Оказывается набор случайных величин $\{p_T(m) : m \in \mathcal{M}\}$ образует тотальное семейство векторов в гильбертовом пространстве $H_2^w[0,T]$

Лемма П. I. Если $\xi \in H_2^w[0,T]$, и для любого $m \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{M}\xi p_T(m) = 0,$$

то $\xi = 0$ (п.н.)

Доказательство этого факта содержится в доказательстве теоремы 5.5 [II]

(2) Рассмотрим на отрезке $[0,t]$ уравнение

$$(20)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}^{(x_t)} u(s,x) + u'_x \sigma(s,x) m(s) = 0 & , s \in [0,t] \\ u(t,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

Лемма П.2. Пусть коэффициенты оператора $\mathcal{L}^{(x_t)}$ удовлетворяют условиям А, Б, В (§ I, п. УI), $m \in \mathcal{M}$, $\varphi(x)$ – медленно растущая, $\varphi \in W_p^\ell$, $p \geq n+1$. Пусть x_t – (слабое) решение уравнения (I). Тогда

$$(21)\qquad M p_t(m) \varphi(x_t) = u(0,x)$$

Доказательство. Обозначим $y_t = p_t(m) u(t,x_t)$. Если бы y_t был мартингалом, то выполнялось бы соотношение

$$M p_t(m)\varphi(x_t) = M p_t(m) u(t,x_t) = M p_0(m) u(0,x_0) = u(0,x)$$

что и требуется. Докажем, что y_t в самом деле является мартингалом. Для этого применим к y_t формулу Ито (см. § I, п.

УI, 4): так как

$$dp_t(m) = p_t(m) \sum_{k=1}^{n} m_k(t)\, dw_t^{(k)}$$

то

$$dy_t = p_t(m)\left[\mathcal{L}^{(x_t)} u(t,x_t)dt + u'_x \sigma\, dw_t\right] + u(t,x_t) p_t(m) \sum_{k=1}^{n} m_k\, dw_t^{(k)} +$$

$$+ p_t(m) u'_x(t,x_t)\sigma(t,x_t) m(t)\, dt = [\,\cdot\,]\, dw_t +$$

$$+ p_t(m)\left\{\mathcal{L}^{(x_t)} u(t,x_t) + u'_x(t,x_t)\sigma(t,x_t) m(t)\right\} dt$$

Замечаем, что согласно (20), коэффициент при dt равен 0, что и требовалось доказать.

(3) Переходим к доказательству следствия I.6. Пусть в уравнении (20) $\varphi(x) = x$, и пусть x'_t и x''_t – два решения уравнения (I). Согласно лемме П.2 имеем

$$(22)\qquad M p_t(m) x'_t = u(0,x) = M p_t(m) x''_t$$

Если x'_t и x''_t $\mathcal{F}_t^w$ – измеримы, т.е. лежат в $H_\ell^w[0,t]$, то, согласно лемме П.I, из (22) следует $x'_t = x''_t$ (п.н.)

Осталось из утверждения

$$\forall t \leq T \qquad P\{x'_t = x''_t\} = 1$$

получить утверждение

$$P\{\sup_{t \leq T} |x'_t - x''_t| = 0\} = 1$$

что делается стандартно.