) \mapsto \frac{1}{|a|} F[f]\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ ;  
 б)  $f(x + x_0) \mapsto e^{ix_0 \lambda} F[f](\lambda)$ ;  
 г)  $f(x) e^{\pm i \lambda_0 x} \mapsto F[f](\lambda \mp \lambda_0)$ .
29. Решить в пространстве Шварца  $S$  с помощью преобразования Фурье задачу Коши:
- а)  $u_t = au_x, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in S$ .  
 б)  $u_t = tu_x, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in S$ .
30. Пусть  $f_1(x) = e^{-\alpha x^2}, f_2(x) = e^{-\beta x^2}$ . Найти свертку  $f_1 * f_2$ . (Указание: воспользоваться формулой преобразования Фурье от свертки).
31. Пусть  $f(x) = \psi_{[0, a]}(x)$ . Найти свертку  $f * f$ .
32. Пусть  $f_1(x) \in L_1(\mathbb{R}), f_2(x) \in S$ . а) Верно ли, что  $f_1 * f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ ? б) Верно ли, что  $f_1 * f_2 \in S$ ?
33. Решите задачу Коши для уравнения колебаний бесконечной струны, применяя формулу Даламбера:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \sin 2x.$$