x', x'', ω – непрерывные функции на $[0,T]$ со значениями в R^n;

(б) $\mathcal{F} = B_T \times B_T \times B_T$

(в) мера P определяется так:

$$P(dx' dx'' d\omega) = P'(dx' | \omega) P''(dx'' | \omega) W(d\omega)$$

где W – винеровская мера на $C_{[0,T]}$

Определим случайные процессы $x'_t(\omega) = x'(t)$, $x''_t(\omega) = x''(t)$, $\omega_t(\omega) = \omega(t)$. Тогда согласно лемме IV.I, пары процессов (x'_t, ω_t) и (x''_t, ω_t) есть решения уравнения (I).

(4) Переходим к доказательству следствия 2.

(а) Мы построили вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ и на нем два решения (x'_t, ω_t) и (x''_t, ω_t) уравнения (I) с одним и тем же винеровским процессом ω_t, причем $x'_0 = x''_0 = x$. Поэтому, согласно нашему предположению о сильной единственности решения уравнения (I), имеем:

$$P\{\forall t \in [0,T] \quad x'_t = x''_t\} = 1 \tag{29}$$

Выведем отсюда, что условные меры $P'(\cdot | \omega)$ и $P''(\cdot | \omega)$ почти наверное сосредоточены каждая в одной точке.

(б) Зафиксируем $t \in [0,T]$ и $\omega = \omega_0^T \in C_{[0,T]}$. Тогда мера Q_t на $R^n \times R^n$, по которой распределена пара (x'_t, x''_t), обладает следующими двумя свойствами:

I) Мера Q_t сосредоточена на гиперплоскости $\{x' = x''\}$ (т.е. $Q_t\{x' = x''\} = 1$; это следует из (29));

2) Мера Q_t есть произведение двух мер $Q_t = P'_t P''_t$, где P'_t и P''_t – меры, по которым распределены x'_t и x''_t в R^n (этот факт следует из построения $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ и из того, что мы зафиксировали ω_0^T).

(в) Имеем (индекс t опускаем):

$$0 = \int_{R^n \times R^n} |x' - x''|^2 dQ = \int_{R^n \times R^n} |x' - x''|^2 dP' dP'' =$$

$$= \int_{R^n} \left(\int_{R^n} |x' - x''|^2 dP'' \right) dP' \tag{30}$$

Распишем внутренний интеграл:

$$\int_{R^n} |x' - x''|^2 dP'' = \int_{R^n} [|x'|^2 + |x''|^2 - 2(x', x'')] dP'' =$$

$$= |x'|^2 + M|x''|^2 - 2(x', Mx'') \geq |x'|^2 + |Mx''|^2 -$$

$$- 2(x', Mx'') = |x' - \bar{x}|^2$$

где $\bar{x} = Mx''$ – неслучайный вектор из R^n. Продолжая цепочку равенств (30), имеем

$$0 \geq \int_{R^n} |x' - \bar{x}|^2 dP' \geq 0$$