$$M|\psi_t|^2 \leq M|\tilde{x}_t|^2$$

причем равенство, как известно, достигается только в случае $\psi_t = \tilde{x}_t$ (п.н.) Поэтому нам достаточно показать, что $M|\psi_t|^2 = M|\tilde{x}_t|^2$.

(б) Возьмем последовательность гладких по x функций $b^n(t,x)$, $\sigma^n(t,x)$ таких, чтобы для них были выполнены предположения леммы III.2, и построим процессы x_t^n, $\tilde{x}_t^n$ как решения уравнений

$$dx_t^n = b^n(t,x_t^n)\,dt + \sigma^n(t,x_t^n)\,d\omega_t, \quad x_0^n = x$$

$$d\tilde{x}_t^n = b^n(t,\tilde{x}_t^n)\,dt + \sigma^n(t,\tilde{x}_t^n)\,d\tilde{\omega}_t, \quad \tilde{x}_0^n = x$$

соответственно. Про эти процессы можно заметить следующее:

- процессы x_t^n и $\tilde{x}_t^n$ являются сильными решениями соответствующих уравнений (т.к. коэффициенты $b^n(t,x)$ и $\sigma^n(t,x)$ удовлетворяют условию Липшица по x);
- процессы $x_t^n \to x_t$ в среднем квадратичном, т.к. x_t – сильное решение (сходимость следует из леммы III.2);
- процессы x_t и $\tilde{x}_t$, а также для любого n процессы x_t^n и $\tilde{x}_t^n$ имеют одинаковые конечномерные распределения (это следует из утверждения VI.I § I); более того, для любого n n-ки $(x_t^1, \ldots, x_t^n)$ и $(\tilde{x}_t^1, \ldots, \tilde{x}_t^n)$ тоже имеют одинаковые конечномерные распределения.

(в) Согласно (26),

$$M p_t(m)\, x_t^n \to M p_t(m)\, x_t$$

Т.к. случайные величины $\tilde{x}_t^n, \tilde{x}_t, \tilde{p}_t(m)$ +) имеют те же самые совместные распределения, имеем

$$M \tilde{p}_t(m)\, \tilde{x}_t^n \to M \tilde{p}_t(m)\, \tilde{x}_t$$

Взяв под знаками математических ожиданий условное математическое ожидание $M\{\cdot \mid \mathcal{F}_t^{\tilde{\omega}}\}$, получим

(27) $\quad M \tilde{p}_t(m)\, \tilde{x}_t^n \to M \tilde{p}_t(m)\, \psi_t\,;$

т.к. $\psi_t \in H_2^{\tilde{\omega}}[0,t]$, из (27), согласно лемме II.I, следует слабая сходимость $\tilde{x}_t^n \to \psi_t$.

(г) Согласно теореме Банаха-Сакса (см. [15]), из последовательности $\tilde{x}_t^n$ можно извлечь такую подпоследовательность (будем считать ее совпадающей с самой последовательностью), для которой средние арифметические сходятся к ψ_t сильно. Тогда

$$M|\psi_t|^2 = \lim_{n\to\infty} M\left|\frac{\tilde{x}_t^1 + \ldots + \tilde{x}_t^n}{n}\right|^2 = \lim_{n\to\infty} M\left|\frac{x_t^1 + \ldots + x_t^n}{n}\right|^2 =$$

$$= M|x_t|^2 = M|\tilde{x}_t|^2$$

+) Чтобы получить $\tilde{p}_t(m)$, нужно в (19) вместо ω_t подставить $\tilde{\omega}_t$.