менее, чем на $2^{-n-1}(\epsilon^0 - \epsilon')$, для которого $|\Gamma'| \geqslant \epsilon^0 |Q|$. Следовательно, с вероятностью не менее δ^0, процесс достигнет Γ' на $(0, \tau(\partial Q))$. Кроме того, легко оценить снизу вероятность прохождения внутри "длинного" множества типа K'', а с ней и вероятность достичь Γ из точек Γ' раньше, чем ∂Q. В оценку последней войдут только n, μ, ν, $\epsilon^0 - \epsilon'$, δ^1, r. Тем самым для $\epsilon = \epsilon''$ искомая оценка будет получена с $\delta > 0$ в противоречии с предположением. Во втором случае противоречие получается еще быстрее, так как найдется множество $K = (t, x) + Q(1, R)$ при $8R^2 \geqslant r(\epsilon^0 - \epsilon')$, для которого $|K \cap \Gamma| \geqslant q|K|$, $K \subset Q$.

8. Можно доказать, что при предположениях теоремы 1 верна аналогичная оценка снизу (правда, зависящая еще и от R) для математического ожидания времени, проведенного процессом (t, x_t) в множестве Γ до момента $\tau(Q(\beta, R))$. Наконец, $\delta \uparrow 1$ при $\epsilon \uparrow 1$ в теореме 1, и это позволяет доказать теоремы Харнака и Лиувилля для эллиптических и параболических уравнений, например, в форме, приведенной в ([4]) без предположения о малости разброса собственных чисел.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
28 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Е.Б. Дынкин*, Марковские процессы, М., Физматгиз, 1963. [2] *О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., Физматгиз, 1964. [3] *О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., "Наука", 1967. [4] *Е.М. Ландис*, Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов, М., "Наука", 1971. [5] *С.В. Анулова*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 42, № 4, 708 (1978). [6] *Н.В. Крылов*, Управляемые процессы диффузионного типа, М., "Наука", 1977.

УДК 519.2

Н.В. КРЫЛОВ, М.В. САФОНОВ

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ПОПАДАНИЯ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА В МНОЖЕСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 16 IX 1978)

1. Во многих вопросах теории случайных процессов важную роль играют оценки вероятности попадания процесса в те или иные множества. В настоящей статье для процессов диффузионного типа мы оценим снизу подобную вероятность через меру множества. С помощью этой оценки удается доказать, что диффузионные процессы, отвечающие параболическим операторам с измеримыми коэффициентами, обладают свойством стандартности (см. определение в [1]). Эта оценка также применяется при выводе для недивергентных уравнений известных, двадцатилетней давности результатов Де Джорджи и Нэша о непрерывности по Гельдеру решений эллиптических и параболических уравнений в дивергентной форме (см. [2,3]). Отметим, что для недивергентных эллиптических и параболических уравнений при некоторых ограничениях на разброс собственных чисел матрицы коэффициентов при старших производных теоремы Де Джорджи и Нэша доказаны в [4]. С помощью нашей оценки вероятности такие теоремы получаются без ограничений на величину разброса собственных чисел.

2. Пусть $E_n = \{x = (x^1, \dots, x^n)\}$ — n-мерное евклидово пространство, $n, \mu, \nu, \theta, \alpha, \epsilon$ — фиксированные числа, $\nu > \mu > 0$, $\theta \in (0, 1]$, $\alpha \in (0, 1)$, $\epsilon \in (0, 1)$. При $x \in E_n$, $R > 0$ положим $|x| = \max |x^i|$, $Q(\theta, R) = (0, \theta R^2) \times (|x| < R)$. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ — вероятностное пространство, на котором определен n_1-мерный винеровский процесс $(w_t, \mathscr{F}_t)$ для некоторого $n_1 \geqslant n$. Пусть при $t \geqslant 0, \omega \in \Omega$ определены: σ_t — матрица размера $n \times n_1$, $b_t \in E_n$. Предположим, что σ_t, b_t прогрессивно измеримы относительно потока σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t\}$ и существует число $R > 0$ такое, что $R|b_t| \leqslant \nu$, $\nu|\lambda| \geqslant |\sigma_t^* \lambda| \geqslant \mu|\lambda|$ при всех $\lambda \in E_n$, t, ω. Фиксируем подходящее R. Наконец, пусть $\beta \in [\theta, 1]$ и замкнутое множество $\Gamma \subset Q(\beta, R)$, $|\Gamma| \geqslant \epsilon |Q(\beta, R)|$, где $|D|$ для $D \subset E_{n+1} = \{(t, x) : t \in E_1, x \in E_n\}$ обозначает меру Лебега D. Возьмем некоторую $\mathscr{F}_0$-измеримую величину $\xi \in E_n$ такую, что $P\{|\xi| < \alpha R\} = 1$, и определим процесс x_t условиями $x_0 = \xi$, $dx_t = \sigma_t dw_t + b_t dt$. Для $D \subset E_{n+1}$ положим $\tau(D) = \inf\{t > 0 : (t, x_t) \in \partial D\}$ $(\inf \phi = \infty)$. Следующая теорема является основной в работе.

Т е о р е м а 1. *Существует постоянная $\delta > 0$, зависящая только от $n, \mu, \nu, \theta, \alpha, \epsilon$ (но не от Γ, R, $\beta, \dots$), такая, что $P\{\tau(\Gamma) < \tau(Q(\beta, R))\} \geqslant \delta$.*

3. Пусть $Lu = u_t + a^{ij} u_{x^i x^j} + b^i u_{x^i} - cu$, где $a = (a^{ij})$, $b = (b^i)$, c — борелевские функции от (t, x) на E_{n+1}, a — симметричная матрица размера $n \times n$, $b \in E_n$, $c \geqslant \mu$. Пусть $\nu|\lambda|^2 \geqslant (a\lambda, \lambda) \geqslant \mu|\lambda|^2$, $|b| \leqslant \nu$, $|c| \leqslant \nu$ при всех $\lambda \in E_n$, t, x. Пусть $Y = (y_t, \zeta, N_t, P_y)$ — непрерывный однородный марковский процесс в E_{n+1}, отвечающий L в том смысле, что для любой $u \in C_0^\infty(E_{n+1})$ при всех $t > s$, $x \in E_n$

$$u(s, x) = M_{(s,\ x)} \left[\int_0^{t-s} Lu(y_r)\, dr + u(y_{t-s}) \right].$$

Пусть, кроме того, N_t есть пополнение $\sigma(y_s, s \leqslant t)$ по всем P_y. Существование таких процессов вытекает, например, из [5]. Если область $D \subset E_{n+1}$, f — борелевская функция, то пусть τ — момент первого выхода y_t из D,

$$R(D) f(y) = M_y \int_0^\tau f(y_t)\, dt, \quad \pi(D) f(y) = M_y f(y_\tau).$$

Т е о р е м а 2. а) *Y — строго марковский процесс и $N_t = N_{t+}$.*

б) *Если $f \in \mathscr{L}_{n+1}(D)$, $\varphi \in B(\partial D)$, то $R(D)f$, $\pi(D)f$ непрерывны по Гёльдеру на любом компакте $K \subset D$, причем показатель Гёльдера зависит только от n*

ν, μ, а постоянная – только от n, ν, μ, расстояния K до ∂D и от норм f в $\mathscr{L}_{n+1}(D)$, φ в $B(\partial D)$.

4. Т е о р е м а 3. *Пусть область $D \subset E_{n+1}$, L – оператор из п. 3.*

Тогда существуют ограниченные операторы $R : \mathscr{L}_{n+1}(D) \to B(D)$, $\pi : B(\partial D) \to \to B(D)$, переводящие неотрицательные функции в неотрицательные и такие, что : а) *для любой $u \in W^{1,2}_{n+1}(D) \cap C(\bar{D})$ в D справедливо представление $u = Rf + \pi\varphi$, где $f = -Lu$, φ – значение u на ∂D,* б) *если $f_1, f_2 \in \mathscr{L}_{n+1}(D)$, $Rf_1 = Rf_2$ (п. в.), то $f_1 = f_2$ (п. в.),* в) *для R, π справедливо утверждение* б) *теоремы* 2.

Аналогичная теорема справедлива в том случае, когда L – эллиптический оператор (в записи L из п. 3 отсутствует u_t и a, b, c не зависят от t). Для того чтобы ее сформулировать, достаточно в теореме 3 заменить $n + 1$ на n, $W^{1,2}$ – на W^2.

5. В доказательстве теорем 2, 3 важную роль играет теорема 1. Для пояснения этого наметим доказательство оценки показателя и постоянной Гёльдера решения из $W^{1,2}_{n+1}(D)$ уравнения $u_t + a^{ij}u_{x^ix^j} = 0$ (п.в. D), где a удовлетворяет условиям п. 3. Положим $Q(R) = Q(1, R)$. Как хорошо известно из теории дифференциальных уравнений (см. ([3]), гл. V, § 10, ([4]), гл. III, § 8), для получения нужной оценки достаточно показать, что $\operatorname{osc}\{u, Q(R)\} \leqslant \rho \cdot \operatorname{osc}\{u, Q(2R)\}$ (при $Q(2R) \subset D$) с постоянной $\rho < 1$, зависящей лишь от n, ν, μ, причем, рассматривая фиксированное R, можно еще считать, что $\max\{u, \bar{Q}(R)\} = 1$, $\min\{u, \bar{Q}(R)\} = -1$, $2 \cdot |\Gamma| \geqslant |Q(2R)|$ для $\Gamma = \{u \leqslant 0\} \cap \bar{Q}(2R)$.

Пусть $(t_0, x_0) \in \bar{Q}(R)$, $u(t_0, x_0) = 1$. Найдем на некотором вероятностном пространстве решение уравнения $dx_t = [2a(t, x_t)]^{1/2} dw_t$, $t \geqslant t_0$, выходящее из x_0 при $t = t_0$, и пусть $\tau(\gamma)$ – момент первого после t_0 достижения $\partial Q(2R)$ (Γ) процессом (t, x_t). По формуле Ито $1 = u(t_0, x_0) = Mu(\tau\wedge\gamma, x_{\tau\wedge\gamma}) \leqslant P\{\tau < \gamma\} \cdot \max\{u, Q(2R)\}$, где $\tau\wedge\gamma = \min(\tau, \gamma)$. Поскольку $|x_0| \leqslant R$, $0 \leqslant t_0 \leqslant R^2$ и $4 \cdot |\Gamma \cap \{t \geqslant t_0\}| \geqslant |Q(2R) \cap \cap \{t \geqslant t_0\}|$, то по теореме 1 при $\theta = 3/4$, $\alpha = 1/2$, $\epsilon = 1/4$ имеем $P\{\gamma < \tau\} \geqslant \delta > 0$, где δ зависит лишь от n, ν, μ. Следовательно, $P\{\tau < \gamma\} \leqslant 1 - \delta$ и $1 \leqslant (1 - \delta) \max\{u, Q(2R)\}$. Кроме того, из принципа максимума $\min\{u, Q(2R)\} \leqslant -1$. Отсюда $2 = = \operatorname{osc}\{u, Q(R)\} \leqslant (1 - \delta/2) \operatorname{osc}\{u, Q(2R)\}$, что и требовалось.

6. В доказательстве теоремы 1 используется следующая лемма из теории меры. Пусть $Q = Q(1,1)$, измеримое множество $\Gamma \subset Q$, числа $r, q \in (0, 1)$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ систему всех множеств K вида $(t, x) + Q(1, R)$ таких, что $K \subset Q$, $|K \cap \Gamma| \geqslant q|K|$. Если $K \in \mathfrak{A}$ и $K = (t, x) + Q(1, R)$, то положим $K' = \{(t - 3R^2, x) + Q(7/9, 3R)\} \cap \cap Q$, $K'' = \{(s, y) : 0 < r(t - s) < 4R^2, |x - y| < 3R, |y| < 1\}$. Наконец, пусть $D' = \cup K'$, $D'' = \cup K''$, где сумма берется по всем $K \in \mathfrak{A}$.

Л е м м а. *Множества D', D'' открыты, и если $|\Gamma| \leqslant q|Q|$, то $|\Gamma| \leqslant q|D'| \leqslant \leqslant q(1 + r)|D''|$.*

7. Приведем кратко о с н о в н ы е м о м е н т ы д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы 1. Прежде всего заменой времени и координат мы добиваемся того, чтобы $\theta = R = 1$. При фиксированных n, μ, ν, α будем менять ϵ в пределах $[0,1)$. Понятно, что если на отрезке $[0, \tau(\partial Q)]$ процесс (t, x_t) мало времени проводит в $Q \setminus \Gamma$, то он много времени проводит в Γ и, значит, достигает Γ. Эти соображения вместе с теоремой II.2.4 из ([6]) показывают, что найдется $q \in (0,1)$ такое, что при $\epsilon \geqslant q^2$ искомая оценка имеет место с некоторым $\delta^1 > 0$.

Пусть ϵ' – верхняя грань тех ϵ, при которых искомая оценка возможна только с $\delta = 0$. Заметим, что $\epsilon' \leqslant q$, а нам нужно доказать, что $\epsilon' = 0$. Допустим противное: $\epsilon' > 0$. Тогда найдутся $\epsilon'' < \epsilon'$, $r \in (0,1)$ такие, что $\epsilon' q(1 + r) < \epsilon''$. Определим ϵ^0 из $\epsilon'' = (2\epsilon^0 - \epsilon') q(1 + r)$. Поскольку $\epsilon^0 > \epsilon'$, то при $|\Gamma| \geqslant \epsilon^0 |Q|$ искомая оценка возможна с некоторым $\delta^0 > 0$. Возьмем теперь Γ так, чтобы $|\Gamma| \geqslant \geqslant \epsilon''|Q|$. Построим по Γ, q множество D'' из леммы и рассмотрим два случая: 1) $|D'' \setminus D| < 2^{-1}(\epsilon^0 - \epsilon')|Q|$, 2) $|D'' \setminus D| \geqslant 2^{-1}(\epsilon^0 - \epsilon')|Q|$.

В первом случае по лемме $|D'' \cap D| > [\epsilon^0 + 2^{-1}(\epsilon^0 - \epsilon')] \cdot |Q|$. Значит, внутри $D'' \cap Q$ можно найти замкнутое Γ', отстоящее от множества $\{(t, x) : |x| = 1\}$ не