где

$$\|f(t,x)\|_{L_p} = \left(\int_{[0,T]\times\mathcal{D}} |f(t,x)|^p \, dt\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Аналогично определяется пространство $W_p^2(\mathcal{D})$ (выбрасывается член с производной по t и интегрирование ведется по $\mathcal{D}$). Подробнее о свойствах пространств W см. [8], [9].

Если функция $u(t,x)$, определенная на $[0,T]\times R^n$, принадлежит пространству $W_p^{1,2}([0,T]\times\mathcal{D})$ для любой ограниченной области $\mathcal{D}\subset R^n$, будем писать просто $u\in W_p^{1,2}$. Аналогичное соглашение введем и для пространств W_p^2, L_p.

III. Определения.

① Сильное решение. Дано вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, на нем задан винеровский процесс $\{w_t, \mathcal{F}_t^w\}$, и даны измеримые функции $b_k:[0,T]\times R^n\to R$, $k=1,\ldots,n$, $\sigma_{ij}:[0,T]\times R^n \to R$, $i,j=1,\ldots,n$.

Требуется построить процесс x_t, при каждом t измеримый относительно σ - алгебры $\mathcal{F}_t^w$ (т.е. $x_t\in H^w[0,t]$ при всех $t\in[0,T]$) и такой, что с вероятностью 1 равенство (I) выполняется для всех $t\in[0,T]$ сразу. Пара процессов $\{(x_t,w_t), \mathcal{F}_t^w\}$ называется сильным решением уравнения (I) (или уравнения (2)).

② Слабое решение. Даны только функции $b_k(t,x)$ и $\sigma_{ij}(t,x)$. Требуется построить вероятностное пространство $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$ и на нем такую пару процессов

$\{(x_t,w_t), \mathcal{F}_t\}$, что $\{w_t,\mathcal{F}_t\}$ - винеровский процесс и с вероятностью I равенство (I) выполняется для всех $t\in[0,T]$ сразу. Такая пара процессов $\{(x_t,w_t),\mathcal{F}_t\}$ называется слабым решением уравнения (I) (или уравнения (2)).

③ Формальное различие между приведенными двумя определениями состоит в том, что:

а) сильное и слабое решения есть решения разных задач: в одном случае надо построить только x_t (все остальное дано), в другом случае - построить Ω, $\mathcal{F}$, P, $\mathcal{F}_t$, w_t, x_t;

б) (важно!) если (x_t,w_t) - слабое решение, то x_t не обязательно должно быть измеримо относительно σ - алгебры $\mathcal{F}_t^w$.

Фактически, как это будет видно из результатов § 2, разница между сильными и слабыми решениями лежит глубже и не является такой формальной (т.е. связана не только с измеримостью).

Замечание. Мы будем допускать следующие вольности речи:

а) называть слабым решением не пару процессов (x_t,w_t), а сам процесс x_t;

б) называть тот же процесс x_t сильным решением, если он окажется $\mathcal{F}_t^w$ - измеримым (таким образом, слабое решение может оказаться сильным);

в) называть слабое решение просто "решением" уравнения (I).

Оба приводимых ниже определения единственности звучат одинаково для слабых и для сильных решений.

④ Сильная единственность (единственность по траекториям).