Сложив эти два равенства, получим

$$2\theta_t = |x_t| - \int_0^t \operatorname{sgn} x_s\, dx_s = |x_t| - \int_0^t \operatorname{sgn} x_s\, \sigma(x_s)\, dw_s = |x_t| - w_t$$

откуда, по определению локального времени

$$w_t = |x_t| - 2\theta_t = |x_t| - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \chi_{[0,\varepsilon]}(|x_s|)\, ds$$

т.е. w_t измеримо выражается через $|x_t|$, и $\mathcal{F}_t^{w} \subset \mathcal{F}_t^{|x|}$. Предположив, что $x_t \in H^{w}[0,t]$, т.е. $\mathcal{F}_t^{x} \subset \mathcal{F}_t^{w}$, мы получим нелепое следствие $\mathcal{F}_t^{x} \subset \mathcal{F}_t^{|x|}$.

Пример 3. Этот пример развивает идею предыдущего примера. Рассмотрим двумерное уравнение

$$(7) \qquad \begin{cases} dx_t = \sigma(x_t)\, dw_t \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

где

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & -\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что матрица $\sigma(x)$ ортогональна при всех x и бесконечно дифференцируема по x всюду кроме точки $x=0$, где она разрывна.

а) Построим слабое решение. Для этого возьмем в качестве x_t произвольный винеровский процесс, а процесс w_t построим по формуле

$$w_t = \int_0^t \sigma^{-1}(x_s)\, dw_s$$

То, что полученная пара процессов (x_t, w_t) образует решение, следует из соотношения $dw_t = \sigma^{-1}(x_t)\, dx_t$, откуда $dx_t = \sigma(x_t)\, dw_t$

То, что построенный нами процесс w_t является винеровским, следует из ортогональности матрицы σ : в силу $\sigma^{-1} = \sigma^*$ имеем

$$\langle w_t^{(i)}, w_t^{(j)} \rangle = \int_0^t \left(\sigma^{-1} (\sigma^{-1})^*\right)_{ij}\, ds = \delta_{ij}\, t$$

т.к. $\sigma^{-1}(\sigma^{-1})^* = E$ (единичной матрице) (определение скобки $\langle \cdot , \cdot \rangle$ см. в [II], гл. 5 , § I)

б) Точно так же для процесса x_t имеем

$$\langle x_t^{(i)}, x_t^{(j)} \rangle = \int_0^t (\sigma\sigma^*)_{ij}\, ds = \delta_{ij}\, t$$

т.е. любое решение x_t уравнения (7) имеет винеровскую меру

в) Легко проверить, что вместе с решением (x_t, w_t) уравнение (7) имеет еще целое семейство решений(Ax_t, w_t), где A – произвольная ортогональная матрица. Действительно,

$$d(Ax_t) = A\, dx_t = A\, \sigma(x_t)\, dw_t$$

и осталось проверить, что $A\,\sigma(x) = \sigma(Ax)$, а это проверяется прямым вычислением.