$$(9) \qquad \begin{cases} dx_t = u_t\,dt + dw_t \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

где управляющий параметр u_t мы можем выбирать из множества чисел $\{u : |u| \le 1\}$. Предположим, что наша цель состоит в том, чтобы наименее уклоняться от прямой $x=0$ (т.е. минимизировать какой-либо из функционалов

(10.1) $\quad M\,|x_T|$

(10.2) $\quad M\,x_T^2$

(10.3) $\quad M\int_0^T x_t^2\,dt$

или максимизировать какой-либо из функционалов

(10.4) $\quad M\,\{\tau_a \wedge T\}$

(10.5) $\quad P\,\{|x_T| < a\}$

где $\tau_a = \inf\{t : |x_t| > a\}$, $\tau_a \wedge T = \min(\tau_a, T)$, и т.п.). Естественное поведение в такой ситуации – гнать процесс x_t с максимальной силой к нулю, т.е. выбирать

$$u_t = \begin{cases} -1 & , x_t > 0 \\ 0 & , x_t = 0 \\ 1 & , x_t < 0 \end{cases}$$

Тогда уравнение (9) превращается в уравнение

$$(11) \qquad \begin{cases} dx_t = -\operatorname{sgn} x_t\,dt + dw_t \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что коэффициент сноса здесь разрывен, и теорема Ито ([1]) не позволяет построить сильное решение.

Разумеется, значение любого из функционалов (10.1)-(10.5) будет одним и тем же независимо от того, рассматриваем ли мы слабое или сильное решение уравнения (11). Но существенно меняется смысл наших действий : мы перестаем управлять процессом x_t. В самом деле, смысл управления состоит в том, чтобы, наблюдая отдельную траекторию x_t, пытаться вернуть ее у нулю, как только она от него отклонится. Но, строя слабые решения уравнения (9) при разных стратегиях u_t, мы вообще не меняем процесс x_t, и все его траектории тоже оставляем неизменными, а меняем только меру на множестве всех траекторий, хотя поведение всех остальных траекторий кроме той, которую мы наблюдаем, нас совершенно не интересует.

По-видимому, математическую теорию управляемых диффузионных процессов нельзя будет считать законченной до тех пор, пока не будут получены достаточно общие результаты о существовании сильных решений.

4 Рассмотрим задачу фильтрации ненаблюдаемой компоненты двумерного диффузионного процесса. Пусть дан процесс (θ_t, ξ_t) удовлетворяющий уравнению

$$d\theta_t = a(t, \theta_t, \xi_t)\,dt + dw_t^{(1)}$$
$$d\xi_t = A(t, \theta_t, \xi_t)\,dt + dw_t^{(2)}$$

Требуется оценить θ_t по траектории ξ_0^t. Известно (см. [11], гл. 8, § 3), что наилучшая среднеквадратическая оценка $M(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^\xi)$ представима в виде