(а) Обозначим $u^n(s,x)$ решение уравнения

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{(n)} u^n(s,x) + (u^n)'_x \sigma^n(s,x) m(s) = 0, & s \in [0,t] \\ u(t,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

Из теории дифференциальных уравнений (см. [9]) известно, что

$$u^n(s,x) \to u(s,x) \tag{24}$$

где $u(s,x)$ – решение уравнения (20)

(б) Согласно лемме П.2, из (24) следует, что

$$M\, p_t(m)\, \varphi(x_t^n) \to M\, p_t(m)\, \varphi(x_t) \tag{25}$$

(в) Взяв в формуле (25) $\varphi(x) = x$, мы получаем, что для любого $m \in \mathcal{M}$

$$M\, p_t(m)\, x_t^n \to M\, p_t(m)\, x_t \tag{26}$$

добавив к этому оценку

$$M|x_t^n|^2 \leqslant K \quad \forall n, \quad M|x_t|^2 \leqslant K$$

(такая оценка легко следует из ограниченности коэффициентов b^n, b, σ^n, σ), получим, согласно лемме Ш.I, что $x_t^n \to x_t$ слабо в $H_2^{\omega}[0,t]$ +)

+) Здесь мы существенно пользуемся предположением, что $x_t \in H_2^{\omega}[0,t]$, т.е. тем, что x_t – сильное решение

(г) Покажем, что сходимость $x_t^n \to x_t$ на самом деле сильная. Для этого, как известно, достаточно показать, что нормы x_t^n сходятся к норме x_t, т.е., что $M|x_t^n|^2 \to M|x_t|^2$, а это есть частный случай формулы (25) при $\varphi(x) = |x|^2$, $m(t) \equiv 0$ (тогда $p_t(m) \equiv 1$). Равномерность по t на каждом конечном отрезке времени следует из аналогичной равномерности в формуле (24).

Лемма Ш.2 доказана.

4) Переходим к доказательству следствия I.а. Здесь мы докажем его только для непрерывных $\sigma(t,x)$. При более слабом требовании непрерывности $a(t,x)$ аналогичное утверждение следует из теоремы 2, см. замечание в конце параграфа (п. У).

Пусть (x_t, ω_t) – сильное решение уравнения (I). Пусть $(\tilde{x}_t, \tilde{\omega}_t)$ – еще одно решение уравнения (I) (возможно, заданное на другом вероятностном пространстве). Нам нужно показать, что процесс $\tilde{x}_t$ измерим относительно σ-алгебр $\mathcal{F}_t^{\tilde{\omega}}$.

(а) Обозначим $\psi_t = M\{\tilde{x}_t \mid \mathcal{F}_t^{\tilde{\omega}}\}$; нам нужно показать, что $\psi_t = \tilde{x}_t$ (п.н.) Согласно неравенству Иенсена имеем

$$|M\{\tilde{x}_t \mid \mathcal{F}_t^{\tilde{\omega}}\}|^2 \leqslant M\{|\tilde{x}_t|^2 \mid \mathcal{F}_t^{\tilde{\omega}}\}$$

взяв математическое ожидание от обеих частей неравенства, получим