$$M(\theta_t \mid \mathcal{F}_t^{\xi}) = M(\theta_0 \mid \mathcal{F}_0^{\xi}) + \int_0^t [\cdot]\, ds + \int_0^t [\cdot]\, d\bar{w}_s$$

(конкретный вид подинтегральных членов нам не важен), где $\bar{w}_t$ – винеровский процесс, равный

$$\xi_t - \int_0^t M(A(s,\theta_s,\xi_s) \mid \mathcal{F}_s^{\xi})\, ds$$

Из построения видно, что процесс $\bar{w}_t$ $\mathcal{F}_t^{\xi}$ – измерим, т.е. $\mathcal{F}_t^{\bar{w}} \subset \mathcal{F}_t^{\xi}$. Известно, что особую важность представляет тот случай, когда процесс $\bar{w}_t$ является обновляющим, т.е. $\mathcal{F}_t^{\bar{w}} = \mathcal{F}_t^{\xi}$ (наглядно это означает, что при переходе от процесса ξ_t к процессу $\bar{w}_t$ не происходит потери информации), а равенство $\mathcal{F}_t^{\bar{w}} = \mathcal{F}_t^{\xi}$ имеет место тогда и только тогда, когда уравнение

$$d\xi_t = \alpha(t, \xi_0^t)\, dt + d\bar{w}_t$$

где $\alpha(t,\xi_0^t) = M(A(t,\theta_t,\xi_t) \mid \mathcal{F}_t^{\xi})$, имеет сильное решение.

(5) Результат о сильной единственности, полученной в § 3, приводит к следствию, парадоксальному с точки зрения теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнение $\dot{x} = f(t,x)$, или, точнее

(I2) $$x_t = x_0 + \int_0^t f(s,x_s)\, ds$$

Если $f(t,x)$ не удовлетворяет условию Липшица по x, то решение этого уравнения может оказаться не единственным (пример: $\dot{x} = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 0$; решениями этого уравнения будут $x(t) = 0$, $x(t) = t^2$ и другие). Добавим к правой части уравнения (I2) сколь угодно малую стохастическую часть, т.е. рассмотрим уравнение

(I3) $$x_t = x_0 + \int_0^t f(s,x_s)\, ds + \varepsilon w_t$$

Оказывается, что для (почти) любой траектории w_0^T процесса w_t решение x_t уравнения (I3) будет единственным. Оно будет единственным даже для знаменитого примера (см. [I3], гл. I, § 5), в котором уравнение $\dot{x} = f(t,x)$ обладает неединственностью в каждой точке x.

Заметим, что из результатов о слабой единственности решения уравнения (I3) такого следствия извлечь нельзя. Что касается классической теоремы Ито [I], то она устанавливает сильную единственность решения уравнения (I3) в том случае, когда функция $f(t,x)$ липшицева по x, т.е. тогда, когда уравнение (I2) само по себе обладает единственным решением.

VI. Сводка некоторых результатов о слабых решениях.

Пусть коэффициенты $b(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ в уравнении (I) удовлетворяют следующим условиям:

А. Непрерывность матрицы $a(t,x)$: матрица $a(t,x) = \sigma\sigma^*$ непрерывна по паре аргументов.

Б. Равномерная эллиптичность оператора $L^{(x_t)}$: существует такое число $\mu > 0$, что для любого вектора