STRONG MARKOV PROCESSES

By E. DYNKIN *and* A. JUSHKEVICH (MOSCOW)

(Summary)

Let $\mathcal{E}$ be a metric space, and suppose that $\mathfrak{B}$ is the Borel field generated by the open sets of $\mathcal{E}$. A stochastic process is defined on $\mathcal{E}$ if a function $x(t, \omega)$, $(0 \leqslant t < \infty$, $\omega \in \Omega)$ and a system of probability measures $\mathbf{P}_x (x \in \mathcal{E})$ are given such that all $\mathbf{P}_x$ are defined on the Borel field generated by sets of type (1), and $\mathbf{P}_x \{x(0, \omega) = x\} \equiv 1$. A random variable $\tau(\omega)$ is said to be independent of the future if for every s the ω-set $\{\tau(\omega) \leqslant s\}$ belongs to the Borel field generated by sets of type (1) with $t \leqslant s$. A measurable stochastic process on $\mathcal{E}$ is called a strong Markov homogeneous process if for any $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ and any τ independent of the future, equation (5) is true for almost all ω such that $\tau(\omega) < \infty$. Every strong Markov homogeneous process is a Markov homogeneous process, but the converse is not true as shown by examples. The process is said to be a Feller process, if the space C of all bounded continuous functions on $\mathcal{E}$ is invariant under transformations T_t, $(t \geqslant 0)$ defined by (7). It is proved that if a homogeneous Markov process is of the Feller type and if $x(t, \omega)$ or all ω is a right-continuous function of t, then the process is a strong Markov process.

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ТРАЕКТОРИЯМИ БЕЗ РАЗРЫВОВ ВТОРОГО РОДА И ТАК НАЗЫВАЕМЫЙ «ЭВРИСТИЧЕСКИЙ» ПОДХОД К КРИТЕРИЯМ СОГЛАСИЯ ТИПА КОЛМОГОРОВА — СМИРНОВА *

Н. Н. ЧЕНЦОВ

В 1934 г. А. Н. Колмогоров доказал следующую теорему: Если $\xi(t)$ — сепарабельный (см. [1]) случайный процесс,

$$\mathbf{M} \, | \xi(t_1) - \xi(t_2) |^p < C \, | t_1 - t_2 |^{1+r}, \tag{1}$$

где $p > 0$, $r > 0$, C — константа, не зависящая от t, то с вероятностью 1 все траектории процесса непрерывны **.

Обобщением этой теоремы является следующее предложение, указанное автору А. Н. Колмогоровым:

Теорема 1: *Если $\xi(t)$ — сепарабельный случайный процесс $0 \leqslant t \leqslant 1$ и*

$$\mathbf{M} \, | \xi(t_1) - \xi(t_2) |^p \, | \xi(t_2) - \xi(t_3) |^q < C \, | t_1 - t_3 |^{1+r}, \tag{2}$$

где $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$; $r > 0$; $t_1 < t_2 < t_3$, C — константа, не зависящая от t, то с вероятностью 1 все траектории процесса не имеют разрывов второго рода.

Доказательство: Нетрудно показать, что если для $\xi(t)$ выполнено (2), в качестве множества сепарабельности можно выбрать любое счетное всюду плотное множество, например множество Γ_0 двоично-рациональных дробей. Назовем событие $\left| \xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right| < L\alpha^n$, где $\alpha = \exp\left[-\frac{r \ln 2}{2(p+q)}\right]$, $L^{p+q} = C$, событием $A^n_{k+\frac{1}{2}}$. Введем также события $B^n_k = A^n_{k-\frac{1}{2}} \cup A^n_{k+\frac{1}{2}}$, события $D^n = \bigcap_{m=n}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{2^m-1} B^m_k$ и событие $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D^n$.

Из неравенства (2) легко выводится, что $\mathbf{P}\{\overline{B}^n_k\} < \alpha^{-n(p+q)} 2^{-n(1+r)}$; $\mathbf{P}\{\overline{D}^n\} <$

---

* Краткое изложение содержания настоящей заметки (без теоремы 1) было сделано автором на Всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике, происходившем в Ленинграде 30 мая — 4 июня 1955 г.

** Эта теорема была впервые опубликована в работе Е. Е. Слуцкого [2].

$< \frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon}$, где $\varepsilon = 2^{-\frac{1}{r}} < 1$, и, наконец, $\mathbf{P}\{D\} = 1$. Остается показать, что множество D не содержит ни одной Γ_0-сепарабельной траектории с разрывами второго рода.

Лемма 1. *Если* $x(t)$ — Γ_0-*сепарабельная функция и* $x(t) \in A^n_{k+\frac{1}{2}} \cap D^{n+1}$, *то*

$$\max_{\frac{k}{2^n} < t < \frac{k+1}{2^n}} \left| x(t) - x\left(\frac{1}{2^n}\right) \right| < \frac{L\alpha^n}{1-\alpha} \tag{3}$$

$$\max_{\frac{k}{2^n} < t < \frac{k+1}{2^n}} \left| x(t) - x\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right| < \frac{L\alpha^n}{1-\alpha}. \tag{4}$$

Доказательство леммы. Так как $x(t)$ — Γ_0-сепарабельная функция, то утверждение леммы достаточно показать для двоично-рациональных t. Пусть по предположению индукции

$$\left| x\left(\frac{S}{2^{n+m}}\right) - x\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| < L(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+m}), \tag{5}$$

$$\left| x\left(\frac{S}{2^{n+m}}\right) - x\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right| < L(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+m}). \tag{6}$$

Так как $x(t) \in D^{n+1}$, то имеет место по крайней мере одно из неравенств (7) или (8)

$$\left| x\left(\frac{2S+1}{2^{n+m+1}}\right) - x\left(\frac{S}{2^{n+m}}\right) \right| < L\alpha^{n+m+1} \tag{7}$$

$$\left| x\left(\frac{2S+1}{2^{n+m+1}}\right) - x\left(\frac{S}{2^{n+m}}\right) \right| < L\alpha^{n+m+1}. \tag{8}$$

В обоих случаях

$$\left| x\left(\frac{2S+1}{2^{n+m+1}}\right) - x\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| < L(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+m+1}) \tag{9}$$

$$\left| x\left(\frac{2S+1}{2^{n+m+1}}\right) - x\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right| < L(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+m+1}). \tag{10}$$

Дальнейшие рассуждения тривиальны.

Лемма 2. *Если* $x(t)$ — Γ_0-*сепарабельная функция и* $x(t) \in B^n_k \cap D^{n+1}$, *то в интервале* $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ *существует точка* t^n_k, *задающая дедекиндово сечение интервала так, что*

$$\left| x(t) - x\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right| < \frac{L\alpha^n}{1-\alpha}, \tag{11}$$

если t *принадлежит нижнему классу, и*

$$\left| x(t) - x\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right| < \frac{L\alpha^n}{1-\alpha}, \tag{12}$$

если t *принадлежит верхнему классу.*

Доказательство леммы 2. Всегда имеет место одно из неравенств (13) или (14)

$$\left| x\left(\frac{k}{2^n}\right) - x\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right| < L\alpha^n, \tag{13}$$

$$\left| x\left(\frac{k}{2^n}\right) - x\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right| < L\alpha^n. \tag{14}$$

В случае, когда выполнены оба неравенства, утверждение леммы 2 тривиально следует из леммы 1. Пусть выполнено только первое неравенство. Тогда из леммы 1 следует, что для всех $t \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ выполнено неравенство (11), поэтому отрезок $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ принадлежит нижнему классу. Для отрезка $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ имеем

$$\left|x\left(\frac{k}{2^n}\right)-x\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right| < L\alpha^n, \tag{15}$$

$$\left|x\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-x\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right| < L\alpha^n. \tag{16}$$

Отрезок $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ разбиваем пополам. Для одной из половинок имеем $\left|x\left(\frac{S}{2^{n+1}}\right)-x\left(\frac{S+1}{2^{n+1}}\right)\right| < L\alpha^{n+1}$, где $S = 2k$ или $S = 2k+1$. Из леммы 1 и одного из неравенств (15) или (16) получаем, что все эти точки $\left[\frac{S}{2^{n+1}}, \frac{S+1}{2^{n+1}}\right]$ принадлежат одному классу. Для второй половины отрезка получаем оценки

$$x\left(\frac{S'}{2^{n+1}}\right)-x\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right| < L\left(\alpha^n+\alpha^{n+1}\right) \text{ и } \left|x\left(\frac{k+1}{2^n}\right)x-\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right| < L\left(\alpha^n+\alpha^{n+1}\right),$$

где $S' = 2k+1$, если $S = 2k$, или $S' = 2k$, если $S = 2k+1$. Рассуждая далее по индукции, получаем утверждение леммы.

Переходим к доказательству теоремы. Пусть $x(t)$ — функция с разрывами второго рода и $x(t) \in D$. Тогда при некотором n, $x(t) \in D^n$ и, следовательно, $x(t) \in D^m$ при всех $m \geqslant n$. Если Γ_0-сепарабельная функция $x(t)$ имеет разрывы второго рода, то существует такое $\eta > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся три точки $t_1 < t_2 < t_3$ $|t_1 - t_3| < \delta$; $t_1, t_2, t_3 \in \Gamma_0$ такие, что $|x(t_1) - x(t_2)| > \eta$ и $|x(t_2) - x(t_3)| > \eta$.

Выберем m так, чтобы $2L\frac{\alpha^m}{1-\alpha} > \eta$. Без ограничения общности можно считать $m \geqslant n$. Выберем $\delta < \frac{1}{2^m}$. Тогда отрезок $[t_1, t_3]$ заведомо покрывается двумя смежными отрезками длины $\frac{1}{2^m}\left[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right]$ и $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$. При этом или t_1 и t_2, или t_2 и t_3, или и t_1 и t_2 и t_3 попадают в один класс. Так как $x(t) \in B_k^m \cap D^{m+1}$, то по следствию из леммы 2 одна из разностей обязательно меньше $2L\frac{\alpha^m}{1-\alpha}$, что противоречит неравенству $2L\frac{\alpha^m}{1-\alpha} < \eta$. Это противоречие доказывает теорему.

Будем говорить, что последовательность случайных процессов $\xi_n(t)$ слабо сходится к некоторому предельному случайному процессу $\xi_0(t)$, если при любом фиксированном множестве моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ последовательность совместных распределений величин $\xi_n(t_1), \ldots, \xi_n(t_m)$ слабо сходится к соответствующему совместному распределению значений $\xi_0(t)$, $i = 1, \ldots, m$ предельного процесса.

Теорема 2. *Если последовательность сепарабельных случайных процессов $\xi_n(t)$ слабо сходится к сепарабельному случайному процессу $\xi_0(t)$, причем выполнено условие*

$$\mathbf{M}\,|\xi_n(t_1)-\xi_n(t_2)|^p\,|\xi_n(t_2)-\xi_n(t_3)|^q < C\,|t_1-t_3|^{1+r}, \tag{17}$$

где $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$; $r > 0$; $t_1 < t_2 < t_3$; C — константа, не зависящая от n и t; и две кусочно-непрерывные функции $g(t) < f(t)$, полунепрерывные в точках разрыва соответственно сверху и снизу таковы, что

$$\mathbf{P}\{g(t)+z \leqslant \xi_0(t) \leqslant f(t)-z;\ \text{при всех } t\} \xrightarrow[z\to+0]{} \mathbf{P}\{g(t) \leqslant \xi_0(t) \leqslant f(t);\ \text{при всех } t\} \tag{18}$$

то

$$\mathbf{P}\{g(t) \leqslant \xi_n(t) \leqslant f(t);\ \textit{при всех}\ t\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{P}\{g(t) \leqslant \xi_0(t) \leqslant f(t);\ \textit{при всех}\ t\}. \quad (19)$$

Доказательство: Если процесс $\xi(t)$ — сепарабельный, то (см. [1])

$$\mathbf{P}\{g(t) \leqslant \xi(t) \leqslant f(t);\ \text{при всех}\ t \in T\} = \inf_{\Gamma} \mathbf{P}\{g(t) \leqslant \xi(t) \leqslant f(t);\ \text{при всех}\ t \in T\}, \quad (20)$$

где Γ — любое счетное подмножество T и $g(t) < f(t)$ — любые кусочно-непрерывные функции. Под T, для определенности, будем понимать отрезок оси t. Пусть счетное всюду плотное множество Γ_0 содержит все точки разрыва функций $d(t)$ и $f(t)$. Нетрудно показать, что если для $\xi(t)$ выполнено условие (17), то на Γ_0 достигается $\inf\limits_{\Gamma} \mathbf{P}\{g(t) \leqslant \xi(t) \leqslant f(t);$ при всех $t \in \Gamma\}$. В самом деле, из (17) следует, что от увеличения Γ_0 на любое конечное, а значит, и счетное число точек эта вероятность не будет уменьшаться. Так как, очевидно, условие (17) имеет место и для предельного процесса $\xi_0(t)$, то нам достаточно показать, что

$$\mathbf{P}\{g(t) \leqslant \xi_n(t) \leqslant f(t);\ \text{при всех}\ t \in \Gamma_0\} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$
$$\to \mathbf{P}\{g(t) \leqslant \xi_0(t) \leqslant f(t);\ \text{при всех}\ t \in \Gamma_0\}. \quad (21)$$

Выберем Γ_0 следующим специальным образом: Пусть Δ_0 состоит из точек разрыва функции $g(t)$ и $f(t)$ и концов отрезка T оси t. Пусть Δ_1 состоит из всех точек Δ_0 и всех точек вида $\dfrac{t_{i+1}^{(0)} + t_i^{(0)}}{2}$, где $t_i^{(0)}$—упорядоченные в порядке возрастания точки Δ_0. Пусть Δ_2 состоит из всех точек Δ_1 и всех точек вида $\dfrac{t_{i+1}^{(1)} + i_i^{(1)}}{2}$, где $t_i^{(1)}$ — упорядоченные в порядке возрастания точки Δ_1 и т. д. Положим, наконец, $\Gamma_0 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k$.

Обозначим для краткости событие

$$\{g(t) \leqslant \xi(t) \leqslant f(t);\ \text{при всех}\ t \in A\} = \mathbf{U}(\xi,\ g,\ f,\ A). \quad (22)$$

Тогда (21) можно переписать в виде

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n,\ g,\ f,\ \Gamma_0)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0,\ g,\ f,\ \Gamma_0)\}. \quad (23)$$

Пусть $g(t)$ и $f(t)$ — ступенчатые функции. Тогда имеет место

Лемма: *Если для $\xi(t)$ выполнено условие (17), то при* $\varepsilon \geqslant \dfrac{1}{1-\alpha}\alpha^k$

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi,\ g,\ f,\ \Delta_k)\} \leqslant \mathbf{P}\{\mathbf{U}\xi,\ g-\varepsilon, f+\varepsilon, \Gamma_0)\} + \eta, \quad (24)$$

где $h = \max\limits_i |t_{i+1}^{(0)} - t_i^{(0)}|;\ \alpha = \exp\left[-\dfrac{r \ln 2}{2(p+q)}\right] < 1;\quad \eta \leqslant C\,|T|\cdot h^r\,\dfrac{1}{1-\alpha^{p+q}}\,\alpha^{(p+q)k}$.

Доказательство леммы: Нетрудно проверить, что из (17) следует

$$\mathbf{P}\{\xi(t_i^{(l)}) \in [a,\ b];\ \ \xi(t_{i+1}^{l}) \in [a,\ b];\ \ \xi(t_{2i}^{(l+1)}) \in [a-\varepsilon,\ b+\varepsilon]\} \leqslant \frac{C\,|t_{i+1}^{(l)} - t_i^{(l)}|^{1+r}}{\varepsilon^{p+q}}. \quad (25)$$

В силу полунепрерывности $g(t)$ и $f(t)$ в точках разрыва, можно подставить в (25) вместо a величину $g(t_{2i}^{(l+1)}) - \varepsilon_l$ и $f(t_{2i}^{(l+1)}) + \varepsilon_l$ вместо b, где $\varepsilon_l = \alpha^k + \alpha^{k+1} + \ldots + \alpha^{l+1}$. Суммируя затем по всем i, получаем

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi,\ g-\varepsilon_l,\ f+\varepsilon_l,\ \Delta_l)\} \leqslant \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi,\ g-\varepsilon_{l+1},\ f+\varepsilon_{l+1},\ \Delta_{l+1})\} + \eta_l, \quad (26)$$

где $\eta_l \leqslant Ch^r\,|T|\,\alpha^{\alpha(p+q)\,l}$. Суммируя выражения (26) для всех $l \geqslant k$ и учитывая, что от увеличения ε неравенство только усиливается, получаем (24). Из леммы следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ найдется такое k, зависящее только от C, $h\,|T|\,p$, q, r, что неравенство (24) будет выполнено с этими ε и η.

Вернемся к доказательству теоремы. Выберем произвольное $\eta > 0$ и покажем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Gamma_0)\} < \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g, f, \Gamma_0)\} + \eta. \tag{27}$$

Так как $\mathbf{U}(\xi, g, f, \Gamma_0) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbf{U}(\xi, g, f, \Delta_k)$, то можно выбрать k таким, что

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g, f, \Delta_k)\} < \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g, f, \Gamma_0)\} + \frac{\eta}{2}. \tag{28}$$

Выберем теперь n_0 таким, что при $n \geqslant n_0$

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Delta_k)\} < \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g, f, \Delta_k)\} + \frac{\eta}{2}, \tag{29}$$

что можно сделать, так как множество $\mathbf{U}(\xi, g, f, \Delta_k)$ замкнуто.

Наконец, всегда имеет место

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Gamma_0)\} \leqslant \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Delta_k)\}. \tag{30}$$

Складывая (28), (29) и (30) и переходя к пределу по n, получаем (27).

Заметим, что при доказательстве неравенства (27) мы не накладывали никаких ограничений на функции $g(t)$ и $f(t)$.

Сложнее доказательство обратного неравенства

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Gamma_0)\} > \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0; g, f, \Gamma_0)\} - \eta. \tag{31}$$

Согласно (18) всегда можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, что

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g+3\varepsilon, f-3\varepsilon, \Gamma_0)\} > \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g, f, \Gamma_0)\} - \frac{\eta}{2}. \tag{32}$$

Каковы бы ни были кусочно-непрерывные функции $g(t)$ и $f(t)$, всегда можно выбрать ступенчатые функции $g_1(t)$ и $f_1(t)$ с разрывами в точках Γ_0 так, чтобы $g_1(t) + \varepsilon > g(t) > g_1(t)$; $f_1(t) > f(t) > f_1(t) - \varepsilon$. Тогда

$$\mathbf{U}(\xi, g_1+\delta+\varepsilon, f_1-\delta-\varepsilon, \Gamma_0) \subset \mathbf{U}(\xi, g+\delta, f-\delta, \Gamma_0) \subset \mathbf{U}(\xi, g_1+\delta, f_1-\delta, \Gamma_0). \tag{33}$$

Следовательно, имеют место неравенства

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g_1+3\varepsilon, f_1-3\varepsilon, \Gamma_0)\} \geqslant \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g+3\varepsilon, f-3\varepsilon, \Gamma_0)\}, \tag{34}$$

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Gamma_0)\} \geqslant \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g_1+\varepsilon, f_1-\varepsilon, \Gamma_0)\}. \tag{35}$$

Выберем по ε такое k, чтобы при любом n имело место

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g_1+\varepsilon, f_1-\varepsilon, \Gamma_0)\} > \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g_1+2\varepsilon, f_1-2\varepsilon, \Delta_k)\} - \frac{\eta}{2}. \tag{36}$$

Возможность такого выбора доказана в лемме. Выберем тепер n_0 так, что при $n \geqslant n_2$

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g_1+2\varepsilon, f_1-2\varepsilon, \Delta_k)\} > \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\varepsilon_0, g_1+3\varepsilon, f_1-3\varepsilon, \Delta_k)\}. \tag{37}$$

Наконец, всегда имеет место

$$\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g_1+2\varepsilon, f_1-3\varepsilon, \Delta_k)\} \geqslant \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g_1+3\varepsilon, f_1-3\varepsilon, \Gamma_0)\}. \tag{38}$$

Складывая соотношения (32), (34)—(38) и переходя по n к пределу, получаем (31). Так как η — произвольно, то $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_n, g, f, \Gamma_0)\}$ существует и равен $\mathbf{P}\{\mathbf{U}(\xi_0, g, f, \Gamma_0)\}$, что доказывает теорему.

Замечания. 1°. В доказательстве фактически используется не условие (17), а менее ограничительное соотношение (25).

2°. Доказательство без труда переносится на случай, когда $g(t)$ и $f(t)$ суть равномерные монотонные пределы ступенчатых функций, полунепрерывных соответственно сверху и снизу.

3°. Аналогичную теорему можно доказать для векторных случайных процессов, а также для случайных полей.

4°. Пусть известно, что процесс $\xi(t)$ стохастически непрерывен в точке t_0 и удовлетворяет условию (17). Положим в формуле (24) $k = 0$, $|T| = h$, и заменим $\xi(t)$ на случайную функцию $\xi(t) - \xi(t_0)$, также удовлетворяющую условию (17). Из этой оценки нетрудно вывести, что процесс $\xi(t)$ непрерывен в точке t_0 с вероятностью 1.

Доказанная теорема дает новое обоснование метода разыскания асимптотических распределений критериев согласия, предложенного в нестрогой, эвристической форме Doob'ом [3] и развитого затем Donsker'ом [4]. (Метод этот был близок к тому, который был использован Колмогоровым [5] еще в 1933 г.). Рассмотрим случайную функцию $\gamma_n(t) = \sqrt{n}\,[F_n^*(t) - t]$, где $F_n^*(t)$ — эмпирическая функция распределения n наблюдений случайной величины, равномерно распределенной на отрезке [0,1]. Если мы введем вспомогательную функцию распределения $\Lambda(t)$ меры, сосредоточенной в точках $t_1, t_2, \ldots, t_m$ с массами соответственно $-\lambda_1$, $-\lambda_2, \ldots, -\lambda_m$, причем будем считать, что $\Lambda(1) = 0$, то характеристическую функцию совместного распределения значений случайного «процесса» $\gamma_n(t)$ в «моменты времени $t_1, \ldots, t_m$ удобно записать в виде

$$\varphi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m) = \left[\exp\left\{-i\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{n}}\Lambda(t)\,dt\right\}\int_0^1 \exp\left\{\frac{i}{\sqrt{n}}\Lambda(t)\right\}dt\right]^n. \tag{39}$$

Нетрудно видеть, что при $n \to \infty$ и при фиксированных $t_1, \ldots, t_m$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ функции $\varphi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ сходятся к характеристической функции условного винеровского процесса $\xi(t)$ с условием $\xi(1) = 0$, которая может быть записана

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1 [\Lambda(t)]^2\,dt + \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \Lambda(t)\,dt\right]^2\right\}. \tag{40}$$

Нетрудно проверить, что процесс $\gamma_n(t)$ удовлетворяет условию (17), так как

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}\,[\gamma_n(t+\tau_1) - \gamma_n(t)]^2\,[\gamma_n(t) - \gamma_n(t-\tau_2)]^2 = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\tau_1\tau_2(1-\tau_1)(1-\tau_2) + \frac{1}{n}\tau_1\tau_2\,[\tau_2(1-\tau_1)^2 + \tau_1(1-\tau_2)^2 + \\ &\quad + \tau_1\tau_2(1-\tau_1-\tau_2)] = O(|\tau_1+\tau_2|^2). \end{aligned} \tag{41}$$

Поэтому мы можем утверждать, что асимптотическое распределение любого критерия согласия типа критериев согласия Колмогорова [5] и Смирнова [6], см., например, [7], [8], совпадает с соответствующим распределением для условного винеровского процесса.

Следует отметить, что точно так же можно свести доказательство предложений о поведении последовательности сумм независимых случайных величин к доказательству аналогичных предложений для винеровского случайного процесса.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Андрею Николаевичу Колмогорову и Николаю Васильевичу Смирнову, руководившим его работой.

Поступила в редакцию
15.2.56

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Doob, Stochastic processes, New York — London, 1953.
[2] Е. Е. Слуцкий, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 8 (1937), 183—199.
[3] J. L. Doob, Ann. Math. Statistics, 20 (1949), 393—403.
[4] M. D. Donsker, Ann. Math. Statistics, 23 (1952), 277—281.
[5] А. Н. Колмогоров, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 4 (1933), 83—91.
[6] Н. В. Смирнов, Матем. сб., 6 (44), (1939), 3—26.
[7] Г. М. Мания, ДАН СССР, 69 (1949), 495—497.
[8] A. Rényi, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 4 (1953). 191—231