Вопрос очень странный. Ясного ответа на него пока нет. Видимо, сама постановка вопроса нуждается в уточнении. Отметим лишь, что для того, чтобы хоть как-то построить x_t по w_t, нужно, чтобы x_t выражалось через w_t с помощью измеримого отображения, а этого как раз не дает слабое решение.

Пример 2 (Х. Танака). Этот пример показывает, что действительно существуют слабые решения, не являющиеся сильными, и что из единственности по мере не ~~существует~~ следует единственность по траекториям.

Рассмотрим уравнение

$$(6) \qquad \begin{cases} dx_t = \sigma(x_t)\, dw_t \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

где $\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ (заметим, что $\sigma^2(x) \equiv 1$).

а) Слабая единственность. Мартингал $x_t = \int_0^t \sigma(x_s)\, dw_s$, согласно §2.5 [5], является винеровским процессом относительно нового времени $\tau_t = \int_0^t \sigma^2(x_s)\, ds = t$, которое в данном случае совпадает со старым. Значит, любое решение x_t имеет одни и те же (а именно, винеровские) конечномерные распределения.

б) Существование слабого решения. Возьмем в качестве x_t произвольный винеровский процесс, и построим $\tilde{w}_t = \int_0^t \sigma(x_s)\, dx_s$. Процесс $\tilde{w}_t$ – тоже винеровский (можно сделать такую же замену времени, как в п. (а)), причем

$d\tilde{w}_t = \sigma(x_t)\, dx_t$, откуда

$$\sigma(x_t)\, d\tilde{w}_t = \sigma(x_t)\sigma(x_t)\, dx_t = dx_t$$

Значит, $(x_t, \tilde{w}_t)$ –(слабое) решение уравнения (6).

в) Отсутствие сильной единственности. Вместе с решением $(x_t, \tilde{w}_t)$ уравнение (6) всегда имеет по крайней мере еще одно решение $(-x_t, \tilde{w}_t)$

г) Отсутствие сильного решения.+) Никакое решение уравнения (6) не является сильным, т.е. x_t заведомо неизмеримо относительно σ - алгебры $\mathcal{F}_t^w$. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим случайную величину θ_t – локальное время, проведенное процессом x_t в нуле. Так как процесс x_t – винеровский, θ_t представляется в виде (см. [5], § 3.8)

$$\theta_t = x_t^+ - \int_0^t \chi_{[0,\infty)}(x_s)\, dx_s$$

(Здесь $x^+ = max(x,0)$, $x^- = -min(x,0)$, $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$).

В силу очевидной симметрии

$$\theta_t = x_t^- + \int_0^t \chi_{(-\infty,0]}(x_s)\, dx_s$$

+) Неизмеримость x_t относительно $\mathcal{F}_t^w$ следует из общей теории, развитой в § 2 (см. следствие 3 теоремы 1) но в случае нашего примера это можно доказать с помощью искусственного приема, что мы и делаем.