lect56_sol_sde.tex

5-6: СДУ

9 ноября 2009 г.

1 с-к: сильные и слабые решения

1.1 Сильные решения: преобразование фазового пространства

Рассматривается одномерное СДУ с ограниченным непрерывным сносом:

$$dX_t = b(X_t)\,dt + dW_t, \quad X_0 = x.$$

Теорема 1 *Данное СДУ имеет потраекторно единственное решение, и это решение сильное.*

Идея: решить дифференциальное уравнение $Lu = 0$ (на всей прямой!) и с его помощью заменить координаты. Уравнение решается явно, решение из C_b^2. В новых координатах $y = u(x)$ СДУ удовлетворяет условиям теоремы Ито. (Предполагается, что будет более подробная запись.) Это простейший случай применимости важного метода – преобразования фазового пространства, основанного на решении некоторого дифференциального уравнения, в общем случае в частных производных, эллиптического или параболического. Метод был известен еще в 60е годы Гихману и Скороходу и другим, и с максимальной пользой использован Звонкиным (1974), вашим лектором (1979), и недавно Крыловым и Рёкнером (2005).

Вскоре вы увидите, что условие непрерывности можно легко снять, если использовать оценку Крылова и основанную на ней версию формулы Ито.

1.2 Теорема Гирсанова и слабые решения

Теорема 2 *Пусть α – согласованный ограниченный (векторный) d-мерный процесс, а W – также d-мерный винеровский процесс. Тогда стохастическая экспонента*

$$\rho_t := \exp\Big(\int_0^t \alpha_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2\, ds\Big)$$

является мартингалом и (стало быть) плотностью вероятностной меры, обозначим ее при $t = 1$ через P^ρ. Относительно этой новой меры, процесс

$$\tilde{W}_t := W_t - \int_0^t \alpha_s \, dW_s, \quad 0 \le t \le 1,$$

является винеровским.

Доказательство первого утверждения использует стохастический дифференциал процесса ρ_t, то, что это локальный мартингал (и также супермартингал, откуда всегда $E\rho_t \le 1$) и доказываемое с помощью Коши–Буняковского свойство $E\rho_1^2 < \infty$.

Далее, для того, чтобы теперь проверить, что процесс $\tilde{W}_t$ – винеровский относительно новой меры, рассмотрим (по "старой мере") стохастический дифференциал процесса $\rho_t \exp(i\lambda \tilde{W}_t)$ с целью установить равенство

$$E\rho_t \exp(i\lambda \tilde{W}_t) = \exp(-\lambda^2 t/2).$$

Это делается совершенно аналогично доказательству первого утверждения теоремы. Затем, наконец, заметим, что процесс $\tilde{W}$ – непрерывный, выходит из нуля, и что аналогично вышесказанному также легко получить

$$E\left(\rho_t \exp(i\lambda(\tilde{W}_t - \tilde{W}_s)) \mid \mathcal{F}_s\right) = \exp(-\lambda^2 (t-s)/2) \quad (t > s).$$

Это доказывает второе утверждение теоремы.

Теорема 3 *Если $b(\cdot)$ – ограниченная d-мерная (борелевская) вектор-функция, то СДУ в R^d*

$$dX_t = dW_t + b(t, X_t)dt, \quad X_0 = x,$$

имеет решение на некотором вероятностном пространстве с винеровским процессом.

Мы знаем, что на самом деле существует сильное решение, любое решение является сильным, и оно также единственно по траекториям и по распределению. Однако, все, что касается сильного решения и потраекторной единственности, следует из совершенно других соображений. Доказательство теоремы 3 состоит в *обозначении*

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t b(s, W_s) \, ds,$$

и применении предыдущей теоремы.

Заметим еще, что на самом деле теорема Гирсанова позволяет установить существование (слабого) решения и намного более общего “немарковского” СДУ со сносом, зависящим от всего прошлого процесса. Здесь уже сильные решения не работают; более того, имеется знаменитый контрпример Цирельсона, показывающий, что в такой постановке сильного решения, вообще говоря, нет.

1.3 Лемма Скорохода

Кроме первоисточника (Скороход, 1961), лемма имеется в учебнике Булинского и Ширяева в главе про слабую сходимость. Доказательство две страницы. Предлагается его найти и прочесть (в моей версии это теорема Д6.24); будет доложено на семинарепримерно через два понедельника. Пользоваться мы все-таки будем вариантом из книги Крылова, который и приводится ниже.

Теорема 4 (Skorokhod-1961, гл. 1, §6 и гл. 2, §3) *Пусть на некотором вероятностном пространстве определены d_1-мерные случайные процессы ξ_t^n $(t \ge 0, n \ge 0)$. Предположим, что для всяких $T \ge 0$, $\epsilon > 0$,*

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n \sup_{t\le T} P(|\xi_t^n| > c|) = 0,$$

$$\lim_{h\to 0} \sup_n \sup_{t_1,t_2\le T,\, |t_1-t_2|\le h} P(|\xi_{t_1}^n - \xi_{t_2}^n| > \epsilon|) = 0.$$

Тогда можно подобрать последовательность номеров $n' \to \infty$, вероятностное пространство и случайные процессы $\tilde\xi_t$, $\tilde\xi_t^{n'}$, определенные на этом пространстве, так, чтобы все конечномерные распределения $\tilde\xi^{n'}$ совпадали с соответствующими распределениями $\xi^{n'}$ и $P(|\tilde\xi_t^{n'} - \tilde\xi_t| > \epsilon) \to 0$ при $n' \to \infty$ для всех $\epsilon > 0$, $t \ge 0$.

Более того, пусть на том же вероятностном пространстве определены еще d_1-мерные винеровские процессы $(W_t^n, \mathcal{F}_t^n)$. Предположим, что функции $\xi_t^n(\omega)$ ограничены на $[0,\infty)\times\Omega$ равномерно по n и стохастические интегралы $I_t^n = \int_0^t \xi_s^n\, dW_s^n$ определены. Пусть, наконец, $\xi_s^n \to \xi_s^0$, $W_s^n \to W_s^0$ по вероятности при $n \to \infty$ для всякого[1] $s \ge 0$. Тогда при $I_t^n \to I_t^0$ по вероятности для всякого $t \ge 0$.

Формулирвка взята из лемм 2.6.2 и 2.6.3 книги Крылова (Управляемые процессы диффузионного типа). С помощью этого результата доказывается следующая теорема Скорохода о слабых решениях (а затем и теорема Крылова о них же, но для последней надо еще сформулировать "Оценку Крылова", см. ниже).

Теорема 5 (Skorokhod-1961) *Пусть коэффициенты СДУ в R^d*

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t, \quad X_0 = x, \tag{1}$$

непрерывны и ограничены. Тогда такое СДУ имеет (слабое) решение на некотором вероятностном пространстве с (некоторым) винеровским процессом.

Вероятно, достаточно непрерывности лишь по x.

[1]Понятно, что если достаточо такого условия для всякого $s \ge 0$, то достаточно и для почти всякого.

Теорема 6 (Krylov-1969,1974) *Пусть* $(\xi_t,\, t \ge 0)$ *– d-мерный процесс со стозастическим дифференциалом*

$$d\xi_t = b_t dt + \sigma_t dW_t,$$

где согласованные процессы b, σ ограничены, $|b| + \|\sigma\| \le C$, и

$$\inf_\omega \inf_{t,x} \inf_{|\lambda|=1} \lambda^* \sigma_t \lambda =: \nu > 0.$$

Тогда найдется такое N зависящее только от C, ν, d, T, что

$$E\int_0^T |f(t,\xi_t)\, dt \le N\|f\|_{L_{d+1}}.$$

Теорема 7 (Krylov-1969,1974) *Пусть коэффициенты уравнения (1) ограничены и диффузия равномерно невырождена:*

$$\inf_{t,x} \inf_{|\lambda|=1} \lambda^* \sigma(t,x) \lambda > 0.$$

Тогда уравнение имеет (слабое) решение на некотором вероятностном пространстве с (некоторым) винеровским процессом.

Это не самая общая форма результаты, однако, именно в таком виде он доказан в уже упомянутой книге Крылова.

Имеется результат при условии типа "смеси" условий Скорохода и Крылова, когда по части переменных есть невырожденность, а по остальным переменным – непрерывность. M.Nisio ($\sim$ 1980?).

Доказательство основано на следующей выкладке, к которой надо будет еще применить лемму Скорохода. Приблизим все коэффициенты гладкими b_n, σ_n (в теореме Крылова диффузия равномерно невырождена, в теореме Скорохода это неважно). Выберем большое n_0. Имеем,

$$\begin{aligned}
&\limsup_n P(|\int_0^t \sigma_n(s,\tilde X^n_s)\, d\tilde W^n_s - \int_0^t \sigma_0(s,\tilde X^0_s)\, d\tilde W^0_s| > \epsilon) \\
&\le \limsup_n P(|\int_0^t \sigma_{n_0}(s,\tilde X^n_s)\, d\tilde W^n_s - \int_0^t \sigma_{n_0}(s,\tilde X^0_s)\, d\tilde W^0_s| > \epsilon) \\
&+ \limsup_n P(|\int_0^t \sigma_n(s,\tilde X^n_s)\, d\tilde W^n_s - \int_0^t \sigma_{n_0}(s,\tilde X^n_s)\, d\tilde W^n_s| > \epsilon) \\
&+ P(|\int_0^t \sigma_{n_0}(s,\tilde X^0_s)\, d\tilde W^0_s - \int_0^t \sigma_0(s,\tilde X^0_s)\, d\tilde W^0_s| > \epsilon).
\end{aligned} \tag{2}$$

Затем устремим $n_0 \to \infty$. Интеграл со сносом исследуется аналогично. Для теоремы Скорохода достаточно сразу взять $n_0 = 0$ (то есть предельную или, что то же самое, исходную функцию); третье слагаемое при этом исчезнет. В теореме Крылова важен шаг с выбором большого n_0. Первый член равен нулю в силу второго утверждения леммы Скорохода (о сходимости стохастических интегралов). Отметьте, что в силу первой части леммы, мы знаем про сходимость $\tilde{X}^n \xrightarrow{P} \tilde{X}^0$. Однако, функция σ_{n_0} как минимум непрерывна, поэтому и $\sigma_{n_0}(t, \tilde{X}^n_t) \xrightarrow{P} \sigma_{n_0}(t, \tilde{X}^0_t)$. Стало быть, в самом деле, применима вторая часть леммы Скорохода.

1.4 О слабой единственности

Из слабой единственности вытекает *строгая марковость*, из-за чего это свойство и является столь важным.

1.5 Оценки моментов

В частности, $\forall\, q \geq 1$

$$E|\int_0^t \sigma_s\, dW_s|^{2q} \leq C_{q,t} E \int_0^t \|\sigma_s\|^{2q}\, ds. \tag{3}$$

Применить формулу Ито к $|X_t|^{2q}$, далее по индукции.

Где это используется: например, во второй части леммы Скорохода, см. выше доказательство теорем Скорохода и Крылова. В первом слагаемом мы перейдем от настоящих инегралов к интегральным суммам. Напомним, что σ_{n_0} непрерывна (по паре), пусть для простоты равномерно, и пусть тогда ρ – ее модуль непрерывности. Пусть есть разбиение и интегральная сумма $\sum \sigma_{n_0}(s_i, \tilde{X}^n_{s_i})\Delta \tilde{W}^n_{s_i}$. При фиксированных n_0 и n оцениваем разность (хотим оценку равномерную относительно n, однако)

$$\begin{aligned}
&E|\int_0^t \sigma_{n_0}(s, \tilde{X}^n_s)\, d\tilde{W}^n_s - \sum \sigma_{n_0}(s_i, \tilde{X}^n_{s_i})\Delta \tilde{W}^n_{s_i}|^2 \\
&= E|\sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} (\sigma_{n_0}(s, \tilde{X}^n_s) - \sigma_{n_0}(s_i, \tilde{X}^n_{s_i}))\, d\tilde{W}^n_s|^2 \\
&= E \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} |\sigma_{n_0}(s, \tilde{X}^n_s) - \sigma_{n_0}(s_i, \tilde{X}^n_{s_i})|^2\, ds \\
&\leq 2 \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} (E\rho^2(s - s_i) + E\rho^2(|\tilde{X}^n_s - \tilde{X}^n_{s_i}|)\, ds.
\end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое после интегрирования явно стремится к нулю при измельчении разбиения, остается обосновать то же самое для второго. Выберем малое $c > 0$. Имеем,

$$\sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} E\rho^2(|\tilde{X}^n_s - \tilde{X}^n_{s_i}|)\, ds$$

$$\equiv \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} E\rho^2(|\tilde X^n_s - \tilde X^n_{s_i}|)(1(|\tilde X^n_s - \tilde X^n_{s_i}| \le c) + 1(|\tilde X^n_s - \tilde X^n_{s_i}| > c))\, ds.$$

При достаточно малом c здесь первое слагаемое мало. Рассмотрим второе, применим неравенство Чебышева (пусть $\sup \rho \le C$):

$$\begin{aligned} &\sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} E\rho^2(|\tilde X^n_s - \tilde X^n_{s_i}|)1(|\tilde X^n_s - \tilde X^n_{s_i}| > c)\, ds \\ &\le \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} E\rho^2(|\tilde X^n_s - \tilde X^n_{s_i}|)1(|\tilde X^n_s - \tilde X^n_{s_i}| > c)\, ds \\ &\qquad \le C^2\, c^{-2} \sum_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} E|\tilde X^n_s - \tilde X^n_{s_i}|^2\, ds. \end{aligned} \tag{4}$$

В силу (3),

$$E|\tilde X^n_s - \tilde X^n_{s_i}|^2 \le 2\, E|\int_{s_i}^{s} \sigma(r, \tilde X^n_r)\, dW_r|^2 + 2\, E|\int_{s_i}^{s} b(r, \tilde X^n_r)\, dr|^2 \le C(s - s_i)^2.$$

Заметим, что в последней оценке правая часть не зависит от n. Отсюда видно, что выражение в (4) в самом деле стремится к нулю с измельчением разбиения, и что, стало быть, верхний предел в (2) равен нулю.

1.6 О зависимости решения от начальных условий и параметров

В частности, решение уравнения (1) можно дифференцировать по начальному условию, в предположении, конечно, что коэффициенты дифференцируемы. Однако, важно отметить, в каком смысле понимать получаемые производные: почти наверное или в "L_p". Сами производные удовлетворяют “очевидным” равенствам: при $Y_t := \partial X_t/\partial x$ (матрица), получаем линейное матричное СДУ

$$dY_t = \sigma_x(t, X_t)Y_t\, dW_t + b_x(t, X_t)Y_t\, dt, \quad Y_0 = I.$$

Понимать его можно, например, в следующем смысле:

$$dY^{ij}_t = \sigma^{i\ell}_{x^m}(t, X_t)Y^{mj}_t\, dW^\ell_t + b^i_{x^m}(t, X_t)Y^{mj}_t\, dt.$$

1.7 Марковское свойство

Важнейшее свойство таково: всегда, когда решение слабо единственно, оно задает марковский и строго марковский процесс (Крылов).

В курсе и в книге Крылова, однако, это свойство доказывается для сильных решений исходя из свойств непрерывности по начальным данным.

1.8 Формула Ито–Крылова

В частности, эта формула объясняет, почему в теореме 1 о сильном решении можно не требовать непрерывности сноса.