I. Основные утверждения.

В этом параграфе будет доказана следующая теорема о существовании и единственности сильных решений;

Теорема 3. Пусть коэффициенты $b(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ уравнения (I) удовлетворяют условиям А, Б, В (§ I, п. УI). Тогда следующие условия являются достаточными для существования сильного решения и его единственности по траекториям:

I) в n-мерном случае : диффузия удовлетворяет условию Липшица по x, и оба коэффициента – условию Дини:

$$|\sigma(t,x_2)-\sigma(t,x_1)| \leq K|x_2-x_1| \tag{4I}$$

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\rho(z)}{z}\,dz < \infty \tag{42}$$

где $\rho(z)$ – модуль непрерывности функций $b(t,x)$, $\sigma(t,x)$ (по паре аргументов);

2) в одномерном случае: диффузия удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha \geq \frac{1}{2}$:

$$|\sigma(t,x_2)-\sigma(t,x_1)| \leq K\cdot|x_2-x_1|^{\alpha}, \quad \alpha \geq \frac{1}{2} \tag{43}$$

а снос ограничен и измерим;

3) в одномерном случае, если $b(t,x)=b(x)$, $\sigma(t,x)=\sigma(x)$: диффузия имеет постоянный знак и ограниченную вариацию на каждом конечном отрезке:

$$\sigma(x) \geq \mu > 0 \tag{44}$$

$$\operatorname{var}_{[-N,N]}\sigma(x) = \sup_{-N=x_0<\ldots<x_n=N} \sum |\sigma(x_{k+1})-\sigma(x_k)| < \infty \tag{45}$$

а снос ограничен и измерим

Замечание.

а) Согласно теореме I, нам достаточно доказать что-либо одно: или существование сильного решения, или единственность по траториям (слабого) решения. Мы предпочтем второе – будем доказывать единственность по траекториям.

б) Очевидно, что единственность по траториям достаточно доказать для произвольно малого отрезка $[0,\varepsilon]$, только в уравнении (I)-(2) следует при этом заменить начальное условие $x_0=x$ на $x_0=\xi$, где ξ – случайная величина. Тогда, разбив большой отрезок $[0,T]$ на малые части, мы получим единственность на всем отрезке $[0,T]$. В дальнейшем будет считать $T>0$ достаточно малым (хотя это потребуется только в г. П).

П. Преобразование, уничтожающее снос.