lect1_wp.tex

1: Винеровский процесс, свойства

4 октября 2009 г.

1 с-к: ВП

1.1 ВП – существование

Вытекает из теоремы Колмогорова о согласованных семействах конечномерных распределений. См. учебники. Далее мы займемся вопросом о слабой сходимости мер, порожденных случайными блужданиями (СБ), в мере ВП. При этом удобно (хотя и *не* совершенно обязательно) траекторию СБ считать непрерывной.

1.2 Предварительные леммы и теоремы

Лемма 1 (Бореля – Кантелли)

$$\sum P(A_n < \infty) \quad \Longrightarrow \quad P(\cup_{k\geq 1} \cap_{n\geq k} \bar{A}_n) = 1.$$

См. учебники.

Лемма 2 *Две меры на польском пространстве (если угодно, R^d), совпадающие на всех замкнутых множествах, совпадают и на всех множествах.*

Это потому, что на польском пространстве любая мера регулярна, то есть $\forall A \in \mathcal{B}(X)$, $\forall \epsilon > 0$,

$$\exists \, \mathrm{O} \supset A \supset \exists \, \mathrm{C} : \qquad P(O \setminus C) < \epsilon.$$

(O – открытое, C – замкнутое.)

Теорема 1 *Две меры на польском пространстве с совпадающими интегралами от всех ограниченных непрерывных функций, совпадают на всех множествах.*

Это потому, что две такие меры совпадут на всех замкнутых множествах. В самом деле, для любого замкнутого C положим

$$f_n(x) := \frac{1}{1 + n\,\rho(x, C)} \quad (\leq 1; \quad \in C_b; \quad \searrow 1(C).)$$

Теорема 2 (Улам) *Для любой меры на польском пространстве и для любого $\epsilon > 0$ найдется компакт C, такой, что*[1]

$$\mu(C) \geq 1 - \epsilon.$$

Взять счетное всюду плотное множество, окружить шарами малых радиусов, стремящихся к нулю, выбрать (конечное) объединение этих шаров, покрывающее все X с точностью до $\epsilon/2^n$, и, наконец, взять их пересечение. Это компакт (замкнутое множество, обладающее $1/n$-сетью $\forall n$), и $\mu(C) \geq 1 - \epsilon$.

1.3 Слабая сходимость мер

Определение 1 *Последовательность мер (μ_n) на польском пространстве слабо сходится к мере μ, если сходятся интегралы от любой непрерывной ограниченной функции,*

$$\int f\,d\mu_n \to \int f\,d\mu.$$

Теорема 3 (Критерий) *Последовательность мер (μ_n) на R^d польском пространстве слабо сходится к мере μ тогда и только тогда, когда*

$$\int \exp(i\,\lambda\,x)\,\mu_n(dx) \to \int \exp(i\,\lambda\,x)\,\mu(dx) \qquad \forall \lambda \in R^d.$$

Теорема 4 (Прохоров) *Семейство мер на польском пространстве слабо компактно тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ найдется компакт C, такой, что*

$$\inf_n \mu_n(C) \geq 1 - \epsilon.$$

Далее нам надо будет работать в $C[0, T]$. Поэтому напомним критерий компактности в этом пространстве.

Теорема 5 (Арцела) *Множество A в $C[0, T]$ предкомпактно (компактно, если само замкнуто), если и только если оно состоит из функций равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных.*

[1] Улам – ученик Банаха

1.4 Теоремы Колмогорова о непрерывной модификации

Лемма 3 *Пусть X_t –действительнозначная (неслучайная) функция на $[0,1]$, т. что при некоторых $a > 0$ и $n \geq 0$, $\forall m \geq n$*

$$|X_{(i+1)/2^m} - X_{i/2^m}| \leq 2^{-ma}.$$

Тогда для всех двоично-рациональных $t, s \in [0,1]$, $|t-s| \leq 2^{-n}$, имеет место неравенство

$$|X_t - X_s| \leq N(a)\,|t-s|^a, \qquad N(a) = 2^{2a+1}(2^a-1)^{-1}.$$

Положим

$$K_n(a) := \{x \in C[0,1] : \ |x_0| \leq 2^n, \ |x_t - x_s| \leq N(a)\,|t-s|^a, \forall |t-s| \leq 2^{-n}\}.$$

В силу теоремы Арцела это компакт в $C[0,1]$.

Теорема 6 *Пусть процесс X_t непрерывен на $[0,1]$, и $\exists N, \alpha, \beta > 0$:*

$$E|X_t - X_s|^\alpha \leq N\,|t-s|^{1+\beta}, \qquad \forall \ t, s. \tag{1}$$

Тогда $\forall 0 < a < \beta/\alpha$, $\forall \epsilon > 0$ $\exists n$:

$$P(X \in K_n(a)) \geq 1 - \epsilon.$$

Отсюда и из теоремы Прохорова вытекает, что семейство распределений непрерывных процессов, удовлетворяющих (2) и условию $P(|X_0^k| > c) \to 0, \ \ c \to \infty$, слабо компактно.

Определение 2 *Процесс X_t есть модификация процесса Y_t, если $\forall t$,*

$$P(X_t = Y_t) = 1.$$

Теорема 7 (Колмогоров о непрерывой модификации) *Пусть процесс X_t непрерывен на $[0,1]$, и $\exists N, \alpha, \beta > 0$:*

$$E|X_t - X_s|^\alpha \leq N\,|t-s|^{1+\beta}, \qquad \forall \ t, s. \tag{2}$$

Тогда $\forall 0 < a < \beta/\alpha$, $\forall \epsilon > 0$ $\exists n$:

$$P(X \in K_n(a)) \geq 1 - \epsilon.$$

1.5 ВП как слабый предел СБ

Рассмотрим СБ ($E\eta = 0$, $E\eta^4 < \infty$)

$$X_t^n := \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} + (nt - [nt])\frac{\eta_{[nt+1]}}{\sqrt{n}}.$$

Лемма 4 *Последовательность X_t^n слабо компактна.*

Это в силу

$$E|X_t^n - X_s^n|^4 \leq C|t-s|^2.$$

Теорема 8 (Донскер) *Предельная мера (наз. винеровской) единственна и гауссова с коварацией $t \wedge s$.*

Теорема 9 (Марковское свойство) *ВП марковский.*

Теорема 10 (О квадратичной вариации)

$$\sum_{s \leq t_i^n \leq t} (W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2 \to t - s.$$