например, [6]):

Производная $f'(x)$ есть линейное отображение $f'(x): L^n_x \to L^m_y$ (здесь $y = f(x) \in R^m$) с матрицей $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, состоящей из m строк и n столбцов;

Вторая производная $f''(x)$ есть билинейное отображение $f''(x): L^n_x \times L^n_x \to L^m_y$

Для отображения $f: R^n \times R^m \to R^K$, $f(x,y) = z$ обозначим через $L^n_{(x,y)}$ и $L^m_{(x,y)}$ линейные подпространства пространства $L^{n+m}_{(x,y)}$, параллельные R^n и R^m соответственно; тогда:

Частная производная $f'_x(x,y)$ есть линейное отображение $f'_x(x,y): L^n_{(x,y)} \to L^K_z$

Вторая частная производная $f''_{xx}(x,y)$ есть билинейное отображение $f''_{xx}(x,y): L^n_{(x,y)} \times L^n_{(x,y)} \to L^K_z$;

Аналогично определяются производные $f'_y(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)$, $f''_{xy}(x,y)$.

4 Введем симметричную матрицу $a(t,x) = \sigma \cdot \sigma^*$ (здесь σ^* - матрица, транспонированная к матрице σ); она будет играть роль матрицы билинейной формы на L^n_x, $a: L^n_x \times L^n_x \to R$ *)

Пусть $e_1, \dots, e_n$ - произвольный базис в L^n_x, $d_1, \dots, d_n$ - биортогональный ему базис (т.е.

*) Правильней было бы считать a билинейной формой на пространстве $(L^n_x)^*$, сопряженном к L^n_x; но мы отождествили L^n_x и $(L^n_x)^*$, фиксировав скалярное произведение в L^n_x

$(e_i, d_j) = \delta_{ij}$) +)

Дифференциальный оператор $\mathcal{L}^{(x_t)}$, соответствующий процессу x_t, определяется следующим образом: для $u: [0,T] \times R^n \to R^m$

$$(3) \quad \mathcal{L}^{(x_t)} u(t,x) = u'_t + u'_x \cdot b(t,x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} u''_{xx}(e_i, e_j) a(t,x)(d_i, d_j) \text{ ++)}$$

5 В качестве нормы матриц нам будет удобно выбрать $|(a_{ij})| = \max_{ij} |a_{ij}|$; в соответствии с этим

$$|f'(x)| = \max_{i,j} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right|$$

$$|f''(x)| = \max_{i,j,k} \left| \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|$$

Для области $\mathcal{D} \subset R^n$ пространство $W_p^{1,2}([0,T] \times \mathcal{D})$, $p > 1$, есть пополнение семейства бесконечно дифференцируемых финитных функций по норме

$$\|u(t,x)\|_{W_p^{1,2}} = \|u(t,x)\|_{L_p} + \|u'_t(t,x)\|_{L_p} + \|u'_x(t,x)\|_{L_p} + \|u''_{xx}(t,x)\|_{L_p}$$

+) Заметим, что если базис $e_1, \dots, e_n$ ортонормированный, то $e_k = d_k$

++) Сумма в правой части (3) не зависит от выбора базиса (см. [7]).