Математический анализ

Лектор д.ф.-м.н. В.В.Чепыжов *

Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2023 г. 1 семестр, 2 модуль

Лекция 9 (6 ноября 2023)

Мы займемся применением рядов Фурье для решений некоторых уравнений математической физики, которые являются дифференциальными уравнениями с частными производными.

§1. Решение первой краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье

Обозначим $Q = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 < t \le T\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с открытой нижней границей.

Задача *Найти функцию* $u(x,t)$, $(x,t) \in Q$, $u \in C(\overline{Q})$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in C(Q)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(Q)$, *которая удовлетворяет уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \forall (x,t) \in Q; \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,l]\ (\varphi \in C[0,l]); \tag{2}$$

и граничному условию

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \in [0,T]. \tag{3}$$

Приведенная задача является математической моделью физического явления распространения тепла в тонком однородном стержне, концы которого $(x = 0,\ x = l)$ поддерживаются при нулевой температуре. Здесь $u(x,t)$ обозначает температуру в точке стержня $x \in [0,l]$ в момент времени $t \in\ [0,L]$. При этом известно начальное распределение температуры в стержне в момент времени $t = 0$ (функция $\varphi(x),\ x \in [0,l]$). Число a обозначает коэффициент температуропроводности материала стержня.

Рассмотрим метод разделения переменных или метод Фурье решения этой задачи.

*Компьютерный набор и верстка Антон Жевнерчук и Тимур Степанов.

Мы не будем сразу указывать условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x)$, а сделаем это позже.

Шаг 1. Разделяются переменные, т. е. мы ищем частные решения уравнения (1) (не равные тождественно нулю) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной независимой переменной:

$$u(x,t) = Y(x) \cdot Z(t). \tag{4}$$

Продифференцируем, подставим в уравнение (1) и получим равенство:

$$Y(x)Z'(t) = a^2 Z(t) Y''(x).$$

Делим на a^2YZ:

$$\frac{Z'(t)}{a^2Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)}.$$

Поскольку левая часть этого равенства не зависит от x, а правая – не зависит от t, то обе они равны какой-то постоянной λ:

$$\frac{Z'(t)}{a^2Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \lambda.$$

Таким образом, функции Z и Y должны удовлетворять уравнениям

$$Y''(x) = \lambda Y(x) \text{ и } Z'(t) = \lambda a^2 Z(t).$$

Решив эти два уравнения и перемножив их решения, получим решение вида (4) для (1).

Шаг 2. Частные решения должны удовлетворять граничному условию (3):

$$Y(0)Z(t) = Y(l)Z(t) = 0 \ \forall t \geq 0 \Rightarrow Y(0) = Y(l) = 0.$$

Следовательно, функция $Y(x)$ должна удовлетворять следующему уравнению и граничным условиям:

$$Y''(x) = \lambda Y(x), \ x \in [0, l], \tag{5}$$

$$Y(0) = Y(l) = 0. \tag{6}$$

Задача (5), (6) называется задачей Штурма-Лиувилля или спектральной задачей. Она состоит в нахождении тех значений λ, для которых существуют нетривиальные решения задачи (5), (6). Такие λ называются собственными значениями, а соответствующие им функции $Y(x)$ – собственными функциями задачи (5), (6).

Если $\lambda > 0$, то общее решение (5) имеет вид:

$$Y(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Условия (6) принимают вид

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}l} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Следовательно, положительные λ не могут быть собственными значениями нашей задачи Штурма-Лиувилля.

Если $\lambda = 0$, то $Y''(x) = 0$, т. е. $Y(x)$ – это линейная функция. Поскольку она равна нулю в двух точках ($Y(0) = Y(l) = 0$), то $Y \equiv 0$.

Итак, только отрицательные λ могут быть собственными значениями рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля.

Пусть $\lambda = -\mu^2$. Тогда общее решение уравнения (5):

$$Y(x) = c_1 \cdot \sin \mu x + c_2 \cdot \cos \mu x.$$

Из условия $Y(0) = 0$ следует, что $c_2 = 0$. Условия $Y(l) = 0$ записывается в виде

$$c_1 \cdot \sin \mu l = 0.$$

Так как $Y(x)$ – нетривиальное решение, $c_1 \neq 0$. Следовательно, $\mu l = k\pi \Rightarrow \mu = \frac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, \dots$, и существует счетное множество собственных значений

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2},\ k = 1, 2, \dots$$

Соответствующие им собственные функции

$$Y_k(x) = \sin \mu_k x,\ \text{где } \mu_k = \frac{k\pi}{l},\ k = 1, 2, \dots$$

Итак, второй шаг завершается нахождением всех собственных значений и собственных функций задачи (5), (6).

Шаг 3. Требуется решить полученное уравнение для $Z(t)$. Для каждого $\lambda_k = -\mu_k^2$ уравнение имеет вид

$$z'(t) = -a^2\mu_k^2 z(t).$$

Его решения:

$$z_k(t) = c_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}.$$

Мы нашли все решения уравнения (1) вида $Y(x)Z(t)$, которые удовлетворяют граничным условиям (3):

$$u_k(x,t) = c_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t} \sin \mu_k x.$$

Шаг 4. Ищем решение всей задачи (1), (2), (3) в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t} \sin \mu_k x. \tag{7}$$

Из начальных условий при $t = 0$ находим

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \sin \mu_k x,\ \mu_k = \frac{k\pi}{l},\ k = 1, 2, \dots.$$

Это ряд Фурье функции $\varphi(x)$ по полной ортогональной системе $\{\sin \mu_k x\}$. Значит, коэффициент c_k находится по формуле

$$c_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(s) \sin(\mu_k s) ds. \tag{8}$$

Шаг 5. Теперь нужно обосновать, что ряд (7) сходится. Кроме того, нужно показать, что сходятся и ряды, полученные из него почленным дифференцированием: один раз по t и два раза по x. Наконец, останется показать, что это действительно решения исходной задачи для уравнения теплопроводности.

§2. Обоснование метода Фурье при решении однородного уравнения теплопроводности

Для решения краевой задачи (1), (2), (3) мы получили формулу

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \cdot \sin \mu_k x, \tag{9}$$

где

$$\mu_k = \frac{k\pi}{l}, \quad c_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s \; ds \; \text{ – коэффициент Фурье } \varphi, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Покажем, что при определенных условиях на функцию $\varphi(x)$ ряд (9) сходится и его сумма представляет собой <u>классическое</u> решение рассматриваемой задачи, т.е. $u(x,t) \in C(\overline{Q})$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(Q)$, и удовлетворяет (1), (2), (3).
Отметим, что необходимым условием существования классического решения является условие согласования: $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Теорема 1 *Пусть функция* $\varphi(x) \in C^1 [0, l]$ *является непрерывно дифференцируемой на* $[0, l]$*, и выполнено условие согласования* $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$*. Тогда существует классическое решение задачи* (1), (2), (3)*, представимое рядом (9) с коэффициентами (10). Это решение единственно.*

Доказательство. Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (3), т.к. им удовлетворяют все члены ряда (9). Начальное условие (2) так же выполнено, т.к. при $t = 0$ ряд (9) переходит в тригонометрический ряд Фурье функции $\varphi(x)$, удовлетворяющий условиям разложимости в тригонометрический ряд Фурье на $[0, l]$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin(\mu_k x).$$

Осталось доказать, что ряд (9) сходится и функция $u(x,t)$, представимая этим рядом:

1. непрерывна в $\overline{Q}$;

2. имеет в Q непрерывные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

3. удовлетворяет уравнению (1).

Докажем эти утверждения. Оценим общий член ряда (9):

$$\left| c_k e^{-a^2 \mu_k t} \sin(\mu_k x) \right| \le |c_k| \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}.$$

Если будет доказана сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$, то по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов, ряд (9) будет равномерно сходиться в $\overline{Q}$ и его сумма будет непрерывной функцией. Докажем это. Имеем

$$c_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s \; ds = -\frac{2}{l} \cdot \frac{1}{\mu_k} \int\limits_0^l \varphi(s) \cdot d(\cos \mu_k s) =$$

$$= -\frac{2}{l} \cdot \frac{1}{\mu_k} \varphi(s) \cos \mu_k s \Big|_0^l + \frac{2}{k\pi} \int\limits_0^l \varphi'(s) \cos \mu_k s \; ds = \frac{l}{k\pi} c'_k.$$

Здесь при интегрировании по частям мы учли граничное условие $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Через c'_k обозначили коэффициенты Фурье функции $\varphi'(x)$ по ортогональной системе $\{\cos \mu_k x\}$, причем $\varphi'(x)$ – непрерывная функция на $[0,\, l]$.

Согласно неравенству Бесселя ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c'_k|^2$ сходится. Воспользуемся неравенством

$$|c_k| = \frac{l}{k\pi} |c'_k| \le \frac{l}{2\pi} \left(|c'_k|^2 + \frac{1}{k^2} \right).$$

Из последнего неравенства вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|$. Следовательно, функциональный ряд (9) равномерно сходится в $\overline{Q}$, его сумма $u(x,t)$ непрерывная функция, причем

$$u(x,t) \to \varphi(x) \text{ при } t \to 0, \quad u(x,t) \to 0 \text{ при } x \to 0+ \text{ или } x \to l-0.$$

Теперь формально продифференцируем ряд (9) один раз по t и 2 раза по x и получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot c_k \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \cdot \sin \mu_k x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot c_k \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \cdot \sin \mu_k x.$$

Покажем, что при $t \ge \tau > 0$ эти ряды равномерно сходятся.

Поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,\, l]$, то она ограничена:

$$\exists M > 0: \quad |\varphi(x)| \le M \quad \forall x \in [0,\, l]\,.$$

Следовательно,

$$|c_k| = \left| \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s\ ds \right| \le \frac{2}{l} \int\limits_0^l M\ ds \le 2M.$$

Поэтому при $t \ge \tau > 0$ получим оценку

$$\left| k^2 \cdot c_k \cdot e^{-a^2 \mu_k^2 t} \cdot \sin \mu_k x \right| \le 2M \cdot k^2 \cdot e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 \tau}.$$

Исследуем на сходимость числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\alpha k^2}, \text{ где } a_k = k^2 \cdot e^{-\alpha k^2},\ \alpha = \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \tau.$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, т.к.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \cdot e^{-\alpha(2k+1)} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Тогда по признаку Вейерштрасса ряды, полученные формальным дифференцированием, сходятся равномерно. Следовательно, ряд (9) можно почленно дифференцировать один раз по t и 2 раза по x при $t \ge \tau > 0$, или, в силу произвольности τ, в области Q. При этом суммы полученных равномерно сходящихся рядов $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны в Q. Осталось заметить, что частичная сумма ряда (9) удовлетворяет уравнению (1), т.к. оно линейно, т.е. сумма решений – решение. Следовательно и сама функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1).

Докажем единственность классического решения. Если у задачи есть два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, то их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ также является решением уравнения (1) с нулевым <u>начальным</u> условием:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in Q, \tag{11}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,\, l]\,, \tag{12}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,\, T]\,. \tag{13}$$

Покажем, что $u(x,t) \equiv 0$ в $(x,t) \in Q$.
Рассмотрим коэффициенты Фурье функции $u(x,t)$ при $t > 0$

$$c_k(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l u(x,t) \cdot \sin \mu_k x\ dx.$$

Умножим теперь уравнение (11) на $\sin\mu_k x$ и проинтегрируем по $[0,\, l]$. Слева получим

$$\int\limits_0^l \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\sin\mu_k x\ dx = \frac{d}{dt}\int\limits_0^l u(x,t)\sin\mu_k x\ dx = \frac{l}{2}\cdot c_k'(t).$$

Справа проинтегрируем по частям 2 раза:

$$\int\limits_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\sin\mu_k x\ dx = \frac{\partial u}{\partial x}\sin\mu_k x\Big|_0^l - \mu_k\int\limits_0^l \frac{\partial u}{\partial x}(u,t)\cdot\cos\mu_k x\ dx =$$

$$= -\mu_k\cdot\int\limits_0^l \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\cos\mu_k x\ dx =$$

$$= -\mu_k\cdot u(x,t)\cdot\cos\mu_k x\Big|_0^l + \mu_k^2\cdot\int\limits_0^l u(x,t)\sin\mu_k x\ dx = -\frac{l}{2}\cdot c_k(t)\cdot\mu_k^2.$$

Следовательно, функция $c_k(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dt}c_k(t) = -a^2\mu_k^2 c_k(t) \quad\Rightarrow\quad c_k(t) = c_k(0)e^{-a^2\mu_k^2 t}.$$

Напомним, что, функция $u(x,t) = 0$ при $t = 0$, следовательно, $c_k(0) = 0$. Значит, $c_k(t) \equiv 0$ при всех $t \in [0,\, T]$. А если у непрерывной функции все коэффициенты Фурье равны нулю, то она тождественно равна нулю. Значит, $u(x,t) = 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$. $\blacksquare$

Лекция 10 (13 ноября)

§1. Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in [0,l], \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{2}$$

Теорема 1 *Пусть $f,\ f_x,\ f_{xx} \in C(\bar{Q})$ и функция f удовлетворяет условиям согласования*

$$f(0,t) = f(l,t) = 0.$$

Тогда существует единственное решение $u(x,t) \in C^2(\bar{Q})$ задачи (1), (2).

Доказательство. Разложим функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье по переменной x :

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \sin \mu_k x, \quad p_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(s,t) \sin \mu_k s \ ds, \quad \mu_k = \frac{k\pi}{l}.$$

Из условий гладкости и согласования, наложенных на функцию $f(x,t)$ находим, после двукратного интегрирования по частям, следующую оценку для $p_k(t)$:

$$|p_k(t)| \le \frac{M}{k^2}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Решение уравнения (1) ищем в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \mu_k x. \tag{4}$$

Подставим выражения для $u(x,t)$ и $f(x,t)$ в уравнение (1) и получаем формальное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k'(t) \sin \mu_k x = -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \mu_k^2 \sin \mu_k x + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \sin \mu_k x.$$

Приравняв коэффициенты при всех $\sin \mu_k x$ и воспользовавшись нулевым начальным условием из (2), получим, что функция $q_k(t)$ является решением следующей задачи Коши для ОДУ:

$$q_k'(t) = -a^2 \mu_k^2 q_k(t) + p_k(t), \quad q_k(0) = 0.$$

Эта линейная неоднородная задача легко решается. Умножим это уравнение на $e^{a^2 \mu_k t}$ и преобразуем следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(q_k(t) e^{a^2 \mu_k t} \right) = e^{a^2 \mu_k t} p_k(t).$$

Проинтегрируем это уравнение по переменной t по отрезку $[0,t]$

$$q_k(t) e^{a^2 \mu_k t} - q_k(0) = \int_0^t e^{a^2 \mu_k \tau} p_k(\tau) d\tau.$$

Воспользуемся тем, что $q_k(0) = 0$, и умножим полученное равенство на $e^{-a^2\mu_k t}$. В результате получим формулу для решения

$$q_k(t) = \int_0^t e^{-a^2\mu_k^2(t-\tau)} p_k(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Поскольку $p_k(t)$ удовлетворяет оценке (3), то легко видеть, что

$$|q_k(t)| \le \frac{M}{k^2}\int_0^t e^{-a^2\mu_k^2(t-\tau)}\, d\tau \le \frac{M}{k^2a^2\mu_k^2} \le \frac{M_1}{k^4}.$$

Из этой оценки следует равномерная сходимость ряда (4) и всех рядов, которые из него получаются почленным дифференцированием 1 раз по t и два раза по x.

Рассмотрим частичные суммы равномерно сходящихся рядов

$$u_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t)\sin\mu_k x,$$

$$f_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\sin\mu_k x,$$

которые, очевидно, удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + f_n(x,t),$$

а также $u_n(x,t)$ удовлетворяют нулевым начальным и граничным условиям. Переходя к пределу в этом уравнении при $n\to\infty$, получаем, что в силу равномерной сходимости рядов и их производных, ряд (4) удовлетворяет уравнению (1) в $\bar{Q}$, а также нулевым начальным и граничным условиям (2).

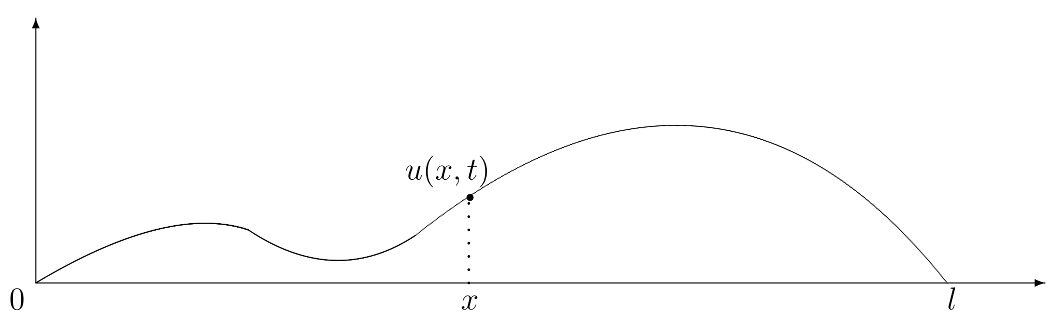
Осталось проверить, что задача (1), (2) имеет единственное решение. Это устанавливается в точности также, как и для однородной задачи из прошлой лекции. ■

Замечание Мы не только доказали теорему 1, но и получили формулу для решения задачи (1), (2) в виде ряда:

$$u_n(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t e^{-a^2\mu_k^2(t-\tau)} p_k(\tau)\, d\tau \sin\mu_k x,$$

где $p_k(t)$ – это коэффициенты Фурье функции $f(x,t)$ по ортогональной системе $\{\sin\mu_k x\}$.

§2. Первая краевая задача для уравнения упругих колебаний струны



Предполагается, что струна – это гибкая нить, совершающая колебания в направлении, перпендикулярном оси x. Струна имеет длину l и её концы закреплены в точках 0 и l. Пусть, как и раньше $Q = \{(x,t),\ x \in [0,l],\ t \in (0,T]\}$.

Задача *Требуется найти функцию $u(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, у которой $\exists\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in C(Q)$ и которая удовлетворяет:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in Q, \qquad \underline{\textit{уравнение колебаний струны}} \tag{6}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in (0,l), \qquad \underline{\textit{начальные условия}} \tag{7}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \qquad \underline{\textit{граничные условия (закрепленные концы)}} \tag{8}$$

Задача (6), (7), (8) моделирует упругие колебания струны с закрепленными концами. Коэффициент a имеет размерность скорости. Его физический смысл – скорость распространения бегущих волн в струне.

Опишем этапы построения решения $u(x,t)$ задачи (6) – (8).

Шаг 1. Разделение переменных. Ищем частные решения вида: $u(x,t) = y(x) \cdot z(t)$. Подставляем в уравнение: $z''(t) \cdot y(x) = a^2 z(t) \cdot y''(x)$.

$$\frac{z''(t)}{a^2 z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \lambda = const.$$

Шаг 2. Совпадает с шагом 2 метода Фурье решения уравнения теплопроводности. Решается задача Штурма-Лиувилля

$$y''(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(l) = 0. \tag{9}$$

Её решение имеет вид

$$\lambda = -\mu_k^2,\ \mu_k = \frac{k\pi}{l},\ y_k(x) = \sin \mu_k x.$$

Нашли все собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9).
Шаг 3. Решаем уравнение для второго сомножителя:

$$z''(t) + a^2 \mu_k^2 z(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$z_k(t) = C_k \cdot \cos(a\mu_k t) + D_k \cdot \sin(a\mu_k t).$$

Тем самым найдены все решения уравнения (6) вида $y(x)z(t)$. Любая линейная комбинация таких функций $u_k(x,t)$, очевидно, также удовлетворяет уравнению (6) и граничным условиям (8). Но такая (конечная) линейная комбинация, может не удовлетворять начальному условию (7) при произвольных гладких функциях φ и ψ.

Шаг 4. Решение задач (6), (7), (8) ищется в виде бесконечного ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t), \qquad \text{где} \tag{10}$$

$$u_k(x,t) = (C_k \cos a\mu_k t + D_k \sin a\mu_k t)\sin \mu_k x. \tag{11}$$

Здесь C_k и D_k – некоторые коэффициенты, которые необходимо определить по начальным данным задачи φ и ψ.

Сначала будем действовать формально, не заботясь о сходимости рядов. Подставим в этот ряд начальные условия при $t = 0$ (для второго условия необходимо взять производную по времени).

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin \mu_k x = \varphi(x), \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a\mu_k D_k \cdot \sin \mu_k x = \psi(x). \tag{13}$$

Эти равенства представляют собой разложение функций φ и ψ в ряд Фурье по ортогональной системе $\{\sin \mu_k x\}$. Поэтому, находим коэффициенты Фурье:

$$C_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi \sin \mu_k x \, dx, \tag{14}$$

$$a\mu_k D_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x) \sin \mu_k x \, dx, \qquad \text{т.е.}$$

$$D_k = \frac{2}{ak\pi}\int\limits_0^l \psi(x) \sin \mu_k x \, dx. \tag{15}$$

Итак, мы нашли формулу (10) и (11) для решения задачи (6), (7), (8), в которой коэффициенты C_k и D_k определяются по формулам (14) и (15).

Шаг 5. Обоснование полученных формул.

Теорема 1 *Пусть функция $\varphi(x) \in C^3\,[0,\, l]$, причем выполнены условия согласования*

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \tag{16}$$

а функция $\psi(x) \in C^2\,[0,\, l]$, причем

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{17}$$

Тогда функция $u(x,t)$, заданная рядом (10), в котором коэффициенты C_k и D_k определены в (14) и (15), принадлежит классу $C^2(\bar{Q})$, удовлетворяет уравнению (6), начальным условиям (7) и граничным условиям (8). Такая функция единственная.

Доказательство. (вкратце)

Интегрируем по частям три раза интеграл из формулы (14) с учётом условий (16) на функцию φ:

$$C_k = -\frac{2}{l}\cdot\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \cdot \int\limits_0^l \varphi'''(x)\cos \mu_k x \, dx = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{p_k}{k^3}, \tag{18}$$

где p_k – коэффициент Фурье функции $\varphi'''(x)$ по ортогональной системе $\{\cos\mu_k x\}$.

Аналогично, интегрируем два раза по частям в формуле (15) с учётом условий (17) на ψ:

$$D_k = -\frac{2}{la}\cdot\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3\cdot\int\limits_0^l \psi''(x)\sin\mu_k x\ dx = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\cdot\frac{q_k}{k^3}, \tag{19}$$

где q_k – коэффициенты Фурье функции $\psi''(x)$ по ортогональной системе $\{\sin\mu_k x\}$.

Поскольку функции φ''' и ψ'' непрерывны на отрезке $[0,\, l]$, то они принадлежат $L_2\,[0,\, l]$ и по неравенству Бесселя сходятся ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 \le \frac{2}{l}\int\limits_0^l \left[\varphi'''(x)\right]^2\ dx; \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k^2 \le \frac{2}{l}\int\limits_0^l \left[\psi''(x)\right]^2\ dx \tag{20}$$

Подставим (18) и (19) в ряд (10) и получим:

$$u(x,t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(p_k\cdot\sin a\mu_k t + q_k\cdot\cos a\mu_k t\right)\sin\mu_k x. \tag{21}$$

Этот ряд при любом $(x,t)\in\overline{Q}$ мажорируется сходящимся числовым рядом:

$$\frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(|p_k|+|q_k|\right),$$

Поэтому ряд (21) в силу признака Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно в $\overline{Q}$. Следовательно, его сумма непрерывна в $\overline{Q}$.

Теперь покажем возможность двукратного почленного дифференцирования ряда (10) (или, что тоже самое, ряда (21)) по переменным x и t. Для этого покажем, что ряды, полученные из (21) двухразовым дифференцированием сходятся равномерно в $\overline{Q}$. Формально дифференцируем и получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{l}{\pi}\right)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(p_k\cdot\sin(a\mu_k t) + q_k\cdot\cos(a\mu_k t)\right)\sin\mu_k x, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{la^2}{\pi}\right)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(p_k\cdot\sin(a\mu_k t) + q_k\cdot\cos(a\mu_k t)\right)\sin\mu_k x. \tag{23}$$

Оба этих ряда, при любом $(x,t)\in\overline{Q}$, мажорируется рядом:

$$c\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(|p_k|+|q_k|).$$

Сходимость последнего ряда следует из очевидных оценок:

$$\frac{1}{k}\,|p_k| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}+|p_k|^2\right),\quad \frac{1}{k}\,|q_k| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}+|p_k|^2\right).$$

Теперь опять на основании признака Вейерштрасса ряды (22) и (23) абсолютно и равномерно сходятся. Следовательно, функции $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ непрерывны в $\overline{Q}$. Подставляя (22) и (23) в уравение (6) убеждаемся, что это решение, которое удовлетворяет (7) и (8).

Единственность решения задачи доказывается аналогично единственности решения уравнения теплопроводности исходя из однозначного восстановления непрерывных функций по их коэффициентам Фурье. ■

Замечание Аналогично методом Фурье можно решать уравнение теплопроводности или уравнение колебаний струны с другими граничными условиями, например, с так называемыми свободными граничными условиями (вместо нулевых граничных условий вида (8)):

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0.$$

Для уравнения теплопроводности это условие физически означает, что концы стержня теплоизолированы, а для уравнения колебаний это означает, что концы струны прикреплены к колечкам, которые могут свободно без трения перемещаться по вертикальным стойкам, между которыми натянута струна.

При решении таких задач получаются другие собственные значения и другие собственные функции соответствующих задач Штурма-Лиувилля, которые также образуют ортогональный базис, и по которым раскладываются в ряды Фурье начальные условия задачи.

Лекция 11 (20 ноября)

§1. Задача Штурма–Лиувилля

Рассмотрим более общее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u, \quad x \in [0,l],$$

или уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u, \quad x \in [0,l].$$

Дополним эти уравнения граничными условиями:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Решая это уравнение методом разделения переменных, т.е. ища частные решения вида

$$u(x,t) = Y(x)Z(t)$$

приходим к следующей задаче:

$$\begin{array}{c} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda y(x), \\ y(0) = y(l) = 0. \end{array} . \tag{1}$$

Можно в (1) рассмотреть более общие граничные условия:

$$\alpha y'(0) + \beta y(0) = 0, \quad \gamma y'(l) + \delta y(l) = 0,$$

где

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \quad \gamma^2 + \delta^2 \neq 0.$$

Задача (1) называется <u>задачей Штурма-Лиувилля</u>: Требуется найти все числа $\lambda \in \mathbb{R}$ (собственные значения), для которых существуют ненулевые решения $y(x)$ уравнения (1) (собственные функции), а также необходимо найти все такие решения.

Обычно предполагается, что

$$p \in C^1[0,l], q \in C[0,l], \quad p(x) \neq 0\ \forall x \in [0,l] \quad \text{(условие “эллиптичности”)}.$$

Для определенности будем считать, что $p(x) > 0$.

С помощью замены независимой переменной $\xi = \int\limits_0^x p(x)^{-1/2}dx$ и неизвестной функции $z = p^{1/2}(x)y$ задача (1) сводится к более простой задаче, в которой $p(x) \equiv 1$. (Проверьте это!) Поэтому, вместо (1) будем изучать задачу:

$$\begin{array}{c} -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \\ y(0) = y(l) = 0. \end{array} . \tag{2}$$

Мы будем считать, что $q(x) \geqslant 0$. Это не является ограничением, так как можно добиться выполнения этого неравенства, прибавив к λ некоторую фиксированную константу. При $q \equiv 0$ мы уже знаем собственные значения и собственные функции задачи (2):

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad y_n(x) = \sin\mu_n x, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

§2. Свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля

Введем оператор Штурма-Лиувилля

$$L = -\frac{d}{dx^2} + q(x),$$

который является линейным (неограниченным) оператором в пространстве $L_2[0,l]$. Его область определения $\mathcal{D}_L$ состоит из функций $v(x) \in C^2[0,l]$, для которых $v(0) = v(l) = 0$.

Задача Штурма-Лиувилля состоит в нахождении всех собственных значений $\lambda \in \mathbb{R}$ и собственных функций $y(x) \in \mathcal{D}_L$ оператора L :

$$Ly = \lambda y, \quad y \in \mathcal{D}_L.$$

Сформулируем и докажем ряд свойств этого оператора.

Утверждение 1 *Оператор L симметричен, т. е.*

$$(Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{D}_L,$$

где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – обозначает скалярное произведение в $L_2[0,l]$.

Доказательство.

$$(Lv_1, v_2) - (v_1, Lv_2) = \int\limits_0^l (-v_1''v_2 + v_1v_2'')dx =$$

$$= \int\limits_0^l \frac{d}{dx}(-v_1'v_2 + v_1v_2')dx = (-v_1'v_2 + v_1v_2')|_0^l = 0$$

в силу граничных условий. ■

Утверждение 2 *Оператор L положителен, т.е., $(Lv, v) > 0$, $\forall v \in \mathcal{D}_L$, $v \neq 0$, и все его собственные значения λ положительны.*

Доказательство.

$$(Lv, v) = \int\limits_0^l (-v''v + q(x)v^2)dx =$$

$$= \int\limits_0^l ((v'(x))^2 + q(x)v^2(x))dx > 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}_L,\ v \neq 0.$$

Здесь мы применили интегрирование по частям.

Поэтому, если $Lv = \lambda v$, то $\lambda(v, v) = (Lv, v) > 0$ при $v \neq 0$, т.е. $\lambda > 0$. ■

Утверждение 3 *Все собственные функции с разными собственными значениями ортогональны в пространстве $L_2[0,l]$.*

Доказательство. Пусть
$$Lv_1 = \lambda_1 v_1, \quad Lv_2 = \lambda_2 v_2.$$
Тогда
$$\lambda_1(v_1, v_2) = (Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2) = \lambda_2(v_1, v_2).$$
Поэтому, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(v_1, v_2) = 0$.
■

Утверждение 4 *Все собственные значения являются однократными, т.е., все собственные подпространства одномерны.*

Доказательство. Действительно, по теореме единственности любое решение ОДУ вида
$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0,$$
которое обращаются в нуль при $x = x_0$, должно быть пропорционально (единственному) решению этого уравнения с начальными условиями
$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 1.$$

■

Сформулируем и докажем теорему Штурма.

Теорема 1 (Штурм) *Пусть даны два уравнения*
$$-y'' = q_1(x)y, \tag{1}$$
$$-z'' = q_2(x)z, \quad \text{причем } q_1(x) \geqslant q_2(x). \tag{2}$$
Пусть их решения $y(x)$ и $z(x)$ определены на отрезке $[a,b]$, причем $z(a) = z(b) = 0$ и $z(x)$ не тождественный ноль. Тогда

ЛИБО на интервале (a,b) найдется точка x_0, где $y(x_0) = 0$,

ЛИБО $q_1(x) \equiv q_2(x)$ на $[a,b]$ и $y(x) = Cz(x)$, $C = const$.

Доказательство. Можно считать, что a и b – это соседние нули функции z, т.е. $z(x) > 0$ при $x \in (a,b)$. (Нули этой функции не могут сгущаться, т.к. в точке сгущения x^* будем иметь $z(x^*) = 0$ и $z'(x^*) = 0$, но $z(x)$ – это решение обыкновенного дифференциального уравнения (2) второго порядка и по теореме единственности $z(x) \equiv 0$). Тогда $z'(a) > 0$ и $z'(b) < 0$ (опять по теореме единственности!).

Если функция $y(x)$ не обращается в ноль на (a,b), то можно считать, что $y(x) > 0$ на (a,b). Рассмотрим определитель Вронского
$$W(x) = y(x)z'(x) - y'(x)z(x).$$

Дифференцируем его:

$$\frac{d}{dx}W(x) = y(x)z''(x) - y''(x)z(x) =$$
$$= (q_1(x) - q_2(x))\, y(x)z(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [a,b].$$

Интегрируем по $[a,b]$ и получаем, что

$$W(b) - W(a) \geqslant 0.$$
$$\text{Причем, равенство} \quad \Longleftrightarrow \quad q_1(x) \equiv q_2(x)\ \forall [a,b].$$

С другой стороны, из сделанных предположений вытекает, что $y(a) \geqslant 0$ и $y(b) \geqslant 0$, т.е.

$$W(b) - W(a) = y(b)z'(b) - y(a)z'(a) \leqslant 0$$
$$\text{причем равенство} \iff y(a) = y(b) = 0.$$

Следовательно, при сделанных предположениях

$$W(b) - W(a) = 0,\ \text{откуда } q_1(x) \equiv q_2(x)\ \forall [a,b] \text{ и } y(a) = y(b) = 0.$$

Однако, $z(a) = z(b) = 0$, и, следовательно $z(x)$ и $y(x)$ – это решения одного и того же дифференциального уравнения второго порядка, причем $z(a) = y(a) = 0$. Тогда (по теореме едиственности) они пропорциональны, т.е. $y(x) = Cz(x)$. ■

Утверждение 5 *Каждое собственное значение λ оператора Штурма-Лиувилля удовлетворяет неравенству (напомним, что $q(x) \geqslant 0$):*

$$\lambda \geqslant \left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$$

Доказательство. Если $q(x) \equiv 0$, то это очевидно. Пусть $q(x) \not\equiv 0$. Как мы знаем, $\lambda > 0$. Рассмотрим соответствующую собственную функцию оператора Штурма-Лиувилля:

$$-z'' = (\lambda - q(x))z, \quad z(0) = z(l) = 0.$$

Сравним решение этого уравнения с решением $y(x) = \sin\sqrt{\lambda}x$ уравнения

$$-y'' = \lambda y.$$

Применим теорему Штурма, в которой $q_1(x) = \lambda \geqslant \lambda - q(x) = q_2(x)$. Тогда функция $y(x)$ где-то обращается в ноль на интервале $(0,l)$. Но это возможно, только если выполнено неравенство

$$\sqrt{\lambda}l \geqslant \pi \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\lambda} \geqslant \frac{\pi}{l}.$$

■

Займемся теперь исследованием асимптотических свойств собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Обозначим для удобства $\lambda = k^2$. Тогда основное уравнение примет вид

$$-y'' + q(x)y = k^2 y, \quad k > 0. \tag{3}$$

Обозначим $\psi = \psi(x, k)$ – решение уравнения (3) с начальными условиями

$$\psi(0, k) = 0, \quad \psi'(0, k) = k$$

(если $q(x) \equiv 0$, то $\psi(x, k) = \sin kx$).

Следовательно, собственные значения оператора Штурма-Лиувилля имеют вид $\lambda = k^2$, где k такое, что $\psi(l, k) = 0$.

Из теоремы Штурма следует, что количество нулей функции $\psi(x, k) = 0$, лежащих на любом фиксированном отрезке $[0, a]$, где $a \leqslant l$, является неубывающей функцией k. Поэтому с ростом k все нули функции $\psi(x, k)$ сдвигаются влево. Собственные значения соответсвуют тем k, при которых в точке l появляется новый нуль.

Поскольку количество этих нулей конечно при любом k, то собственные значения образуют дискретную последовательность

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots,$$

которая, как легко видеть бесконечна. В самом деле, по теореме Штурма, число нулей функции $\psi(x, k)$ на $(0, l)$ не меньше, чем число нулей на $(0, l)$ у соответствующего решения уравнения

$$-y'' + My = k^2 y, \quad \text{где } M = \max_{x \in [0,l]} q(x).$$

Но этим решением является функция $\sin\left(\sqrt{k^2 - M}x\right)$ при $k^2 > M$, и число ее нулей на $(0, l)$ неограниченно растет при $k \to +\infty$. Доказана

Теорема 2 *Задача Штурма-Лиувилля имеет бесконечное число решений, все ее собственные значения λ_n положительны и $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Собственные функции $y_n(x)$, соответствующие λ_n, ортогональны. Собственная функция $y_n(x)$ имеет ровно $(n-1)$ нулей на интервале $[0, l]$.*

Опишем асимптотическое поведение больших собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Это легко сделать с помощью теоремы Штурма. Более точно, собственные значения оператора

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

заключены между собственными значениями операторов

$$L_1 = -\frac{d^2}{dx^2} \quad \text{и} \quad L_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + M,$$

где $M = \max_{x \in [0,l]} q(x)$. Поскольку собственные значения операторов L_1 и L_2 равны, соответственно,

$$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + M,\ n = 1, 2, \dots,$$

получаем

$$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \leqslant \lambda_n \leqslant \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + M,$$

откуда следует, что

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Можно также показать, что

$$y_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x + O\left(\frac{1}{n}\right), \ n \to \infty.$$

В завершение сформулируем без доказательства теорему о полноте.

Теорема 3 *Собственные функции* $\{y_n(x)\}$ *задачи Штурма-Лиувилля образуют полную ортогональную систему в пространстве* $L_2[0, l]$.

Полностью доказательство этой теоремы, а также о других свойствах задачи Штурма–Лиувилля, можно прочитать в книге М.А.Шубин, “Лекции об уравнениях математической физики”.

Лекция 12 (27 ноября)

§1. Интеграл Фурье. Основная теорема

На прошлых лекциях были установлены условия, при выполнении которых периодическая функция может быть разложена в сходящийся ряд Фурье, т. е. представлена в виде суперпозиции гармонических колебаний. Попытаемся сделать что-то аналогичное для непериодических функций. Мы покажем, что похожее представление возможно при определенных условиях, но только не в виде ряда Фурье, а в виде интеграла Фурье.

Сначала приведем некоторые наводящие соображения. Пусть функция f на каждом интервале удовлетворяет условиям, обеспечивающим ее разложимость в ряд Фурье. Иначе говоря, пусть f суммируема на любом конечном интервале и в каждой точке выполнено условие Дини. Рассматривая f, скажем, на отрезке $[-\ell, \ell]$, мы можем написать ее разложение в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos \frac{k\pi}{\ell} x + b_k \sin \frac{k\pi}{\ell} x]. \tag{1}$$

Подставим сюда выражения для коэффициентов a_k и b_k:

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t)dt, \; a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi}{\ell} t dt, \; b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} t dt.$$

Получим:

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi}{\ell} x \cos \frac{k\pi}{\ell} t dt + \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} x \sin \frac{k\pi}{\ell} t dt \right] =$$

$$= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \left[\cos \frac{k\pi}{\ell} x \cos \frac{k\pi}{\ell} t + \sin \frac{k\pi}{\ell} x \sin \frac{k\pi}{\ell} t \right] dt.$$

Преобразовывая последнее выражение, получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} (t - x) dt. \tag{2}$$

Дополним предположения о функции f еще одним: пусть эта функция абсолютно интегрируема на всей оси, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < +\infty. \tag{3}$$

Перейдем в равенстве (2) к пределу при $\ell \to \infty$ (пока формально). Тогда в силу (3), первое слагаемое в правой части (2) стремится к нулю. Второе слагаемое можно рассматривать как интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(\lambda_k) \Delta\lambda$$

(распространенную на бесконечный промежуток) для интеграла

$$\int\limits_0^\infty F(\lambda)d\lambda \quad \text{от функции} \quad F(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt,$$

если положить $\lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}$, $\Delta\lambda = \frac{\pi}{\ell}$.

Поэтому формально в пределе при $\ell \to \infty$ получим равенство:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \tag{4}$$

Это и есть искомое представление. Введем обозначения:

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t dt,\ b_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t dt.$$

Тогда равенство (4) можно переписать в следующем виде, аналогичном ряду Фурье:

$$f(x) = \int\limits_0^\infty (a_\lambda\cos\lambda x + b_\lambda\sin\lambda x)d\lambda. \tag{5}$$

Это равенство называется интегралом Фурье или формулой Фурье. Теперь докажем эту формулу строго.

Теорема 1 *Если функция f абсолютно интегрируема на всей прямой и в точке x удовлетворяет условию Дини, то имеет место равенство:*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^A d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \tag{6}$$

Хотим проверить, что $\lim_{A\to\infty} J(A)$ существует и равен $f(x)$. Поскольку f абсолютно интегрируема, то внутренний интеграл в (6) сходится, а двойной интеграл сходится абсолютно. Используя теорему Фубини, изменим порядок интегрирования в (6):

$$J(A) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_0^A f(t)\cos\lambda(t-x)d\lambda = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}dt.$$

Сделаем замену переменных $t-x=z$ и приведем этот интеграл к виду:

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x+z)\frac{\sin Az}{z}dz. \tag{7}$$

Воспользуемся следующим тождеством:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Az}{z}dz=1\ (A>0)\qquad \text{(интеграл Дирихле).}$$

(сделав замену $Az=u$, легко проверить, что левая часть не зависит от A). Тогда разность $J(A)-f(x)$ запишем в виде:

$$J(A)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Az\,dz. \tag{8}$$

Представим это выражение в виде суммы трех слагаемых:

$$J(A)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{N}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Azdz+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|z|\geq N}\frac{f(x+z)}{z}\sin Azdz-\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{|z|\geq N}\frac{\sin Az}{z}dz.$$

Второй и третий члены справа представляют собой сходящиеся интегралы, и каждый из них можно сделать меньше, чем $\frac{\varepsilon}{3}$, если число N достаточно велико. Первое слагаемое справа (при фиксированном N) стремится к нулю, когда $A\to\infty$ (в силу леммы Римана из Лекции 6 и условия Дини). Таким образом, получаем, что

$$\lim_{A\to\infty}(J(A)-f(x))=0,$$

что и требовалось ■

§2. Интеграл Фурье в комплексной форме

В интегральной формуле Фурье (4) внутренний интеграл представляет собой четную функцию от λ, что позволяет переписать эту формулу в виде:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \tag{9}$$

Далее, из абсолютной интегрируемости f следует, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda(t-x)dt$$

существует и является нечетной функцией λ. Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda(t-x) dt = 0. \tag{10}$$

Этот интеграл следует понимать в смысле главного значения, т. е. как $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N}$.

Прибавим к (9) равенство (10), умноженное на $-i$. Ввиду того, что $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt.$$

Это равенство называется комплексной формулой Фурье (в смысле главного значения).

§3. Преобразование Фурье и формула обращения

Интегральную формулу Фурье можно расчленить на два равенства. Положим

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \tag{1}$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{2}$$

Отметим, что формула (1) имеет смысл для любой абсолютно интегрируемой функции f. Таким образом, каждой функции $f \in L_1(-\infty,\infty)$ мы с помощью формулы (1) сопоставляем определенную функцию $g(\lambda)$, заданную при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Функция $g(\lambda)$ называется преобразованием Фурье исходной функции $f(x)$. Формула (2) выражает функцию f через ее преобразование Фурье. Она называется формулой обращения для преобразования Фурье. Обратим внимание на сходство между формулами (1) и (2). Они отличаются друг от друга только знаком в показателе экспоненты и множителем $\frac{1}{2\pi}$ перед интегралом.

Однако при всем сходстве формул (1) и (2), они, по существу, различны: в первой из них интеграл существует в обычном смысле Лебегу (поскольку $f \in L_1(-\infty,\infty)$), а во второй, вообще говоря, лишь в смысле главного значения. Кроме того, равенство (1) это определение функции g, а равенство (2), представляющее собой иную формулу записи формулы Фурье, содержит утверждение, что стоящий справа интеграл сходится к исходной функции f. Как мы видели выше, для обеспечения этого равенства на f надо наложить, помимо суммируемости, еще дополнительные условия, например, условие Дини.

§4. Примеры нахождения преобразования Фурье

Рассмотрим некоторые примеры преобразования Фурье:

Пример 1 *Пусть* $f(x) = e^{-a|x|},\ a > 0.$

Найдем преобразование Фурье этой функции:

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\lambda x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} (\cos \lambda x - i \sin \lambda x) dx = \ = 2 \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos \lambda x dx.$$

После двукратного интегрирования по частям, находим

$$g(\lambda) = \frac{2a}{\lambda^2 + a^2}.$$

Пример 2 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a, \\ 0 & |x| > a. \end{cases}$

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int\limits_{-a}^{a} e^{-i\lambda x} dx = \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda} = \frac{2 \sin \lambda a}{\lambda}.$$

Пример 3 $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}.$

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{dx}{x^2 + a^2}.$$

Далее можно вычислять явно, а можно воспользоваться формулой обращения для Примера 1:

$$e^{-a|x|} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{\lambda^2 + a^2} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Поменяем в этой формуле x на $-\lambda$, а λ на x и получим

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} e^{-a|\lambda|}.$$

Пример 4 $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0.$

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos \lambda x dx \quad \text{(в силу четности } f(x)\text{)}.$$

Дифференцируем по λ:

$$\frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x \sin \lambda x dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin \lambda x d\left(\frac{e^{-ax^2}}{2a}\right) =$$

$$= \frac{\sin \lambda x \cdot e^{-ax^2}}{2a} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \lambda \cos \lambda x dx = -\frac{\lambda}{2a} g(\lambda) \Rightarrow \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} + \frac{\lambda}{2a} g(\lambda) = 0.$$

Разделим переменные:

$$\frac{d}{d\lambda}\ln g(\lambda) = -\frac{\lambda}{2a} = \frac{d}{d\lambda}\left(-\frac{\lambda^2}{4a}\right).$$

$$g(\lambda) = Ce^{-\lambda^2/4a}.$$

Найдем C подстановкой $\lambda = 0$:

$$C = g(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Последний интеграл называется интегралом Пуассона или интегралов Гаусса. Таким образом,

$$g(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\lambda^2/4a}.$$

Возьмем $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = e^{-x^2/2}$, $g(\lambda) = \sqrt{2\pi}e^{-\lambda^2/2}$. Это собственная функция преобразования Фурье: преобразование Фурье переводит ее в себя (с точностью до множителя).

Лекция 13 (4 декабря)

§1. Основные свойства преобразования Фурье

Преобразование Фурье функции f будем обозначать через $F[f]$. Иначе говоря, F – это линейный оператор, определенный на пространстве $L_1(\mathbb{R})$ и ставящий в соответствие каждой функции этого пространства ее преобразование Фурье (при этом оно, вообще говоря, не принадлежит $L_1(\mathbb{R})$, см. Пример 2).

Утверждение 1 *Если последовательность $f_n \in L_1(\mathbb{R})$ сходится в метрике пространства $L_1(\mathbb{R})$, то последовательность их преобразований Фурье $F[f_n](\lambda)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}_\lambda$.*

Доказательство. Равномерная сходимость $F[f_n]$ вытекает из очевидной оценки

$$|F[f_n](\lambda) - F[f_m](\lambda)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx.$$

■

Утверждение 2 *Преобразование Фурье $g(\lambda) = F[f](\lambda)$ абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ представляет собой ограниченную непрерывную функцию, которая стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$.*

Доказательство. Ограниченность функции $g = F[f]$ сразу следует из оценки

$$|g(\lambda)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx.$$

Далее, если f – характеристическая функция интервала (a, b), то для нее

$$g(\lambda) = \int\limits_a^b e^{-i\lambda x} dx = \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda}.$$

Эта функция, очевидно, непрерывна и стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$. Ввиду того, что оператор F линеен, отсюда вытекает, что преобразование Фурье любой элементарной функции (т. е. линейной комбинации характеристических функций интервалов) также является непрерывной функцией, которая стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$.

Наконец, элементарные функции всюду плотны в $L_1(\mathbb{R})$, поэтому для $f \in L_1(\mathbb{R})$ найдется последовательность $\{f_n\}$ элементарных функций, сходящаяся к f в $L_1(\mathbb{R})$. Тогда, в силу Утверждения 1, последовательность $g_n(\lambda) = F[f_n](\lambda)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}_\lambda$ к функции $g(\lambda) = F[f](\lambda)$. Значит, предельная функция g тоже непрерывна и стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$. ■

Утверждение 3 *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, и при этом $f' \in L_1(\mathbb{R})$, то имеет место равенство*

$$F[f'](\lambda) = i\lambda F[f](\lambda).$$

Иными словами, дифференцированию функции отвечает домножение ее преобразования Фурье на $i\lambda$.

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница, функцию $f(x)$ можно записать в виде:

$$f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt.$$

Из абсолютной интегрируемости f' следует, что стоящее здесь справа выражение имеет пределы при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$. Эти пределы могут быть только нулевыми, т. к. иначе $f(x)$ не была бы интегрируемой на $\mathbb{R}$. Учитывая это, получаем с помощью интегрирования по частям:

$$F[f'](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\lambda x}dx = f(x)e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = i\lambda F[f](\lambda).$$

■

Следствие 1 *Если $f(x)$ имеет производную k-го порядка $f^{(k)}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$, и, при этом $f, f', \dots, f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$, то*

$$F[f^{(k)}](\lambda) = (i\lambda)^k F[f](\lambda).$$

§2. Связь между степенью гладкости функции и скоростью убывания на бесконечности ее преобразования Фурье

Напомним,что преобразование Фурье $F[f](\lambda)$ стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$. Поэтому из приведенного выше тождества получаем, что

$$|F[f](\lambda)| = \frac{\left|F[f^{(k)}](\lambda)\right|}{|\lambda|^k} \to 0 \ (|\lambda| \to \infty),$$

т.е. $F[f](\lambda)$ убывает на бесконечности быстрее чем $|\lambda|^{-k}$, если известно, что функции $f(x)$ имеет суммируемые производные до порядка k. Значит, чем больше производных имеет функция f, тем быстрее убывает по λ ее преобразование Фурье.

Следствие 2 *Если существуют суммируемые производные f' и f'', то $F[f] \in L_1(\mathbb{R}_\lambda)$.*

Действительно, из указанных условий вытекает, что $F[f](\lambda)$ убывает на бесконечности быстрее, чем $|\lambda|^{-2}$, и, следовательно, является суммирумой функцией.

Выше было показано, что чем больше производных имеет функция f, тем быстрее убывает на бесконечности ее преобразование Фурье. Справедливо также и “двойственное” свойство.

Утверждение 4 *Пусть функции $f(x)$ и $xf(x)$ являются суммируемыми, тогда функция $g(\lambda) = F[f](\lambda)$ дифференцируема при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, причем*

$$g'(\lambda) = F\left[(-ix)f(x)\right](\lambda). \tag{1}$$

Доказательство. Действительно, продифференцируем по λ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx,$$

который определяет функцию $g(\lambda)$, и получим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-ix)f(x)e^{-i\lambda x}dx,$$

который, в силу условия $xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$ сходится равномерно по λ. Следовательно, производная от функции $g(\lambda)$ существует и имеет место равенство (1). ■

Следствие 3 *Пусть $f(x),\ xf(x), \dots, x^p f(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда функция $g(\lambda) = F[f](\lambda)$ имеет производные до порядка p включительно, причем*

$$g^{(k)}(\lambda) = F\left[(-ix)^k f(x)\right](\lambda),\ \ k = 0, 1, \dots, p.$$

Следствие 4 *Если $x^k f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ при всех $k \in \mathbb{N}$, тогда $F[f] \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Справедливо также "двойственное" утверждение.

Следствие 5 *Если $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, и $f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то $|\lambda|^k F[f] \in L_1(\mathbb{R})$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется такое число $C_k > 0$, что*

$$|F[f](\lambda)| \le \frac{C_k}{1 + |\lambda|^k},\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Продолжаем изучение преобразование Фурье комплекснозначных функций $u(x),\ x \in \mathbb{R}^1$. Мы определим преобразование Фурье функций из $L_1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

$$F\left[u\right](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-i\lambda x}\ dx \tag{2}$$

Мы будем также использовать другое обозначение, которое широко применяется:

$$\widetilde{u}\left(\lambda\right) := F\left[u\right]\left(\lambda\right).$$

§3 Преобразование Фурье в пространстве Шварца

Рассмотрим более узкий класс функций – пространство Шварца S. Это пространство состоит из бесконечно дифференцируемых функций, которые вместе со своими производными быстро стремится к нулю при $|x| \to \infty$.

Определение 1 *Комплекснозначная функция $u(x) \in S \Leftrightarrow u(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ и для любых $k, n \in \mathbb{Z}_+$ $\exists M_{k,n}$:*

$$\left|\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right| \leq \frac{M_{k,n}}{(1+|x|)^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^1. \tag{3}$$

Примеры функций из пространства Шварца: $\exp(-x^2)$, $P_m(x)\exp(Q_{2l})(x)$, где $P_m(x)$ и $Q_{2l}(x)$ – это полиномы степени m и $2l$, причем старший коэффициент Q_{2l} отрицателен.

Утверждение 5 *Если $u \in S$, то $\frac{d^k u}{dx^k} \in S, \forall k \in \mathbb{Z}_+$. Если $P_m(x)$ – полином степени m, то $P_m(x)u(x) \in S$.*

Очевидно, следует из определения. Поскольку $\left|e^{-i\lambda x}\right| = 1$, то интеграл (2) сходится абсолютно и равномерно на $\lambda \in \mathbb{R}$, и его можно дифференцировать по λ любое число раз:

$$\frac{d\widetilde{u}}{d\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)u(x)e^{-i\lambda x}\,dx, \quad \frac{d^k}{dx^k}\widetilde{u}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^k u(x)e^{-i\lambda x}\,dx.$$

Эти интегралы равномерно и абсолютно сходятся при $u \in S$.

Обозначим через D оператор однократного дифференцирования по x и по λ:

$$D_x u(x) = \frac{du}{dx}, \quad D_\lambda \widetilde{u}(\lambda) = \frac{d\widetilde{u}}{d\lambda}.$$

Пусть $P(z)$ - полином с комплексными коэффициентами, тогда $P(D)$ - это дифференциальный оператор, т.е.

$$\begin{gathered}
P(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + ... + z_1 \cdot z + a_0, \text{ тогда} \\
P(D) = a_n \cdot D^n + a_{n-1} \cdot D^{n-1} + ... + z_1 \cdot D + a_0, \text{ т.е.} \\
P(D_x)u = a_n \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^n u + a_{n-1} \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u + ... + z_1 \cdot \frac{d}{dx}u + a_0 \cdot u \\
P(D_\lambda)\widetilde{u} = a_n \cdot \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n \widetilde{u} + a_{n-1} \cdot \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{n-1} \widetilde{u} + ... + z_1 \cdot \frac{d}{d\lambda}\widetilde{u} + a_0 \cdot \widetilde{u}
\end{gathered}$$

При каждом дифференцировании интеграла (2) по λ подынтегральная функция умножается на $(-ix)$. Поэтому для $P(D_\lambda)$ получаем следующее равенство:

$$P(D_\lambda)\,\widetilde{u}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} P(-ix)u(x)e^{-i\lambda x}\,dx. \tag{4}$$

Используя также обозначение F, получаем

$$P(D_\lambda)\,F[u] = F[P(-ix)u], \quad P(D_\lambda)\,\widetilde{u} = \widetilde{P_x(-ix)}u. \tag{5}$$

Рассмотрим преобразование Фурье от $\frac{du}{dx}$:

$$F\left[\frac{du}{dx}\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dx} e^{-i\lambda x}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (i\lambda) u(x) e^{-i\lambda x}\, dx = (i\lambda) F\left[u\right].$$

Здесь мы проинтегрировали по частям и воспользовались убыванием функции $u(x)$ к нулю при $|x| \to \infty$.
Следовательно:

$$F\left[P\left(D_x\right) u\right] = P(i\lambda) F\left[u\right], \widetilde{P\left(D_x\right) u} = P(i\lambda)\widetilde{u}. \tag{6}$$

Теорема 1 *Преобразование Фурье переводит функции из класса S в себя.*

Доказательство. Заметим, что функции из класса S принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R})$, поэтому

$$|\widetilde{u}(\lambda)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x)|\ dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Из (4) следует, что $\widetilde{u} \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^1_{\lambda}\right)$.

Как мы установили, производная функции из класса Шварца также принадлежит этому классу. Значит, в левой части (6) стоит преобразование Фурье функции из S.

Рассмотрим полином $P(z) = (1 + z^{4n})$. Из формулы (6) следует, что

$$\left(1 + \lambda^{4n}\right) \left|F\left[u\right](\lambda)\right| \leq \left|F\left[\left(1 + D_x^{4n}\right) u\right](\lambda)\right| \leq M.$$

Поэтому, преобразование Фурье от функции $u \in S$ стремится к нулю быстрее любой степени λ.

Из формулы (5) следует, что производная преобразования Фурье является преобразованием Фурье от функции из S, т.е. тоже стремится к нулю быстрее любой степени λ при $|\lambda| \to \infty$. ■

Найдем отображение, обратное к преобразованию Фурье в пространстве Шварца. Наряду с $F[f]$ рассмотрим следующее линейное отображение:

$$G[f](\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\lambda x} dx,$$

которое, как и преобразование Фурье, корректно определено на пространстве суммируемых функций (и, тем более, на пространстве Шварца). Легко видеть, что

$$G[f](\lambda) = \frac{1}{2\pi} F[f](-\lambda),$$

Преобразование $G[f]$ обладает всеми теми же свойствами, что и преобразование Фурье. Кроме того, из формулы обращения для преобразования Фурье следует следующая теорема, которую мы уже доказывали для более широкого чем S класса функций.

Теорема 2 *(Об обращении преобразования Фурье) Если* $u \in S$*, то* $G \circ F[u] = u$*, т.е.* $G = F^{-1}$ *на* S*. Подробнее, если* $u(x) \in S$*,* $\widetilde{u}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-i\lambda x}\, dx$*, тогда*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{7}$$

Доказательство. Действительно, если $u \in S$, то функция u удовлетворяет условию Дини, причем интеграл справа в (7) сходится абсолютно и равномерно по $x \in \mathbb{R}^1$. Поэтому применима формула обращения преобразования Фурье. ■

Лекция 14 (11 декабря)

Применение преобразования Фурье

Преобразование Фурье, как и ряд Фурье, помогает получать решения для многих уравнений с частными производными. Основой применения служит то обстоятельство, что оператор дифференцирования переходит после преобразования Фурье в более простой оператор умножения на независимую переменную.

§1 Решение уравнения теплопроводности на всей оси

Мы будем решать следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{2}$$

Вместо условия на границе (которой здесь нет) используется условие ограниченности решения, т.е., решение задачи (1), (2) ищется в классе ограниченных (по $x \in \mathbb{R}^1$) функций.

Ищем решение $u = u(x, t)$, гладкости C^2. Начнём с наводящих соображений. Найдем сперва частные решения методом разделения переменных. Ищем ограниченное решение в виде:

$$u(x, t) = T(t) \cdot X(x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Подставляем в уравнение (1) и, разделяя переменные, находим уравнения:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2,$$

где μ^2 – некоторая константа. Как мы видели раньше, случай $+\mu^2$ не годится, т.к. приводит к неограниченным решениям уравнения для x. Получаем уравнения:

$$T'(t) + a^2 \mu^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \mu^2 X(x) = 0.$$

Решаем первое уравнение: $T(t) = C \cdot e^{-a^2 \mu^2 t}$. А решение второго уравнения запишем в виде:

$$X(x) = A(\mu) \cdot e^{i\mu x} \ \text{(годится любое вещественное число } \mu).$$

Получаем ограниченное частное решение (1) в виде:

$$u_\mu(x, t) = A(\mu) \cdot e^{-a^2 \mu^2 t + i\mu x}.$$

Здесь $\mu \in \mathbb{R}$. Мы можем складывать также решения с разными μ и $A(\mu)$. Более того, можно также интегрировать по параметру μ. При этом будут снова получаться решения уравнения (1):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\mu) e^{-a^2 \mu^2 t + i\mu x} \, d\mu.$$

Эти решения зависят только от функции $A(\mu)$. Какие $A(\mu)$ выбрать? Необходимо соблюдать начальное условие при $t = 0$, т.е.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\mu) \cdot e^{i\mu x} \ d\mu.$$

Это формула обратного преобразования Фурье, в которой прямое преобразование Фурье:

$$A(\mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\mu x} \ dx \quad (\lambda = \mu)$$

Получили формально формулу для решения задачи (1), (2).

Теперь сделаем это более строго, а затем найдем более простую формулу для решения этой задачи.

Будем предполагать сначала, что $u(x,t) \in C^{\infty}$, и более того, при каждом t функция $u(x,t) \in S$ (пространство Шварца) равномерна по t на каждом отрезке $[0, T]$ (это означает, что константа $M_{k,n}$ в формуле оценки

$$\left| \frac{d^k u}{dx^k} \right| \leq M_{k,n} \cdot (1 + |x|)^{-n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$$

не зависит от $t \in [0, T]$ (но может зависеть от T)). Будем также считать, что $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in S$.

Сделаем преобразование Фурье обеих частей уравнения (1). Получим следующие выражения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \ dx = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} u(x,t) \ dx = \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{u}(\lambda, t)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\lambda x} \ dx = (i\lambda)^2 \cdot \widetilde{u}(\lambda, t) = -\lambda^2 \widetilde{u}(\lambda, t).$$

Получаем следующие ОДУ, в котором число λ служит фиксированным параметром:

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(\lambda, t) = -\lambda^2 a^2 \widetilde{u}(\lambda, t).$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\widetilde{u}(\lambda, t) = \widetilde{u}(\lambda, 0) \cdot e^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

Теперь воспользуемся формулой обращения преобразования Фурье:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \ \widetilde{u}(\lambda, t) \ d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - a^2 \lambda^2 t} \ \widetilde{u}(\lambda, 0) \ d\lambda.$$

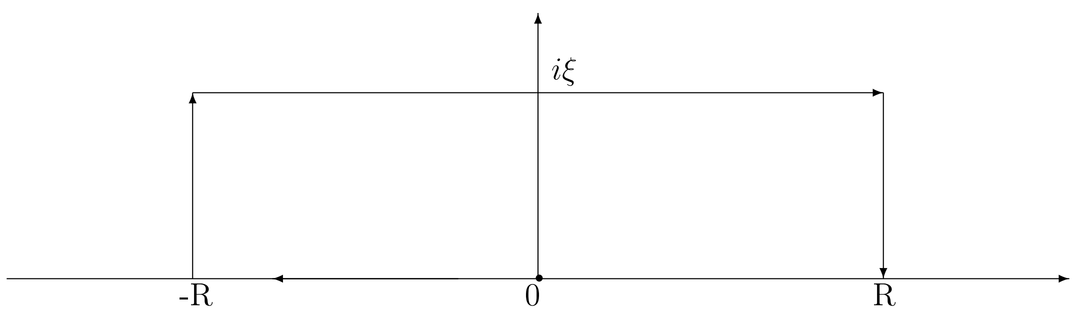
Напомним, что

$$\widetilde{u}(\lambda,0)=\widetilde{\varphi}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\ \varphi(x)\ dx =$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x-a^2\lambda^2t^2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-i\lambda y}\ dy\right]\ d\lambda =$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2t+i\lambda(x-y)}\ d\lambda\ dy.$$

Замена порядка интегрирования законна, т.к. функция $\varphi\in S$, а пространство S состоит из быстро убывающих функций. Вычислим второй интеграл явно:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2t+i\lambda(x-y)}\ dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t\left(\lambda-i\frac{x-y}{2a^2t}\right)^2-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\ d\lambda=e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2tz^2}\ dz=$$
$$=e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t\lambda^2}\ d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}$$

Мы сделали замену $\lambda-i\frac{x-y}{2a^2t}=z$ и воспользовались теоремой из ТФКП: интеграл по любому замкнутому контуру от голоморфной, т.е., дифференцируемой по z внутри этого контура, функции $f(z)$ равен нулю.



Здесь $\xi=\frac{x-y}{2a^2t}$. Подынтегральная функция голоморфна на плоскости, интегралы по отрезкам $z=[R,\ R+i\xi]$ и $[-R,\ -R+i\xi]$ стремятся к нулю при $R\to\infty$. Потом сделали замену $a\sqrt{t}z=s$ и воспользовались интегралом Пуассона: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\ ds=\sqrt{\pi}$.

Мы получили формулу Пуассона для решения задачи (1)-(2):

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\varphi(y)\ dy,\qquad \text{где } G(x,y,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}. \tag{3}$$

Функция $G(x,y,t)$ называется ядром Пуассона. Формула (3) получена при очень жестких условиях на функцию $\varphi(x)$ и решение $u(x,t)$, а именно принадлежность этих функций пространству Шварца. Однако, как легко видеть, эта формула имеет смысл для значительно более широкого класса функций φ. Это позволяет решить задачу Коши (1), (2) лишь при условии, что начальная функция непрерывна и ограничена.

§2 Теорема существования решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

Напомним, что решением задачи Коши (1)-(2) называется функция $u(x,t)$, у которой $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \in C\,(x \in \mathbb{R}, t > 0)$ и $u \in C\,(x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$, причем $u(x,0) = \varphi(x),\ \ x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1 *Пусть $\varphi(x)$ – ограниченная непрерывная функция при $x \in \mathbb{R}$. Тогда функция, определенная формулой (3), бесконечно дифференцируема по x и по t при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$, удовлетворяет уравнению (1) при $t > 0$ и начальному условию (2) при $t = 0$.*

Доказательство. Для любой точки $(x_0, t_0), x_0 \in \mathbb{R}, t_0 > 0$, найдется её окрестность, где $t \geq \gamma > 0$ и $|x| < m$. Для точек (x,t) из этой окрестности интеграл (3) сходится абсолютно и равномерно. Более того, его можно дифференцировать под знаком интеграла любое число раз по x и t.

Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что функция $G(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению (1). Действительно:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{2t}G + \frac{(x-y)^2}{4a^2t^2}G, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{x-y}{2a^2t}G$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{1}{2a^2t}G + \frac{(x-y)^2}{4a^4t^2}G, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

Следовательно, функция (3) так же удовлетворяет этому уравнению. Отметим, что $G(x,y,t) > 0$ и выполнено тождество:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\ dy = 1 \quad \text{(Проверяется непосредственно заменой).} \tag{4}$$

Осталось проверить, что функция (3) удовлетворяет начальному условию (2). Покажем, что $u(x,t)$ непрерывна при $t = 0$ и $u(x,t) - \varphi(z) \to 0$ при $x \to z,\ t \to 0+$. Рассмотрим разность:

$$u(x,t) - \varphi(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\varphi(y)\ dy - \varphi(z)\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\ dy =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\left[\varphi(y) - \varphi(z)\right]\ dy.$$

Пусть $|\varphi(x)| \le M$ (по условию). Оценим

$$|u(x,t)-\varphi(z)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\left[\varphi(y)-\varphi(z)\right]\, dy \right| \le \left| \int\limits_{|y-z|<\delta} G(x,y,t)\left[\varphi(y)-\varphi(z)\right]\, dy \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{|y-z|\ge\delta} G(x,y,t)\left[\varphi(y)-\varphi(z)\right]\, dy \right|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что $|\varphi(y)-\varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|y-z|<\delta$ (напомним, что функция φ непрерывна в точке z). Воспользуемся в первом слагаемом положительностью функции G и равенством (4). Тогда:

$$|u(x,t)-\varphi(z)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_{|y-z|\ge\delta} 2M\cdot G(x,y,t)\, dy.$$

Оценим последний интеграл. Если $|x-z| < \frac{\delta}{2}$ и $|y-z| \ge \delta$, то $|y-x| \ge \frac{\delta}{2}$. Следовательно,

$$\int\limits_{|y-z|\ge\delta} 2M\cdot G(x,y,t)\, dy \le 2M \int\limits_{|y-x|\ge\delta/2} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)\, dy =$$

$$= \frac{2M}{a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{4a^2t}\right)\, ds = M_1 \int\limits_{\frac{\delta}{4a\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(-\sigma^2)\, d\sigma.$$

Мы сделали сначала замену переменной $x-y=s$, а потом еще замену $\frac{s}{2a\sqrt{t}} = \sigma$. Последнее выражение с интегралом можно сделать меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$ при всех $t<\mu$, если выбрать число μ достаточно малым. Следовательно,

$$|u(x,t)-\varphi(z)| \le \varepsilon \quad \text{если } |x-z| < \frac{\delta}{2} \text{ и } t<\mu.$$

Значит, функция $u(x,t)$ непрерывна в точке $(z,0)$ и $u(z,0)=\varphi(z)$.

■

Лекция 15 (18 декабря)

§1. Свертка функций и преобразование Фурье

Пусть $f_1(x),\ f_2(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Функция

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi$$

называется сверткой функций f_1 и f_2.

Функция $f(x)$ определена при почти всех x и принадлежит $L_1(\mathbb{R})$. Действительно, двойной интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi dx$$

существует, поскольку существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\xi)| \cdot |f_2(\eta)| d\xi d\eta \text{ (теорема Фубини).}$$

Следовательно, существует и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi.$$

Функция f обозначается $f_1 * f_2$.

Вычислим преобразование Фурье свертки двух функций из $L_1(\mathbb{R})$. Применяя теорему Фубини и делая замену $x - \xi = \eta$, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi\right] e^{-i\lambda x} dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi) e^{-i\lambda x} dx\right] d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\eta x} e^{-i\xi x} d\eta\right] d\xi =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\eta x} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\xi x} d\xi = F[f_1] \cdot F[f_2].$$

Следовательно, $F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2]$. В других принятых обозначениях $\widetilde{f_1 * f_2} = \widetilde{f}_1 \cdot \widetilde{f}_2$.

Легко проверяется следующее

Утверждение 1 *Если $f_1, f_2 \in S$, то $f_1 * f_2 \in S$.*

В качестве применения полученных соотношений еще раз выведем формулу Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}$.

$$u_t = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Пусть $u(\cdot, t) \in S$, $\varphi \in S$. Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения (1) и получим

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}(\lambda,t) = -a^2\lambda^2\tilde{u}(\lambda,t),\ \tilde{u}(\lambda,0) = \tilde{\varphi}(\lambda),$$
$$\tilde{u}(\lambda,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\tilde{\varphi}(\lambda).$$

В лекции 12 (пример 4) мы нашли преобразование Фурье функции e^{-rx^2} :

$$F\left[e^{-rx^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{r}} e^{-\frac{\lambda^2}{4r}}.$$

Положим $r = (4a^2t)^{-1}$ и получим

$$F[G] = F\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right] = e^{-a^2\lambda^2 t},$$

где $G(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ – это ядро Пуассона. Следовательно,

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{G}(\lambda, t) \cdot \tilde{\varphi}(\lambda) = G\widetilde{(\cdot, t) * \varphi}(\cdot),$$

т.е.

$$u(x,t) = G(\cdot, t) * \varphi(\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x-\xi) d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Получили формулу Пуассона.

§1. Решение уравнения колебаний бесконечной струны с помощью преобразования Фурье

Теперь построим решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Предположим, что $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^1)$ и $u(x,t) \in S(\mathbb{R}^1)$ равномерно по $t \in [0,T]$, причем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0$. Выполним преобразование Фурье обеих частей уравнения (2):

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(\lambda, t)}{\partial t^2} = -a^2\lambda^2 \tilde{u}(\lambda, t), \tag{4}$$

где

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\langle x, \lambda\rangle} dx.$$

Общее решения (4) запишем в виде:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = A(\lambda)\cos a\lambda t + B(\lambda)\sin a\lambda t. \tag{5}$$

Начальные условия:

$$\tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi}(\lambda),\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\lambda, 0) = \tilde{\psi}(\lambda).$$

Значит,

$$A(\lambda) = \tilde{\varphi}(\lambda),\ B(\lambda) = \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{a\lambda}.$$

Покажем, что $B(\lambda) \in S(\mathbb{R})$. Для этого установим следующее утверждение:

Утверждение 2 *Пусть $z(\lambda)$ – некая функция. Тогда*

$$\frac{z(\lambda)}{\lambda} \in S(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} z(\lambda) \in S(\mathbb{R}), \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Если функция $z(\lambda)$ является аналитической в точке $\lambda = 0$, то это очевидно. Слушателям предлагается убедиться в том, что это так и в случае, когда функция $z(\lambda)$ не является аналитической (такие функции имеются в пространстве S и их, в некотором смысле, подавляющее большинство). ■

Ввиду наложенных на ψ ограничений, функция $\tilde{\psi}$ удовлетворяет условиям этого утверждения. Действительно,

$$\tilde{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0,$$

поэтому $B(\lambda) \in S(\mathbb{R})$.

Подставим в (5) выражения для $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Получим:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda) \cos a\lambda t + \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{a\lambda} \sin a\lambda t.$$

Воспользуемся формулами Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Подставив в выражение для $\tilde{u}$, получаем:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = F(\lambda)e^{ia\lambda t} + G(\lambda)e^{-ia\lambda t}, \tag{6}$$

где

$$F(\lambda) = \frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{2} + \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{2a\lambda i}, \ G(\lambda) = \frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{2} - \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{2a\lambda i}.$$

Заметим, что $F, G \in S(\mathbb{R})$ (как линейные комбинации функций A и B из $S(\mathbb{R})$). Тогда F и G – преобразования Фурье некоторых функций $f \in S(\mathbb{R})$ и $g \in S(\mathbb{R})$, причем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Следовательно,

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{f}(\lambda)e^{ia\lambda t} + \tilde{g}(\lambda)e^{-ia\lambda t}.$$

Покажем, что в правой части этого равенства стоит преобразование Фурье функции $f(x + at) + g(x - at)$. Действительно, для любого $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{f(x+\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\tau)e^{-i\lambda x}dx = e^{i\lambda\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\tau)e^{-i\lambda(x+\tau)}dx =$$

$$= e^{i\lambda\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\lambda y}dy = e^{i\lambda\tau}\tilde{f}(\lambda).$$

Следовательно,
$$\widetilde{f(x+at)} = e^{i\lambda at}\tilde{f}(\lambda), \quad \widetilde{g(x-at)} = e^{-i\lambda at}\tilde{g}(\lambda).$$
Поэтому,
$$\tilde{u}(x,t) = \widetilde{f(x+at)+g(x-at)}.$$
Значит,
$$u(x,t) = f(x+at)+g(x-at). \tag{7}$$
Найдем выражения функций f и g через начальные функции φ и ψ. Воспользуемся начальными условиями при $t=0$:
$$f(x)+g(x) = \varphi(x),$$
$$f'(x)-g'(x) = \frac{\psi(x)}{a}.$$
Проинтегрируем последнее равенство:
$$f(x)-g(x) = C + \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(y)dy.$$
С учетом первого равенства получаем:
$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x) + C + \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(y)dy\Big),$$
$$g(x) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x) - C - \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(y)dy\Big).$$
Мы нашли f и g. Они определены с точностью до прибавления константы. Наконец, из (7) получаем формулу для решения задачи (2), (3):
$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\cdot\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy. \tag{8}$$

§2. Формула Даламбера

Формула (8) называется формулой Даламбера. Впервые ее вывел Эйлер, но без использования преобразования Фурье, которое появилось позже. А Даламбер, на самом деле, нашел формулу (7) для любого решения уравнения (2). Точнее, им была доказана следующая

Теорема 2 (Даламбер) *Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{R}^2$ и функция $u(x,t) \in C^2(D)$, $(x,t)\in D$, является решением уравнения (2) в области D. Тогда найдутся такие две функции $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, что $u(x,t) = f(x+at)+g(x-at)$.*

Доказательство. Сделаем замену переменных $\xi = x + at, \eta = x - at$ и рассмотрим функцию $v(\xi, \eta)$, которая получается из $u(x, t)$ после этой замены, т.е.

$$u(x, t) = v(x + at, x - at).$$

Очевидно, что $v(\xi, \eta) \in C^2(G)$, где (выпуклая) область G получается из D при сделанной замене координат. Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция $v(\xi, \eta)$ в области G. Имеем

$$\begin{aligned}
&u_x = v_\xi + v_\eta, \qquad u_{xx} = v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 2v_{\xi\eta},\\
&u_t = av_\xi - av_\eta, \quad u_{tt} = a^2 v_{\xi\xi} + a^2 v_{\eta\eta} - 2a^2 v_{\xi\eta},\\
&u_{tt} - a^2 u_{xx} = -4a^2 v_{\xi\eta}.
\end{aligned}$$

Следовательно, получаем уравнение для функции $v(\xi, \eta)$

$$v_{\xi\eta} = 0, \quad \forall (\xi, \eta) \in G.$$

Интегрируем это уравнение два раза, используя выпуклость области G:

$$v_\xi = f_1(\xi) \quad \Rightarrow \quad v(\xi, \eta) = \int_0^\xi f_1(s)ds + g(\eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

Откуда, возвращаясь к исходным переменным x и t, получаем, что

$$u(x, t) = v(x + at, x - at) = f(x + at) + f(x - at).$$

■

Теорема Даламбера говорит о том, что решение уравнения струны есть сумма двух бегущих волн. Волна $f(x + at)$ бежит влево со скоростью a, а волна $g(x - at)$ бежит вправо со скоростью a.

Мы вывели формулу (8) для решения задачи Коши (2), (3) при довольно жестких ограничениях на φ и ψ. Однако, как несложно видеть, выполнена следующая теорема.

Теорема 3 (формула Даламбера) *Пусть $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда формула* (8) *задает функцию $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, которая является решением задачи Коши* (2), (3).

Доказательство. Достаточно продифференцировать формулу (7) или (8) (отметим, что $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ в силу условий наложенный на φ и ψ):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(f(x + at) + g(x - at)\big) = a^2 f''(x + at) + a^2 g''(x - at),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(f(x + at) + g(x - at)\big) = f''(x + at) + g''(x - at).$$

Начальные условия проверяются непосредственно:

$$u(x, 0) = \frac{\varphi(x) + \varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \int\limits_x^x \psi(y)dy = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \frac{a\varphi(x) - a\varphi(x)}{2} + \frac{a}{2a}\big(\psi(x) + \psi(x)\big) = \psi(x).$$

■