④ Замечание. Уточним еще раз, что именно мы доказали. Пусть для данного набора $\{\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t, w_t\}$ существует несколько решений уравнения (I); среди них могут быть сильные и слабые (т.е. $\mathcal{F}_t^w$ - измеримые и неизмеримые) решения. Нами доказано, что сильное решение среди них может быть не более чем одно, но пока еще не опровергнута возможность того, что кроме этого сильного решения существует еще некоторое количество отличных от него (и друг от друга) слабых решений. Такая возможность будет опровергнута в п. Ш.

Ш. Доказательство следствия I.a.

① Лемма Ш.I. Пусть последовательность ξ_n, $n=1,2,\ldots$ элементов $H_2^w[0,t]$ и элемент $\xi \in H_2^w[0,t]$ ограничены по норме общей константой (т.е. $M|\xi_n|^2 \leqslant K \ \forall n$, и $M|\xi|^2 \leqslant K$), и при всех $m \in \mathcal{M}$

$$M\, p_t(m)\xi_n \to M\, p_t(m)\xi; \tag{23}$$

тогда $\xi_n \to \xi$ слабо в $H_2^w[0,t]$

Доказательство. Пусть ξ_{n_k} - подпоследовательность, не сходящаяся слабо к ξ; т.к. последовательность ξ_{n_k} ограничена, у нее есть слабо сходящаяся подпоследовательность (будем считать, что она совпадает с самой последовательностью ξ_{n_k}), т.е. $\xi_{n_k} \to \zeta$ слабо в $H_2^w[0,t]$, причем $\zeta \neq \xi$. Но, по определению слабой сходимости,

$M p_t(m)\xi_{n_k} \to M p_t(m)\zeta \quad \forall\, m \in \mathcal{M}$, откуда, используя (23), имеем $M p_t(m)\xi = M p_t(m)\zeta \quad \forall m \in \mathcal{M}$, следовательно, согласно лемме П.I, $\xi = \zeta$ (п.н.)

② Следующая лемма имеет самостоятельный интерес.

Лемма Ш.2. Пусть дана последовательность функций $b^n(t,x)$, $\sigma^n(t,x)$, $n=1,2,\ldots$, такая, что:

(α) при каждом n $b^n(t,x)$ и $\sigma^n(t,x)$ удовлетворяют условиям А, Б, В (§ I, п. УI), причем константы C и μ не зависят от n;

(β) при каждом n $b^n(t,x)$ и $\sigma^n(t,x)$ удовлетворяют условию Липшица по x;

(γ) при $n \to \infty$ $b^n(t,x) \to b(t,x)$, $\sigma^n(t,x) \to \sigma(t,x)$ для почти всех (t,x)

Пусть x_t - сильное решение уравнения (I); обозначим через x_t^n решение уравнения

$$x_t^n = x + \int_0^t b^n(s, x_s^n)\,ds + \int_0^t \sigma^n(s, x_s^n)\,dw_s$$

заданное на том же вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ и с тем же винеровским процессом w_t, что и процесс x_t +)

Утверждается, что $x_t^n \to x_t$ в среднем квадратичном равномерно по $t \in [0,T]$

Замечание: обратное утверждение тривиально: если $x_t^n \to x_t$ в среднем квадратичном, то x_t будет $\mathcal{F}_t^w$ - измеримым как предел последовательности $\mathcal{F}_t^w$ - измеримых случайных величин x_t^n.

③ Доказательство леммы Ш.2.

+) Такое x_t^n всегда можно построить, т.к. $b^n(t,x)$ и $\sigma^n(t,x)$ липшицевы (см. [I]).