Если для любых двух решений (x'_t, ω'_t) и (x''_t, ω''_t), заданных на одном и том же вероятностном пространстве, из равенства $x'_0 = x''_0$ и $\omega'_t \equiv \omega''_t$ (п.н.) следует, что

$$(4) \quad P\{\max_{t\in[0,T]} |x'_t - x''_t| > 0\} = 0$$

то говорят, что решения уравнения (I) единственно в сильном смысле, или единственно по траекториям.

5) Слабая единственность (единственность по мере). Если для любых двух решений (x'_t, ω'_t) и (x''_t, ω''_t) уравнения (I) у этих пар процессов совпадают все конечномерные распределения, то говорят, что решение уравнения (I) единственно в слабом смысле, или единственно в смысле меры.

IУ. Примеры.

Пример I. В этом примере будет продемонстрирован типичный способ построения слабых решений. Будем строить решение уравнения

$$(5) \quad \begin{cases} dx_t = \alpha(t, x_0^t)\,dt + d\omega_t \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

где $\alpha(t, x_0^t)$ – ограниченный неупреждающий (т.е. $\mathcal{F}_t^x$ – измеримый при каждом t) функционал.

Возьмем произвольный винеровский процесс ξ_t и рассмотрим новый процесс

$$\eta_t = \xi_t - \int_0^t \alpha(s, \xi_0^s)\,ds$$

Известно (см. [IO] или [II]), что процесс η_t тоже является винеровским, но только относительно новой меры $\widetilde{P}$, которая абсолютно непрерывна относительно исходной меры P, с производной Радона-Никодима.

$$e^{\int_0^T \alpha(t,\xi_0^t)\,d\xi_t - \frac{1}{2}\int_0^T \alpha^2(t,\xi_0^t)\,dt}$$

Перейдем к этой новой мере $\widetilde{P}$. Тогда получим: η_t – винеровский процесс, и

$$\xi_t = \int_0^t \alpha(s, \xi_0^s)\,ds + \eta_t$$

т.е. если обозначить $x_t = \xi_t$, $\omega_t = \eta_t$, то получим решение уравнения (5).

Обратите внимание на то, что один и тот же (первоначально винеровский) процесс ξ_t может служить решением уравнения (5) при самых различных $\alpha(t, x_0^t)$ – при этом только будут меняться мера $\widetilde{P}$ и винеровский процесс η_t. Итак, сначала строится искомый процесс x_t, а потом для него подбирается подходящая мера $\widetilde{P}$ и подходящий винеровский процесс ω_t (подбираются, вместо того, чтобы быть заданными заранее). При этом вместо того, чтобы $x_t \in H^{\omega}[0,t]$, получается наоборот – $\omega_t \in H^{x}[0,t]$

Возникает вопрос: значит, с одним винеровским процессом (с тем, который мы построили) решение существует; а если бы нам задали заранее другой винеровский процесс, неужели может получиться так, что с ним решения не существует? Чем же могут отличаться друг от друга эти два винеровских процесса?