$$u(t,x) = M_{(t,x)}\left(\int_t^T f(s,x_s)\,ds + \varphi(x_T) \right)$$

Утверждения I,2 доказаны в [4], утверждение 5 – в [9], относительно утверждений 3,4,6 см [I4].

В дальнейшем мы всюду, где не оговорено обратное, будем предполагать выполненными условия А, Б, В, хотя некоторые из доказанных нами утверждений верны и при более слабых ограничениях.

§ 2. Свойства сильных решений

I. Основные утверждения.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема I. Пусть выполнены условия А, Б, В (§ I, п. УI). В этом случае решение уравнения (I) является сильным тогда и только тогда, когда оно единственно по траекториям.

Иными словами, при фиксированных коэффициентах $b(t,x)$, $\sigma(t,x)$ имеет место следующая

Альтернатива: либо любое решение уравнения (I), заданное на любом вероятностном пространстве, является сильным и единственным по траекториям, либо ни одно решение ни на одном вероятностном пространстве не является сильным, и эти решения обязательно не единственны по траеториям.

Заметим, что существование слабого решения и его слабая

единственность гарантируются условиями А, Б, В.

Сформулированные ниже следствия теоремы I фактически представляют собой более развернутую ее формулировку.

Следствие I. Пусть уравнение (I) на некотором вероятностном пространстве имеет сильное решение. Тогда:

а) любое слабое решение уравнения (I) является сильным;

б) на любом вероятностном пространстве два сильных решения уравнения (I) совпадают при всех t с вероятностью I

Следствие 2. Пусть уравнение (I) имеет слабое решение и обладает единственностью по траекториям. Тогда все его решения являются сильными.

Следствие 3. Если на некотором вероятностном пространстве уравнение (I) имеет два решения (не совпадающих при всех t с вероятностью I), то ни на одном вероятностном пространстве оно не имеет сильного решения.

Заметим, что следствие 3 тривиально вытекает из двух предыдущих, так что нам предстоит доказать только следствия I и 2.

Наконец, в конце параграфа, в п. У, будет сформулирован и доказан критерий существования сильного решения.

П. Доказательство следствия I.б.

1 Обозначим через $\mathcal{M}$ множество ограниченных неслучайных измеримых функций $m(t)$ на $[0,T]$, $m:[0,T]\to R^n$.

Обозначим

$$p_t(m) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^t m_k(s)\,dw_s^{(k)} - \frac{1}{2}\int_0^t m_k^2(s)\,ds \right) \right\} \qquad (19)$$