*$\nu$, $\mu$, а постоянная – только от $n$, $\nu$, $\mu$, расстояния $K$ до $\partial D$ и от норм $f$ в $\mathscr{L}_{n+1}(D)$, $\varphi$ в $B(\partial D)$.*

4. Т е о р е м а 3. *Пусть область $D \subset E_{n+1}$, $L$ – оператор из п. 3.*

*Тогда существуют ограниченные операторы $R: \mathscr{L}_{n+1}(D) \to B(D)$, $\pi: B(\partial D) \to \to B(D)$, переводящие неотрицательные функции в неотрицательные и такие, что* : а) *для любой $u \in W^{1,2}_{n+1}(D) \cap C(\bar{D})$ в $D$ справедливо представление $u = Rf + \pi\varphi$, где $f = -Lu$, $\varphi$ – значение $u$ на $\partial D$,* б) *если $f_1, f_2 \in \mathscr{L}_{n+1}(D)$, $Rf_1 = Rf_2$ (п. в.), то $f_1 = f_2$ (п. в.),* в) *для $R$, $\pi$ справедливо утверждение* б) *теоремы* 2.

Аналогичная теорема справедлива в том случае, когда $L$ – эллиптический оператор (в записи $L$ из п. 3 отсутствует $u_t$ и $a, b, c$ не зависят от $t$). Для того чтобы ее сформулировать, достаточно в теореме 3 заменить $n+1$ на $n$, $W^{1,2}$ – на $W^2$.

5. В доказательстве теорем 2, 3 важную роль играет теорема 1. Для пояснения этого наметим доказательство оценки показателя и постоянной Гёльдера решения из $W^{1,2}_{n+1}(D)$ уравнения $u_t + a^{ij}u_{x^ix^j} = 0$ (п.в. $D$), где $a$ удовлетворяет условиям п. 3. Положим $Q(R) = Q(1, R)$. Как хорошо известно из теории дифференциальных уравнений (см. ([3]), гл. V, § 10, ([4]), гл. III, § 8), для получения нужной оценки достаточно показать, что $\operatorname{osc}\{u, Q(R)\} \leqslant \rho \cdot \operatorname{osc}\{u, Q(2R)\}$ (при $Q(2R) \subset D$) с постоянной $\rho < 1$, зависящей лишь от $n$, $\nu$, $\mu$, причем, рассматривая фиксированное $R$, можно еще считать, что $\max\{u, \bar{Q}(R)\} = 1$, $\min\{u, \bar{Q}(R)\} = -1$, $2 \cdot |\Gamma| \geqslant |Q(2R)|$ для $\Gamma = \{u \leqslant 0\} \cap \bar{Q}(2R)$.

Пусть $(t_0, x_0) \in \bar{Q}(R)$, $u(t_0, x_0) = 1$. Найдем на некотором вероятностном пространстве решение уравнения $dx_t = [2a(t, x_t)]^{1/2} dw_t$, $t \geqslant t_0$, выходящее из $x_0$ при $t = t_0$, и пусть $\tau(\gamma)$ – момент первого после $t_0$ достижения $\partial Q(2R)$ ($\Gamma$) процессом $(t, x_t)$. По формуле Ито $1 = u(t_0, x_0) = Mu(\tau\wedge\gamma, x_{\tau\wedge\gamma}) \leqslant P\{\tau < \gamma\} \cdot \max\{u, Q(2R)\}$, где $\tau\wedge\gamma = \min(\tau, \gamma)$. Поскольку $|x_0| \leqslant R$, $0 \leqslant t_0 \leqslant R^2$ и $4 \cdot |\Gamma \cap \{t \geqslant t_0\}| \geqslant |Q(2R) \cap \cap \{t \geqslant t_0\}|$, то по теореме 1 при $\theta = 3/4$, $\alpha = 1/2$, $\epsilon = 1/4$ имеем $P\{\gamma < \tau\} \geqslant \delta > 0$, где $\delta$ зависит лишь от $n$, $\nu$, $\mu$. Следовательно, $P\{\tau < \gamma\} \leqslant 1 - \delta$ и $1 \leqslant (1-\delta)\max\{u, Q(2R)\}$. Кроме того, из принципа максимума $\min\{u, Q(2R)\} \leqslant -1$. Отсюда $2 = = \operatorname{osc}\{u, Q(R)\} \leqslant (1 - \delta/2)\operatorname{osc}\{u, Q(2R)\}$, что и требовалось.

6. В доказательстве теоремы 1 используется следующая лемма из теории меры. Пусть $Q = Q(1,1)$, измеримое множество $\Gamma \subset Q$, числа $r, q \in (0, 1)$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ систему всех множеств $K$ вида $(t, x) + Q(1, R)$ таких, что $K \subset Q$, $|K \cap \Gamma| \geqslant q|K|$. Если $K \in \mathfrak{A}$ и $K = (t, x) + Q(1, R)$, то положим $K' = \{(t - 3R^2, x) + Q(7/9, 3R)\} \cap \cap Q$, $K'' = \{(s, y): 0 < r(t - s) < 4R^2, |x - y| < 3R, |y| < 1\}$. Наконец, пусть $D' = \cup K'$, $D'' = \cup K''$, где сумма берется по всем $K \in \mathfrak{A}$.

Л е м м а. *Множества $D'$, $D''$ открыты, и если $|\Gamma| \leqslant q|Q|$, то $|\Gamma| \leqslant q|D'| \leqslant \leqslant q(1 + r)|D''|$.*

7. Приведем кратко о с н о в н ы е м о м е н т ы д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы 1. Прежде всего заменой времени и координат мы добиваемся того, чтобы $\theta = R = 1$. При фиксированных $n$, $\mu$, $\nu$, $\alpha$ будем менять $\epsilon$ в пределах $[0,1)$. Понятно, что если на отрезке $[0, \tau(\partial Q)]$ процесс $(t, x_t)$ мало времени проводит в $Q \setminus \Gamma$, то он много времени проводит в $\Gamma$ и, значит, достигает $\Gamma$. Эти соображения вместе с теоремой II.2.4 из ([6]) показывают, что найдется $q \in (0,1)$ такое, что при $\epsilon \geqslant q^2$ искомая оценка имеет место с некоторым $\delta^1 > 0$.

Пусть $\epsilon'$ – верхняя грань тех $\epsilon$, при которых искомая оценка возможна только с $\delta = 0$. Заметим, что $\epsilon' \leqslant q$, а нам нужно доказать, что $\epsilon' = 0$. Допустим противное: $\epsilon' > 0$. Тогда найдутся $\epsilon'' < \epsilon'$, $r \in (0,1)$ такие, что $\epsilon' q(1 + r) < \epsilon''$. Определим $\epsilon^0$ из $\epsilon'' = (2\epsilon^0 - \epsilon')q(1 + r)$. Поскольку $\epsilon^0 > \epsilon'$, то при $|\Gamma| \geqslant \epsilon^0|Q|$ искомая оценка возможна с некоторым $\delta^0 > 0$. Возьмем теперь $\Gamma$ так, чтобы $|\Gamma| \geqslant \geqslant \epsilon''|Q|$. Построим по $\Gamma$, $q$ множество $D''$ из леммы и рассмотрим два случая: 1) $|D'' \setminus D| < 2^{-1}(\epsilon^0 - \epsilon')|Q|$, 2) $|D'' \setminus D| \geqslant 2^{-1}(\epsilon^0 - \epsilon')|Q|$.

В первом случае по лемме $|D'' \cap D| > [\epsilon^0 + 2^{-1}(\epsilon^0 - \epsilon')] \cdot |Q|$. Значит, внутри $D'' \cap Q$ можно найти замкнутое $\Gamma'$, отстоящее от множества $\{(t, x): |x| = 1\}$ не