то есть

$$\int\limits_{R^n} |x' - \bar{x}|^2 dP' = 0$$

откуда $x' = \bar{x}$ п.н. - P'. Аналогичное рассуждение можно провести для x''.

(г) Итак, для (почти) любого $\omega \in C_{[0,T]}$ найдется такое $\bar{x} \in R^n$, что с вероятностью I $x'_t = \bar{x}$, $x''_t = \bar{x}$. Иными словами, существует отображение $F_t : C_{[0,T]} \to R^n$ такое, что если x_t - решение уравнения (I), то $x_t = F_t(\omega_0^T)$ п.н. Осталось установить, что отображение F_t $\mathcal{F}_t^{\omega}$ - измеримо. Но, по определению регулярной условной вероятности и согласно лемме IУ.2, для любого борелевского множества $\Gamma \subset R^n$ функция $f(\omega) = P\{x_t \in \Gamma \mid \omega\}$ является $\mathcal{F}_t^{\omega}$ - измеримой; в то же время эта функция равна

$$P\{x_t \in \Gamma \mid \omega\} = \begin{cases} 1, \text{ если } F_t(\omega) \in \Gamma \\ 0, \text{ если } F_t(\omega) \notin \Gamma \end{cases}$$

следовательно,

$$\{\omega \in C_{[0,T]} : F_t(\omega) \in \Gamma\} = \{\omega : f(\omega) = 1\} \in \mathcal{F}_t^{\omega}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2, а с ним и теорема I доказаны.

(5) Следствие 2'. Если для некоторого набора $\{\Omega, \mathcal{F}, P; \omega_t, \mathcal{F}_t^{\omega}\}$ существует сильное решение x_t уравнения (I), то и для любого другого набора $\{\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}, \tilde{\omega}_t, \mathcal{F}_t^{\tilde{\omega}}\}$ существует сильное решение $\tilde{x}_t$.

Доказательство. Положим $\tilde{x}_t = F_t(\tilde{\omega}_0^T)$. Пара процессов $(\tilde{x}_t, \tilde{\omega}_t)$, очевидно, порождает в $C_{[0,T]} \times C_{[0,T]}$ ту же меру, что и (x_t, ω_t). Остается воспользоваться леммой IУ.I и следствием I.а.

Следствие 2''. Из единственности по траекториям следует единственность в смысле меры.

Доказательство очевидно в силу представления $x_t = F_t(\omega)$.

У. Критерий существования сильного решения.

(1) Рассмотрения п. У базируются на более детальном изучении структуры гильбертова пространства $H_2^{\omega}[0,T]$, введенного в п. II. Для простоты органичимся одномерным случаем, хотя все рассуждения можно повторить и для многомерного случая.

Мы уже указывали (см. лемму II.I), что случайные величины $P_t(m)$, $m \in \mathcal{M}$, образуют тотальное семейство векторов в $H_2^{\omega}[0,T]$. С помощью этих векторов можно построить ортонормированный базис в $H_2^{\omega}[0,T]$. Это делается следующим образом: