*) Отсутствие сильного решения следует из теоремы I, §2, (см. следствие 3).

Заметим, что если бы мы взяли начальную точку $x_0 \neq 0$, то решение было бы сильным и единственным по траекториям (оно было бы таким до тех пор, пока решение не выйдет из области, где $\sigma(x)$ – гладкая, т.е. из области $R^2 \setminus \{0\}$, а решение, являясь винеровским процессом, никогда не выйдет из этой области, т.к. никогда не зайдет в нуль).

У. Обсуждение.

Рассмотрим вопрос о том, в каких случаях достаточно иметь слабое решение уравнения (I), и когда имеется необходимость в сильных решениях.

Разница между сильными и слабыми решениями во многом аналогична разнице между случайной величиной и ее распределением: строя слабое решение, мы строим нужную меру в пространстве траекторий, строя сильное решение – строим конкретную функцию $x_t = x(t,\omega)$. Поэтому:

(1) Слабые решения могут удовлетворить нас в тех ситуациях, когда ответы на интересующие нас вопросы связаны только с мерой в пространстве траекторий. Такими вопросами являются: вычисления различных вероятностей и математических ожиданий; вопросы, связанные с устойчивостью процессов, существованием инвариантных мер; вопросы абсолютной непрерывности мер для разных процессов; вероятностные представления решений дифференциальных уравнений с частными производными,

и так далее.

Но бывают ситуации, когда диффузионный процесс необходимо рассматривать как конкретное семейство траекторий. В этих случаях необходимо иметь сильное решение.

Приведем примеры.

(2) Известен результат, называемый "теоремой сравнения" (см. [12]):

Если x_t' и x_t'' – решения уравнений

(8.1) $$d x_t' = b_1(t, x_t')\,dt + d w_t$$

(8.2) $$d x_t'' = b_2(t, x_t'')\,dt + d w_t$$

причем $x_0' = x_0''$, а $b_1(t,x) > b_2(t,x)$, то для $t>0$ имеем $x_t' > x_t''$ (п.н.)

Приведенный результат для слабых решений не имеет смысла хотя бы уже потому, что они могут оказаться заданными на разных вероятностных пространствах. Но даже и на одном пространстве, если строить решения уравнений (8.1) и (8.2) так, как это делается в примере I п. IУ, т.е. выбирать процессы x_t' и x_t'' заранее, еще не зная коэффициентов b_1 и b_2, то может получиться, что $x_t'(\omega) = x_t''(\omega)$, или $x_t'(\omega) = -x_t''(\omega)$, и т.п., т.е. вывод теорема становиться неверным.

(3) Другой пример дает теория управляемых диффузионных процессов. *) Пусть на отрезке $[0,T]$ заданы процессы

---

*) Трудно сказать, какое отношение все сказанное дальше имеет к практическим задачам управления (по-видимому, никакого). Мы ведем обсуждение только в рамках математических моделей.