Задачи по аналитической теории дифференциальных уравнений

1. (Задача о мероморфном приведении к биркгофовой стандартной форме) Любую ли систему вида

$$z\frac{dy}{dz} = C(z)y, \quad C(z) = C_r z^r + C_{r-1}z^{r-1} + \ldots + C_0 + C_{-1}z^{-1} + \ldots,$$

определенную в окрестности точки $z = \infty$, мероморфным в окрестности этой точки преобразованием

$$\tilde{y} = M(z)y, \quad M(z) = M_s z^s + M_{s-1}z^{s-1} + \ldots + M_0 + M_{-1}z^{-1} + \ldots$$

можно привести к биркгофовой стандартной форме, т.е. к следующему виду

$$z\frac{dy}{dz} = (C'_r z^r + \ldots + C_0)y?$$

2. Для случая фуксовых систем подходящим образом определенные прямое и обратное отображения монодромии являются непрерывными. Первое следует из результатов И.А. Лаппо-Данилевского [6], а второе легко может быть получено из конструкции векторных расслоений со связностью, представленной в [2].

Требуется перенести эти результаты на случай иррегулярных систем и обобщенные данные монодромии $\mathcal{M}'$ (монодромия, данные Стокса, экспоненциальные части). То есть, основным вопросом является следующий: доказать, что в окрестности $D(\mathcal{M}'_0)$ заданной обобщенной монодромии $\mathcal{M}'_0$ можно построить **непрерывное** отображение в пространство линейных систем.

3. (Ю.С. Ильяшенко) Можно ли построить на сфере Римана голоморфное расслоение, имеющее заданный тип расщепления, с логарифмической связностью, имеющей заданные набор особенностей и представление монодромии? Исследовать достаточные условия.

4. (В.А. Побережный и др.) Описать калибровочные преобразования, изменяющие контролируемым образом нормирования фуксовых систем на двумерном торе.

5. (Ю.П. Бибило) Описать в терминах изомонодромных деформаций и (неизомонодромных) слияний особых точек предельные переходы, позволяющие получить уравнения $PI-V$ из уравнения PVI (см. [5]). С помощью этого подробно исследовать сходимость решений этих уравнений. Эти переходы для уравнений описаны в [8].

6. Задача обращения матричных рядов. По системе

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{z-a_i}\right) y \tag{1}$$

могут быть построены ее матрицы монодромии (см. формулу (28) 2-й статьи из [6]). Эта формула явно задает многомерное голоморфное отображение монодромии $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} : (U_1, \dots, U_n) \to (V_1, \dots, V_n).$$

Оно отображает систему с нулевыми матрицами вычетов в набор единичных матриц монодромии

$$\mathcal{M} : (0, \dots, 0) \mapsto (I, \dots, I).$$

В пятой статье [6] это отображение локально обращено в окрестности точки $(0, \dots, 0)$, также в виде матричного ряда.

Предлагается обратить это отображение в окрестности произвольной точки $(U_1, \dots, U_n)$, если матрицы монодромии $V_1, \dots, V_n$ системы (1) заданы явно.

7. а) Пусть представление

$$\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, z_0) \longrightarrow GL(p, \mathbb{C})$$

неприводимо и $n \geqslant 4$. Выяснить, верно ли, что пара $(F^{\Lambda,S}, \nabla^{\Lambda,S})$ — расслоение со связностью, построенная по допустимому набору матриц $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ будет тривиальной при почти любом наборе особых точек? Про расслоения можно прочесть в [2].

б) Верно ли, что проблема Римана–Гильберта с нефиксированным положением особых точек имеет положительное решение тогда и только тогда, когда по данному представлению можно построить полустабильную пару нулевой степени?

Список литературы

[1] *Болибрух А. А.* 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1994. Т. 206.

[2] *Болибрух А. А.* Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2009.

[3] *Bolibruch A. A, Malek S., Mitschi C.* On the generalized Riemann-Hilbert problem with irregular singularities // Exposition. Math. 2006. V. 24. P. 235–272.

[4] Singer M., Van Der Put M. Galois Theory of Linear Differential Equations // Springer 2002.

[5] *Conte R., Musette M.* Painleve handbook // Springer 2008.

[6] *Лаппо-Данилевский И. А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений М.: Гостехтеоретиздат, 1957. 456 с.

[7] *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, Мир 1968.

[8] *Громак В.И., Лукашевич Н.А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск «Университетское». 1990.