УДК 519.2

Н.В. КРЫЛОВ, М.В. САФОНОВ

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА В МНОЖЕСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 16 IX 1978)

1. Во многих вопросах теории случайных процессов важную роль играют оценки вероятности попадания процесса в те или иные множества. В настоящей статье для процессов диффузионного типа мы оценим снизу подобную вероятность через меру множества. С помощью этой оценки удается доказать, что диффузионные процессы, отвечающие параболическим операторам с измеримыми коэффициентами, обладают свойством стандартности (см. определение в ([1])). Эта оценка также применяется при выводе для недивергентных уравнений известных, двадцатилетней давности результатов Де Джорджи и Нэша о непрерывности по Гельдеру решений эллиптических и параболических уравнений в дивергентной форме (см. ([2],[3])). Отметим, что для недивергентных эллиптических и параболических уравнений при некоторых ограничениях на разброс собственных чисел матрицы коэффициентов при старших производных теоремы Де Джорджи и Нэша доказаны в ([4]). С помощью нашей оценки вероятности такие теоремы получаются без ограничений на величину разброса собственных чисел.

2. Пусть $E_n = \{x = (x^1, \ldots, x^n)\}$ — n-мерное евклидово пространство, $n, \mu, \nu, \theta, \alpha, \epsilon$ — фиксированные числа, $\nu > \mu > 0$, $\theta \in (0, 1]$, $\alpha \in (0, 1)$, $\epsilon \in (0, 1)$. При $x \in E_n$, $R > 0$ положим $|x| = \max |x^i|$, $Q(\theta, R) = (0, \theta R^2) \times (|x| < R)$. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ — вероятностное пространство, на котором определен n_1-мерный винеровский процесс $(w_t, \mathscr{F}_t)$ для некоторого $n_1 \geqslant n$. Пусть при $t \geqslant 0, \omega \in \Omega$ определены: σ_t — матрица размера $n \times n_1$, $b_t \in E_n$. Предположим, что σ_t, b_t прогрессивно измеримы относительно потока σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t\}$ и существует число $R > 0$ такое, что $R|b_t| \leqslant \nu$, $\nu|\lambda| \geqslant |\sigma_t^* \lambda| \geqslant \mu|\lambda|$ при всех $\lambda \in E_n$, t, ω. Фиксируем подходящее R. Наконец, пусть $\beta \in [\theta, 1]$ и замкнутое множество $\Gamma \subset Q(\beta, R)$, $|\Gamma| \geqslant \epsilon |Q(\beta, R)|$, где $|D|$ для $D \subset E_{n+1} = \{(t, x) : t \in E_1, x \in E_n\}$ обозначает меру Лебега D. Возьмем некоторую $\mathscr{F}_0$-измеримую величину $\xi \in E_n$ такую, что $P\{|\xi| < \alpha R\} = 1$, и определим процесс x_t условиями $x_0 = \xi$, $dx_t = \sigma_t dw_t + b_t dt$. Для $D \subset E_{n+1}$ положим $\tau(D) = \inf\{t > 0 : (t, x_t) \in \partial D\}$ $(\inf \phi = \infty)$. Следующая теорема является основной в работе.

Теорема 1. *Существует постоянная $\delta > 0$, зависящая только от n, μ, ν, θ, α, ϵ (но не от Γ, R, $\beta, \ldots$), такая, что $P\{\tau(\Gamma) < \tau(Q(\beta, R))\} \geqslant \delta$.*

3. Пусть $Lu = u_t + a^{ij} u_{x^i x^j} + b^i u_{x^i} - cu$, где $a = (a^{ij})$, $b = (b^i)$, c — борелевские функции от (t, x) на E_{n+1}, a — симметричная матрица размера $n \times n$, $b \in E_n$, $c \geqslant \mu$. Пусть $\nu|\lambda|^2 \geqslant (a\lambda, \lambda) \geqslant \mu|\lambda|^2$, $|b| \leqslant \nu$, $|c| \leqslant \nu$ при всех $\lambda \in E_n$, t, x. Пусть $Y = (y_t, \zeta, N_t, P_y)$ — непрерывный однородный марковский процесс в E_{n+1}, отвечающий L в том смысле, что для любой $u \in C_0^\infty(E_{n+1})$ при всех $t > s$, $x \in E_n$

$$u(s, x) = M_{(s,\, x)} \left[\int_0^{t-s} Lu(y_r)\, dr + u(y_{t-s}) \right].$$

Пусть, кроме того, N_t есть пополнение $\sigma(y_s, s \leqslant t)$ по всем P_y. Существование таких процессов вытекает, например, из ([5]). Если область $D \subset E_{n+1}$, f — борелевская функция, то пусть τ — момент первого выхода y_t из D,

$$R(D) f(y) = M_y \int_0^\tau f(y_t)\, dt, \quad \pi(D) f(y) = M_y f(y_\tau).$$

Теорема 2. а) *Y — строго марковский процесс и $N_t = N_{t+}$.*

б) *Если $f \in \mathscr{L}_{n+1}(D)$, $\varphi \in B(\partial D)$, то $R(D)f$, $\pi(D)f$ непрерывны по Гёльдеру на любом компакте $K \subset D$, причем показатель Гёльдера зависит только от n*