

Математический анализ

Лектор д.ф.-м.н. В.В.Чепыжов *

Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2023 г. 1 семестр, 1 модуль

Лекция 1 (4 сентября 2023)

В курсе топологии вы изучали топологические пространства и, в частности, метрические пространства, т.е., множества, в которых введено понятие близости элементов, а в курсе алгебры вы изучали линейные пространства. В математическом анализе эти понятия объединяются, т.к. приходится иметь дело с пространствами, в которых введены как операции сложения элементов и умножения их на числа, так и некоторая топология или метрика. Важный класс таких пространств образуют нормированные пространства. Вы уже имели дело с конечномерными евклидовыми пространствами. Теперь мы обобщим это понятие для бесконечномерных пространств. Это теория была развита в работах Стефана Банаха и других математиков.

Норма и нормированное пространство

Пусть L – линейное пространство над полем вещественных (\mathbb{R}) или комплексных (\mathbb{C}) чисел.

Определение 1 *Вещественный функционал на L называется нормой и обозначается $\|x\| = \|x\|_L$, если выполнены следующие условия*

1. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ влечет $x = 0$ (положительность);
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in L$ (неравенство треугольника);
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall x \in L$, \forall числа α (однородность).

Определение 2 *Линейное пространство L , на котором задана некоторая норма $\|\cdot\|$ называется нормированным пространством.*

Всякое нормированное пространство становится метрическим пространством, если ввести в нем расстояние (метрику):

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Аксиомы метрического пространства легко проверяются.

*Компьютерный набор и верстка Антон Жевнерчук и Тимур Степанов.

Определение 3 Полное нормированное пространство называется банаховым пространством, т.е., в нем любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Примеры нормированных пространств

Пример 1 Прямая \mathbb{R}^1 становится нормированным пространством, если для числа $x \in \mathbb{R}^1$ положить

$$\|x\| = |x|.$$

Пример 2 В вещественном n -мерном пространстве \mathbb{R}^n с элементами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_k \in \mathbb{R}$, норма равна

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Все аксиомы нормы выполнены. Формула

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2}$$

определяет в \mathbb{R}^n стандартную евклидову метрику. Однако, в этом пространстве можно ввести и другие нормы, например,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \text{или} \quad (1)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1, \dots, n} |x_k|. \quad (2)$$

Аксиомы нормы легко проверяются.

Пример 3 В комплексном n -мерном пространстве \mathbb{C}^n вводится аналогичная норма

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2},$$

а также нормы (1) или (2).

Пример 4 В пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ определим норму

$$\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

Пример 5 Рассмотрим пространство ℓ_∞ , элементами которого служат ограниченные числовые последовательности $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Положим

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|.$$

Возникает нормированное пространство.

Все приведенные примеры являются полными метрическими пространствами, т.е., эти нормированные пространства являются банаховыми.

Пример 6 Рассмотрим пространство $C[a, b]$ с другой нормой

$$\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Легко проверить, что это действительно норма, но пространство не полное. Постройте пример фундаментальной последовательности, которая не имеет предела в этом пространстве.

Линейные многообразия и подпространства в нормированном пространстве

В теории линейных пространств принято определять подпространство, как подмножество $L_0 \subseteq L$, которое замкнуто относительно сложения и умножения на числа, т.е., если $x, y \in L_0$, то $\alpha x + \beta y \in L_0$ для любых чисел α и β . В теории нормированных пространств такие множества называются линейными многообразиями. Основным интерес представляют замкнутые линейные многообразия, содержащие все свои предельные точки.

Определение 4 *Замкнутое линейное многообразие называется подпространством нормированного пространства.*

В конечномерном нормированном пространстве всякое линейное подпространство автоматически является замкнутым (докажите это). В бесконечномерном случае это не всегда так. Например, в пространстве $C[a, b]$ многочлены образуют линейное многообразие, которое не замкнуто (как в этом убедиться?)

Другой пример. В пространстве ℓ_∞ ограниченных последовательностей рассмотрим финитные последовательности, т.е., такие последовательности, у которых лишь конечное число членов отлично от нуля. Такие последовательности образуют незамкнутое линейное многообразие.

Введем еще одно важное понятие. Пусть задана система элементов $\{x_\alpha\}$ в нормированном пространстве L . Подпространством, порожденным системой $\{x_\alpha\}$ называется наименьшее (замкнутое) подпространство, содержащее $\{x_\alpha\}$. Наконец, система $\{x_\alpha\}$ в нормированном пространстве называется полной, если порожденное ею (замкнутое) подпространство, совпадает со всем L .

Например в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций полной является система многочленов $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ (это вытекает из теоремы Вейерштрасса, которую мы докажем позже).

Пространство L_1

Рассмотрим теперь очень важный пример нормированного пространства. Пусть на множестве X задана мера μ (конечная или бесконечная), и пусть мера μ является полной (т.е., любое подмножество множества меры нуль измеримо). Например, X – измеримо по Лебегу подмножество пространства \mathbb{R}^n , на котором μ – это обычная мера Лебега.

Рассмотрим совокупность всех функций f (вещественных или комплексных), суммируемых на X по мере μ . Очевидно, она образует линейное пространство, поскольку

операции сложения и умножения на число замкнуты относительно суммируемых функций. Это пространство обозначается $L_1(X, \mu)$ или L_1 .

Введем норму в L_1 :

$$\|f\| := \int_X |f(x)| d\mu. \quad (3)$$

Ясно, что

1. $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$, $\forall f \in L_1$, для любого числа α ;
2. $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$, $\forall f_1, f_2 \in L_1$.

Однако, чтобы выполнялось последнее (или первое) свойство нормы: $\|f\| > 0$ если $f \neq 0$, необходимо считать, что функции, эквивалентные друг другу на X по мере μ , не различаются, а считаются одним элементом. В частности, нулевой элемент – это совокупность всех функций, равных нулю почти всюду в X .

Определение 5 *Пространством $L_1(X, \mu)$ называется нормированное пространство, элементами которого служат классы функций, эквивалентных по мере μ . Сложение элементов и умножение на число определяется по обычным правилам, а норма задается формулой (3).*

В пространстве L_1 расстояние определяется формулой

$$\rho(f, g) := \|f - g\| = \int_X |f(x) - g(x)| d\mu.$$

Сходимость последовательности суммируемых функций в смысле этого расстояния называется сходимостью в среднем.

Пространство L_1 можно считать состоящим из комплексных функций (комплексное L_1) или из одних действительных функций (действительное L_1).

Обсудим полноту пространства L_1 .

Теорема 1 *Пространство L_1 является полным, т.е. это банахово пространство.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ – фундаментальная последовательность в L_1 , т.е.,

$$\|f_n - f_m\| \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow \infty.$$

Тогда из последовательности $\{f_n\}$ можно выделить быстро сходящуюся подпоследовательность, т.е., такую $\{f_{n_k}\}$, что

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| = \int_X |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| d\mu \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Из этого неравенства и из теоремы Бешпо-Леви вытекает, что следующий ряд

$$|f_{n_1}(x)| + |f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)| + \dots + |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| + \dots$$

сходится почти всюду в X . Но тогда и ряд

$$f_{n_1}(x) + (f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)) + \dots + (f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)) + \dots$$

сходится почти всюду в X к некоторой измеримой функции $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$.

Значит, фундаментальная (в L_1) последовательность $\{f_n\}$ содержит подпоследовательность, которая сходится почти всюду.

Покажем, что $\{f_{n_k}\}$ сходится к f в пространстве L_1 . В силу фундаментальности последовательности $\{f_n\}$, при любом $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших k и l имеем

$$\int_X |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| d\mu < \varepsilon.$$

Тогда по теореме Фату в этом неравенстве можно перейти к пределу под знаком интеграла при $l \rightarrow \infty$. Получаем

$$\int_X |f_{n_k}(x) - f(x)| d\mu \leq \varepsilon.$$

Откуда заключаем, что $f \in L_1$ и что $f_{n_k} \rightarrow f$ в пространстве L_1 . Но тогда и вся фундаментальная последовательность $\{f_n\}$ сходится к f в L_1 . ■

Лекция 2 (11 сентября 2023)

§1. Евклидово пространство

Пусть задано действительное линейное пространство E . Напомним, что скалярным произведением в E называется действительная функция (x, y) определенная для каждой пары элементов $x, y \in E$, такая что:

- 1) $(x, y) = (y, x)$,
- 2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
- 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
- 4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Определение 1 *Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением называется евклидовым пространством.*

В евклидовом пространстве E вводится норма по формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Из свойств 1) - 4) следует, что выполнены все свойства нормы. Неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши-Буняковского

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

которое мы докажем. Рассмотрим квадратичный трехчлен от действительной переменной λ :

$$\phi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) = \|x\|^2\lambda^2 + 2\lambda(x, y) + \|y\|^2,$$

который, очевидно, неотрицателен $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, т.к. $\phi(\lambda)$ это скалярный квадрат некоторого вектора. Следовательно, дискриминант этого трехчлена меньше или равен нулю, т. е.

$$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x) \cdot (y, y) \leq 0. \quad (1)$$

Отметим, что в евклидовом пространстве сумма, умножение на число и скалярное произведение непрерывны, т. е., если $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ (в смысле сходимости по норме), $\lambda_n \rightarrow \lambda$ (как числовая последовательность), то

$$x_n + y_n \rightarrow x + y, \quad \lambda_n x_n \rightarrow \lambda x, \quad (x_n, y_n) \rightarrow (x, y).$$

Это вытекает из неравенства Коши-Буняковского.

Наличие в E скалярного произведения позволяет ввести в этом пространстве не только норму (т. е. длину) вектора, но и угол между векторами: а именно угол φ между x и y определяется формулой

$$-1 \leq \cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \quad (\text{нер-во Коши-Буняковского}). \quad (2)$$

Следовательно, эта формула определяет некоторый угол $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$.

Если $(x, y) = 0$, то из (2) получаем $\varphi = \frac{\pi}{2}$, в этом случае векторы x и y называются ортогональными.

Определение 2 Система ненулевых векторов $\{x_\alpha\}$ в E называется ортогональной, если

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta.$$

Утверждение 1 Если векторы $\{x_\alpha\}$ ортогональны, то они линейно независимы.

Доказательство. В самом деле, пусть

$$a_1x_{\alpha_1} + a_2x_{\alpha_2} + \dots + a_nx_{\alpha_n} = 0.$$

Поскольку $\{x_\alpha\}$ – ортогональная система, имеем

$$(x_{\alpha_i}, a_1x_{\alpha_1} + a_2x_{\alpha_2} + \dots + a_nx_{\alpha_n}) = a_i(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) = 0.$$

Но $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \neq 0$ и, значит, $a_i = 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$ ■

Определение 3 Если ортогональная система $\{x_\alpha\}$ полна, т. е. наименьшее содержащее ее замкнутое подпространство есть все E , то $\{x_\alpha\}$ называется ортогональным базисом. Если при этом норма любого вектора равна 1, то система $\{x_\alpha\}$ называется ортогональным нормированным базисом или ортонормированным базисом в E .

§2. Примеры евклидовых пространств и ортогональных базисов

Пример 1 n -мерное вещественное пространство \mathbb{R}^n .

Элементы – системы вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – образуют линейное векторное пространство со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \tag{3}$$

Ортогональный нормированный базис в \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Пример 2 Пространство ℓ_2 с элементами

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \text{ где } \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Абсолютная сходимость этого ряда следует из сходимости рядов $\sum_{i=k}^{\infty} x_k^2$, $\sum_{i=k}^{\infty} y_k^2$ и из неравенства Коши-Буняковского

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^2 \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^2$$

(по критерию Коши сходимости рядов).

Свойства 1) – 4) скалярного произведения проверяются непосредственно. Простейший ортогональный базис в ℓ_2 :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, \dots) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots) \end{aligned}$$

Проверим полноту этой системы. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ – любой вектор из ℓ_2 и $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Тогда $x^{(n)}$ – это линейная комбинация e_1, \dots, e_n, \dots и при этом $\|x - x^{(n)}\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Пример 3 Пространство $C_2[a, b]$, состоящее из непрерывных действительных функций, со скалярным произведением

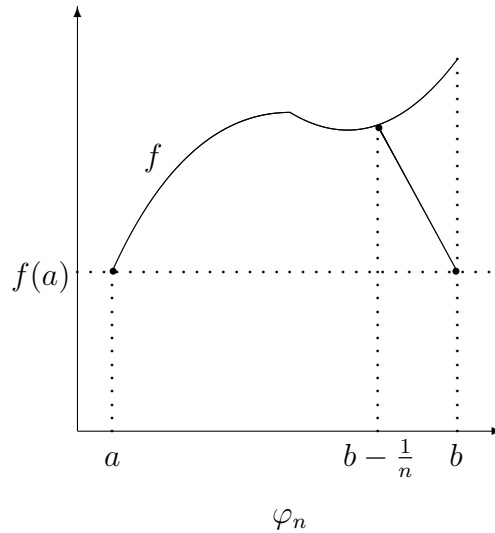
$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt. \quad (4)$$

Важный ортогональный базис – тригонометрическая система, состоящая из функций

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{2\pi}{b-a}nt, \sin \frac{2\pi}{b-a}nt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Ортогональность проверяется непосредственно. На отрезке $[-\pi, \pi]$ получаем тригонометрическую систему: $\frac{1}{2}, \cos nt, \sin nt$.

Система (5) полна. Действительно, по теореме Вейерштрасса, всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция φ , принимающая на концах отрезка одинаковые значения, может быть представлена как предел равномерно сходящейся последовательности тригонометрических полиномов, т. е. линейных комбинаций элементов системы (5). Такая последовательность сходится к функции φ по норме $C_2[a, b]$. Если же f – произвольная функция из $C_2[a, b]$, то ее можно представить как предел (по норме $C_2[a, b]$) последовательности функций φ_n , каждая из которых совпадает с f на отрезке $[a, b - \frac{1}{n}]$, линейная на $[b - \frac{1}{n}, b]$ и имеет в точке b значение $f(a)$. Следовательно, f можно приблизить сколь угодно точно (в метрике $C_2[a, b]$) линейными комбинациями системы (5). К доказательству теоремы Вейерштрасса мы еще вернемся в этом курсе.



§3. Существование ортогональных базисов. Ортогонализация

Теперь мы будем рассматривать сепарабельные евклидовы пространства, т. е. содержащие счетное всюду плотное множество. В приведенных выше примерах все пространства сепарабельные.

Утверждение 1 *В сепарабельном пространстве всякая ортогональная система не более чем счетна.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемая ортогональная система $\{\varphi_\alpha\}$ является нормированной (иначе заменим ее на систему $\left\{\frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|}\right\}$). При этом $\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2}, \alpha \neq \beta$.

Рассмотрим совокупность шаров $B(\varphi_\alpha, 1/2)$. Эти шары не пересекаются. Если счетное множество $\{\psi_k\}$ всюду плотно в E , то в каждом таком шаре есть какой-то элемент из $\{\psi_k\}$. Следовательно, число таких шаров, а значит и элементов φ_α , не более чем счетно. ■

Теорема 1 (Об ортогонализации) *Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ – линейно независимая система в евклидовом пространстве E . Тогда в E существует система элементов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. Система $\{\varphi_n\}$ ортогональная и нормированная.
2. Каждый элемент φ_n есть линейная комбинация элементов f_1, f_2, \dots, f_n :

$$\varphi_n = a_{n1}f_1 + \dots + a_{nn}f_n, \text{ причем } a_{nn} \neq 0.$$
3. Каждый элемент f_n представим в виде $f_n = b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{nn}\varphi_n$, причем $b_{nn} \neq 0$.

Каждый элемент системы $\{\varphi_n\}$ определяется условиями 1) – 3) однозначно с точностью до множителя ± 1 .

Доказательство. Элемент φ_1 ищется в виде $a_{11}f_1$. При этом a_{11} определяется из условия

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2(f_1, f_1) = 1, \text{ т. е. } a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}.$$

Ясно, что φ_1 определяется однозначно (с точностью до знака). Пусть φ_k ($k < n$), удовлетворяющие условиям 1) – 3), уже построены. Тогда f_n можно представить в виде

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{n,n-1}\varphi_{n-1} + h_n, \text{ где } (h_n, \varphi_k) = 0 \text{ при } k < n.$$

Действительно, соответствующие коэффициенты $b_{n,k}$, а значит и h_n , однозначно определяются из условий

$$0 = (h_n, \varphi_k) = (f_n - b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{n,n-1}\varphi_{n-1}, \varphi_k) = (f_n, \varphi_k) - b_{n,k}(\varphi_k, \varphi_k),$$

то есть,

$$b_{n,k} = (f_n, \varphi_k).$$

Очевидно, что $(h_n, h_n) > 0$ (предположение $(h_n, h_n) = 0$ противоречило бы линейной независимости системы f_1, f_2, \dots, f_n). Положим $\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}$.

Из индуктивного построения ясно, что h_n , а значит и φ_n , выражаются через векторы f_1, f_2, \dots, f_n , т. е. $\varphi_n = a_{n1}f_1 + \dots + a_{nn}f_n$, где $a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \neq 0$. Кроме того, $(\varphi_n, \varphi_n) = 1$, $(\varphi_n, \varphi_k) = 0$ при $k < n$ и $f_n = b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{nn}\varphi_n$, где $b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0$. Т. е. φ_n удовлетворяет условиям 1) – 3) ■

Переход от системы $\{f_n\}$ к системе $\{\varphi_n\}$ называется процессом ортогонализации. Ясно, что подпространства, порожденные этими системами, совпадают между собой. Поэтому они полны или не полны одновременно.

Следствие 1 *В сепарабельном евклидовом пространстве E существует ортогональный нормированный базис, который является не более чем счетным (т.е., он конечный или счетный).*

Доказательство. Действительно, пусть $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ – счетное всюду плотное множество в E . Выберем из него полную линейно независимую систему векторов $\{f_n\}$. Для этого из $\{\psi_n\}$ достаточно исключить все те элементы ψ_k , которые можно представить как линейную комбинацию ψ_i с номерами $i < k$.

Применив к полученной полной системе процесс ортогонализации, мы построим ортогональный нормированный базис, который будет не более чем счетным. ■

Лекция 3 (18 сентября 2022)

§1. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы

Выбрав в n -мерном евклидовом пространстве ортогональный нормированный базис

$$e_1, e_2, \dots, e_n,$$

каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ можно записать в виде

$$x = \sum_{k=1}^n c_k e_k, \text{ где } c_k = (x, e_k). \quad (1)$$

Выясним, как можно обобщить разложение (1) на случай вещественных бесконечномерных пространств.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ – ортогональная нормированная система в пространстве E , $f \in E$ – произвольный элемент. Сопоставим элементу f последовательность чисел

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

которые будем называть координатами или коэффициентами Фурье элемента f по системе $\{\varphi_k\}$, и ряд (пока формальный)

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \quad (2)$$

который мы будем называть рядом Фурье элемента f по системе $\{\varphi_k\}$.

Возникает вопрос: сходится ли ряд (2), т. е. стремится ли последовательность ее частичных сумм (в смысле метрики E) к какому-нибудь пределу, и если сходится, то совпадает ли его сумма с исходным элементом f ?

Предварительная задача: по заданному $n \in \mathbb{N}$ подобрать коэффициенты α_k ($k = 1, \dots, n$) так, чтобы расстояние между f_n и суммой

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \quad (3)$$

было минимальным.

Вычислим это расстояние. Поскольку система $\{\varphi_k\}$ ортогональна и нормирована, то

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|^2 &= \left(f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) = (f, f) - 2 \left(f, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - c_k)^2. \end{aligned}$$

Здесь $\|f\|^2$ и $\sum_{k=1}^n c_k^2$ – фиксированные числа. Поэтому минимум этого выражения достигается, когда последняя сумма равна нулю, т. е. при $\alpha_k = c_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. В этом случае

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \quad (4)$$

Мы показали, что среди всех сумм вида (3) при данном n наименее уклоняется от f частичная сумма ряда Фурье элемента f . Геометрически это означает, что длина перпендикуляра, опущенного из данной точки f на гиперплоскость, порожденную векторами φ_k , $k = 1, \dots, n$, меньше чем длина любой наклонной, проведенной из этой же точки.

Поскольку всегда $\|f - S_n\|^2 \geq 0$, то из полученного тождества следует, что

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Здесь n произвольно, а правая часть не зависит от n . Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится и его сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Это неравенство называется неравенством Бесселя.

Геометрически: сумма квадратов проекций вектора f на взаимно перпендикулярные направления не превосходит квадрата длины самого вектора f .

Определение 1 *Ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ называется замкнутой, если для любого $f \in E$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2,$$

которое называется равенством Парсеваля.

Из тождества (4) следует, что замкнутость системы $\{\varphi_k\}$ равносильна тому, что для каждого $f \in E$ частичные суммы ряда Фурье $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$ сходятся к f .

Установим связь понятия замкнутости с введенным ранее понятием полноты ортонормированной системы.

Теорема 1 *В сепарабельном евклидовом пространстве E всякая полная ортогональная нормированная система является замкнутой и наоборот.*

Доказательство. Пусть система $\{\varphi_n\}$ замкнута, тогда для любого $f \in E$ последовательность частичных сумм его ряда Фурье сходится к f . Это означает, что линейные комбинации элементов системы $\{\varphi_n\}$ всюду плотны в E , т. е. эта система полна.

Обратно, пусть система полна, т. е. любой элемент $f \in E$ можно сколь угодно точно аппроксимировать линейной комбинацией $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$. Как мы установили, линейная комбинация $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$ (частичная сумма ряда Фурье) дает самую точную аппроксимацию. Следовательно ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ сходится к f и равенство Парсеваля имеет место. ■

На прошлой лекции мы доказали существование полных ортогональных нормированных систем в сепарабельном евклидовом пространстве. Следовательно, установили существование и замкнутых систем.

Утверждение 1 Если система $\{\varphi_n\}$ замкнута в E , то любой элемент $f \in E$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.

Доказательство. Действительно, если f и g имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то у $f - g$ все коэффициенты Фурье равны нулю и по равенству Парсеваля $\|f - g\|^2 = 0$. ■

Утверждение 2 Если система $\{\varphi_n\}$ замкнута в E , то справедливо равенство Парсеваля для скалярного произведения: для любых векторов f и g из E

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k, \text{ где } a_k = (f, \varphi_k), \text{ } b_k = (g, \varphi_k).$$

Доказательство. Заметим, что в любом евклидовом пространстве

$$(f, g) = \frac{1}{2} [\|f + g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2].$$

Коэффициентами Фурье вектора $f + g$ являются числа $a_k + b_k$. Следовательно, по равенству Парсеваля

$$(f, g) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2 - a_k^2 - b_k^2 \right] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k.$$

■ Мы рассматривали ортогональные нормированные системы. Однако можно переформулировать понятие коэффициентов Фурье, ряда Фурье и т. д. и для любой ортогональной системы. Пусть $\{\varphi_k\}$ – произвольная ортогональная система. По ней можно построить нормированную систему, состоящую из элементов $\psi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$. Для любого $f \in E$ имеем:

$$c_n = (f, \psi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|} (f, \varphi_n)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$$

где $a_n = \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$, т. е. $c_n = a_n \cdot \|\varphi_n\|$.

Коэффициент a_k называется коэффициентом Фурье элемента f по ортогональной системе $\{\varphi_n\}$. Тогда, например, неравенство Бесселя примет следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 \cdot a_n^2 \leq \|f\|^2.$$

§2. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса-Фишера

Будем предполагать, что рассматриваемые сепарабельные пространства являются полными, т.е. любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Пусть $\{\varphi_n\}$ – некоторая ортогональная нормированная система в E (не обязательно полная). Из неравенства Бесселя вытекает, что для того, чтобы числа $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ служили коэффициентами Фурье какого-то элемента $f \in E$, необходимо чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходилась.

Оказывается, что в полном евклидовом пространстве это условие является и достаточным.

Теорема 2 (Рисс-Фишер) Пусть $\{\varphi_n\}$ – произвольная ортогональная нормированная система в полном евклидовом пространстве E , и пусть числа $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty.$$

Тогда существует единственный элемент f , что

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, n, \dots \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = (f, f) = \|f\|^2.$$

Доказательство. Положим

$$f_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k.$$

Тогда

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1} \cdot \varphi_{n+1} + \dots + c_{n+p} \cdot \varphi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2.$$

Отсюда, исходя из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ заключаем, что последовательность $\{f_n\}$ является фундаментальной, т.е. в силу полноты пространства E она сходится к некоторому элементу $f \in E$. Далее найдем коэффициенты Фурье для f . Имеем:

$$(f, \varphi_k) = (f_n, \varphi_k) + (f - f_n, \varphi_k).$$

При этом справа первое слагаемое при $k \leq n$ равно c_k , а второе стремится к нулю, т.к.

$$|(f - f_n, \varphi_k)| \leq \|f - f_n\| \cdot \|\varphi_k\| \leq \|f - f_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Левая часть от n не зависит, поэтому получаем

$$(f, \varphi_k) = c_k.$$

Так как по построению $\|f - f_n\| \rightarrow 0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f).$$

Действительно,

$$(f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k) = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \rightarrow 0.$$

Единственность такого f вытекает из того, что если $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2$, то $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$ сходятся к f в норме E , а предел всегда единственен. ■

Докажем следующую полезную теорему:

Теорема 3 *Для того чтобы ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ в полном сепарабельном евклидовом пространстве была полна, необходимо и достаточно, чтобы в E не существовало ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы $\{\varphi_n\}$.*

Доказательство. Пусть система $\{\varphi_n\}$ полна и, следовательно, замкнута. Если f ортогонален всем элементам $\{\varphi_n\}$, то все его коэффициенты Фурье равны нулю. Тогда из равенства Парсеваля получаем:

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0,$$

т. е. $f = 0$.

Обратно, пусть система $\{\varphi_n\}$ не полна. Тогда эта система не замкнута, и в E существует такой элемент $g \neq 0$, что

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \text{ где } c_k = (g, \varphi_k).$$

На основании теоремы Рисса-Фишера существует такой элемент $f \in E$, что

$$(f, \varphi_k) = c_k, \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2.$$

Но тогда $(f - g, \varphi_k) = (f, \varphi_k) - (g, \varphi_k) = c_k - c_k = 0$, т.е. элемент $f - g$ ортогонален φ_k для любого $k \in \mathbb{N}$, а из неравенства

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) < (g, g)$$

следует, что $f \neq g$, т. е. $f - g \neq 0$ и этот вектор ортогонален всем элементам системы $\{\varphi_n\}$. ■

Лекция 4 (25 сентября 2023)

Продолжим рассмотрение полных евклидовых пространств. Нас будут интересовать бесконечномерные пространства. Будем, как правило, предполагать наличие счетного всюду плотного множества.

§1. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфизме

Определение 1 *Полное евклидово пространство бесконечного числа измерений называется гильбертовым пространством.*

Еще раз сформулируем аксиомы гильбертова пространства H с элементами f, g, \dots

I. H есть линейное пространство с заданным на нём скалярным произведением (евклидово пространство).

II. Пространство H полно в смысле метрики

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

III. Пространство H бесконечномерно, т.е. в нём $\forall n \in \mathbb{N}$ можно найти n линейно независимых векторов.

Чаще всего рассматриваются сепарабельные гильбертовы пространства, которые удовлетворяют еще одной аксиоме.

IV. H сепарабельно, т.е. в нём существует счётное всюду плотное множество.

Примером сепарабельного гильбертова пространства является пространство l_2 . Будем рассматривать только сепарабельные гильбертовы пространства.

Два евклидовых пространства, E и E^* , называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначные соответствия так, что если

$$x \leftrightarrow x^*, y \leftrightarrow y^*, x, y \in E, x^*, y^* \in E^*$$

то

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*, \lambda x \leftrightarrow \lambda x^* \text{ и } (x, y) = (x^*, y^*),$$

т.е. изоморфизм сохраняет как линейные операции, определенные в этих пространствах, так и скалярное произведение.

Как известно, любые два n -мерных евклидовых пространства изоморфны между собой и каждое такое пространство изоморфно \mathbb{R}^n .

Евклидовы пространства бесконечной размерности не обязательно изоморфны. Например, пространства l_2 и $C_2[a, b]$ не изоморфны, т.к. первое – полно, а второе нет. Однако, для сепарабельных евклидовых пространств это единственное препятствие. Имеет место следующий факт.

Теорема 1 *Любые два сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

Доказательство. Покажем, что каждое сепарабельное гильбертово пространство изоморфно l_2 . Тем самым будет доказана теорема. Выберем в H произвольную полную ортогональную нормированную систему $\{\varphi_n\}$ и поставим в соответствие элементу $f \in H$ совокупность его коэффициентов Фурье $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ по системе $\{\varphi_n\}$. Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, то $\{c_k\}$ принадлежит l_2 . Обратно, по теореме Рисса-Фишера всякому элементу (c_1, c_2, \dots) из l_2 отвечает некоторый элемент $f \in H$, имеющий числа $\{c_k\}$ своими коэффициентами Фурье. Установленное соответствие, очевидно, взаимно однозначно. Теперь, если

$$f \leftrightarrow (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots), \quad g \leftrightarrow (d_1, d_2, \dots, d_n, \dots),$$

то

$$f + g \leftrightarrow (c_1 + d_1, \dots, c_n + d_n, \dots), \quad \lambda f \leftrightarrow (\lambda c_1, \dots, \lambda c_n, \dots),$$

т.е. сумма переходит в сумму и т.д., что означает линейность отображения.

Покажем, что из равенства Парсеваля следует, что

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot d_k.$$

В самом деле:

$$\begin{aligned} (f, f) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, & (g, g) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2, \\ (f + g, f + g) &= (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + d_k)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot d_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2. \end{aligned}$$

■

Доказанная теорема означает, что с точностью до изоморфизма существует лишь одно сепарабельное гильбертово пространство, а пространство l_2 можно рассматривать как его “координатную реализацию” (подобно пространству \mathbb{R}^n для конечномерных евклидовых пространств).

Другую реализацию можно получить, взяв евклидово пространство $C_2[a, b]$ и рассмотрев его пополнение. Пополнение можно сделать для любого метрического пространства. На полученном пространстве можно определить линейные операции и скалярное произведение по непрерывности, полагая

$$x + y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n), \quad \lambda x = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n$$

и

$$(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n), \quad \text{где } x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \text{ в } C_2[a, b].$$

Существование этих пределов и независимость их от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ легко устанавливаются. Тогда полученное пространство будет полным евклидовым пространством, очевидно, бесконечномерным и сепарабельным. На самом деле, получится пространство $L_2[a, b]$, которое получалось в прошлом семестре.

§2. Подпространства, ортогональные дополнения. Прямая сумма

Определение 2 Линейным многообразием в гильбертовом пространстве H называется совокупность L элементов из H , что если $f, g \in L$, то $\alpha f + \beta g \in L$ для $\forall \alpha, \beta$. Замкнутое линейное многообразие называется подпространством.

Приведем примеры подпространств.

Пример 1 Пусть h произвольный элемент из H . Совокупность всех элементов, которые ортогональны h , образует подпространство в H .

Пример 2 Пусть H реализовано как ℓ_2 , то есть его элементы $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, где $\sum_k x_k^2 < \infty$. Элементы, подчиненные условию $x_1 = 0$ образуют подпространство ℓ_2 .

Пример 3 Опять $H = \ell_2$. Пусть $L = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)\}$, для которых $x_n = 0$ при $n = 2, 4, 6, \dots$ и x_n произвольно при $n = 1, 3, 5, \dots$. Это подпространство.

Приведите пример незамкнутого линейного многообразия в ℓ_2 .

Всякое подпространство гильбертова пространства либо является конечномерным евклидовым пространством, либо само представляет собой гильбертово пространство. Действительно, справедливость аксиом **I** – **III** для каждого такого подпространства очевидна, а аксиома **IV** вытекает из следующей простой леммы.

Лемма 1 Любое подмножество сепарабельного метрического пространства само сепарабельно.

Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – счётное всюду плотное множество в R и $a_n = \inf_{\eta \in R} \rho(\xi_n, \eta)$. Для любых натуральных n и m найдется точка $\eta_{n,m} \in R'$, что

$$\rho(\xi_n, \eta_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$. Для любого $\eta \in R'$ найдётся такое n , что $\rho(\xi_n, \eta) < \frac{\varepsilon}{3}$ и тогда, очевидно, что $a_n < \frac{\varepsilon}{3}$. Следовательно, $\rho(\xi_n, \eta_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$. Но тогда, по неравенству треугольника, $\rho(\eta, \eta_{n,m}) < \rho(\eta, \xi_n) + \rho(\xi_n, \eta_{n,m}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$, т.е. не более чем счётное множество $\{\eta_{n,m}\} (n, m = 1, 2, 3, \dots)$ всюду плотно в R' . ■

Применив процесс ортогонализации к какой-либо счётной всюду плотной последовательности элементов произвольного подпространства гильбертова пространства, получаем следующую теорему.

Теорема 2 В каждом подпространстве M сепарабельного гильбертова пространства H содержится конечная или счетная ортонормированная система $\{\varphi_n\}$, линейные замыкания которой совпадают с M .

Пусть M – подпространство H . Обозначим через

$$M^\perp = H \ominus M$$

множество элементов $g \in H$, ортогональных ко всем элементам $f \in M$ и докажем, что M^\perp есть подпространство пространства H . Линейность M^\perp очевидна, т.к. из $(g_1, f) = (g_2, f) = 0$ вытекает $(\alpha g_1 + \beta g_2, f) = 0$. Для доказательства замкнутости допустим, что $g_n \in M^\perp$ и последовательность $\{g_n\}$ сходится к g . Тогда для любого $f \in M$

$$(g, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n, f) = 0, \text{ т.е. } g \in M^\perp.$$

Подпространство M^\perp называется ортогональным дополнением подпространства M .

Заметим, что $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Теорема 3 Если M – это (замкнутое) подпространство сепарабельного гильбертова пространства H , то любой элемент $f \in H$ единственным образом представим в виде $f = h + h^\perp$, где $h \in M, h^\perp \in M^\perp$.

Доказательство. Докажем существование такого разложения. Для этого найдем в M полную ортогональную систему $\{\varphi_n\}$ и положим

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n, \text{ где } c_n = (f, \varphi_n).$$

Так как ряд $\sum c_n^2$ сходится (по неравенству Бесселя), то элемент h существует и принадлежит M .

Положим $h' = f - h$.

Очевидно, что для всех n выполнено $(h', \varphi_n) = c_n - c_n = 0$ и, поскольку произвольный элемент $\xi \in M$ представим в виде $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$, имеем

$$(h', \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (h', \varphi_n) = 0. \text{ т.е. } h' \in M^\perp.$$

Допустим, что кроме построенного разложения $f = h + h'$ существует другое разложение $f = h_1 + h_1', h_1 \in M, h_1' \in M'$. Тогда

$$h + h' = h_1 + h_1' \Rightarrow h - h_1 = h_1' - h' = 0, \text{ т.к. } M \cap M^\perp = \{0\}.$$

■

Сформулируем ряд полезных следствий из доказанной теоремы.

Следствие 1 Ортогональное дополнение к ортогональному дополнению M совпадает с самим M . т.е., $(M^\perp)^\perp = M$.

Значит, можно говорить о взаимно дополнительных подпространствах пространства H . Если $\{\varphi_n\}$ и $\{\varphi'_n\}$ – полные ортогональные системы в M и M^\perp , соответственно, то объединяя эти системы, получаем полную ортогональную систему в H . В частности, справедливо

Следствие 2 Каждая ортогональная нормированная система может быть расширена до системы, полной в H .

Если система $\{\varphi_n\}$ конечна, то число её элементов равна размерности подпространства M , порожденного $\{\varphi_n\}$ и равна коразмерности подпространства M^\perp . Еще одно

Следствие 3 *Ортогональное дополнение к подпространству конечной размерности n имеет конечную коразмерность n , и наоборот.*

Если каждый вектор $f \in H$ представим в виде $f = h + h^\perp$, где $h \in M, h^\perp \in M^\perp$, то говорят, что пространство H есть прямая сумма взаимно ортогональных подпространств M и M^\perp и пишут

$$H = M \oplus M^\perp.$$

Ясно, что понятие прямой суммы обобщается на любое конечное или счётное число подпространств, именно, говорят, что пространство H есть прямая сумма подпространств $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$

$$H = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n \oplus \dots$$

если

- 1) подпространства M_i попарно ортогональны, т.е. любой вектор из M_i ортогонален любому вектору из M_j при $i \neq j$.
- 2) Каждый элемент $f \in H$ может быть представлен в виде

$$f = h_1 + h_2 + \dots + h_n + \dots, \text{ где } h_n \in M_n,$$

причем, если число подпространств M_n бесконечно, то ряд $\sum \|h_n\|^2$ сходится. Легко проверить, что такое представление единственно и

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2.$$

Наряду с прямой суммой подпространств можно говорить о прямой сумме конечного или счётного числа произвольных гильбертовых пространств. Именно, если H_1 и H_2 два гильбертовых пространства, то их прямая сумма – это произвольные пары $(h_1, h_2), h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$, а скалярное произведение в $H_1 \oplus H_2$ равно

$$((h_1, h_2), (h'_1, h'_2)) = (h_1, h'_1) + (h_2, h'_2).$$

В пространстве $H = H_1 \oplus H_2$ содержатся, очевидно, взаимно ортогональные подпространства, состоящие из пар вида $(h_1, 0)$ и $(0, h_2)$ соответственно. Первые из них, очевидно, отождествляется с H_1 , а второе с H_2 .

Аналогично определяется сумма $H = \sum \oplus H_n$ конечного или счётного набора гильбертовых пространств.

Лекция 5 (2 октября 2023)

§1. Комплексные евклидовы пространства

Наряду с действительным можно ввести и комплексное евклидово пространство (т.е. комплексное линейное пространство со скалярным произведением в нем). Однако сформулированные аксиомы не могут быть одновременно выполненными. Действительно,

$$\text{если } (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2(x, x), \text{ то при } \lambda = i, \quad (ix, ix) = (-1)(x, x),$$

т.е. квадраты векторов x и ix не могут быть одновременно положительными. Поэтому необходимо подправить аксиомы для скалярного произведения следующим образом:

- 1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$
- 2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
- 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
- 4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Тогда из 1) и 2) $\Rightarrow (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, y)$.

Пример 1 Пространство \mathbb{C}^n , в котором скалярное произведение любых двух элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (x_1, y_2, \dots, y_n)$ определено формулой

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}.$$

Как известно, всякое комплексное евклидово пространство размерности n изоморфно пространству \mathbb{C}^n .

Примеры бесконечномерных комплексных евклидовых пространств.

Пример 2 Комплексное пространство ℓ_2 , состоящее из элементов $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ где $x_n \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$, а скалярное произведение определяется формулой

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Пример 3 Пространство $C_2[a, b]$ комплекснозначных непрерывных функций на $[a, b]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Для комплексного скалярного произведения выполнено неравенство Коши–Буняковского

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

В комплексном евклидовом пространстве длина (норма) вектора определяется, как и в действительном случае, по формуле:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Понятие угла между векторами в комплексном пространстве не вводят, т.к. $\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$ – комплексное число, однако, понятие ортогональности сохраняется: векторы x, y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.

Если $\{\phi_n\}$ – ортонормированная система в комплексном евклидовом пространстве E , $f \in E$, то как и в действительном случае, числа $a_n = (f, \phi_n)$ называются коэффициентами Фурье, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \phi_n$ – рядом Фурье f по ортонормированной системе $\{\phi_n\}$.

Имеется неравенство Бесселя: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq \|f\|^2$.

Аналогично вещественному евклидову пространству вводится понятие полной ортонормированной системы, ортогонального базиса и замкнутой ортонормированной системы. В частности, равенство Парсеваля для нормы имеет вид:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \quad c_k = (f, \phi_k),$$

а для комплексного скалярного произведения справедливо тождество

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \bar{d}_n, \quad d_k = (g, \phi_k).$$

Справедлив также комплексный вариант теоремы Рисса-Фишера и следствия из нее.

Полное комплексное евклидово пространство бесконечной размерности называется комплексным гильбертовым пространством.

На комплексный случай переносится теорема об изоморфизме:

Теорема 1 *Все сепарабельные комплексные гильбертовы пространства изоморфны между собой, и все они изоморфны комплексному пространству ℓ_2 .*

Предлагается убедиться в том, что все доказанные нами теоремы для вещественных евклидовых пространств справедливы (с незначительными изменениями) и для комплексных евклидовых пространств.

§2. Пространство L_2

Пусть X – некоторое пространство с мерой μ (т.е. задана тройка (X, Σ, μ) , где Σ – это сигма-алгебра подмножеств X , а μ – сигма-аддитивная мера на Σ). Мера пространства X может быть конечной или сигма-конечной. Будем считать меру μ полной (т.е. любое подмножество множества меры нуль является измеримым).

Построим новое евклидово пространство, взяв совокупность функций с интегрируемым квадратом. Будем сперва рассматривать действительные функции f , заданные на множестве X . Все функции предполагаются измеримыми и определенными на X почти всюду. Эквивалентные между собой функции не различаются.

Определение 1 *Функция f называется функцией с интегрируемым квадратом на X , если интеграл $\int_X f^2(x) d\mu$ существует (конечен).*

Совокупность всех таких функций мы будем обозначать $L_2(X, \mu)$ или короче L_2 .

Установим основные свойства функций с интегрируемым квадратом.

1. Произведение двух функций с интегрируемым квадратом есть интегрируемая функция. Это вытекает из неравенства $|f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)]$ и свойств интеграла Лебега.

Следствие 1 *Всякая функция с интегрируемым квадратом в пространстве конечной меры, является интегрируемой.*

Достаточно рассмотреть функцию $g(x) \equiv 1$ и воспользоваться свойством 1.

2. Сумма двух функций из L_2 также принадлежит L_2 . Действительно:

$$(f(x) + g(x))^2 \leq f^2(x) + 2|f(x) \cdot g(x)| + g^2(x).$$

Каждая из трех функций справа – интегрируема по свойству 1.

3. Если $f \in L_2, \alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha \cdot f \in L_2$. Очевидно, из свойств 2, 3 заключаем, что L_2 это линейное пространство.

Определим в L_2 скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int_X f(x)g(x)d\mu. \quad (1)$$

Ясно, что все аксиомы скалярного произведения выполнены, а именно:

- 1) $(f, g) = (g, f)$,
- 2) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$,
- 3) $(\alpha f, g) = \alpha(f, g), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
- 4) $(f, f) > 0$ если $f \neq 0$.

Мы, как обычно, не различаем эквивалентные функции, т.е., разность которых почти всюду равна нулю. За нулевой элемент в пространстве L_2 принимается класс всех функций, которые почти всюду равны нулю.

Определение 2 *Евклидовым пространством L_2 называется линейное пространство, состоящее из классов эквивалентности между собой функций с интегрируемым квадратом, в котором скалярное произведение задается формулой формулой (1).*

В L_2 , как и в любом евклидовом пространстве выполнено неравенство Коши-Буняковского:

$$\left(\int_X f(x)g(x)d\mu \right)^2 \leq \left(\int_X f^2(x)d\mu \right) \cdot \left(\int_X g^2(x)d\mu \right)$$

и неравенство треугольника:

$$\left(\int_X (f(x) + g(x))^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_X f^2(x)d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_X g^2(x)d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В частности, при $\mu(X) < \infty, g(x) \equiv 1$

$$\left(\int_X f(x)d\mu \right)^2 \leq \mu(X) \cdot \int_X f^2(x)d\mu. \quad (2)$$

Норма в L_2 задается формулой:

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_X f^2(x) d\mu \right)^{\frac{1}{2}},$$

а расстояние между элементами f и g равно

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \left(\int_X (f(x) - g(x))^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Величину $\int (f(x) - g(x))^2 d\mu = \|f - g\|^2$ называют среднеквадратичным отклонением функций f и g друг от друга.

Сходимость в смысле метрики пространства L_2 называется сходимостью в среднем квадратичном.

Теорема 2 Пространство $L_2(X, \mu)$ при $\mu(X) < \infty$ полное.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ – фундаментальна последовательность в L_2 , т.е.

$$\|f_n - f_m\| \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow \infty.$$

Тогда в силу неравенства (2)

$$\int_X [f_n(x) - f_m(x)] d\mu \leq [\mu(X)]^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_X (f_n(x) - f_m(x))^2 d\mu \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \cdot \mu(X)^{\frac{1}{2}},$$

т.е., последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна и в метрике пространства $L_1(X, \mu)$ суммируемых функций. Но это пространство полное, поэтому $\{f_n\}$ сходится к некоторой суммируемой функции f в метрике пространства $L_1(X, \mu)$. Выберем из $\{f_n\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходящуюся почти всюду к функции f . В неравенстве

$$\int_X (f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x))^2 d\mu < \varepsilon,$$

справедливом для членов этой подпоследовательности, можно, используя теорему Фату, перейти к пределу при $l \rightarrow \infty$:

$$\int_X (f_{n_k}(x) - f(x))^2 d\mu \leq \varepsilon$$

откуда следует, что $f \in L_2$ и f_{n_k} сходится к f по норме пространства $L_2(X, \mu)$, а если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сама сходится. ■

Случай бесконечной меры: мы существенно использовали факт, что $\mu(X) < \infty$.

Если $\mu(X) = \infty$, то $f \in L_2 \not\Rightarrow f \in L_1$.

Пример: функция $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ интегрируема с квадратом на $X = \mathbb{R}$, но не интегрируема.

Кроме того, из сходимости в L_2 не следует сходимость в L_1 .

Пример: $\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } |x| \leq n \\ 0 & \text{при } |x| > n \end{cases}$.

Тогда $\phi_n(x)$ сходятся к 0 в $L_2(\mathbb{R})$, но не имеют предела в $L_1(\mathbb{R})$.

Однако теорема о полноте верна и в случае бесконечной меры.

Итак, $L_2(X, \mu)$ является полным евклидовым пространством, которое бесконечномерно (за исключением вырожденных случаев). Значит, это гильбертово пространство.

Определение 3 Мера μ называется мерой с конечным базисом, если существует счетная система $\mathcal{A} = \{A_n\}$ измеримых подмножеств X (счетный базис), что для любого $\varepsilon > 0$ и для всякого измеримого множества $M \subset X$ найдется такое $A_n \in \mathcal{A}$, что $\mu(M \Delta A_n) < \varepsilon$.

Мера Лебега, очевидно, имеет счетный базис. Прямое произведение $\mu_1 \otimes \mu_2$ двух мер со счетным базисом также обладает счетным базисом. Надо рассмотреть всевозможные попарный произведения элементов из обоих базисов. Следовательно, мера Лебега в \mathbb{R}^n имеет счетный базис.

Следующие теоремы сформулируем без доказательств (см. учебник Колмогоров, Фомин).

Теорема 3 Если мера μ имеет счетный базис, то в пространстве $L_1(X, \mu)$ существует счетное всюду плотное множество.

Теорема 4 Если мера μ имеет счётный базис, то $L_2(X, \mu)$ есть сепарабельное гильбертово пространство. В частности, $L_2(X, \mu)$ изоморфно ℓ_2 .

§3. Комплексное пространство L_2

Мы рассмотрели действительное пространство L_2 . Изложенные результаты легко переносятся на комплексный случай. Комплексная функция $f(x)$ определенная на некотором множестве X с заданной на нём мерой μ , называется функцией с интегрируемым квадратом, если интеграл $\int_X |f(x)|^2 d\mu$ конечен (по Лебегу).

Определив сложение таких функций и умножение их на числа обычным образом, а также введя скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu$$

мы получим комплексное евклидово пространство, называемое комплексным L_2 (при этом, как и в действительном случае, рассматриваем классы эквивалентности функций).

Это пространство является полным, а если мера имеет счетный базис, то оно сепарабельно. Следовательно, все такие комплексные пространства L_2 изоморфны между собой.

Лекция 6 (9 октября 2023)

Общая теорема, доказанная нами для общих евклидовых пространств, говорит о том, что в L_2 существуют полные ортогональные системы функций (и полные ортонормированные системы). Такие системы можно получить, например, применяя процесс ортогонализации.

Если в L_2 выбрана некоторая ортогональная система $\{\varphi_n\}$, то по общим правилам каждый элемент $f \in L_2$ можно представить как сумму ряда $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ – ряда Фурье f по системе $\{\varphi_n\}$. Коэффициент Фурье c_n определяется по формуле:

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \cdot \int_X f(x) \varphi_n(x) d\mu, \quad \|\varphi_n\|^2 = \int_X \varphi_n^2(x) d\mu.$$

Если система замкнутая (полная), то выполнено равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 |c_n|^2 = \int_X |f(x)|^2 d\mu.$$

Рассмотрим теперь важнейшие примеры ортогональных систем в пространствах L_2 и отвечающие им разложения.

§1. Тригонометрическая система. Тригонометрический ряд Фурье

Рассмотрим пространство $L_2[-\pi, \pi]$ с обычной мерой Лебега на нем. В этом пространстве функции

$$1, \cos nx, \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

образуют полную ортогональную систему, которая называется тригонометрической.

Ортогональность легко проверяется непосредственным вычислением. Например, при $n \neq m$ для косинусов получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)] dx = 0$$

и т.д. Полнота этой системы следует из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации любой непрерывной периодической функции тригонометрическими полиномами. Система не нормирована. Соответствующая нормированная система состоит из функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}; \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Действительно, напомним, что

$$\|1\|_{L_2}^2 = 2\pi, \quad \|\sin nx\|^2 = \|\cos nx\|^2 = \pi \quad (\text{следует из } \sin^2 nx + \cos^2 nx = 1).$$

Пусть f – функция из $L_2[-\pi, \pi]$, ее коэффициенты Фурье, отвечающие функциям $1, \cos nx, \sin nx$, принято обозначать $a_0/2, a_n, b_n$. Таким образом, по общим формулам

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \text{ т. е. } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Соответствующий ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx + b_n \sin nx].$$

Для любой функции $f \in L_2$ этот ряд сходится именно к этой функции в среднем квадратичном, т. е., если обозначить

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k [a_n \cdot \cos nx + b_n \sin nx]$$

частичную сумму ряда Фурье, то среднеквадратичное отклонение S_k от f вычисляется по формуле

$$\|f(x) - S_k(x)\|^2 = \|f\|^2 - \pi \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k [a_n^2 + b_n^2] \right).$$

Среди всех тригонометрических полиномов

$$T_k(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^k [\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx]$$

с заданным k именно частичная сумма S_k ряда Фурье дает наилучшее приближение функции f (в метрике L_2).

Неравенство Бесселя для тригонометрической системы:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

но поскольку тригонометрическая система полна, то, на самом деле, имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Значит, для любой функции $f \in L_2$ квадраты ее коэффициентов Фурье образуют сходящийся ряд.

Обратно, если числа a_0, a_n и b_n ($n = 1, 2, \dots$) таковы, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ сходится, то по теореме Рисса-Фишера ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx]$$

также сходится (в L_2) и его сумма представляет собой функцию, имеющую a_0, a_n, b_n своими коэффициентами Фурье.

Значит $S_n(x)$ сходится к $f(x)$ в L_2 , а из результатов прошлой лекции получаем, что найдется подпоследовательность $S_{n_k}(x)$, такая что $S_{n_k}(x) \xrightarrow{п. б.} f(x)$ ($k \rightarrow \infty$).

Все приведенные рассуждения легко переносятся на функции, заданные на отрезке произвольной длины, скажем, на $[-l, l]$. Если $f(t) \in L_2[-l, l]$, то заменой $x = \frac{\pi}{l} \cdot t$, т. е. $t = \frac{l}{\pi} \cdot x$, переводим $f(t)$ в функцию $f^*(x) = f(\frac{lx}{\pi})$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{\pi n}{l} t\right) dt, n = 0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} t\right) dt, n = 1, 2, \dots$$

Ряд Фурье для функции f , заданной на отрезке длины $2l$, имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} t\right) \right].$$

Выпишем также равенство Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t)^2 dt.$$

Замечание 1 Тригонометрические ряды были использованы французским математиком Жаном Фурье в его работах по теории распространения тепла. Еще раньше формулы для коэффициентов a_n и b_n встречались у Эйлера. В дальнейшем теория тригонометрических рядов развивалась в работах Римана, Дирихле и других математиков. Первоначально термины “ряд Фурье”, “коэффициенты Фурье” связывались именно с тригонометрической системой и лишь значительно позже в XX веке стали употребляться в общем смысле, т. е. применительно к произвольной ортогональной системе в любом евклидовом или гильбертовом пространстве.

Из полноты тригонометрической системы следует, что для любой $f \in L_2$ ее ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx]$$

сходится к f в среднем квадратичном. Однако с точки зрения математического анализа важно знать, когда эта сходимость имеет место в других смыслах, например, в каждой точке или равномерно на всем отрезке. Об этом речь пойдет в следующих лекциях.

§2. Тригонометрическая система на $[0, \pi]$

Функции

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots \quad (2)$$

$$\sin x, \sin 2x, \dots \quad (3)$$

образуют в совокупности полную ортогональную систему на отрезке $[-\pi, \pi]$. Покажем, что каждая из двух систем (2) и (3) ортогональна и полна в $L_2[0, \pi]$.

Ортогональность проверяется прямым подсчетом. Докажем полноту системы косинусов (2). Пусть $f \in L_2[0, \pi]$. Доопределим ее на полуинтервале $[\pi, 0)$ формулой $f(-x) = f(x)$ (четное продолжение) и разложим ее в ряд Фурье по всей тригонометрической системе $1, \cos nx, \sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$). Поскольку функция f , определенная на $[-\pi, \pi]$, является четной, все ее коэффициенты по синусам равны нулю. Это сразу видно из формулы (интегрируем по $[-\pi, \pi]$ нечетную функцию). Иначе говоря, функцию f на $[-\pi, \pi]$ (и, тем более, на $[0, \pi]$) можно аппроксимировать в среднем квадратичном с любой точностью линейными комбинациями системы (2). Отсюда вытекает полнота этой системы.

Полнота системы (3) доказывается аналогично с помощью нечетного продолжения на $[-\pi, 0)$: $f(-x) = -f(x)$. Для нечетных функций коэффициенты Фурье по системе $1, \cos nx$ ($n = 1, 2, \dots$) равны нулю, что и требуется.

Выпишем формулу коэффициентов Фурье и равенство Парсеваля для $L_2[0, \pi]$, например, по $\sin nx$:

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad \left(\|\sin nx\|_{L_2[0, \pi]}^2 = \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)^2 dx, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin nx.$$

§3. Ряд Фурье в комплексной форме

Тригонометрический ряд можно записать компактно, если воспользоваться формулами Эйлера

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Подставляем в ряд Фурье, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)] &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}, \end{aligned}$$

где $c_0 = \frac{a_0}{2}$ и при $n \geq 1$

$$\begin{cases} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases} \quad (4)$$

Выражение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

называется тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме. Коэффициенты c_n этого ряда выражаются через a_n и b_n по формулам (4). Однако легко написать и прямые формулы для c_n . Действительно, непосредственно вычислим при $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

а при $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Поэтому, умножая равенство

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx} \quad (5)$$

на e^{-imx} при $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и интегрируя:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = 2\pi c_m, \text{ т. е.}$$

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-imx} dx \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6)$$

Разложение (5) остается в силе и для комплексных функций с интегрируемым квадратом на $[-\pi, \pi]$. Иначе говоря, функции $e^{inx}, n \in \mathbb{Z}$ образуют базис в комплексном гильбертовом пространстве $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. При этом выражения (6) представляют собой скалярные произведения f на e^{imx} в этом комплексном пространстве.

Равенство Парсеваля для $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Если $\{c_n\}, \{d_n\}$ – коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$, то скалярное произведение в этом пространстве будет иметь вид:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot \overline{d_n}.$$

Заменяя функции e^{inx} на $e^{i\frac{\pi n}{l}x}$, можно перенести все сказанное на пространство $L_2[-l, l]$ комплексных функций на отрезке произвольной длины.

Заметим, что если f – вещественная функция, то для ее коэффициентов Фурье в комплексной форме имеют место соотношения

$$c_{-m} = \overline{c_m} \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

которое следует из (6) с помощью взятия операции комплексного сопряжения.

§4. Интеграл Дирихле

Рассмотрим пространство $L_2[-\pi, \pi]$ функций с суммируемым квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$. Как было показано, это бесконечномерное полное евклидово пространство, т.е. гильбертово пространство. Функции $1, \cos nx, \sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$) образуют полную ортогональную систему, поэтому для каждой функции $f \in L_2[-\pi, \pi]$ ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad \text{где} \quad (7)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad (8)$$

сходится к f в среднем квадратичном, т.е. в метрике $L_2[-\pi, \pi]$. Однако в связи с применением рядов Фурье к задачам математической физики важно знать условия, при которых ряд сходится не только в среднем, но и в точке, всюду и даже равномерно. Установим сначала условия сходимости тригонометрического ряда в данной точке.

Сделаем ряд замечаний.

Вместе с функцией на отрезке $[-\pi, \pi]$ можно говорить о периодических функциях с периодом 2π на всей прямой, поскольку каждую функцию, заданную на этом отрезке, можно периодически продолжить на всю ось.

Заметим, что функции из тригонометрической системы ограничены, поэтому, формулы (8), определяющие коэффициенты Фурье по этой системе, имеют смысл для любой суммируемой функции. Таким образом, каждой функции $f \in L_1[-\pi, \pi]$ отвечает совокупность её коэффициентов Фурье и её ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Рассмотрим n -ую частичную сумму ряда Фурье

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx. \quad (9)$$

Преобразуем $S_n(x)$, подставив в (3) вместо коэффициентов a_k и b_k их интегральные выражения, а переменную интегрирования обозначим t :

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt \right] dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt$$

Воспользуемся формулой:

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}u}{2 \sin \frac{u}{2}},$$

для проверки которой достаточно умножить правую и левую части на $2 \sin \frac{u}{2}$ и применить известное тригонометрическое тождество

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Действительно, сложим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sin \frac{u}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{u}{2}, \\ \sin \frac{3u}{2} - \sin \frac{u}{2} &= \cos u \cdot 2 \cdot \sin \frac{u}{2}, \\ &\dots \\ \sin \frac{2n+1}{2}u - \sin \frac{2n-1}{2}u &= \cos nu \cdot 2 \sin \frac{u}{2}. \end{aligned}$$

и получим необходимое тождество.

Для частичных сумм $S_n(x)$ получаем формулу:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt \quad (10)$$

Это представление $S_n(x)$ называется интегралом Дирихле.

Лекция 7 (16 октября 2023)

§1. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

На прошлой лекции для частичных сумм $S_n(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ мы вывели формулу, которая называется интегралом Дирихле этой функции:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt \quad (1)$$

Сделаем замену $t-x = z$. Поскольку под интегралом стоит периодическая функция с периодом 2π , интеграл от неё по любому отрезку длины 2π имеет одно и то же значение. Поэтому при интегрировании по z можно сохранить прежние пределы $-\pi$ и π . Получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz. \quad (2)$$

Функция

$$D_n(z) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}z}{2 \sin \frac{z}{2}}$$

называется ядром Дирихле. Интеграл Дирихле имеет вид

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz.$$

Из представления

$$\frac{\sin \frac{2n+1}{2}z}{2 \sin \frac{z}{2}} = \frac{1}{2} + \cos z + \cos 2z + \dots + \cos nz$$

следует, что $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) dz = 1$. Используем это равенство и запишем разность

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+z) - f(x)] \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2}z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz, \quad (3)$$

или более компактно

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+z) - f(x)] \cdot D_n(z) dz \quad (4)$$

где

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \cdot D_n(z) dz. \quad (5)$$

Мы свели вопрос о сходимости $S_n(x)$ к $f(x)$ к вопросу о стремлении к нулю интеграла (3) или (4). Дальнейшее исследование основано на следующей лемме.

Лемма 1 (Риман) Если функция φ суммируема на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx = 0 \quad (\text{то же верно для } \cos px).$$

Доказательство. Если φ – непрерывно дифференцируемая функция, то интегрируя по частям имеем:

$$\int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx = -\varphi(x) \cdot \frac{\cos px}{p} \Big|_a^b + \int_a^b \varphi'(x) \frac{\cos px}{p} \, dx \rightarrow 0$$

поскольку

$$\int_a^b \varphi'(x) \frac{\cos px}{p} \, dx = O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Пусть теперь φ – произвольная суммируемая функция $[a, b]$. Заметим, что непрерывно дифференцируемые функции плотны в пространстве $L_1[a, b]$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\varphi_\varepsilon \in C^1[a, b]$, что

$$\int_a^b |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \text{Далее имеем:}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi(x) \sin px \, dx \right| &\leq \left| \int_a^b [\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)] \sin px \, dx \right| + \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px \, dx \right| \leq \\ &\int_a^b |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \, dx + \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px \, dx \right|. \end{aligned}$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$. ■

Замечание 1 Из леммы Римана вытекает, что для любого $\delta > 0$

$$\int_{\delta < |z| < \pi} f(x+z) \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2 \sin \frac{z}{2}} \, dz \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Это означает, что сходимость ряда Фурье, т.е., стремление к нулю правой части (4), и сумма ряда Фурье в точке x , т.е. предел интеграла Дирихле (5) при $n \rightarrow \infty$, зависят лишь от значений функции f в любой сколь угодно малой окрестности точки x . Это утверждение называется принципом локализации ряда Фурье.

Сформулируем и докажем достаточный признак сходимости ряда Фурье.

Теорема 1 Пусть f – суммируемая функция. Предположим, что для точки $x \in [-\pi, \pi]$ выполнено условие: для некоторого $\delta > 0$ существует (конечен) интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \right| dz \quad (6)$$

тогда частичные суммы $S_n(x)$ сходятся к $f(x)$ в этой точке x .

Доказательство. Перепишем интеграл (6) в следующем виде:

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \cdot \frac{z}{2 \sin \frac{z}{2}} \cdot \sin \frac{2n+1}{2} z dz. \quad (7)$$

Если функция $\frac{f(x+z)-f(x)}{z}$ интегрируема по z в пределах $[-\delta, \delta]$, то она интегрируема и на $[-\pi, \pi]$ (поскольку $f \in L_1[-\pi, \pi]$). Но тогда интегрируема и функция $\frac{f(x+z)-f(x)}{z} \cdot \frac{z}{2 \sin \frac{z}{2}}$. Поэтому к интегралу (7) можно применить Лемму 1, из которой следует, что этот интеграл стремится к 0. ■

Замечание 2 Сходимость интеграла (6) называется *условием Дини*. Легко видеть, что условие Дини выполнено, если в данной точке x функция f непрерывна и имеет конечную производную (или хотя бы левую и правую производные).

Условие Дини можно ослабить, потребовав конечность следующих интегралов:

$$\int_{-\delta}^0 \left| \frac{f(x+z) - f(x-0)}{z} \right| dz \quad \text{и} \quad \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \right| dz, \quad (8)$$

где $f(x-0)$ и $f(x+0)$ – это левый и правый пределы функции f в точке x . Действительно, поскольку функция $\frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2 \sin \frac{z}{2}}$ является четной, разность

$$S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad \text{можно представить в виде:}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x+z) - f(x-0)] \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+z) - f(x+0)] \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz$$

Тогда при условии существования интегралов (6) эти выражения, по лемме 1, стремятся к нулю.

§2. Условие “глобальной” сходимости ряда Фурье

Следствие 1 Пусть f – суммируемая (например, измеримая и ограниченная) функция с периодом 2π , которая в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$ имеет левую и правую производные. (В этом случае, как легко видеть, в каждой точке x функция $f(x)$ или непрерывна или имеет разрыв лишь 1-го рода). Тогда её ряд Фурье сходится всюду, а его сумма равна $f(x)$ в точках непрерывности и равна $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ в точках разрыва.

В частности, если периодическая функция $f(x)$ дифференцируема на $[-\pi, \pi]$, то ее ряд Фурье сходится к ней при всех $x \in [-\pi, \pi]$.

Условие Дини, обеспечивающее сходимость ряда Фурье, можно заменить другими условиями, но отбросить его совсем нельзя. Даже среди непрерывных функций существует функции с рядом Фурье, расходящимся в некоторых точках. Среди суммируемых функций, как показал А.Н. Колмогоров, существует такие, ряд Фурье которых расходится всюду. Вместе с тем, для функций из L_2 , их ряд Фурье сходится почти всюду. Последнее утверждение носит название проблемы Лузина (1915 г.), которая была решена лишь в 1966 году шведским математиком Л. Карлесоном. Из этого в частности следует, что ряд Фурье непрерывной функции обязан сходиться почти во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$.

§3. Условия равномерной сходимости ряда Фурье

Мы установили условия, достаточные для сходимости ряда Фурье функции f в каждой точке. Класс функций, удовлетворяющих этим условиям весьма широк. Непрерывности функции мало. Рассмотрим теперь вопрос о равномерной сходимости ряда Фурье. Ясно, что если у функции $f(x)$ есть хоть один разрыв, то её ряд Фурье не может сходиться равномерно, поскольку сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций всегда непрерывна. Значит, непрерывность функций – это необходимое условие. Сформулируем достаточное условие равномерной сходимости.

Теорема 2 *Если непрерывная функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ с периодом 2π является кусочно непрерывно дифференцируемой, (т.е. производная $f'(x)$ существует для всех точек x кроме их конечного числа, причем на каждом интервале между этими точками производная непрерывна, а на концах этих интервалов существует и левая, и правая производная), то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней равномерно на всей прямой.*

Доказательство. Обозначим a'_n и b'_n коэффициенты Фурье функции f' . Так как f является кусочно непрерывно дифференцируемой, то в интеграле

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d \sin(nx),$$

на каждом интервале существования производной функции $f(x)$, можно применить формулу интегрирования по частям и получить после взаимного сокращения внеинтегральных членов следующее равенство:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} f(x) \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx) dx = -\frac{b'_n}{n}, \quad n \neq 0,$$

поскольку $f(x)$ периодическая функция. Аналогично получаем

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{a'_n}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n}. \quad (9)$$

Этот ряд сходится, поскольку

$$\frac{|b'_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(|b'_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right), \quad \frac{|a'_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(|a'_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right), \quad \text{причем}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|^2 + |b'_n|^2 < \infty.$$

Последний ряд сходится в силу неравенства Бесселя для функции f' , которая принадлежит пространству $L_2(-\pi, \pi)$ по условию теоремы.

Числовой ряд (9) служит, очевидно, мажорантой для ряда Фурье функции f . Но тогда, по признаку Вейерштрасса, ряд Фурье функции f равномерно (и абсолютно) сходится. Осталось показать, что его сумма есть f . Пусть φ – сумма ряда Фурье функции f . Тогда φ имеет те же коэффициенты Фурье, что и f . Отсюда, в силу непрерывности обеих функций, получаем, что $f \equiv \varphi$. ■

Лекция 8 (23 октября 2023)

§1. Теорема Фейера

Пусть f – непрерывная функция на прямой с периодом 2π . Эта функция определяется своим рядом Фурье однозначно. Действительно, если f_1 и f_2 – две непрерывные функции, имеющие одни и те же коэффициенты Фурье, то у непрерывной функции $f_1 - f_2$ все коэффициенты Фурье равны нулю, тогда по равенству Парсеваля эта функция равна нулю почти всюду, т.е. $f_1 \equiv f_2$ всюду. Однако, поскольку ряд Фурье непрерывной функции не обязан сходиться всюду, то мы не можем получить функцию f , суммируя её ряд Фурье, и тем более ряд Фурье не будет сходиться равномерно. Способ восстановления непрерывной функции в равномерной метрике по её коэффициентам Фурье придумал Фейер. Пусть

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx) \quad (1)$$

частичная сумма ряда Фурье функции f степени k . Положим

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n} \quad (2)$$

выражения σ_n – средние арифметические сумм S_k – называются суммами Фейера функции f .

Замечание 1 Пусть числовая последовательность $\{d_k\}$ сходится: $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d$. Тогда последовательность $D_n = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n}$ так же сходится к d . Обратное неверно: Например: $d_n = (-1)^{n+1}$ и в этом случае $D_n \rightarrow 0$, $d_n \not\rightarrow 0$.

Теорема 1 (Фейер) Если f – непрерывная функция с периодом 2π , то последовательность $\{\sigma_n\}$ её сумм Фейера сходится к f равномерно на всей оси.

Доказательство. Воспользуемся полученной нами формулой для частичной суммы ряда Фурье в виде интеграла Дирихле:

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin \frac{2k+1}{2} z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz.$$

Подставив эти интегралы в равенство (2), получим для $\sigma_n(x)$ следующее выражение:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{2k+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}} \right\} f(x+z) dz.$$

Воспользуемся формулой

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)u = \frac{\sin^2 nu}{\sin u},$$

которую легко получить, применив тождество $2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta-\alpha}{2} = \cos \alpha - \cos \beta$ и суммируя по k равенствам

$$2 \sin(2k+1)u \cdot \sin u = \cos 2ku - \cos 2(k+1)u$$

т.е.

$$2 \sin u \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)u = \sum_{k=0}^{n-1} \cos 2ku - \cos 2(k+1)u = 1 - \cos 2nu = 2 \sin^2 nu.$$

Приходим к формуле для $\sigma_n(x)$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2 f(x+z) dz, \quad (3)$$

которая называется интегралом Фейера. Функция

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin n\frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2$$

называется ядром Фейера порядка n . Формулу (3) перепишем в виде:

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \cdot \Phi_n(z) dz. \quad (4)$$

Ядро Фейера имеет следующие свойства:

- 1) $\Phi_n(z) \geq 0$, причем эта функция четная;
- 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z) dz = 1$;
- 3) $\forall \delta > 0 \quad \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(z) dz = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(z) dz = \eta_n(\delta) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Первое из этих свойств очевидно, второе получается из тождества (4) если рассмотреть $f(x) \equiv 1$ и учесть, что для такой функции сумма Фейера $\sigma_n(z) \equiv 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Третье свойство вытекает из четности ядра Фейера и из того, что при $\delta \leq z \leq \pi$ получаем: $\sin \frac{z}{2} \geq \sin \frac{\delta}{2} \geq 0$ и, следовательно,

$$\left(\frac{\sin \frac{nz}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2, \quad \text{и поэтому} \quad \eta_n(\delta) \leq \frac{1}{2\pi n} \frac{\pi - \delta}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Докажем теперь теорему Фейера. Так как периодическая функция f непрерывна, то она ограничена и равномерно непрерывна на всей оси, т.е. существует такая постоянная M , что для всех x

$$|f(x)| \leq M, \quad (5)$$

и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ как только } |x' - x''| < \delta. \quad (6)$$

Нам необходимо оценить интеграл

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+z)] \cdot \Phi_n(z) dz,$$

который можно представить в виде суммы трёх интегралов

$$J_- = \int_{-\pi}^{-\delta} \{f(x) - f(x+z)\} \Phi_n(z) dz$$

$$J_0 = \int_{-\delta}^{\delta} \{f(x) - f(x+z)\} \Phi_n(z) dz$$

$$J_+ = \int_{\delta}^{\pi} \{f(x) - f(x+z)\} \Phi_n(z) dz.$$

Из (5) и (6) непосредственно вытекают оценки

$$|J_-| \leq 2M \cdot \eta_n(\delta), \quad |J_+| \leq 2M \cdot \eta_n(\delta),$$

$$|J_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(z) dz \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z) dz = \frac{\varepsilon}{2},$$

где в последней строке мы воспользовались также свойствами 1) и 2) ядра Фейера.

Выберем теперь n_0 настолько большим, что при $n > n_0$ для данного δ выполнялось: $2M\eta_n(\delta) < \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Откуда следует утверждение теоремы. ■

Из теоремы Фейера следует важное

Следствие 1 (Первая теорема Вейерштрасса) *Любую непрерывную 2π -периодическую функцию можно приблизить с помощью последовательности тригонометрических полиномов равномерно на всей оси.*

Получим также важное свойство ряда Фурье непрерывной периодической функции.

Следствие 2 *Ряд Фурье непрерывной функции f в каждой точке x либо расходится, либо сходится к ее значению $f(x)$.*

Доказательство. Если последовательность $S_n(x)$ сходится для некоторого x , то сходится и $\sigma_n(x)$, причем к тому же пределу (см. Замечание 1). Однако, по теореме Фейера $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$. Следовательно, $S_n(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$). ■

§2. Полнота тригонометрической системы. Теоремы Вейерштрасса

Из теоремы Фейера следует полнота тригонометрической системы в $L_2[-\pi, \pi]$. Действительно, в силу этой теоремы любая непрерывная функция, для которой $f(-\pi) = f(\pi)$, является пределом равномерно (а значит и в среднем) сходящейся последовательности тригонометрических многочленов. Остается заметить, что непрерывные функции с условием $f(-\pi) = f(\pi)$ всюду плотны в $L_2[-\pi, \pi]$.

Отметим, что теорема Фейера усиливает теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной периодической функции многочленами: эта теорема утверждает, что всякая такая непрерывная функция есть равномерный предел какой-то последовательности тригонометрических многочленов, а теорема Фейера указывает, как построить конкретную обладающую этим свойством последовательность – взять сумму Фейера.

Из теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной периодической функции тригонометрическими многочленами легко следует и вторая теорема Вейерштрасса.

Теорема 2 (Вторая теорема Вейерштрасса) *Любая непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ равномерно аппроксимируется алгебраическими многочленами.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[a, b]$. Положим $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$, то есть $x = \frac{t(b-a)}{\pi} + a$, и получим функцию $\varphi(t)$ переменной t , заданную на $[0, \pi]$. Продолжим ее вначале симметрично на полуинтервал $[-\pi, 0)$, положив $\varphi(-t) = \varphi(t)$, а потом, по периодичности, на всю прямую. Получим непрерывную на всей прямой периодическую функцию. Построим теперь тригонометрический многочлен $T_n(t)$, удовлетворяющий неравенству

$$|T_n(t) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Далее, всякий тригонометрический многочлен разлагается в ряд Тейлора, сходящийся равномерно на любом конечном отрезке. Пусть P_m – такая частичная сумма ряда Тейлора для T_n , что

$$|T_n(t) - P_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } 0 \leq t \leq \pi.$$

Тогда

$$|\varphi(t) - P_m(t)| < \varepsilon \quad \text{при } 0 \leq t \leq \pi.$$

Сделаем в $P_m(t)$ обратную замену $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$ и получим многочлен $Q_m(x)$, такой что

$$|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

■

Исследуем вопрос о связи гладкости функции со скоростью убывания ее коэффициентов Фурье.

§3. Оценка коэффициентов Фурье гладкой функции

Лемма 1 (о почленном дифференцировании ряда Фурье) Если кусочно непрерывно дифференцируемая функция $f \in C([-π, π], \mathbb{C})$ принимает на концах равные значения (т. е. $f(π) = f(-π)$), то ряд Фурье ее производной $f'(x)$ (которая является интегрируемой по Лебегу функцией) может быть получен формальным дифференцированием по x ряда Фурье самой функции $f(x)$, т. е. если ряды Фурье f и f' имеют вид

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx} \quad \text{и} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f') e^{ikx},$$

соответственно, то

$$c_k(f') = ik \cdot c_k(f) \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Доказательство. Исходя из определения коэффициентов Фурье, интегрированием по частям находим:

$$\begin{aligned} c_k(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot ik \cdot e^{-ikx} dx = \\ &= 0 + ik \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = ik \cdot c_k(f), \end{aligned}$$

поскольку $f(\pi) e^{-ik\pi} - f(-\pi) e^{ik\pi} = \cos(k\pi) (f(\pi) - f(-\pi)) = 0$. Интегрирование по частям законно, так как функция $f'(x)$ является интегрируемой, а функция e^{-ikx} — непрерывно дифференцируема. ■

Утверждение 3 (о связи гладкости функции со скоростью сходимости ее коэффициентов Фурье) Пусть $f \in C^{(m-1)}([-π, π], \mathbb{C})$ и $f^{(j)}(-π) = f^{(j)}(π)$ при $j = 0, 1, \dots, m-1$. Пусть функция f имеет на отрезке $[-π, π]$ кусочно-непрерывную производную $f^{(m)}$ порядка m . Тогда

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k(f), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

и

$$|c_k(f)| = \frac{\gamma_k}{k^m} = o\left(\frac{1}{k^m}\right) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

причем $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^2 < \infty$.

Доказательство. Соотношение (8) получается в результате m -кратного применения тождества (7):

$$c_k(f^{(m)}) = (ik) \cdot c_k(f^{(m-1)}) = \dots = (ik)^m c_k(f).$$

Полагаем теперь $\gamma_k = |c_k(f^{(m)})|$ и применяем неравенство Бесселя к функции $f^{(m)}$:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f^{(m)})|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}(x)|^2 dx,$$

из которого и из (8) получаем (9) и $\gamma_k \rightarrow 0$ ■

Замечание 2 В доказательстве Утверждения 1, как и в Лемме 1, вместо условий $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ можно считать, что f – это заданная на всей прямой периодическая функция нужной гладкости.

Замечание 3 Если тригонометрический ряд Фурье записывать через функции $\sin kx$ и $\cos kx$, то вместо простых соотношений (8) пришлось бы писать заметно более сложные, смысл которых, однако, будет тот же: при указанных условиях ряд Фурье можно дифференцировать почленно. Что касается оценок коэффициентов $a_k(f), b_k(f)$, то поскольку

$$a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f), \quad b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f)),$$

получаем неравенства:

$$|a_k(f)| \leq \frac{\alpha_k}{k^m}, \quad |b_k(f)| \leq \frac{\beta_k}{k^m}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

причем $\alpha_k = \beta_k = \gamma_k + \gamma_{-k}$ и $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^2 < \infty, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k^2 < \infty$.

§3. Гладкость функции и скорость сходимости ее ряда Фурье

Теорема 3 Пусть, как и в Теореме 2, $f \in C^{(m-1)}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ и $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ при $j = 0, 1, \dots, m-1$. Пусть функция f имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывную производную $f^{(m)}$ порядка m . Тогда ряд Фурье функции f сходится к самой f абсолютно и равномерно на $[-\pi, \pi]$, причем отклонение n -й частичной суммы $S_n(x)$ ряда Фурье от $f(x)$ на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}}, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0+. \quad (11)$$

Доказательство. Если непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция удовлетворяет соотношению $f(-\pi) = f(\pi)$ и имеет на этом отрезке хотя бы первую производную, интегрируемую в квадрате, то из оценок (10) следует, что

$$|a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx| \leq \frac{\alpha_k + \beta_k}{k} \leq \frac{1}{2} \left[(\alpha_k + \beta_k)^2 + \frac{1}{k^2} \right] \leq \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \frac{1}{2k^2}.$$

Поскольку ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$ сходятся, то на основании мажоритарного признака Вейерштрасса заключаем, что ряд Фурье

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx]$$

функции f сходится абсолютно и равномерно на $[-\pi, \pi]$, причем сумма этого ряда, очевидно, равна $f(x)$ при всех x в силу равномерной сходимости этого ряда, т.е.,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx].$$

Теперь оценим отклонение $S_n(x)$ от $f(x)$, используя неравенства (10):

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} [a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx] \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_k + \beta_k}{k^m}. \end{aligned}$$

По неравенству Коши-Буняковского:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_k + \beta_k}{k^m} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \right)^{1/2}.$$

Полагаем $x_n = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)^2 \right)^{1/2}$ и, учитывая сходимость ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$, заключаем $x_n \rightarrow 0$. Далее

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{1}{n^{2m-1}} \Rightarrow \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \cdot \frac{1}{n^{m-1/2}}.$$

Положим $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \cdot x_n$ и получим (11) ■

С помощью Теоремы 3 можно еще раз получить аппроксимационную теорему Вейерштрасса, независимо от теоремы Фейера. Действительно, используя равномерную непрерывность функции f на отрезке $[-\pi, \pi]$, аппроксимируем f на этом отрезке с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$ кусочно линейной непрерывной функцией $\varphi(x)$, принимающей на концах те же значения, что и f : $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$. По Теореме 2 ряд Фурье функции $\varphi(x)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$. Взяв частичную сумму этого ряда, отклоняющуюся от $\varphi(x)$ не более, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, получим тригонометрический многочлен, отклоняющийся от $f(x)$ не более чем на ε .

С помощью Теоремы 3 можно также доказать следующее утверждение, дополняющее Лемму 1.

Утверждение 4 (о почленном интегрировании ряда Фурье) Если функция $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ является кусочно непрерывной (т.е., она непрерывна всюду, кроме конечного числа точек, в которых она имеет разрывы первого рода), то соотношение

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

после интегрирования превращается в равенство

$$\int_0^x f(t) dt = c_0(f)x + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{c_k(f)}{ik} (e^{ikx} - 1), \quad \forall x \in [-\pi, \pi],$$

где звездочка означает, что в сумме отсутствует член, отвечающий $k = 0$, а сумма ряда в правой части понимается в смысле главного значения, т.е., как предел симметричных частных сумм $\sum_{k=-n, k \neq 0}^n$, причем ряд сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - c_0(f)x \text{ на } [-\pi, \pi] \quad (c_0(f) - \text{нулевой коэффициент Фурье}).$$

Очевидно, что $F \in C[-\pi, \pi]$ и $F(\pi) = F(-\pi)$, т. к.

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - 2\pi c_0(f) = 0.$$

Функция $F(x)$ является кусочно непрерывно дифференцируемой и $F'(x) = f(x) - c_0(f)$ всюду, кроме точек разрыва функции $f(x)$, в которых она имеет левую и правую производную. Поэтому по Теореме 3 ряд Фурье функции F равномерно сходится к F на $[-\pi, \pi]$. По Лемме 1

$$c_k(F) = \frac{c_k(F')}{ik} \text{ при } k \neq 0.$$

Однако $c_k(F') = c_k(f)$ при $k \neq 0$.

Записываем теперь равенство

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(F)e^{ikx}$$

в терминах функции f и учитываем, что

$$0 = F(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(F).$$

Получаем

$$\int_0^x f(t)dt - c_0(f)x = F(x) - 0 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{c_k(f)}{ik} (e^{ikx} - 1).$$

■

Вывод: ряды Фурье суммируемых в квадрате (например, кусочно непрерывных) функций можно интегрировать формально, при этом получают равномерно сходящиеся ряды Фурье для первообразных этих функций.